I - Généralités :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Définition :

On appelle isométrie toute application du plan P dans lui même qui conserve les distances.

Soit f une application du plan P dans lui-même

f est une ***isométrie*** signifie

que pour tout points A et B du plan d'images respectives A' et B' par f ,on a : A'B' = AB

Exemples: les translations, les rotations et les symétries axiales sont des isométries.

2°/ Propriétés caractéristiques :

Théorème :

Soit f une application du plan P dans lui-même

f est une isométrie $\Leftrightarrow$ f conserve le produit scalaire

f conserve le produit scalaire si et seulement si pour tout points A , B et C du plan d'images respectives A' , B' et C' par f , on a : $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Propriétés :

* Une isométrie est une bijection et sa réciproque est une isométrie.
* La composée de deux isométries est une isométrie.
* Une isométrie conserve l'alignement, le parallélisme et le barycentre de deux points pondérés.
* Une isométrie conserve les écarts angulaires en particulier l'orthogonalité
* Une isométrie transforme une droite en une droite, un segment en un segment et un cercle en un cercle .
* Pour tout points A, B, C, D, E et F du plan d'images respectives A', B', C', D', E' et F' par une isométrie et x et y deux réels, on a : $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{CD} + y\,\overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = x\,\overrightarrow{C'D'} + y\,\overrightarrow{E'F'}$.

II - Isométries et points fixes :

1°/ Isométrie fixant trois points non aligné :

Théorème :

Une isométrie du plan qui fixe trois points non alignés est égale à l'identité.

Corollaire :

Deux isométries du plan qui coïncident en trois points non alignés sont égales.

2°/ Isométrie fixant deux points distincts:

Théorème :

Une isométrie du plan différent de l'identité et qui fixe deux points distincts est égale à la symétrie orthogonale d'axe la droite (AB) .

3°/ Isométrie fixant un seul point :

Théorème :

Une isométrie du plan fixant un seul point est une rotation de centre A.

4°/ Isométrie ne fixant aucun point :

Théorème :

Soit f une isométrie du plan, O un point du plan d'image O' par f.

Il existe une isométrie unique g telle que f = $t_{\overrightarrow{OO'}} \circ g$ et g (O) = O.

Théorème :

Toute isométrie du plan est translation ou une rotation ou une symétrie orthogonale ou la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale.

Conséquence :

Toute isométrie du plan est la composée d'au plus trois symétries orthogonales.

5°/ Classification des isométries :

On peut classer les isométries en deux catégories : celles qui conservent les mesures des angles orientés appelés: déplacements et celle qui ne conservent pas les angles orientés appelés: antidéplacements f est une isométrie de P avec $\begin{pmatrix} f \\ A \to A \\ B \to B \\ C \to C \end{pmatrix}$ + A, B et C sont trois points non alignés $\Rightarrow$ f = identité du plan

f est une isométrie de P avec $\begin{pmatrix} A \to A \\ f \\ B \to B \end{pmatrix}$ + AB $\neq 0 \Rightarrow$ f = $S_{(AB)}$.

f est une isométrie de P avec $\begin{pmatrix} A \to A \\ f \\ B \to C \end{pmatrix}$ + AB = AC $\Rightarrow$ f = $R_{(A,(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}))}$ ou f = $S_{med[BC]}$.

f est une isométrie de P avec $\begin{pmatrix} A \to B \\ f \\ B \to A \end{pmatrix}$ + AB $\neq 0$ $\Rightarrow$ f = S_I ou I = A * B ou f = $S_{med[AB]}$.

f est une isométrie de P avec $\begin{pmatrix} A \to B \\ f \\ B \to C \end{pmatrix}$ + AB = BC et A $\neq$ C , on a deux cas : sont trois points non alignés

1ér cas :f est un déplacement : * Si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) \equiv 0\,[\,2\pi\,] \Rightarrow$ f = $t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{BC}}$

* Si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) \equiv \pi\,[\,2\pi\,] \Rightarrow$ C = A impossible

* Si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) \equiv \theta\,[\,2\pi\,]$ et $\theta \neq k\pi \Rightarrow$ f = $R_{(I,\,\theta)}$ ou I $\in$ med[AB] $\cap$ med[BC].

2éme cas :f est un antidéplacement : f = S_Δ ou f est une symétrie glissante.

* Si f = $S_\Delta \Rightarrow \Delta$ = med[AB] = med[BC] impossible $\Rightarrow$ f $\neq S_\Delta$.

* f est une symétrie glissante $\Rightarrow$ f = $S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ avec Δ = (A*B B*C)

Pour chercher $\vec{u}$ on utilise f o f = $t_{2\vec{u}}$ et A $\to$ B $\to$ C $\Rightarrow$ (f o f)(A) = C $\Rightarrow 2\,\vec{u} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$

III - Déplacements et antidéplacements :

1°/ Propriétés :

* Un déplacement conserve les mesures des angles orientés.
* Un antidéplacement change les mesures des angles orientés en leurs opposés.
* La composée de deux déplacements (resp. antidéplacement) est un déplacement.
* La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.
* La réciproque d'un déplacement (resp. antidéplacement) est un déplacement (resp. antidéplacement)

IV - Déplacements :

1°/ Propriétés d'un déplacement :

Soit f une isométrie du plan P.

f est un déplacement $\Leftrightarrow$ f transforme un repère orthonormé direct en un repère orthonormé direct .

f est un déplacement $\Leftrightarrow$ f est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales.

2°/ Angle d'un déplacement :

a) Théorème :

Soit f un déplacement, pour tout points A, B, C et D du plan d'images respectives A', B', C'et D' par f tels que A $\neq$ B et C $\neq$ D, on à: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'})\,[\,2\pi\,]$. L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ est appelé l'an

Théorème :

Soit A, B, C et D quatre points du plan.

Si AB = CD et A $\neq$ B alors il existe un unique antidéplacement du plan qui transforme A en C et B en D.

* Si med[AC] = med[BD] = $\Delta \Rightarrow$ f = S_Δ.

* Si med[AC] $\neq$ med[BD] $\Rightarrow$ f est une symétrie glissante $\Rightarrow$ f = $t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$ ou $\vec{u}$ un vecteur directeur $\vec{u}$ de D. Cherchons $\vec{u}$ et D.

Si A * C $\neq$ B * D $\Rightarrow$ (D) = (A*C B*D) et $A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{S_D} C_1 \Rightarrow t_{\vec{u}}(A) = C_1 \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AC_1}$.

Si A * C = B * D, on essaye de déterminer un autre point de (D) autre que A et C .ou bien g :

$$\left.\begin{array}{l} A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{t_{\overrightarrow{CA}}} A \\ B \xrightarrow{f} D \xrightarrow{t_{\overrightarrow{CA}}} B' \end{array}\right\} \Rightarrow$$ g = $t_{\overrightarrow{CA}}$ o f, on a alors g antidéplacement qui fixe A et transforme B en B'.

$\Rightarrow$ g = S_Δ ou Δ = med[BB'] = med[BC] $\Rightarrow$ f = $t_{\overrightarrow{CA}} \circ S_\Delta$.

** Si f = $S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2}$ avec $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{I\} \Rightarrow$ f = $R_{(I,\ \theta)}$ avec $\theta \equiv 2(\vec{u_2}, \vec{u_1})\ [2\pi]$.

** Si f = $S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2}$ avec $\Delta_1 // \Delta_2 \Rightarrow$ f = $t_{\vec{u}}$ avec $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta_2) = \Delta_1$.

** Si f = $t_{\vec{v}} o S_D$ avec $\vec{v} \neq \vec{o}$, on a trois cas:

<u>1ér cas</u> : Si $\vec{v}$ est un vecteur directeur de D alors f = $t_{\vec{v}} o S_D = S_D o t_{\vec{v}}$ est une symétrie glissante de vecteur directeur $\vec{u}$ et d'axe D.

<u>2éme cas</u> : Si $\vec{v}$ est orthogonal à D alors $t_{\vec{v}} = S_{D'} \circ S_D$ avec D' = $t_{\frac{1}{2}\vec{v}}$(D).

Donc f = $t_{\vec{v}} o S_D = S_{D'} \circ S_D \circ S_D = S_{D'} \Rightarrow$ f est une symétrie orthogonale.

<u>3éme cas :</u> Si $\vec{v}$ n'est pas un vecteur directeur de D et $\vec{v}$ n'est pas orthogonal à D $\Rightarrow$ on décompose $\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$ avec $\vec{v_1}$ un vecteur directeur de D et $\vec{v_2}$ un vecteur orthogonal à D

f = $t_{\vec{v}} o S_D = (t_{\vec{v_1}} \circ t_{\vec{v_2}}) \circ S_D = t_{\vec{v_1}} \circ (t_{\vec{v_2}} \circ S_D) = t_{\vec{v_1}} \circ S_{D'}$ avec D' // D.

Alors f est une symétrie glissante de vecteur directeur $\vec{v_1}$ et d'axe D'.

<u>Pour une bonne réussite</u>

<u>Signature : Dhahbi . A</u>

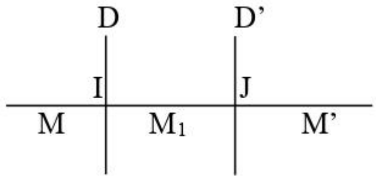
b) ***Théorème*** :

* f est un déplacement d'angle nul $\Leftrightarrow$ f est une translation.
* La composée de deux déplacements est un déplacement d'angle la somme des angles .
* La réciproque d'un déplacement est un déplacement d'angle opposé.

3°/ décomposition d'un déplacement en deux symétries orthogonales :

Théorème :

La composée de deux symétries orthogonales d'axe parallèles est une translation de vecteur orthogonal à ces axes.
Réciproquement, toute translation est la composée de deux symétries orthogonales d'axe parallèles et orthogonaux à son vecteur.

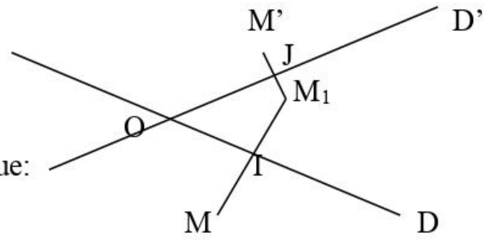


Si D parallèle à D'alors $S_{D'} \circ S_D = t_{2\overrightarrow{IJ}}$

avec $I \in D$; $J \in D'$ et $(IJ) \perp (D)$.

Théorème :

La composée de deux symétries orthogonales d'axe sécantes est une rotation de centre l'intersection des axes.
Réciproquement, toute rotation est la composée de deux symétries orthogonales d'axe sécants. $S_{D'} \circ S_D = r_{(O,2\theta)}$ tels que:



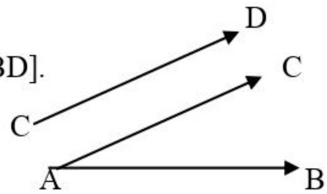
$D \cap D' = \{O\}$ et $2(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv 2\theta\ [2\pi]$.

Théorème :

Soit A, B, C et D quatre points du plan.
Si AB = CD et $A \neq B$ alors il existe un unique déplacement du plan qui transforme A en C et B en D.

* Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv 0\ [2\pi] \Rightarrow f = t_{\overrightarrow{AC}} = t_{\overrightarrow{BD}}$
* Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \pi\ [2\pi] \Rightarrow f = S_I$ ou $I = A * C = B*D$.
* Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \theta\ [2\pi]$ et $\theta \neq k\pi \Rightarrow f = R_{(I,\ \theta)}$ ou $I \in$ med[AC] $\cap$ med[BD].

  si non $I \in (AB) \cap (CD)$ dans le cas ou med[AC] = med[BD].



Exemple :

$f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ r_{(A,\theta)}$ est un déplacement qui transforme A en C et B en D.

Vérifier qu'il est unique.

V - Antidéplacements :

1°/ Propriétés d'un antidéplacement :

Soit f une isométrie du plan P.
f est un antidéplacement $\Leftrightarrow$ f transforme un repère orthonormé direct en un repère orthonormé indirect
f est un antidéplacement $\Leftrightarrow$ f est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales .

2°/ Caractéristiques d'un antidéplacement :

Théorème 1:

Un antidéplacement qui possède au moins un point invariant est une symétrie orthogonale d'axe passant par ce point

Théorème 2:

Soit f un antidéplacement qui ne fixe aucun point. Il existe un seul vecteur non nul $\vec{u}$ et une droite unique D tels que: $f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$ c'est la forme réduite de f. f est appelé symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe D.

Remarques :

* $f \circ f = t_{\vec{u}} \circ S_D \quad S_D \circ t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$
* Pour tout point M d'image M' par f,
  on a : $M * M' \in D$