I. Rappels :

Soit f une fonction dont le domaine de définition est D

✓ On ne peut pas étudier la limite de f en x_0 que lorsque $x_0 \in D$ ou bien $x_0 \notin D$ mais x_0 est une borne de D

✓ Trouver la limite de f en x_0, c'est étudier le comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de x_0

$$on\ note\ \lim_{x\to x_0} f(x)\ ou\ \lim_{x_0} f$$

Théorèmes :

a) Si une fonction admet une limite alors cette limite est ....

b) Soit x_0 un réel ; $\lim_{x_0^+} f = \lim_{x_0^-} f = l \Leftrightarrow \lim_{x_0} f = ...$

* Applications : Activités 2 et 1 page 8

c) ***Opérations sur les limites :***

- **Tableau (T₁)** relatif à la limite d'une **somme** de deux fonctions f et g :

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $f+g$ a pour limite
l	l'	
l	$+\infty$	
l	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	

- **Tableau (T₂)** relatif à la limite du **produit** de deux fonctions f et g :

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $f \times g$ a pour limite
l	l'	
$l > 0$	$+\infty$	
$l > 0$	$-\infty$	
$l < 0$	$+\infty$	
$l < 0$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
0	$+\infty$ ou $-\infty$	

Remarque : ces résultats se généralisent à une somme finie ou à un produit fini de fonctions

- **Tableau (T_3)** relatif à la limite du **quotient** de deux fonctions f et g :

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $\frac{f}{g}$ a pour limite
l	$l' \neq 0$	
l	$+\infty$	
l	$-\infty$	
$+\infty$	$l' > 0$	
$+\infty$	$l' < 0$	
$-\infty$	$l' > 0$	
$-\infty$	$l' < 0$	
$l > 0$	0 (et $g(x) > 0$)	
$l > 0$	0 (et $g(x) < 0$)	
$l < 0$	0 (et $g(x) > 0$)	
$l < 0$	0 (et $g(x) < 0$)	
0	0	
$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	

- *Application :* Activité 3 page 9

d) Limite à l'infini d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle

1) La limite à l'infini d'une fonction polynôme est ……………………………………………………………………

………

2) La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est ……………………………………………………………………

………

- *Application :* Activité 5 page 9
- *A faire :* Exercice 4 page 28

e) Continuité en un point x_0 :

f *est continue en* x_0 *si et seulement si* $\lim\limits_{x_0} f = ……………$

- *Application :* Activité 2 page 15

f) Continuité à gauche - continuité à droite :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, x_0+h[$ $(h>0)$

f est continue à droite en x_0 si et seulement si ....

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0-h, x_0]$ $(h>0)$

f est continue à gauche en x_0 si et seulement si ....

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0

f est continue en x_0 si et seulement si ....

Exercice :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x\le 1 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2x} & si\ x>1 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
2) La fonction f est-elle continue en 1 ?

g) Continuité sur un intervalle :

a et b sont deux réels tels que $a<b$

- Une fonction f est continue sur $]a,b[$ si et seulement si

  ....

- f est continue sur $[a,b[$ si et seulement si

  ....

- f est continue sur $]a,b]$ si et seulement si

  ....

- f est continue sur $[a,b]$ si et seulement si

  ....

Retenons

1. Toute fonction polynôme est continue sur ....
2. Toute fonction rationnelle est continue sur ....
3. La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur ....

Retenons

Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 alors :

a) αf $(\alpha\in\mathbb{R})$; $|f|$; $f+g$; $f\times g$ et f^n $(n\in\mathbb{N}^*)$ sont ....

b) Si de plus g .... alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0

* Application : Activité 3 page 15

II. Limites et ordre :

Théorèmes :

- ✓ $si\ f(x) \leq g(x), \lim\limits_{x_0} f = l$ et $\lim\limits_{x_0} g = l'$ alors .... (x_0 fini ou infini)
- ✓ $si\ f(x) \geq 0\ et\ \lim\limits_{x_0} f = \ell$ alors ... ... (x_0 fini ou infini)
- ✓ Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x_0} g = \lim\limits_{x_0} h = l$ (l ***fini***) alors .... (x_0 fini ou infini)
- ✓ Si $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$ alors .... (x_0 fini ou infini)
- ✓ Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$ alors .... (x_0 fini ou infini)
- * Application : Activité 5 page 11

III. Limite d'une fonction composée :

a) Composée de deux fonctions :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les ensembles I et J tel que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$.

La fonction, notée $\boldsymbol{g \circ f}$, on lit « g **rond** f » définie sur I, par $\boldsymbol{g \circ f(x)} =$ ... ... s'appelle **fonction composée** de f par g.

Application : Soit $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1) Déterminer les domaines de définitions de : $f, g, g \circ f$ et $f \circ g$.
2) Expliciter $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$

b) Limite d'une fonction composée :

Soit f et g deux fonctions

$$\boxed{si\ \lim_{x\to a} f(x) = \boldsymbol{b}\ et\ \lim_{x\to b} g(x) = c\ alors\ \lim_{x\to a} g \circ f = \ \dots\dots (a, b\ et\ c\ finis\ ou\ infinis)}$$

* *Application :* Soit les fonctions $f : x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ et $g : x \longmapsto 3x + 3$

Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} g \circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f \circ g(x)$

Conséquence : $l \in \mathbb{R}$

✓ Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert D, sauf peut être en un réel a de D.

a) Si $\lim\limits_{a} f = l$ alors $\lim\limits_{a} \sqrt{f} =$ ......

b) Si $\lim\limits_{a} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{a} \sqrt{f} =$ ......

✓ Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle de la forme $]x_0, +\infty[$ ($x_0 \in \mathbb{R}$)

a) Si $\lim\limits_{+\infty} f = l$ alors $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{f} =$ ....

b) Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{f} =$ ....

✓ Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle de la forme $]-\infty, x_0[$ ($x_0 \in \mathbb{R}$)

a) Si $\lim\limits_{-\infty} f = l$ alors $\lim\limits_{-\infty} \sqrt{f} =$ ....

b) Si $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{-\infty} \sqrt{f} =$ ....

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-5x+1} - 3x$

* A faire : Exercice 5 page 28 et Exercice 9 page 29

IV. Continuité d'une fonction composée :

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles ouverts I et J contenant respectivement x_0 et $f(x_0)$

Si ………………………………… et ………………………………………… alors $g \circ f$ est continue en x_0

Corollaire 1

……………………………………………………

Si …………………………………………………… } *alors* $g \circ f$ *est continue sur* I

……………………………………………………

Corollaire 2

Si f est ……………………………………………………………… alors $\sqrt{f}$ est continue en x_0

Exemple : Etudier la continuité de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$ en $x_0 = \sqrt{5}$

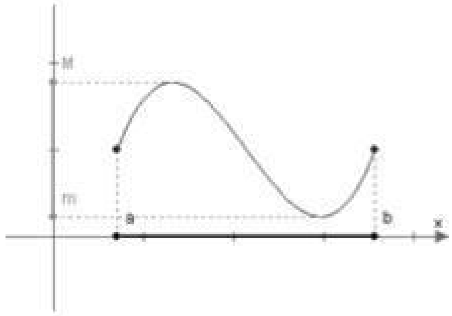
Corollaire 3

Soit f et g deux fonctions et a est un réel

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ et g est continue en a alors $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ldots\ldots$

V. Théorème des valeurs intermédiaires :

- *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un …………………………*
- L'image d'un intervalle fermé $[a, b]$ par une fonction continue est ……………………………



✓ ***Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone*** :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ; a *et* $b \in \mathbb{R}$ / $a < b$

I	*si* f *est* ***strictement croissante*** *alors* $f(I) =$	*si* f *est* ***strictement décroissante*** *alors* $f(I) =$
$[a, b]$		
$[a, b[$		
$]a, b]$		
$]a, b[$		

$[a,+\infty[$		
$]-\infty,b[$		
$\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$		

✓ ***Théorème des valeurs intermédiaires :***

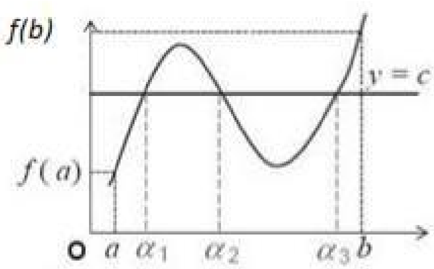
Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, alors pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins $\alpha \in [a,b]$ tel que ....

Autrement dit : l'équation $f(x) = c$ ....

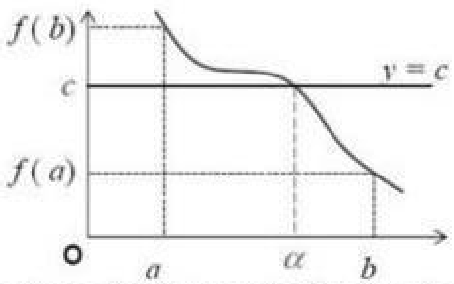
Cas particulier :

Si f est continue est <u>strictement monotone</u> sur $[a,b]$, alors pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe .... $\alpha \in [a,b]$ tel que ....

Autrement dit : l'équation $f(x) = c$ ....



f est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle [a ; b] .
L'équation f (x) = c peut avoir plusieurs solutions



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [a ; b] .
L'équation f (x) = c admet une solution unique .

Corollaire

Si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ alors ....

....

Autrement dit : l'équation $f(x) = 0$ ....

Si de plus f est strictement monotone sur $[a,b]$ alors α est ....

* <u>Application :</u> Activité 8 page 21
* <u>A faire :</u> Exercice 16 page 30

VI. Théorème de la bijection :

- Activité 1 page 22 :

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J.
On dit que ***f réalise une bijection de I sur J*** *(ou que* ***f est une bijection de I sur J****) si pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I*
autrement dit: si chaque élément de J ....

Définition 2

Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J
On appelle ***fonction réciproque de f*** *et on note $\boldsymbol{f^{-1}}$ la fonction définie sur J et à valeurs dans I telle que:*

$$(x \in I \text{ et } f(x) = y) \Leftrightarrow (y \in \ldots \text{et } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Remarques

1) $f^{-1}(y)$ *est l'antécédentde …… par ……*
2) *Pour tout x de I :* $f^{-1} \circ f(x) = \ldots\ldots$
3) *Pour tout y de J :* $f \circ f^{-1}(y) = \ldots\ldots$

Théorème

Si une fonction f est ……………………………………………. sur un intervalle I, alors :

(1) *f réalise une bijection de I sur $f(I)$*
(2) *si f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur ………*
(3) *f et f^{-1} ont même sens de variation*
(4) *dans un même repère orthonormé, la courbe de f et la courbe de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$*

- Application : Activité 3 page 23
- A faire : Exercice 17 page 30