

Nombres complexes

prof : Maatallah

2021 / 2022

Classe : 4Tech

INTRODUCTION ET DEFINITION

Remarque

- ★ $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels**. Dans $\mathbb{N} : x + 1 = 0$ n'a pas de solutions. Cette équation a une solution notée -1 , cette solution est un élément de l'ensemble $\mathbb{Z}$.
- ★ $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**. Dans $\mathbb{Z} : 2x = 1$ n'a pas de solutions. Cette équation a une solution notée $\frac{1}{2}$, cette solution est un élément de l'ensemble $\mathbb{Q}$.
- ★ $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels** de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. Dans $\mathbb{Q} : x^2 = 2$ n'a pas de solutions. L'équation a deux solutions notées $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, éléments de l'ensemble $\mathbb{R}$.
- ★ $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**. Dans $\mathbb{R} : x^2 = -1$ n'a pas de solutions. L'équation a deux solutions imaginaires notées i et $-i$, de l'ensemble $\mathbb{C}$.
- ★ $\mathbb{C}$ est l'ensemble des **nombres complexes** de la forme $a+ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- ★ $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$. On a donc : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Définition

- 1 Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes contenant l'élément i , tel que $i^2 = -1$.
- 2 Tout nombre complexe z s'écrit d'une manière unique sous la forme algébrique suivante : $z = a+ib$ où a et b sont des réels
 a s'appelle la partie réelle de z . On la note $a = \text{Re}(z)$ et b s'appelle la partie imaginaire de z . On la note $b = \text{Im}(z)$
- 3 L'écriture $z = a+ib$ est appelée **forme algébrique** de z .
 - Si $b = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$, on a : $z = a$, z est un **réel**.
 - Si $a = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$, on a : $z = ib$, on dit que z est un **imaginaire pur** ($z \in i\mathbb{R}$)

Propriétés

Soit $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ alors :

- 1 $z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$
- 2 $z = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$

Exercice n 1

- 1 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chaque nombre ci-dessous.

$$z_1 = 2 + 5i - 3 \quad z_2 = 1 + i \quad z_3 = -2 \quad z_4 = -3i$$

- 2 Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2 + 5i - (3 - 7i) \quad z_2 = (2 + 5i)(3 - 7i) \quad z_3 = (2 + i)^2.$$

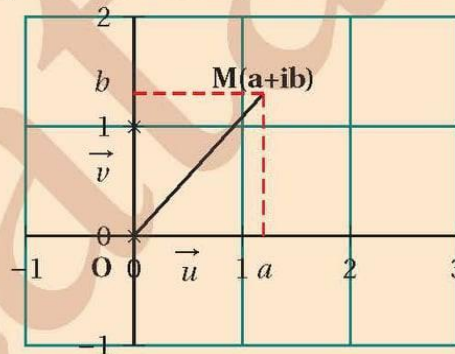
Réponse

Représentation géométrique d'un nombre complexe

Définition

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- 1 ► Soit $M(a, b)$ un point de P . On appelle **affixe** de M le nombre complexe noté $aff(M)$ ou z_M tel que : $aff(M) = z_M = a + ib$
 ► $M(a, b)$ est le **point image** du nombre complexe $z = a + ib$.



- 2 ► Le plan est appelé **le plan complexe**
 ► L'axe des abscisses est appelé **axe des réels**.
 ► L'axe des ordonnées est appelé **axe des imaginaires purs**.

- 3 Pour tous points $A(z_A)$ et $B(z_B)$ du plan complexe on a :

- le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe $aff(\vec{AB}) = z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$

- Le point I , milieu du segment $[AB]$, a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

- 4 Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels α et β on a :

$$aff(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha aff(\vec{u}) + \beta aff(\vec{v})$$

Formule de Moivre :

Pour tout réel θ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Formules d'Euler :

Pour tout réel θ on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Remarques

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall \beta \in \mathbb{R}$

$$\diamond e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\diamond e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Exercice n 10

- 1 Ecrire sous forme exponentielle chacun des complexes suivants :

$$(-1+i)^4 \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} \quad \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{(3+i\sqrt{3})^3}$$

- 2 Soit $\theta \in]0, \pi[$, écrire sous forme exponentielle chacun des complexes suivants :

$$z_1 = 1 + e^{i\theta} \quad z_2 = 1 - e^{i\theta} \quad z_3 = i + e^{i\theta} \quad z_4 = i - e^{i\theta}$$

Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Vecteur , alignement et orthogonalité

Définition

Le plan P est rapporté à un R.O.N $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$. On a :

$$\diamond (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

$$\diamond (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

Propriétés

Le plan P est rapporté à un R.O.N $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$. On a :

- 1 Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ou encore } \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \in \mathbb{R}$$

- 2 Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ou encore } \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \in i\mathbb{R}$$

Corollaire

Le plan P est rapporté à un R.O.N $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$. On a :

- 1 les points A , B et C sont alignés si et seulement si $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \in i\mathbb{R}$

- 2 Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \in \mathbb{R}$

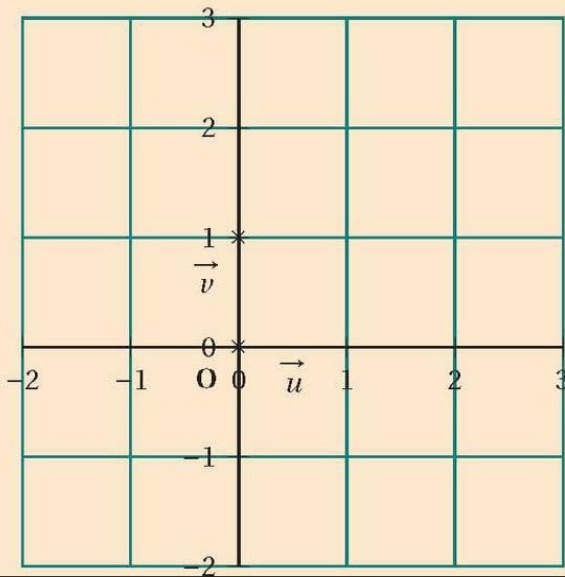
- 3 Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \in i\mathbb{R}$

Exercice n 11

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points $A(1 - i)$, $B(-2)$ et $C(2 + 2i)$.

- 1 Placer les points A , B et C . Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A
- 2 Déterminer l'abscisse du point D pour que $ABDC$ soit un carré.

Réponse



Racines carrées d'un nombre complexe



Définition

Soit W un nombre complexe donné .

On appelle **racine carrée** de W tout nombre complexe z vérifiant $z^2 = W$



Exemple

- 1 On a : $9 = 3^2$ alors 3 est une racine carrée de 9
- 2 On a : $-4 = (2i)^2$ alors $2i$ est une racine carrée de -4
- 3 On a : $(1 - i)^2 = -2i$ alors $1 - i$ est une racine carrée de $-2i$



Théorème : (Méthode trigonométrique)

Soit $W = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul donné sous forme exponentielle .

L'équation : $z^2 = W$ admet dans $\mathbb{C}$ **deux solutions opposées** :

$$z_1 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -z_1 = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Les solutions z_1 et z_2 sont les racines carrées de W



Preuve

.....

.....



Exercice n 12

Déterminer les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3i \quad z_2 = -i \quad z_3 = -5 \quad z_4 = \sqrt{3} + i \quad z_5 = -1 - i$$

Réponse

(Méthode algébrique)

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = 3 + 4i$

Réponse

On pose $z = x + iy$, on a : $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z^2| = x^2 + y^2$

$$z^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |(3 + 4i)| \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ xy = 2 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 & (1)+(2) \\ xy = 2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{et} \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -2 \\ \text{et} \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{donc } z_1 = 2 + i \quad \text{et} \quad z_2 = -2 - i = -z_1 \text{ sont les}$$

racines carrées de $3 + 4i$

Théorème : (Méthode algébrique)

Soit $W = a + ib$ un nombre complexe non nul et $z = x + iy$. L'équation :

$$z^2 = W \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |W| \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(W) \\ 2xy = \operatorname{Im}(W) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Exercice n 13

Déterminer les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -3 + 4i \quad z_2 = -5 + 12i \quad z_3 = -21 - 20i \quad z_4 = 35 + 12i \quad z_5 = 40 - 42i$$

Réponse

Equation du second degré à coefficients complexes

Définition

Soient a, b et c trois nombres complexes donnés tels que $a \neq 0$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ s'appelle équation du second degré à coefficients complexes.

Théorème

Soit l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$ telle que $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, appelé discriminant de l'équation (E)

Si $\Delta = 0$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ une solution double : $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

ou δ est racine carrée de Δ $\Delta = b^2 - 4ac = (\delta)^2$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : z^2 + 2iz - 1 - i = 0 \quad (E_2) : z^2 + 2iz - 1 = 0$$

Réponse

★ $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = (2i)^2 - 4(1)(-1-i) = -4 + 4 + 4i = 4i = 2(2i) = 2(1+i)^2 = [\sqrt{2}(1+i)]^2$ $\delta = [\sqrt{2}(1+i)]$ est une racine carrée de Δ , d'où

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-2i + \sqrt{2}(1+i)}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-2i - \sqrt{2}(1+i)}{2}$$

★ $z^2 + 2iz - 1 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = (2i)^2 - 4(1)(-1) = -4 + 4 = 0$ d'où $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2i}{2} = -i$

Exercice n 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : z^2 - (1+i)z + i = 0 \quad (E_2) : 2z^2 + (1-3i)z - 1 - i = 0 \quad (E_3) : iz^2 - 2(1+i)z + 2 = 0$$

Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Remarque

Soit l'équation (E) : $az^2 + 2b'z + c = 0$ telle que $a \in \mathbb{C}^*$ et $b', c \in \mathbb{C}$. On pose $\Delta' = b'^2 - ac$, appelé **discriminant réduit** de l'équation (E)

Si $\Delta' = 0$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ une solution double : $z_1 = z_2 = \frac{-b'}{a}$

Si $\Delta' \neq 0$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes :

$$z_1 = \frac{-b' + \delta'}{a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b' - \delta'}{a}$$

ou δ' est racine carrée de Δ' $\Delta' = b'^2 - ac = (\delta')^2$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : z^2 + 2iz - 1 - 2i = 0 \quad (E_2) : z^2 + 2z + 1 = 0$$

Réponse

★ $z^2 + 2iz - 1 - 2i = 0$, $\Delta' = b'^2 - ac = (i)^2 - (1)(-1 - 2i) = -1 + 1 + 2i = 2i = (1+i)^2$ $\delta' = (1+i)$
est une racine carrée de Δ' , d'où $z_1 = \frac{-b' + \delta'}{a} = \frac{-i + (1+i)}{1} = 1$

et $z_2 = \frac{-b' - \delta'}{a} = \frac{-i - (1+i)}{1} = -1 - 2i$

★ $z^2 + 2z + 1 = 0$, $\Delta' = b'^2 - ac = (1)^2 - (1) = 0$ d'où $z_1 = z_2 = \frac{-b'}{a} = \frac{-1}{1} = -1$

Remarque

Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ telle que $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$

Si z_1 et z_2 sont les solutions de (E), : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Si z_1 et z_2 sont les solutions de (E), : $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$

Si $a + b + c = 0$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions : $z_1 = 1$ et $z_2 = \frac{c}{a}$

Si $a - b + c = 0$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions : $z_1 = -1$ et $z_2 = \frac{-c}{a}$

Si a, b et c sont trois réels ($a \neq 0$) et si $\Delta < 0$, alors $z_2 = \overline{z_1}$

Exercice n 15

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : z^2 - (1+i)z - 2 - 2i = 0 \quad (E_2) : z^2 + z + 1 = 0 \quad (E_3) : z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = 0$$

$$(E_4) : z^2 + i(e^{i\theta} - 2)z + e^{i\theta} - 1 = 0, \theta \in]0, \pi[\quad (E_5) : z^2 - 2(i - \cos\theta)z - 2i\cos\theta = 0, \theta \in]0, \pi[$$

Réponse

Exercice n 16 (BAC Tech 2021 Session principale)

I 1 Ecrire $(1 - i\sqrt{3})^2$ sous forme cartésienne.

2 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$2z^2 - 4i\sqrt{3}z - 5 + i\sqrt{3} = 0.$$

II Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \frac{-1+3i\sqrt{3}}{2}$ et $z_C = -1+i\sqrt{3}$. On désigne par (C_1) le cercle de centre O et de rayon 1 et par (C_2) le cercle de centre O et de rayon 2 (**figure 2 de l'annexe**).

1 Ecrire z_A et z_C sous forme exponentielle.

2 a Montrer que le point A appartient à (C_1) et que le point C appartient à (C_2) .

b Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un parallélogramme.

c Construire les points A, B et C .

3 Montrer que la droite (AC) est tangente à (C_1) .

4 On considère le point I d'affixe $z_I = 1$.

— Δ_1 la perpendiculaire à la droite (AC) et passant par le point I

— Δ_2 la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point B .

Δ_1 et Δ_2 se coupe en un point H d'affixe z_H

a Vérifier que $z_H = x + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ou x est un nombre réel.

b Montrer que $z_H - 1 = re^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $r = IH$.

c En déduire que $z_H = \frac{5+3i\sqrt{3}}{2}$.

5 Montrer que le triangle BIH est équilatéral.

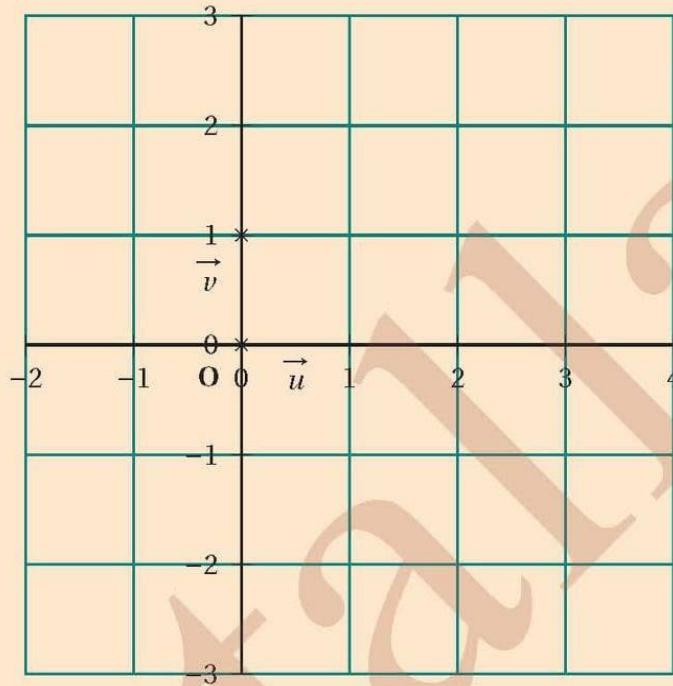


Exercice n 2

Dans le plan complexe, on considère les points $A(-1 + 2i)$, $B(1 - i)$ et $C(3 - 2i)$

- 1 Placer les points A, B et C
- 2 Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ et $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$
- 3 Déterminer l'affixe du point D , sachant que $ABCD$ est un parallélogramme
- 4 Déterminer l'affixe du centre du parallélogramme

Réponse



Handwriting practice lines consisting of multiple horizontal dotted lines on a light background.

Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, où a et b sont des réels.

On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $\overline{z} = \overline{a + ib} = a - ib$





Exercice n 3

Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 + i \quad z_2 = -1 - 2i \quad z_3 = -7 \quad z_4 = -2i \quad z_5 = i$$

Réponse



Propriétés

Soit z un nombre complexe qui s'écrit sous la forme algébrique $z = a + ib$ alors on a :

1 Le conjugué de $\bar{z}$ est évidemment : $\overline{\bar{z}} = z$

2 $z + \bar{z} = 2a = 2\text{Re}(z)$ $z - \bar{z} = 2ib = 2i\text{Im}(z)$

3 z est réel $\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$

z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

4 $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = \text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z) \in \mathbb{R}_+$



Propriétés

Pour tous complexes z et z' , on a :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad , \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

$$z' \neq 0 \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{N}^*$$



Remarques

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1 Le point $M'(\bar{z})$ est le symétrique du point $M(z)$ par rapport l'axe des abscisses .

2 Le point $M''(-z)$ est le symétrique du point $M(z)$ par rapport l'origine O du repère.

3 Toute droite (D) admet comme équation cartésienne : $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$

4 Une équation cartésienne du cercle (φ) de centre $I(a, b)$ et de rayon R est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

5 L'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation :

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est un cercle de centre $I\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$ et de rayon $R = \sqrt{h}$ avec

$$h = \frac{a^2 + b^2}{4} - c > 0$$



1

$$z_1 = \frac{2-i}{3+2i}$$

$$z_2 = \frac{1}{1+i}$$

$$Z_3 = \frac{1}{i}$$

$$z_4 = \frac{3 + 2i}{3 - 2i}$$

$$z_5 = \frac{1 + 6i}{(1 + i)^2}$$

2

A tout point M d'affixe z différent de i , on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{z-1+i}{z-i}$.

- a

- b**

- C**

- d

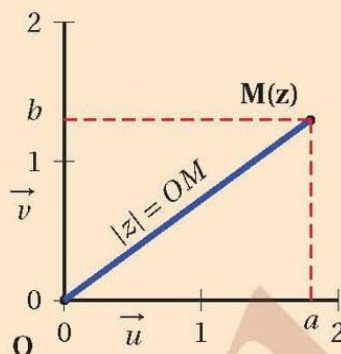
Réponse

Module d'un nombre complexe

Définition

- 1 On appelle **module** d'un nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ le **réel positif** définie par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Graphiquement, si M est l'image de z , alors on a : $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$



- 2 Pour tous points A et B d'affixes respectives z_A et z_B on a : $AB = |z_B - z_A|$

Exercice n 5

- 1 Déterminer le module des nombres complexes suivants :
 $z_1 = 2 + 5i$ $z_2 = 1 + i$ $z_3 = -2i$ $z_4 = 4 - 3i$
- 2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$ et $z_B = 5 - i$.
 Calculer les distances OA , OB et AB . En déduire la nature du triangle OAB .

Réponse

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes on a :

1 $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

2 Si $z' \neq 0$ alors : $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$\forall n \in \mathbb{N} : |z^n| = |z|^n$

3 $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \Leftrightarrow |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Exercice n 6

- 1 Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2 + 5i)(1 - 3i) \quad z_2 = \frac{1 - i}{-2 + 3i} \quad z_3 = (1 - 2i)^3 \quad z_4 = \frac{(1 - i)^4}{(1 + 4i)(3 - 4i)}$$

- 2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|z| = 9 \quad |z + 2 - 3i| = 4 \quad |z - 3i| = |z + 3 - 5i|$$

Réponse

Remarques

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- 1 L'ensemble de points $M(z)$ tels que $|z - z_A| = R$, $R > 0 \Leftrightarrow AM = R$
est le cercle de centre A et de rayon R .
- 2 L'ensemble de points $M(z)$ tels que $|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$
est la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice n 7

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs : $z_A = -2i$, $z_B = 4 - 2i$, $z_C = 4 + 2i$ et $z_D = 1$.

- 1 Préciser la nature du triangle ABC .
- 2 On désigne par f l'application qui à tout point $M(z)$ distinct de A associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2i}$.
- a Déterminer les images de B et C par f .
- b Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z'| = 1$.
- c Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : z' est réel.
- 3 a Démontrer que pour tout $z \neq -2i$, on a : $(z' - 1)(z + 2i) = -4 - 4i$.
- b En déduire que si M varie sur $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon $R = 4$ alors M' varie sur un cercle $(\mathcal{C}')$ que l'on précisera.

Réponse





Argument d'un nombre complexe

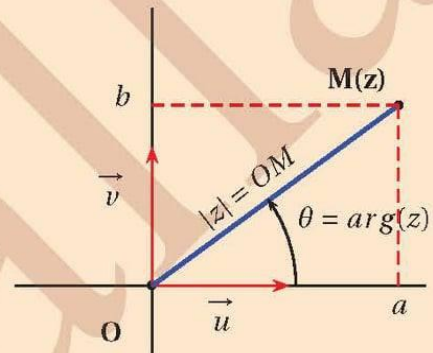


Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On appelle argument de z et on le note $\arg(z)$, **toute mesure, en radian de l'angle orienté** $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. On a donc :

$$\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + 2k\pi = \theta + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou}$$

$$\text{bien} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta [2\pi]$$



Cas Particuliers

- 1 Si z est un **réel strictement positif** alors $\arg(z) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$

Exemple : $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$, $\arg(5) \equiv 0[2\pi]$, $\arg(0.5) \equiv 0[2\pi]$, $\arg(35) \equiv 0[2\pi]$

- 2 Si z est un **réel strictement négatif** alors $\arg(z) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$

Exemple : $\arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$, $\arg(-2) \equiv \pi[2\pi]$, $\arg(-0.7) \equiv \pi[2\pi]$

- 3 Si $z = ib$ avec b un **réel strictement positif** alors

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Exemple : $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $\arg(2i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $\arg(\frac{1}{4}i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

- 4 Si $z = ib$ avec b un **réel strictement négatif** alors

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

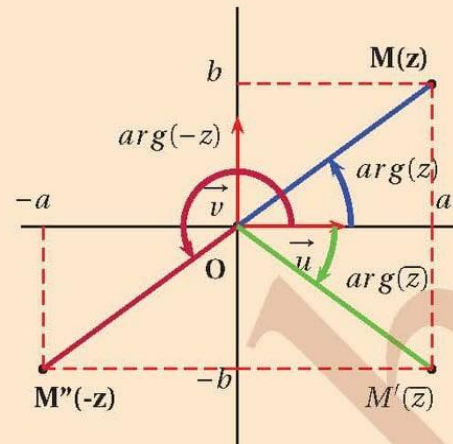
Exemple : $\arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, $\arg(-3i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, $\arg(-\frac{1}{3}i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.



Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls ,
 k un réel non nul et $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1 $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$
 - 2 $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$
 - 3 Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z) [2\pi]$
 - 4 Si $k < 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$
 - 5 $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
- $$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$
- $$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$
- $$\arg(z^n) \equiv n\arg(z) [2\pi]$$



Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition (Forme trigonométrique d'un nombre complexe)

Soit z un nombre complexe non nul, $z = a + ib$,
 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En notant r le module de z et θ un argument de z , on a :

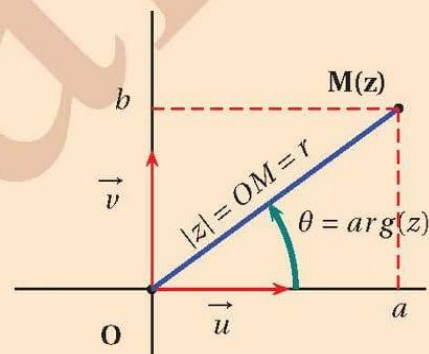
$$\cos(\theta) = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r\sin(\theta) \text{ et } z = a + ib = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

L'écriture de z sous la forme $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$
 avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est appelée **forme trigonométrique** de z .

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = [r, \theta]$$

r et θ sont les **coordonnées polaires** du point M
 d'affixe z



Exercice n 8

Ecrire , sous forme trigonométrique , les complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 1 - i$$

$$z_3 = -\sqrt{3} + i$$

$$z_4 = -\sqrt{3} - 3i$$

Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriétés

Soient $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ deux nombres complexes non nuls. On a pour tout entier n :

$$\begin{aligned} \bar{z} &= [r, -\theta] & \frac{1}{z} &= \left[\frac{1}{r}, -\theta\right] & \frac{z}{z'} &= \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right] \\ z.z' &= [r.r', \theta + \theta'] & z^n &= [r^n, n\theta] \end{aligned}$$

Exercice n 9

Ecrire, sous forme trigonométrique, les complexes suivants :

$$z_1 = (-1 + i\sqrt{3})^3 \quad z_2 = \frac{1}{1+i} \quad z_3 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \quad z_4 = (-2+2i)(-\sqrt{3}-3i)$$

Réponse

Définition (Forme exponentielle d'un nombre complexe)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$

Soit $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = [r, \theta]$ un nombre complexe non nul, l'écriture $z = re^{i\theta}$ avec r un réel strictement positif est **la forme exponentielle** de z

Propriétés

$$\begin{aligned} e^{i\theta} . e^{i\theta'} &= e^{i(\theta+\theta')} & (e^{i\theta})^n &= e^{in\theta} & e^{i\theta} . e^{i\theta'} &= e^{i(\theta+\theta')} \\ \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} &= e^{i(\theta-\theta')} & \frac{1}{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta} & e^{-i\theta} &= \cos(\theta) - i\sin(\theta) \end{aligned}$$

Remarques

$$\begin{aligned} 1 \text{ Si } z = re^{i\theta} \text{ alors } \bar{z} &= re^{-i\theta} & -z &= re^{i(\theta+\pi)} & iz &= re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} \\ -iz &= re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} & z^n &= r^n e^{in\theta} & e^{i\theta} &= [1, \theta] \\ 2 \quad 1 &= e^{i0} & -1 &= e^{i\pi} & i &= e^{i\frac{\pi}{2}} & -i &= e^{-i\frac{\pi}{2}} & e^{i(\theta+2k\pi)} &= e^{i\theta} \end{aligned}$$

