Chapitre : # Limites - Continuité

I Rappel :

1 Continuité :

Théorème 1 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

f est **continue** en a **si et seulement si** $\lim\limits_{a} f = \ldots\ldots$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$ax^2+bx+c = a(x-x')(x-x'')$$
cas où $\Delta > 0$

Activité 1 (Cahier de cours)

1 Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-2x^2-x+1}{x+1} & si\ x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$

f est-elle continue en 1 ?

Théorème 2 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf peut-être en un réel a de I

Soit g une fonction **continue** en a et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$

$$\Longrightarrow \quad \lim\limits_{a} f = \ldots\ldots$$

2 *a-* Vérifier que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, $\dfrac{1-\cos x}{x} = x \times \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\cos x}$

b- On admet que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

Déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

c- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)-1}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{x^2-x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

3 Soit f la fonction définie par $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x+\tan(2x)}{\sin(3x)} & si\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ g(0)=1 \end{cases}$

g est-elle continue en 0 ?

Théorème 3 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a\in I$

f est **continue** en a **si et seulement si** $\lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f = \ldots\ldots\ldots$

Activité 2 (Cahier de cours)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-4(x^2+x-2)}{3\sqrt{1-x}} & \text{si } x<1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si } x>1 \\ f(1)=0 \end{cases}$

1 f est-elle continue en 1 ? justifier.

2 Compléter le Théorème 4 puis étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4 Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I

- f et g sont **continues** sur I $\Longrightarrow$

$\lvert f\rvert$
$\alpha f \quad (\alpha\in IR)$
$f^n \quad (n\in IN^*)$
$f+g$
$f\times g$

sont ....

- $\begin{cases} f \quad et \quad g \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ et \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{f}{g}$ et $\dfrac{f}{g^n}$ sont **continues** sur I

- $\begin{cases} f \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ et \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\sqrt{f}$ est **continue** sur I .

IV Limites et ordre

1 Théorèmes de comparaisons

f, g et h des fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel a de I

l et l' deux réels

T1 Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x)=l \quad et \quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=l' \\ et \\ \forall x\neq a, \quad f(x)\leq g(x) \end{cases}$ alors ....

T2 Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l \\ et \\ h(x)\leq f(x)\leq g(x), \quad \forall x\neq a \end{cases}$ alors ....

T3 Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} g(x)=0 \\ et \\ |f(x)-l|\leq g(x), \quad \forall x\neq a \end{cases}$ alors ....

T4 Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty \\ et \\ f(x)....g(x), \quad \forall x\neq a \end{cases}$ alors ....

T5 Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty \\ et \\ f(x)....g(x), \quad \forall x\neq a \end{cases}$ alors ....

Ces résultats restent aussi valables lorsqu'on remplace a par $+\infty$ ou $-\infty$ ou a^+ ou a^-

Activité 13 (Cahier de cours)

I – 1 Si pour tout $x>-1$, $\dfrac{6x-7}{3x+3}\leq f(x)\leq \dfrac{2x+5}{x+1}$. Que vaut alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

2 Si pour tout x de IR, $x-2\leq g(x)\leq x+2$. Que vaut alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$?

3 Si pour tout x de IR, $h(x)\leq -x^2+2$, Que vaut alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$?

4 Si pour tout x non nul, $|k(x)+2|\leq \dfrac{3}{x^2}$, Que vaut alors $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$?

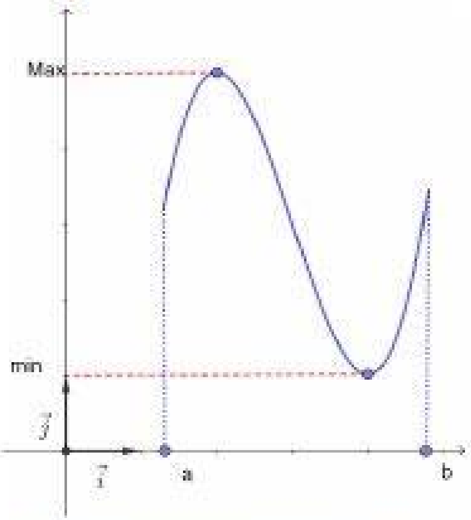
II – 1 Pour tout $x>0$, comparer $\sqrt{4x^2+1}$ et $2x$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-x\right)$

2 Soit la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{2x\times \operatorname{Sin} x}{x^2+1}$.

Montrer que pour tout $x<0$, $\dfrac{2x}{x^2+1}\le h(x)\le\dfrac{-2x}{x^2+1}$. Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$

IV Image d'un intervalle par une fonction continue

Image d'un intervalle par une fonction continue



f est continue sur $[a,b]$

$f([a,b])=[\ldots\ldots,\ldots\ldots]$

f est continue et st ↗	f est continue et st ↘
$f([a,b])=[\ldots\ldots,\ldots\ldots]$	$f([a,b])=[\ldots\ldots,\ldots\ldots]$
$f(]a,b])=]\ldots\ldots,\ldots\ldots]$	$f(]a,b])=[\ldots\ldots,\ldots\ldots[$
$f([a,+\infty[)=[\ldots\ldots,\ldots\ldots[$	$f([a,+\infty[)=]\ldots\ldots,\ldots\ldots]$
$f(]-\infty,b])=]\ldots\ldots,\ldots\ldots]$	$f(]-\infty,b])=[\ldots\ldots,\ldots\ldots[$

Activité 14 (Cahier de cours)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$.

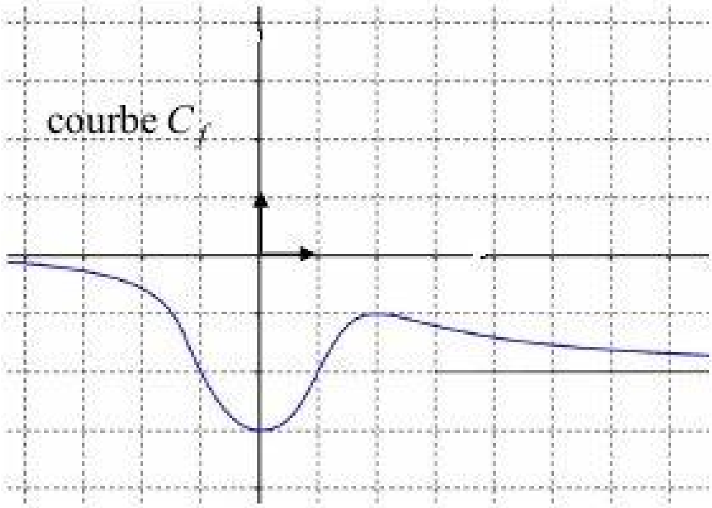
1 Dresser le tableau de variation de f.

2 Déterminer $f([1,4])$ et $f([-10,-1])$

Théorème 7

L'**image** d'un intervalle par une fonction **continue** est ....

Activité 15



Déterminer :

- $f(]-1,0]) =$ ....
- $f([-1,4]) =$ ....
- $f([0,+\infty[) =$ ....
- $f(IR) =$ ....

Activité 16

On considère une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

x	$-\infty$		-5		2		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	7

Déterminer : $f(]-\infty,-5]) =$ .... ; $f(]-\infty,2]) =$ ....

$f([-5,3[) =$ .... ; $f(]3,+\infty[) =$ .... ; $f(]-\infty,3[) =$ ....

Théorème 8

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini)

✓ Si la fonction f est <u>croissante</u> et <u>majorée</u> alors f possède une limite ------------------ en b.

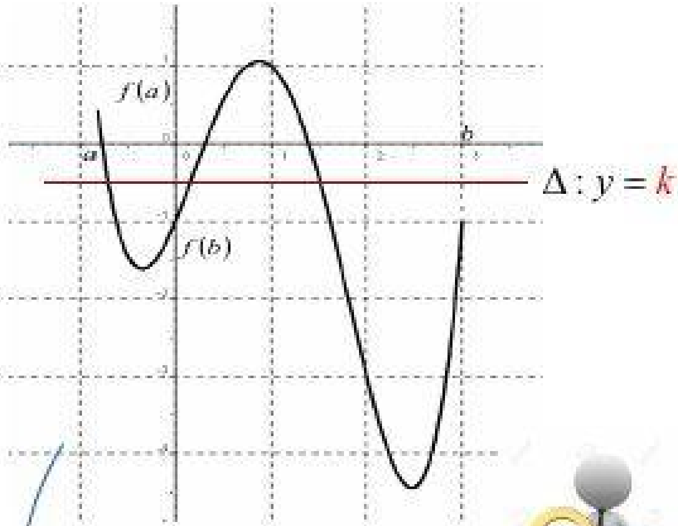
✓ Si la fonction f est <u>croissante</u> et <u>non majorée</u> alors f tend --------------------------------- en b.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a,b]$ (a fini ou infini)

✓ Si la fonction f est <u>décroissante</u> et <u>minorée</u> alors f possède une limite ------------------ en a.

✓ Si la fonction f est <u>décroissante</u> et <u>non minorée</u> alors f tend ------------------------------

IV Théorème des valeurs intermédiaire



C_f est la courbe représentative d'une fonction f continue sur I

Quel est le nombre de solution de l'équation $f(x) = k$

$C_f \cap \Delta : y = k$

On cherche le nombre des points d'intersections

Théorème 9 Soit I un intervalle et a et b deux réels de I tel que $a < b$

si
- f une fonction <u>continue</u> sur I
- Pour tout réel k <u>compris entre</u> $f(a)$ et $f(b)$

Alors l'équation ....

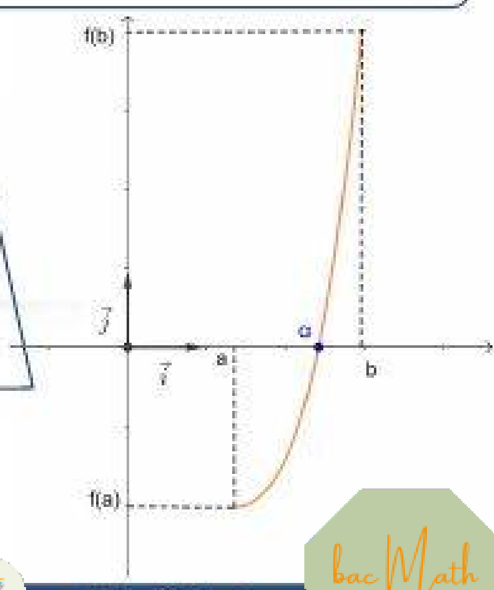
....

si
- f une fonction **<u>continue</u>** sur I
- ....
- $f(a)\times f(b) < 0$

Alors l'équation ....

....

....



Activité 17 (Cahier de cours)

On considère une fonction g, définie et continue sur IR, et tels que $g(2)=7$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$	-4	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 *a*- Déterminer $g\circ g(-1)$

b- Déterminer $g(]-\infty,-1])$, $g(IR)$ et $g\circ g([-1,1])$

2 *a*- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet exactement 3 solutions α, β *et* γ.

b- En déduire le tableau de signe de $g(x)$.

3 Déterminer la nature des branches infinies de la courbe représentative de g

Activité 18

(Cahier de cours)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-1}-1}{x} & si\ x \geq 1 \\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} - 2 & si\ x < 1 \end{cases}$

C_f sa la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) *a*- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$. Interpréter graphiquement.

   b- Montrer que pour tout $x < 1$, on a $\frac{1}{x-1} - 2 \leq f(x) \leq \frac{-1}{x-1} - 2$.

   c- En déduire que C_f admet une asymptote au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera.

   d- Montrer que f est continue en 1.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

   b- Justifier la continuité de g sur $[1, +\infty[$.

   c- Montrer que l'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution $\alpha \in]2\ ;3[$.

   d- Prouver que α est une solution de l'équation : $3x^2 - 4x - 8 = 0$.

3) On considère le tableau de variation ci-dessous d'une fonction h définie et continue sur $]-\infty, 0]$ et tel que $h(-2) = 1$

x	$-\infty$		0
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5

   a- Déterminer le domaine de définition de la fonction $k = g \circ h$. Justifier .

   b- Montrer que la fonction k est continue sur $]-\infty, -2]$.

   c- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x)$ et $k(-2)$.

Activité 19

(Cahier de cours)

Soit f une fonction tel que $f(1)=-2$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		$-0,5$		0	0		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1) *a*- Déterminer $f(]-\infty,0[)$

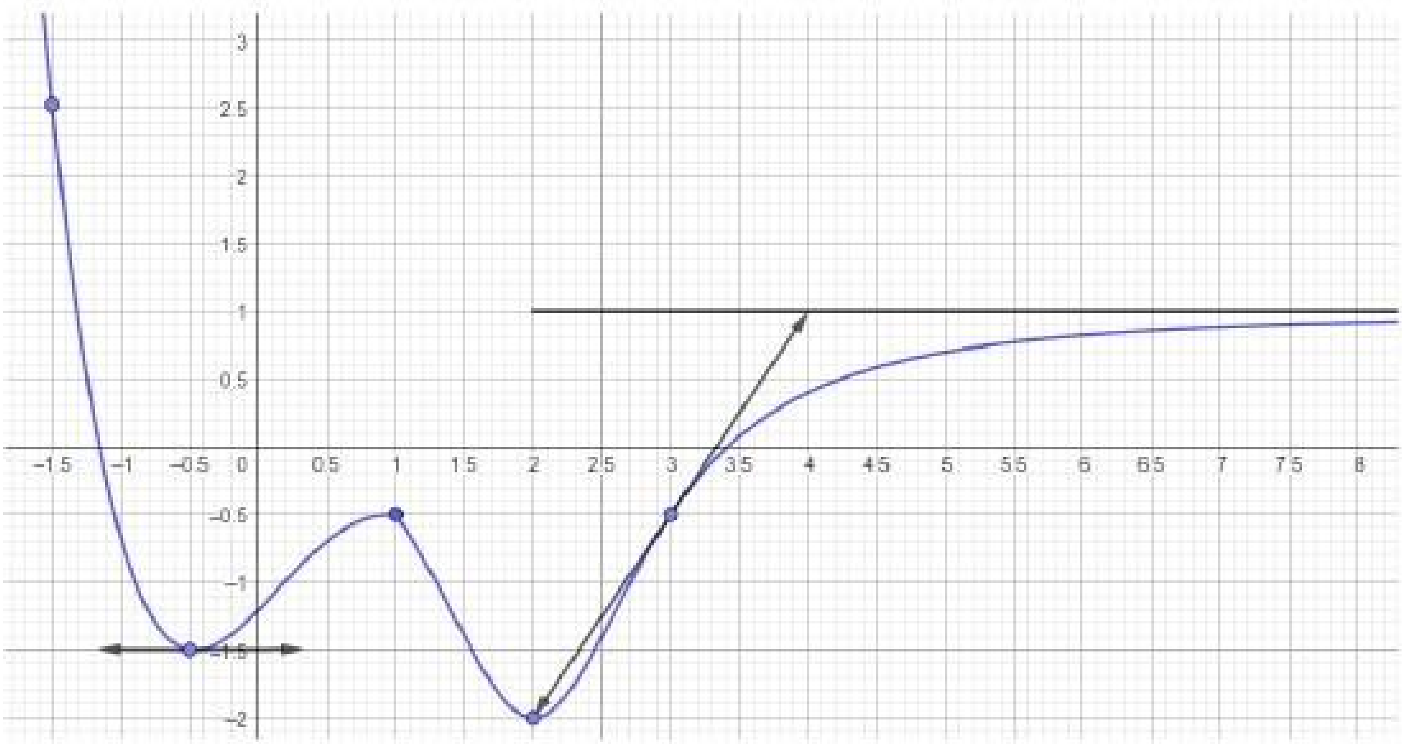
b- Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet dans $]-\infty,0[$ exactement 2 solutions.

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\cos(f(x))}{(f(x))^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f\left(-\dfrac{\sin x}{2x}\right)$.

3) La courbe ci-dessous représente une fonction g définie et dérivable sur IR.

La courbe de g admet :

- une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.
- une asymptote d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$



a- Déterminer $g'\left(\dfrac{-1}{2}\right)$ et $g'(3)$

b- Déterminer $(f\circ g)(1)$; $\lim\limits_{x\to 0}(g\circ f)(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(\dfrac{1}{g(x)-1}\right)$.

c- Déterminer $g([1,+\infty[)$ et $g\circ f(]0,+\infty[)$

- Toute fonction polynôme est continue sur --------.
- Toute fonction rationnelle est continue sur ---.
- $x \mapsto \operatorname{Cos}(ax+b)$ est continue sur --------

  $x \mapsto \operatorname{Sin}(ax+b)$ est continue sur --------

  $x \mapsto \operatorname{Tan}\ x$ est continue sur--

Activité 3 (Cahier de cours)

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[\setminus\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 2 et déterminer son prolongement.

Théorème 5 Soit f une fonction définie sur $I\setminus\{a\}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=.....$ (............) alors f est **prolongeable par continuité** en a.

La fonction g définie sur I par $g(x)=\begin{cases} .... & \text{si } x\neq a \\ .... & \text{si } x=a \end{cases}$ est -------------------------- en a

$\to g$ s'appelle ---.

2 Opérations sur les limites :

Activité 4 (Cahier de cours)

Calculer les limites suivantes :

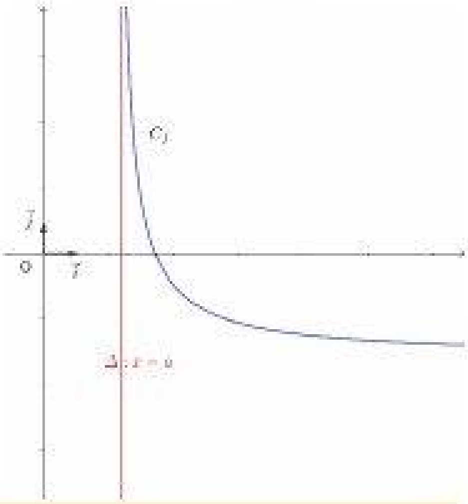
1. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3+x+\dfrac{2}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2}{4-x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{-5x}{(x+1)^2}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+5x}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+1}+5x$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-5}{-2x+1}$
7. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 x}{\cos x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

II Branches infinies :

cliquez ici pour regarder la vidéo

1 Asymptotes :

a - Asymptote verticale



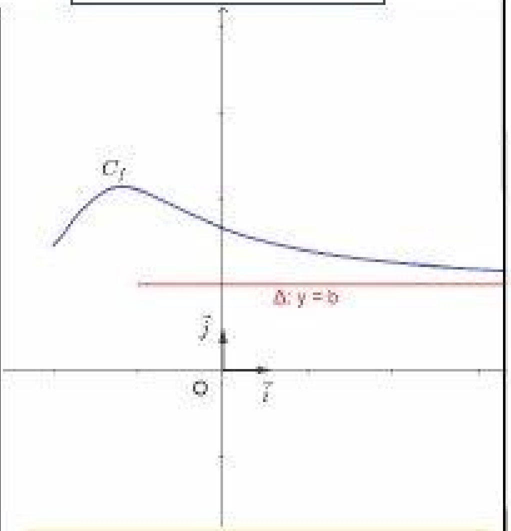
Si $\lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ ou\ a^-}} f(x) = ...$

alors ....

....

....

b - Asymptote horizontale



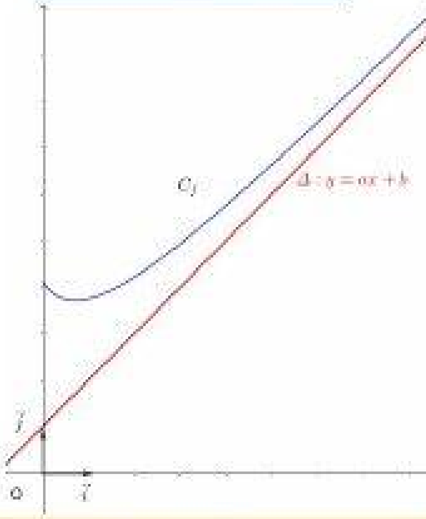
Si $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ ou\ -\infty}} f(x) = ...$

alors ....

....

....

c - Asymptote oblique



On a $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ ou\ -\infty}} f(x) = ...$

Soit une droite $\Delta : y = ax + b$

Si

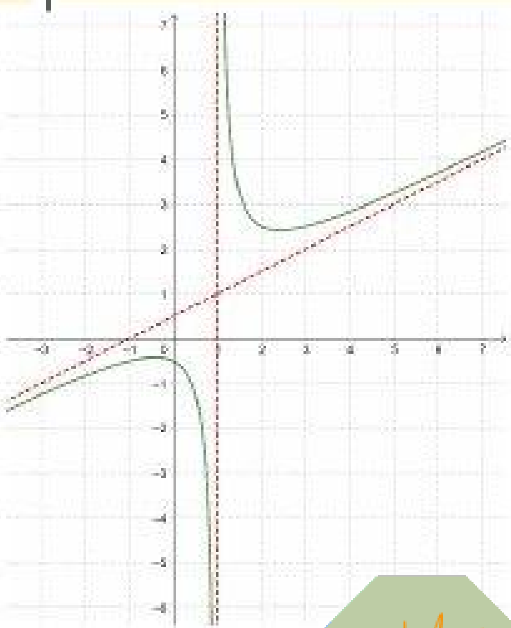
$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ ou\ -\infty}} \left[f(x) - (ax+b) \right] = ..$

alors ....

....

Activité 5

Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Les droites d'équations $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et $x = 1$ sont des asymptotes à la courbe C_f .



Compléter :

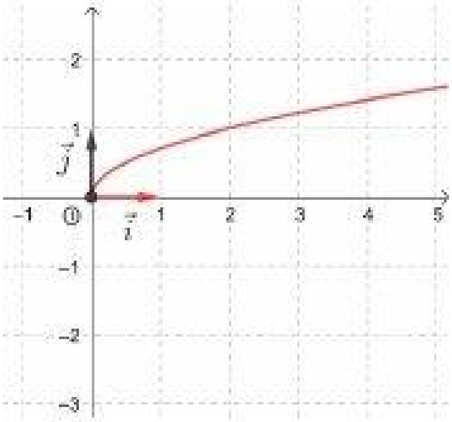
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = $ .... ; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = $ ....

$\lim\limits_{x \to (1)^-} f(x) = $ .... ; $\lim\limits_{x \to (1)^+} f(x) = $ ....

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = $ ....

2 Les branches paraboliques :

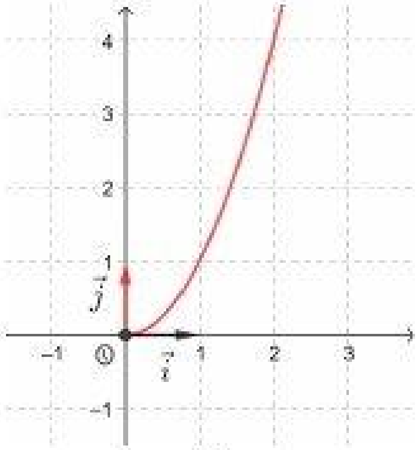
a - Branche parabolique de direction celle de la droite $(O,\vec{i})$ au $V(\infty)$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ ....

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$ ....

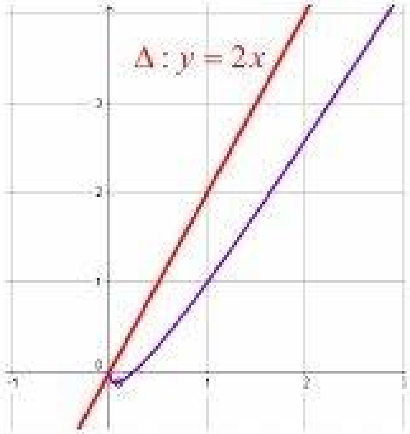
b - Branche parabolique de direction celle de la droite $(O,\vec{j})$ au $V(\infty)$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ ....

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$ ....

c - Branche parabolique de direction celle de la droite $\Delta : y = ax$ au $V(\infty)$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ ....

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$ ....

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - 2x\right] =$ ....

Voir résumé page 6

Activité 6 (Cahier de cours)

1 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = x - \sqrt{x^2+3}$

Déterminer la nature des branches infinies de la courbe de f.

2 Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x+2}$.

C_g sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a- Déterminer le domaine de définition de g.

b- Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$

c- Interpréter graphiquement le résultat.

d- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$. Interpréter

Résumé

Limites	Interprétation graphique
$\lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ ou\ a^-}} f(x) = \infty$	C_f admet une asymptote la droite $\Delta : x = a$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$	C_f admet une asymptote la droite $\Delta : y = b$ au voisinage de ∞
$\lim\limits_{x \to \infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$	C_f admet une asymptote oblique la droite $\Delta : y = ax + b$ au voisinage de ∞

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Déterminer la nature des branches infinies de la courbe C_f

Etape 1 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} =$

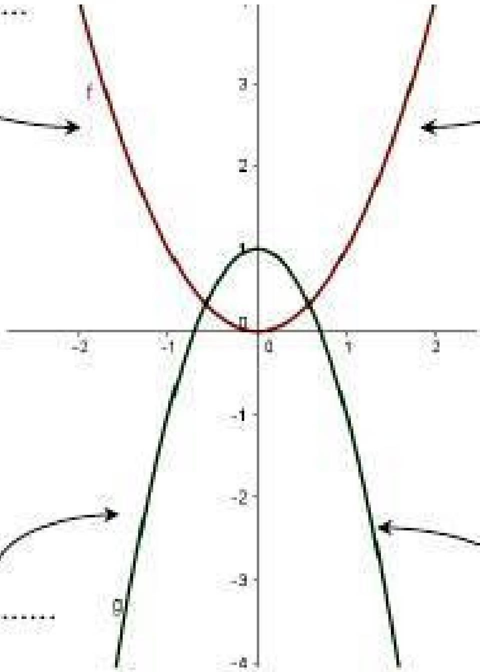
- 0 : C_f admet une branche parabolique de direction celle de la droite $(O,\vec{i})$ au $\mathrm{V}(\infty)$
- $a \neq 0$: **Etape 2** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - ax =$
  - ∞ : C_f admet une branche parabolique de direction celle de la droite $\Delta : y = ax$ au $\mathrm{V}(\infty)$
  - b : C_f admet une asymptote oblique $\Delta : y = ax + b$ au $\mathrm{V}(\infty)$
- ∞ : C_f admet une branche parabolique de direction celle de la droite $(O,\vec{j})$ au $\mathrm{V}(\infty)$

Lecture graphique

(C) et (C') admettent une **branche parabolique** de direction celle de la droite $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

$\lim\limits_{x \to .....} \dfrac{f(x)}{x} = ...$

$\lim\limits_{x \to .....} \dfrac{f(x)}{x} = ...$



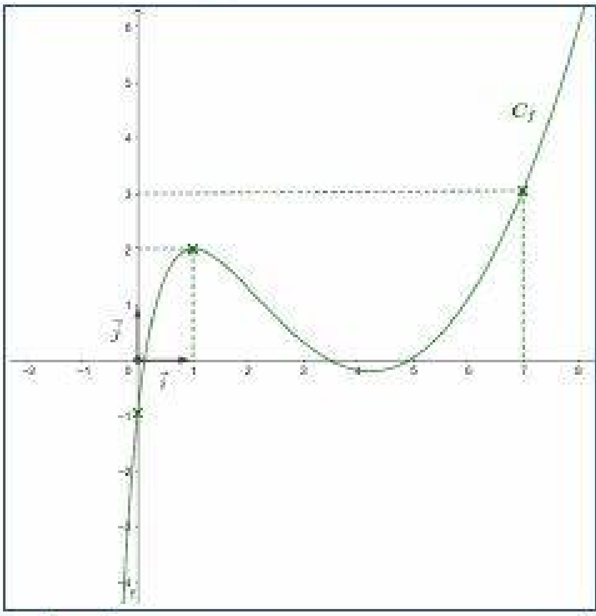
$\lim\limits_{x \to .....} \dfrac{g(x)}{x} = ...$

$\lim\limits_{x \to .....} \dfrac{g(x)}{x} = ...$

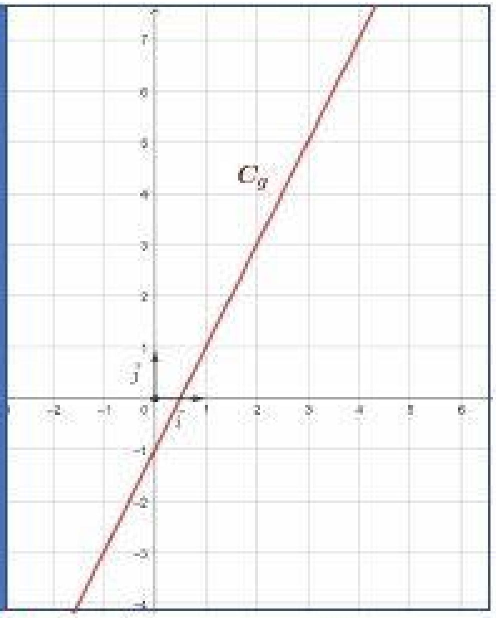
III Composée de deux fonctions

1 Définition - Lecture graphique :

Activité 7 (Cahier de cours)



On considère Cf et Cg les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur IR



1 Par lecture graphique déterminer : $f(1)$; $f(7)$; $f(0)$ et $g(4)$

2 Soit les fonctions $h : x \mapsto g(f(x))$ et $k : x \mapsto f(g(x))$
Déterminer $h(1)$; $h(7)$; $h(0)$ et $k(4)$

Commentaire

La fonction $h : x \mapsto g(f(x))$ est appelé fonction composée de f et g $\Longrightarrow$ Notée $h = g \circ f$

Définition

Soit u une fonction définie sur un ensemble I.
Soit v une fonction définie sur un ensemble J tel que $u(I) \subset J$

La fonction notée $v \circ u$, définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$
est appelée fonction composée de u et v

2 Domaine de définition de $h = g \circ f$

$$\longrightarrow D_h = \left\{ x \in D_f \,;\ \text{tel que } f(x) \in D_g \right\}$$

Activité 8 (Cahier de cours)

1 Déterminer le domaine de définition de $h = g \circ f$ dans chacun des cas suivants :

a- $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ et $g : x \mapsto \sin(x) + 4x$

b- $f : x \mapsto \sqrt{x-3}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-2}$

c- $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2 + 3$ et $g : x \mapsto \sqrt{x-1}$

2 Donner l'expression de $g \circ f(x)$ dans chacun des cas précédents

Activité 9 (Cahier de cours)

Dans chacun des cas suivants, déterminer deux fonctions u et v tel que $f = v \circ u$

1 $f : x \mapsto \cos\left(x^2+1\right)$

2 $f : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x) - 1}{2\sin(x) + 5}$

3 $f : x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

3 Continuité d'une fonction composée

Théorème 5

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant ....

Si $\begin{cases} \bullet\ u \text{ est continue en } a \\ \bullet\ v \text{ est continue en } u(a) \end{cases}$ **alors** est $v \circ u$ ....

Si
- u est continue sur I
- v est continue sur $u(I)$

alors $v \circ u$ est continue sur I

Activité 10 (Cahier de cours)

Etudier la continuité de f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1 $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{2x^2+\pi}{x}\right)$; $I =]0,+\infty[$

2 $v : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x-1}$, $u : x \mapsto \cos x$ et $f = v \circ u$; $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

4 Limites d'une fonction composée

Théorème 6 a, b et c finis ou infinis

- $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$
- $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = c$

Activité 11 (Cahier de cours)

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x \to 2} \sin\left(\dfrac{\pi}{x-1}\right)$

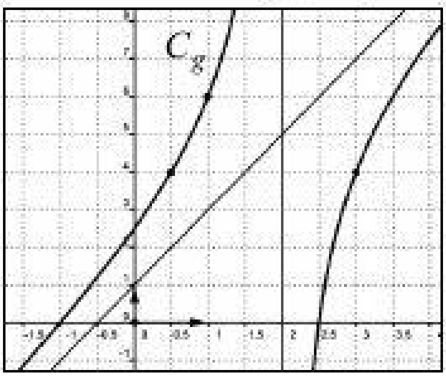
2 $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$

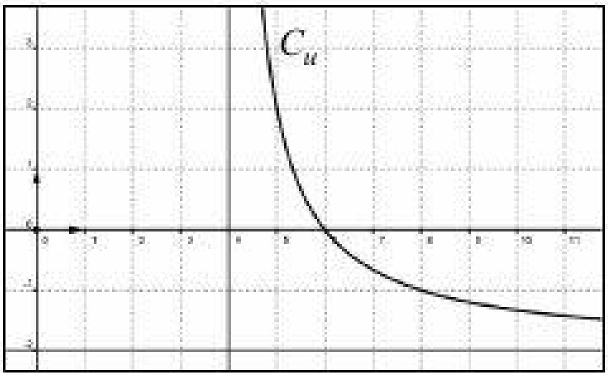
3 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x-1}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2x-1}\right)$

4 $\lim\limits_{x \to 1^+} \tan\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$

Activité 12 (Cahier de cours)

Les courbes C_g et C_u représentent respectivement la fonction g définie sur $IR \setminus \{2\}$ et une fonction u définie sur $]4;+\infty[$.





On considère la fonction composée $f = u \circ g$.

1 Déterminer le domaine de définition de f.

2 Déterminer graphiquement : $f(1)$, $\lim f(x)$; $\lim f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.