Similitudes du plan 4ème Mathématiques

I) Définitions et propriétés

Soit f une application du plan vers lui-même et k un réel **strictement positif**. On dit que f est une similitude de rapport k ssi pour tous points M et N du plan d'images respectifs M' et N' par f on a : $M'N' = k.MN$

* Une isométrie est une similitude de rapport 1 et réciproquement

* Une homothétie de rapport k ; avec $k \in IR^*$, est une similitude de rapport $|k|$ http://mathematiques.kooli.me/

* La composée de deux similitudes de rapport k et k' est une similitude de rapport $k \times k'$

* La composée d'une homothétie de rapport k ($k \in IR^*$) et d'une isométrie est une similitude de rapport $|k|$

* Toute similitude de rapport k est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie

* la réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$

* Une similitude conserve les mesures des angles géométriques

* Une similitude transforme trois points alignés en trois points alignés

* Une similitude transforme trois points non alignés en trois points non alignés

* Une similitude conserve le barycentre de deux ou trois points pondérés

* L'image d'une droite (AB) par une similitude f est la droite $(A'B')$ tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$

* L'image d'un segment de droite [AB] par une similitude f est le segment de droite $[A'B']$ tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$

* Une similitude transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles http://mathematiques.kooli.me/

* Une similitude transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires

* L'image d'un cercle de centre I et de rayon R par une similitude f de rapport k est le cercle de centre I' et de rayon R' Tel que $f(I) = I'$ et $R' = kR$

* L'image de la tangente à un cercle $\mathcal{C}$ en un point A par une similitude f est la tangente au cercle $\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$ en $A' = f(A)$

* soit A, B, C et D quatre points d'images respectifs A', B', C' et D' par une similitude f et soient x et y deux réels si $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{A'D'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$

* Une similitude qui laisse fixe trois points non alignés est l'idp

* Deux similitudes qui coïncident en trois points non alignés sont égales

* Soit A, B, C et D quatre points du plan d'images respectifs A', B', C' et D' par une similitude se rapport k ; on a :

$\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = k^2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{CD}$ http://mathematiques.kooli.me/

II) similitudes directes et indirectes

* Une similitude est dite directe ssi elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.

* Une similitude est dite indirecte ssi elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

* Une similitude est directe ssi elle conserve les mesures des angles orientés de deux vecteurs.

* Une similitude est indirecte ssi elle transforme les mesures des angles orientés de deux vecteurs en leurs opposés

* La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

* La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe

* La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte

* L'application réciproque d'une similitude directe est une similitude directe

* L'application réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte

* Une similitude directe de rapport 1 est un déplacement et réciproquement

* Une similitude indirecte de rapport 1 est un antidéplacement et réciproquement

* Une similitude directe qui laisse fixe deux points distincts du plan est l'idp

* Deux similitudes directes qui coïncident sur deux points <u>distincts</u> sont égales http://mathematiques.kooli.me/

* Deux similitudes indirectes qui coïncident sur deux points <u>distincts</u> sont égales

* Toute similitude de rapport **<u>différent de</u> 1** laisse fixe un seul point du plan, appelé son centre

* Soit A, B, C et D des points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$

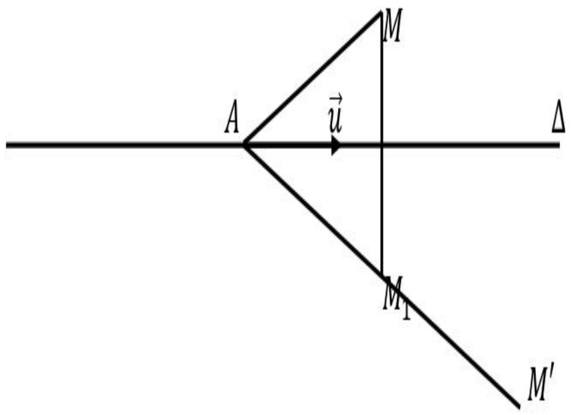
.. il existe une unique similitude directe qui envoie A sur C et B sur D.

.. il existe une unique similitude indirecte qui envoie A sur C et B sur D.

http://mathematiques.kooli.me/

Δ passant par A telle que $f = h \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h$ où h est l'homothétie de centre A et de rapport k

* Soit f une similitude indirecte de rapport k avec $k \neq 1$ et de centre A et d'axe Δ et soit M et M' deux points distincts du plan



on a $f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM' = kAM \\ \left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AM'}}\right) \equiv -\left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AM}}\right) [2\pi] \end{cases}$

* $f \circ f$ est une homothétie de centre A et de rapport k^2

* Soit M et M' deux points distincts du plan tel que $f(M) = M'$

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$

* Soit M et M' deux points distincts du plan tel que $M \neq A$ et $f(M) = M'$ alors Δ est la droite qui porte la bissectrice intérieure du secteur $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right]$

V) Expression complexe d'une similitude directe

P est un plan muni d'un R.O.N.D

* Soit $k \in IR^*\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ alors l'application

$f : P \to \ , M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = kz + b$

f est l'homothétie de rapport k et de centre d'affixe $\frac{b}{1-k}$

* Soit a et b deux nombres complexes tel que $a \notin IR$ et $|a| \neq 1$ alors l'application

$f : P \to \ , M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = az + b$

est la similitude directe de rapport $|a|$, d'angle $\arg(a)$ et centre I avec $z_I = \frac{b}{1-a}$

VI) Expression complexe d'une similitude directe

P est un plan muni d'un R.O.N.D

Soit $f : P \to \ , M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = a\bar{z} + b$

où a et b deux nombres complexes tel que $a \neq 0$

* f est une similitude indirecte de rapport $|a|$

* Si $|a| \neq 1$ alors f est une similitude indirecte de rapport $|a|$ et de centre d'affixe $\frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$

III) similitudes directes

* Soit h une homothétie de rapport k avec $k \in IR_+^*$ et g un déplacement. L'angle du déplacement g est aussi appelé l'angle de la similitude directe $f = h \circ g$

* Soit A et B deux points distincts du plan d'images respectifs A' et B' f est une similitude directe d'angle θ on a alors

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \theta[2\pi]$

* Une similitude directe de rapport 1 et d'angle $\theta \equiv 0[2\pi]$ et une translation et réciproquement

* Une similitude directe de rapport 1 et d'angle θ avec $\theta \not\equiv 0[2\pi]$; est une rotation et réciproquement

* La composée de deux similitudes directes d'angle θ et θ' est une similitude directe d'angle $\theta + \theta'$

* L'application réciproque d'une similitude directe d'angle θ est une similitude directe d'angle $-\theta$

Forme réduite d'une similitude directe :

* Soit f une similitude directe de rapport k ; **avec $k \neq 1$** de centre A et d'angle θ donc $f = h \circ R = R \circ h$

où h est l'homothétie de centre A et de rapport k et R la rotation de centre A et d'angle θ

* A, k et θ sont appelés les éléments caractéristiques de f

* Soit f une similitude directe de rapport k ; **avec $k \neq 1$** de centre A et d'angle θ et soit M et M' deux points du plan tel que $A \neq M$

on a $f(M) = M' \iff \begin{cases} AM' = kAM \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

* Une homothétie de rapport $k \in IR_+^*$ est une similitude directe de rapport k et d'angle $\theta \equiv 0[2\pi]$

* Une homothétie de rapport $k \in IR_-^*$ est une similitude directe de rapport $-k$ et d'angle $\theta \equiv \pi[2\pi]$

* Une similitude directe de rapport $k \neq 1$ et d'angle $\theta \equiv 0[2\pi]$ est une homothétie de rapport k

* Une similitude directe de rapport k et d'angle $\theta \equiv \pi[2\pi]$ est une homothétie de rapport $-k$

* La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport k **avec $k \in IR^*$ et $k \neq 1$** est une homothétie de rapport k

* Soit h et h$'$ deux homothéties de rapports k et k$'$, on a :

si $kk' = 1$ alors h o h$'$ est une translation

si $kk' \neq 1$ alors h o h$'$ est une homothétie de rapport $k\,k'$

IV) similitudes indirectes

* Soit f une similitude indirecte de rapport k avec $k \neq 1$ et de centre A alors il existe une unique symétrie orthogonale d'axe