

Fonctions primitives

Ostedhy
استاذي

EXERCICE N°1

3 POINTS



15'

a) Déterminer l'ensemble de définition de f telle que $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}$.b) Déterminer a et b pour que f admette une primitive F telle que $F(x) = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1}$.

EXERCICE N°2

3 POINTS



15'

Soit $f(x) = \frac{4x-1}{(2x+1)^3}$.a) Déterminer les réels a et b tels que : pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x+1)^3}$.b) Déterminer toutes les primitives de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

EXERCICE N°3

7 POINTS



15'

Soit la fonction $f(x) = (x-1)\sqrt{\frac{1}{2x+1}}$.1*) Déterminer D l'ensemble de définition de f , puis déterminer les réels a et b tels que : pour tout $x \in D$,

$$f(x) = a\sqrt{2x+1} + \frac{b}{\sqrt{2x+1}}.$$

2*) Déterminer les primitives de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

EXERCICE N°4

4 POINTS



25'

Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.1*) Montrer que f admet des primitives sur $]0;1[$.2*) Soit F la primitive de f sur $]0;1[$ qui s'annule pour $x = \frac{3}{4}$ et g la fonction définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$

$$\text{par } g(x) = F(\cos^2 x).$$

a) Montrer g est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ puis calculer g' .b) Montrer que pour tout x de $]0; \frac{\pi}{2}[$ on a : $g(x) = -2x + \frac{\pi}{3}$.



EXERCICE N°4 4 POINTS

25'

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et F la primitive de f sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en zéro.

1*) Soit H la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $H(x) = F(\tan x)$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer $H'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $H(x) = x$.

c) Calculer alors $F(1)$.

2*) Soit G la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $G(x) = F\left(\frac{1}{1+x}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $[0, +\infty[$, et déterminer $G'(x)$.

b) En déduire que : $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE N°4 6 POINTS

35'

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1*) a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2*) Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en zéro.

a) Montrer que F est impaire.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$: $x \leq F(x) \leq 2x$.

c) En déduire la limite de F en $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variation de F .

3*) Soit G la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $G(x) = F(\cos x)$.

a) Dresser le tableau de variation de G .

b) Donner l'allure de la courbe de G sur autre repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (on prend $F(1) = 1,9$).





Donc: $g: x \mapsto F(\cos^2 x); x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Donc: $x \mapsto \cos^2 x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

$\bullet \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[; \cos^2 x \in]0, 1[$

$\bullet F$ est dérivable sur $]0, 1[$

Donc $g: x \mapsto F(\cos^2 x)$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[;$

$$g'(x) = (\cos^2 x)' \times F'(\cos^2 x)$$

$$= -2 \sin x \cos x \times f(\cos^2 x)$$

$$= -2 \sin x \times \cos x \times \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x (1 - \cos^2 x)}}$$





$$= -2 \sin x \times \cos x \times \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x \times \sin^2 x}}$$

$$= -2 \sin x \times \cos x \times \frac{1}{|\cos x| \times |\sin x|}$$

$\cos x \quad \sin x$
($\cos x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

$$= -2$$

Donc $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[; g'(x) = -2$

b) montrons que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[; g'(x) = -2$

On a: $g'(x) = -2$

Donc $g(x) = -2x + c; c \in \mathbb{R}$

or $F\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \quad \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

sig $F\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 0$

sig $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

sig $-2x \frac{\pi}{6} + c = 0 \quad \text{sig } c = \frac{\pi}{3}$

Donc

$$g(x) = -2x + \frac{\pi}{3}$$





Exercice N°5

$$f: x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [0; +\infty[$$

F la primitive de f sur $[0; +\infty[$ / $F(0) = 0$

$$1) H: x \mapsto F(\tan x), \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[$$

On a:

- $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$
- $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[; \tan x \in [0; +\infty[$
- F est dérivable sur $[0; +\infty[$

Donc: H est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[;$

$$H'(x) = (\tan x)' \times F'(\tan x)$$

$$= (1 + \tan^2 x) \times f(\tan x)$$

$$= (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$= 1$$





$$b) \text{ On a : } \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[; H'(x) = 1$$

$$\text{donc : } \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[; H(x) = x + C, \text{ (car)}$$

$$\text{or } F(0) = 0$$

$$\text{sig } F(\tan 0) = 0$$

$$\text{sig } H(0) = 0 \quad \text{sig } C = 0$$

$$\text{donc } \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[; H(x) = x$$

$$c) F(1) = F\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{donc } F(1) = \frac{\pi}{4}$$



2) G est définie sur $[0; +\infty[$;

$$G(x) = F\left(\frac{1}{1+x}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

On a:

- $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$

- $\forall x \in [0; +\infty[; 1+x \geq 1$

$$\text{donc } 0 < \frac{1}{1+x} \leq 1$$

donc $\forall x \in [0; +\infty[; \frac{1}{1+x} \in [0; +\infty[$

- F est dérivable sur $[0; +\infty[$

donc $x \mapsto F\left(\frac{1}{1+x}\right)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$

On a: $x \mapsto \frac{x}{x+2}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$



Exercice 1:

Donner les primitives de f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

$$1) f : x \mapsto \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2} ; I = \mathbb{R}.$$

$$5) f : x \mapsto \frac{x+3}{(x+2)^4} ; I =]-2, +\infty[.$$

$$2) f : x \mapsto \tan x + \tan^3 x ; I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

$$6) f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} ; I =]-\infty, 0[.$$

$$3) f : x \mapsto x\sqrt{x^2+9} ; I = \mathbb{R}.$$

$$7) f : x \mapsto \cos^3 x ; I = \mathbb{R}.$$

$$4) f : x \mapsto \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) ; I =]0, +\infty[.$$

$$8) f : x \mapsto \frac{1}{2x\sqrt{x}} ; I =]0, +\infty[.$$

Exercice 2:

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

1) Justifier que f admet une seule primitive F sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 0.

2) Soit G la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $G(x) = F(\tan^2 x)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $G'(x) = 2 \tan^2 x$.

b) En déduire que pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $G(x) = 2 \tan x - 2x$.

c) Donner alors $F(1)$ et $F\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 3:

On considère la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x^2 - \sqrt{1-x^2}$.

1) Soit F la primitive de f sur $[-1, 1]$ qui s'annule en 0 et G la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $G(x) = F(x) + F(-x)$.

a) Calculer $G'(x)$ pour tout réel x de $[-1, 1]$.

b) En déduire que F est impaire.

2) Soit H la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $H(x) = F(\cos x) - F(\sin x)$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $H'(x)$ pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) En déduire que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $H(x) = x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{3} \sin^3 x$.

Cours : Primitives

Fest une primitive de f

$\Leftrightarrow$ ssi f est une dérivée de F .

Théorème 1. f est continue sur I alors elle admet des primitives sur I .

Théorème 2. Soit f une fonction

continue sur I et a un réel de I .
(unique) Il existe une p.u. de f tel que $F(a) = b$.

Théorème 3.

Si F et G ont deux primitives sur I de f et g alors
 $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

$$u' v^m \rightarrow \frac{u^{m+1}}{m+1} + c$$

$$\frac{u'}{u^m} \rightarrow \frac{u^{-m+1}}{-m+1} + c$$

$$\frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u} + c$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u} + c$$

$$u' \sqrt{u} \rightarrow \frac{2}{3} u \sqrt{u} + c$$

$$u' \times v'(u) \rightarrow v(u) + c$$

Série d'exercices n°16

1) $F(x) = \frac{-1}{2(2x^2 + 2)} + c$

2) $f(x) = \tan x + \tan^3 x$
 $= \tan x (1 + \tan^2 x)$
 $= \tan x \times \tan x$

$F(x) = \frac{\tan^2 x}{2} + c$

3) $f(x) = x \sqrt{x^2 + 9}$
 $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \sqrt{x^2 + 9}$
 $= \frac{1}{2} (x^2 + 9)' \sqrt{x^2 + 9}$

$F(x) = \frac{1}{3} (x^2 + 9) \sqrt{x^2 + 9} + c$

4) $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
 on pose $u(x) = \frac{1}{x} \rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$v(x) = \sin x \rightarrow v'(x) = \cos x$

$f(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

→ Primitive F de f de $]0; +\infty[$

$F(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + c$

5) $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^4}$

$= \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+2)^4}$

→ une primitive F de f sur $] -2; +\infty[$

$F(x) = \frac{-1}{2(x+2)^2} - \frac{1}{3(x+2)^3} + c$

$$\begin{aligned}
 6) f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} \\
 &= \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}}
 \end{aligned}$$

une primitive F de f sur $]-\infty, \infty[$ est.
 $F(x) = -\sqrt{x^2+1} + C$

$$\begin{aligned}
 7) f(x) &= \cos^3 x \\
 &= \cos x (\cos^2 x) \\
 &= \cos x (1 - \sin^2 x) \\
 &= \cos x - \cos x \sin^2 x \\
 &= \sin' x - (\sin' x \times \sin^2 x)
 \end{aligned}$$

une primitive F de f sur $\mathbb{R}$
 est $F(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

$$\begin{aligned}
 8) f(x) &= \frac{1}{2x\sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \\
 F(x) &= -x^{-\frac{1}{2}} + C \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{x}} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) f(x) &= \tan^2 x \\
 &= -1 + 1 + \tan^2 x \\
 \text{une primitive } F \text{ de } f \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\
 \text{est } F(x) &= -x + \tan x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) f(x) &= \cos^2 x \\
 &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \\
 \text{une primitive } F \text{ de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est} \\
 F(x) &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + C \\
 f(x) &= \sin^2 x \\
 &= \frac{1 - \cos 2x}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \\
 \text{une primitive } F \text{ sur } \mathbb{R} \text{ de } f \text{ est:} \\
 F(x) &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) f(x) &= \sin^5 x = \sin x (\sin^2 x)^2 \\
 &= \sin x (1 - \cos^2 x)^2 \\
 &= \sin x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \\
 &= \sin x - 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^4 x \\
 F(x) &= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C
 \end{aligned}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$\begin{aligned}
 \text{Formules d'Euler} \\
 \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
 \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}
 \end{aligned}$$

$$\bullet f(x) = \cos 4x$$

$$= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4$$

$$= \frac{1}{16} (e^{ix} + e^{-ix})^4$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{3ix} \cdot e^{-ix} + 6e^{2ix} \cdot e^{-2ix} + 4e^{ix} \cdot e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6)$$

$$= \frac{1}{16} (2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$$

$$= \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3x}{8} + C$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\bullet f(x) = \cos 4x \cdot \cos x$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos 3x)$$

$$= \frac{1}{2} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos 3x$$

$$F(x) = \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{6} \sin 3x + C$$

$$\bullet f(x) = \sin 2x \sin 3x$$

$$= \frac{1}{2} [\cos x - \cos 5x]$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C$$

$$\bullet f(x) = \sin 3x \cos x$$

$$= \frac{1}{2} [\sin 4x + \sin 2x]$$

$$= \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$F(x) = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\bullet f(x) = a \cos x + b \sin x$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} \quad \varphi?$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{r}$$

$$f(x) = r \cos(x - \varphi)$$

$$\star f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une seule primitive

En $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$

on pose $g(x) = F(x) + (-)F(-x)$

(Montrer qu'elle est paire ou impaire!)

on dérive $g(x)$ (=0 puis

on cherche la const (=0) /

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (primitive de f sur $\mathbb{R}$)

la fonction qui : $x \mapsto -x$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc

$F(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.



Par suite : $g(x) = f(x) + f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{et on a : } g'(x) &= (f(x))' + (f(-x))' \\ &= f'(x) - f'(-x) \\ &= f'(x) - f'(x) \text{ (f est paire)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = 0$$

$$\text{or } g(0) = 2f(0)$$

$$g(0) = 0$$

donc $g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) + f(-x) = 0 \quad \text{d'où}$$

$$f(x) = -f(-x)$$

→ F est impaire.

exercice n° 2 :

$$1) \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

et $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x+1 \neq 0$

donc $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

donc elle admet des primitives et une seule primitive telle qu'elle s'annule en 0. ($f(0) = 0$).

2) a) $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$; $g(x) = F(\tan^2 x)$
la fonction $h: x \mapsto \tan^2 x$ est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$, la fonction F est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme étant une primitive de f sur cet intervalle.

et on a $U([0; \frac{\pi}{2}[) = [0; +\infty[$
donc $G(x) = F(\tan^2 x)$ est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$

et on a :

$$\begin{aligned} G'(x) &= (\tan^2 x)' \times F'(\tan^2 x) \\ &= 2(1 + \tan^2 x) \tan x \times f(\tan^2 x) \\ &= 2(1 + \tan^2 x) \tan x \frac{\sqrt{\tan^2 x}}{\tan^2 x + 1} \end{aligned}$$

$$= 2 \tan x | \tan x |$$

$$= 2 \tan^2 x$$

(car sur $[0; \frac{\pi}{2}[$; $\tan x \geq 0$)

b) $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$; $G'(x) = 2 \tan^2 x$

$$g'(x) = -2 + 2(1 + \tan^2 x)$$

Donc :

$$G(x) = -2x + 2 \tan x + c$$

$$\text{or } G(0) = F(\tan^2 0)$$

$$G(0) = F(0)$$

$$G(0) = 0$$

$$\text{d'où } -2 \times 0 + 2 \tan 0 + c = 0$$

$$c = 0$$

ainsi

$$G(x) = 2 \tan x - 2x$$

$$\text{c) } G\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\tan^2 \frac{\pi}{4}\right) = F(1)$$

$$\begin{aligned} \text{or } G\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -2 \times \frac{\pi}{4} + 2 \tan \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{\pi}{2} + 2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } F(1) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{on a } G\left(\frac{\pi}{6}\right) = F\left(\tan^2 \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left(\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = F\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{or } G\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \times \frac{\pi}{6} + 2 \tan \frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}$$





Exercice N°1

$$a) f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq : } x^2 + x + 1 \neq 0\}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } x^2 + x + 1 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0. \end{aligned}$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}; x^2 + x + 1 \neq 0$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R}.$$

b) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ alors f admet au moins primitive sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Soit } F(x) = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1} \text{ une primitive}$$

$$\text{de } f \text{ sig : } F'(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{a(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(ax + b)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{ax^2 + ax + a - (2ax^2 + 2bx + ax + b)}{(x^2 + x + 1)^2} \end{aligned}$$



exercice n°3.

Don $G(x) = F(x) + F(-x)$

F est dérivable sur $[-1, 1]$ car c'est une primitive de f sur $[-1, 1]$

$-x$ est dérivable sur $[-1, 1]$

alors $F(-x)$ est dérivable sur $[-1, 1]$

G est alors dérivable sur $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) + -F'(-x) \\ &= f(x) - f(-x) \\ &= x^2 - \sqrt{1-x^2} - x^2 + \sqrt{1-x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) $G'(x) = 0$

d'où $F(x) + F(-x)$ est constante

$$G(0) = 2F(0) = 0$$

$$\Rightarrow F(x) + F(-x) = 0$$

$$F(x) = -F(-x)$$

F est alors impaire.

2) a) pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$\cos x$ est dérivable et $\sin x$ est dérivable.

$\cos x$ est à valeurs dans $[0, 1]$

et $\sin x$ à valeurs dans $[0, 1]$

$$[0, 1] \subset [-1, 1]$$

F est dérivable sur $[0, 1]$

ainsi H est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned} H'(x) &= (F(\cos x))' - (F(\sin x))' \\ &= -\sin x F'(\cos x) - \cos x F'(\sin x) \\ &= -\sin x f(\cos x) - \cos x f(\sin x) \\ &= -\sin x (\cos^2 x - \sqrt{1-\cos^2 x}) - \cos x (\sin^2 x - \sqrt{1-\sin^2 x}) \\ &= -\sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x + \sin^3 x + \cos^3 x \end{aligned}$$

($\sin x \geq 0$ et $\cos x \geq 0$)

alors $|\sin x| = \sin x$ et $|\cos x| = \cos x$

$$H'(x) = (\cos x)' \cos^2 x - (\sin x)' \sin^2 x + 1$$

H est la primitive de H' sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

$$H(x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\sin^3 x}{3} + x + C$$

$$H(0) = F(1)$$

$$H(\frac{\pi}{2}) = -F(1)$$

$$H(0) + H(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\frac{1}{3} + C - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} + C = 0$$

$$2C = -\frac{\pi}{2}$$

$$C = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{d'où } H(x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\sin^3 x}{3} + x - \frac{\pi}{4}$$

pour $H(x) \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

ou bien: $H(\frac{\pi}{4}) = 0$

$$\frac{\pi}{4} + C = 0$$

$$C = -\frac{\pi}{4}$$

Exercice 1: Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ et F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ tel que $F(0) = 0$ et $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

1) Montrer à l'aide des I.A.F que $|F(x)| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) a) On pose $\varphi(x) = F(x) + \frac{1}{x}$, $x \geq 1$. Montrer que φ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

b) En déduire que F est majorée sur $[1, +\infty[$ et qu'elle admet une limite finie l en $+\infty$.

2) Soit $g(x) = F(x) + F(\frac{1}{x})$, $x \in \mathbb{R}_+$. Calculer $g'(x)$. En déduire que $g(x) = 2F(1)$ et que $l = \frac{\pi}{2}$.

3) Montrer que F est impair puis tracer la courbe C_f de la fonction F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) a) Montrer que l'équation $F(x) = 2x - 1$ admet une seule solution $\alpha \in]0, 2[$.

b) On considère la suite U définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = 1 + F(\frac{1}{2} U_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [0, 2]$

et que $|U_{n+1} - 2\alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - 2\alpha|$. En déduire que U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2: Soit f la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

1) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}_+$. Tracer la courbe représentative de g dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$.

3) Pour tout entier naturel non nul n , on pose $V_n = (n^2 + n) [g(\frac{1}{n}) - g(\frac{1}{n+1})]$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , il existe un réel U_n de l'intervalle $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ tel que $V_n = \frac{1}{(1+U_n)\sqrt{U_n}}$. En déduire la limite de la suite (V_n) .

Exercice 3: On a représenté dans la graphique ci-contre les courbes $\mathcal{C}$ et Γ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et de sa dérivée f' . D est une asymptote oblique à C au voisinage de $(+\infty)$.

1) Reconnaitre parmi $\mathcal{C}$ et Γ celle qui représente f .

2) Montrer que f admet une fonction réciproque et déterminer son ensemble de définition I . Tracer $\mathcal{C} \cap f^{-1}$.

3) a) On admet que $f(x) = b + \frac{a}{x^2}$ pour tout $x > 0$. Déterminer a et b .

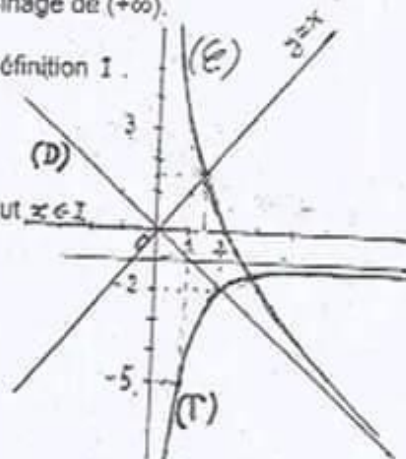
b) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x > 0$ puis celle de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

4) On pose $g(x) = f \circ U(x)$ tel que $U(x) = \frac{1}{\cos x}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

a) Dresser le tableau de variation de g . En déduire que g est bijective.

b) déterminer le domaine k de dérivabilité de g^{-1} et calculer $(g^{-1})'(a)$.

c) Tracer la courbe de g et celle de g^{-1} dans un même r.o.n $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Exercice 4: On pose $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{|x|}{2\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) a) Vérifier que g est paire puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

b) Montrer que pour tout réel x : $-\frac{1}{2} \leq g(x) < 0$.

2) a) Montrer que g admet une seule primitive f sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = \frac{3}{2}$.

b) Déterminer $f(x)$ pour tout réel x .

3) a) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ et en déduire la restriction de f à $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que $\mathcal{C}_h$ admet

c) Montrer que h admet

son ensemble de définition puis tracer $\mathcal{C}_h$ et

BAC.MOURAJAA.COM

bac Math

Exercice 1 : I) Indiquer la seule bonne réponse pour chacune des questions suivantes :

1) La fonction $x \mapsto x + 2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

- a) $x \mapsto 1 - 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $x \mapsto 1 - \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$ c) $x \mapsto 1 - \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

2) La primitive sur $[0, \pi[$ de $x \mapsto \cos^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)$ qui s'annule en 0 est :

- a) $x \mapsto 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ b) $x \mapsto \frac{1}{2} \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ c) $x \mapsto x + \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

II) Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse :

- 1) Si F est une primitive de f sur I alors F^2 est une primitive de f^2 sur I .
 2) Les primitives de $x \mapsto \cos x$ qui s'annulent respectivement en 0 et en π sont égales.
 3) Si f est impaire et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ alors F est paire.

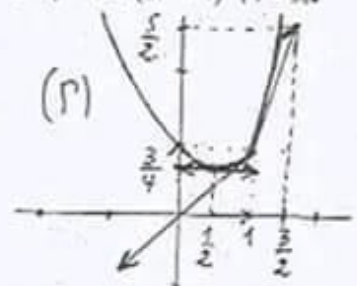
Exercice 2 : Donner une primitive de f sur I dans chacun des cas suivants.

1) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + \sqrt{1+2x}$; $I = \mathbb{R}$. 2) $f(x) = \frac{x}{(2x-1)^4} - \frac{x-1}{(x^2-2x)^4}$; $I =]2, +\infty[$ 3) $f(x) = x \sqrt{(x^2+4)^2}$; $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = (x-1)(x^2-2x+3)^3$; $I = \mathbb{R}$ 5) $f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$; $I =]-2, +\infty[$ 6) $f(x) = \sin^2 x + \tan^4 x$; $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

7) $f(x) = \sin x \tan^3 x$; $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ 8) $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$; $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ 9) $f(x) = (1+\sqrt{x})^2 + 2x(x^2+1)^3$; $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Dans le graphique ci-contre, Γ désigne la courbe d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$. 1) Déterminer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$; $f_2'(1)$ et $f_2'(1)$.



2) On admet que $f(x) = x^2 + |1-x|$ pour tout réel x .

a) Montrer que f admet une seule primitive F tel que $F(1) = 1$.

b) Déterminer $F(x)$ pour tout réel x puis dresser son tableau de variation.

3) Montrer que F admet une fonction réciproque F^{-1} . Tracer C_F et $C_{F^{-1}}$.

Exercice 4 : On a tracé dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que f admet une unique primitive F sur $\mathbb{R}$ tel que $F(0) = 0$.

2) Préciser le sens de variation de F et montrer que F est impaire.

3) a) Montrer que $\forall x \geq 2$, $F(x) \leq F(2) + \frac{3}{5} - \frac{3x}{10}$. Déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

b) Montrer que C_F admet un point d'inflexion.

4) On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \frac{1-x^2}{2(1+x^2)}$ et on pose $G(x) = F(\tan x)$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.



a) Montrer que G est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $G'(x)$.

b) En déduire que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $G(x) = x - \frac{1}{2} \tan x$. Calculer alors $F(1)$, $F(\frac{1}{\sqrt{3}})$ et $F(-\frac{1}{\sqrt{3}})$.

c) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = -\infty$; Tracer la courbe de F .

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $f_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$.

1) Montrer que f_n admet au moins une primitive sur $] -1, 1[$.

2) a) Soit F_n la primitive de f_n sur $] -1, 1[$ qui s'annule en 0. Montrer que: $F_n(x) = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}$.

b) En déduire une autre expression de $f_n(x)$ pour tout $x \in] -1, 1[$.

3) Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ et U_n la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $U_n = \frac{1}{n^2} (1 + 2\tan \alpha + 3\tan^2 \alpha + \dots + n \tan^{n-1} \alpha)$.

Déduire de ce qui précède $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Primitives

Primitive $\longleftrightarrow$ Dérivée

$$\boxed{\propto} F \longleftrightarrow \boxed{\propto} f \longleftrightarrow \boxed{\propto} f' \longleftrightarrow \boxed{\propto} f''$$

$$c^{\text{te}} x \longleftrightarrow c^{\text{te}}$$

$$3x \longleftrightarrow 3$$

$$-\sqrt{2}x \longleftrightarrow -\sqrt{2}$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \longleftrightarrow x^n$$

$$\frac{x^2}{2} \longleftrightarrow x$$

$$\frac{x^4}{4} \longleftrightarrow x^3$$

$$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \longleftrightarrow \frac{1}{x^n}$$

$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$-\frac{1}{2x^2} \longleftrightarrow \frac{1}{x^3}$$

$$-\frac{1}{6x^6} \longleftrightarrow \frac{1}{x^7}$$

$$\frac{2}{3} x \sqrt{x} \longleftrightarrow \sqrt{x}$$

$$\frac{2}{3} u \sqrt{u} \longleftrightarrow u' \sqrt{u}$$

$$2\sqrt{u} \longleftrightarrow \frac{u'}{\sqrt{u}}$$

$$2\sqrt{x} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{2}{3} (x^2+1) \sqrt{x^2+1} \longleftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$2\sqrt{x^2+1} \longleftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{u^{n+1}}{n+1} \longleftrightarrow u' u^n$$

$$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} \longleftrightarrow \frac{u'}{u^n}$$

$$u \circ v(n) \longleftrightarrow v' u'(v(n))$$

$$\frac{(x^2+1)^8}{8} \longleftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$-\frac{1}{6(x^2+1)^6} \longleftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^7}$$

$$\sin\left(\frac{\ln x}{x}\right) \longleftrightarrow \frac{1}{x} \cos\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$x \ln x - x \longleftrightarrow \ln x$$

$$e^x \longleftrightarrow e^x$$

$$\frac{1}{a} e^{ax+b} \longleftrightarrow e^{ax+b} \quad a \neq 0$$

$$\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+2} \longleftrightarrow \frac{\ln^n x}{x}$$

$$\ln(\ln x) \longleftrightarrow \frac{1}{x \ln x}$$

$$\frac{1}{2} e^{2x-1} \longleftrightarrow e^{2x-1}$$

$$\frac{(\ln x)^2}{2} \longleftrightarrow \frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{\ln^4 x}{4} \longleftrightarrow \frac{\ln^3 x}{x}$$

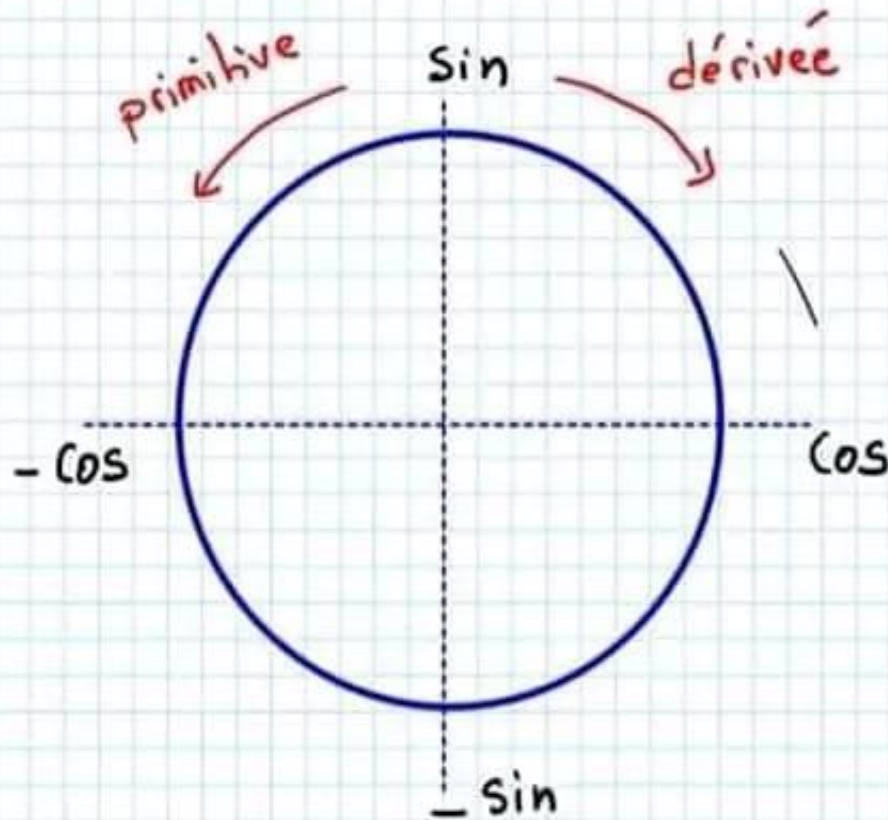
■ Si f est continue sur un intervalle I .
alors f admet une primitive F sur I .

■ F est une primitive de f sur I .
sig F est dérivable sur I et $\forall x \in I$.

$$F'(x) = f(x)$$

■ F est la primitive de f sur I tel que
 $F(a) = b$.

Trigonometrie.



$$\frac{1}{a} \sin(ax+b) \longleftrightarrow \cos(ax+b)$$

$$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) \longleftrightarrow \sin(ax+b)$$

$$-\ln|\cos x| \longleftrightarrow \tan x \longleftrightarrow 1 + \tan^2 x$$

Integral

Calcul d'aire

Calcul volume

Calcul
valeur
moyenne.

■ $\int_a^b f(t) dt$ c'est l'aire algebrique

de la partie du plan limitée par ℓ_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ ($a < b$)

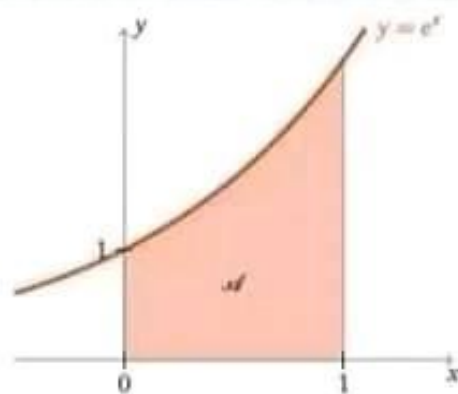
Exemples

■
$$A = \int_0^1 e^x dx$$

$\downarrow$ primitive

$$= [e^x]_0^1$$

$$= e^1 - e^0 = e - 1$$



■
$$\int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1)$$

$= e - e - 0 - (-1) = 1$

$$\begin{aligned} \square \int_1^2 x^2 - 3x + 1 \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{3}{2} \times 4 + 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1 \right) \\ &= -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \, dx &= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \sin \pi - \frac{1}{2} \sin 0 \\ &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx &= \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Propriétés. f et g continue sur $[a, b]$

$$\square \forall x \in [a, b] : f(x) \geq 0 \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x) \, dx \geq 0.$$

$$\square \forall x \in [a, b] : f(x) \leq 0 \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x) \, dx \leq 0.$$

$$\square \forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x) \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

$$\square \forall x \in [a, b] : \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Parité - Périodicité

f est continue sur $[a, b]$

■ f est paire sur $[-a, a]$; on a : $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

■ f est impaire sur $[-a, a]$; on a : $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

■ si f est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

Exemples

■ $I = \int_{-5}^5 x^3 + x dx$
 $= 0$

car :

$f: x \mapsto x^3 + x$ est une fonction impaire car.
 $\forall x \in \mathbb{R}; -x \in \mathbb{R}$ et
 $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x$
 $= -(x^3 + x)$
 $= -f(x)$

■ $J = \int_{-1}^1 t^4 + t^2 - 1 dt$, on a $g: t \mapsto t^4 + t^2 - 1$ est paire
 car $\forall t \in \mathbb{R}, (-t) \in \mathbb{R}$.
 $g(-t) = (-t)^4 + (-t)^2 - 1$
 $= t^4 + t^2 - 1 = g(t)$
 $= 2 \int_0^1 t^4 + t^2 - 1 dt$

$$\begin{aligned}
 \square K &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos 2x \, dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4} + \pi} \cos 2x \, dx \\
 &= \int_0^{\pi} \cos 2x \, dx
 \end{aligned}$$

$x \mapsto \cos 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$
et périodique de période

$$T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

Théorème la moyenne

Si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$.

$\square$ le réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Exemple Soit $f(x) = x^2 - 1$.

Déterminer la valeur moyenne de f sur $[1, 2]$

$$\begin{aligned}
 \overline{f} &= \frac{1}{2-1} \int_1^2 f(x) \, dx = \int_1^2 x^2 - 1 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 \\
 &= \frac{2^3}{3} - 2 - \left(\frac{1^3}{3} - 1 \right)
 \end{aligned}$$



$$= \frac{ax^2 + ax + a - 2ax^2 - 2bx - ax - b}{(x^2 + x + 1)^2}$$

donc

$$F'(x) = \frac{-ax^2 - 2bx + a - b}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ -2b = 2 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \text{sig} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

donc $F(x) = \frac{-x - 1}{x^2 + x + 1}$

Exercice N°2 :

$$f(x) = \frac{4x - 1}{(2x + 1)^3}$$

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x+1)^3} \\ &= \frac{a(2x+1) + b}{(2x+1)^3} \end{aligned}$$



$$= \frac{8}{3} - 2 + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{10}{3} - 2$$

$$= \frac{4}{3}$$

Calcul d'aire

Définition 1 : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

On appelle

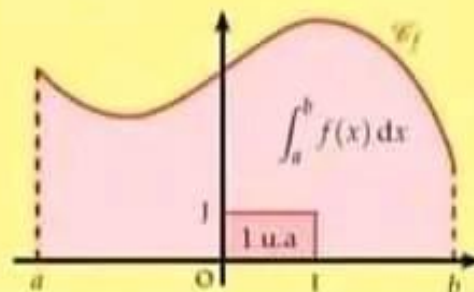
- **Unité d'aire (u.a.) :** l'aire du rectangle bâti à partir des points O, I et J .
- **Domaine sous la courbe :** domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ ($a \leq b$).

Ce domaine est l'ensemble des point $M(x; y)$ du plan tels que :

$$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

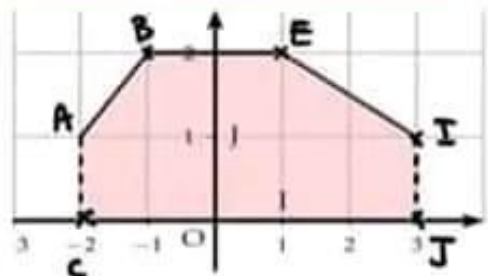
- **Intégrale de f sur $[a; b]$:** la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$.

On la note : $\int_a^b f(x) dx$



Exemple : On donne la représentation suivante d'une fonction f sur $[-2; 3]$ ainsi que les mesures : $OI = 2$ cm et $OJ = 3$ cm. Calculer :

- L'unité d'aire.
- $\int_{-2}^3 f(x) dx$ puis l'aire en cm^2



□ L'unité d'aire : $2 \times 3 = 6 \text{ cm}^2$

□ $\int_{-2}^3 f(x) dx \text{ (u.a.)} = \mathcal{A}(A I J C) + \mathcal{A}(A I E B)$

$$= 5 \times 1 + \frac{(AI + BE) \times 1}{2}$$

$$= 5 + \frac{5+2}{2} = 5 + \frac{7}{2} \text{ (ua)} \\ = \frac{17}{2} \times 6 \text{ cm}^2 = 51 \text{ cm}^2$$

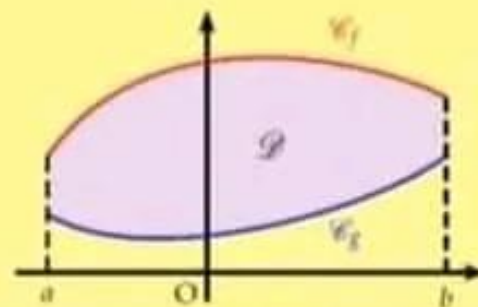
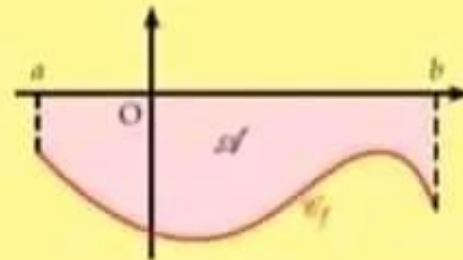
Propriété 1 : Relation entre aire et intégrale

- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ telle que $f \leq 0$. Soit $\mathcal{A}$ l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. On a alors :

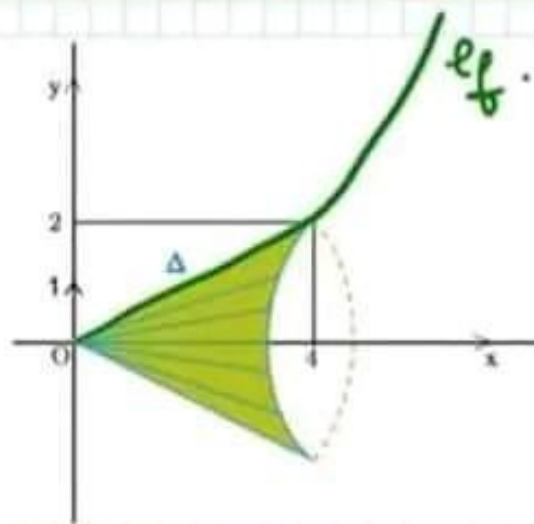
$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx$$

- Soient deux fonctions f et g continues sur $[a; b]$ telles que $f \geq g$. Soit $\mathcal{P}$ l'aire comprise entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$. On a alors :

$$\mathcal{P} = \int_a^b (f - g)(x) dx$$



Volume



$$V = \pi \int_0^4 f^2(x) dx$$

Théorème admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On considère la partie $\mathcal{P}$ du plan limitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la partie $\mathcal{P}$ autour de l'axe des abscisses. Alors on a : $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ (unité de volume)

Integration par partie.

I : polynôme

$$\int \underbrace{I}_{u} \cdot \underbrace{\text{trigo}}_{v'} \quad \text{ou} \quad \int \underbrace{I}_{v'} \cdot \underbrace{\ln}_{u} \quad \text{ou} \quad \int \underbrace{I}_{u} \cdot \underbrace{\exp.}_{v'}$$

Exemples

$$I = \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \cdot \underbrace{\ln x}_{u} dx.$$

posons

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & \longleftrightarrow & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) &= \frac{x^2}{2} & \longleftrightarrow & v'(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \left[u(x) \cdot v(x) \right]_1^e - \int_1^e u'(x) v(x) dx. \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx. \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e \\ &= \left(\frac{e^2}{2} \ln e - \frac{e^2}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2 + 1}{4}} \end{aligned}$$



Primitives et Calcul d'une intégrale

I) Primitive

1) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I , toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée F' est égale à f .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 2$.

Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x - 7$ et $G(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x + 8$ sont des primitives de f .

2) Ensemble des primitives d'une fonction :

a) Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On suppose qu'il existe une primitive F de f sur I .

L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où k décrit $\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit G une primitive de f sur I . On a donc $G' = F' = f$.

Donc pour tout $x \in I$, on a $(G - F)'(x) = 0$.

Donc la fonction $G - F$ est constante sur l'intervalle I , il existe donc un réel k tel que pour tout $x \in I$, on a $(G - F)(x) = k$ d'où $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Réciproquement soit G la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

On a $G'(x) = F'(x) + 0$ donc $G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$ donc G est une primitive de f sur I .

Remarques :

Si la fonction f admet une primitive sur un intervalle I alors elle en admet une infinité.

Soit G et F deux primitives de f sur I tels que $G(x) = F(x) + k$, alors dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de G est obtenue à partir de la courbe représentative de F par translation de vecteur $\vec{j}$.



b) Primitive prenant une valeur donnée en un réel donné :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On suppose que f admet des primitives sur I . Soit x_0 et y_0 deux réels tels que $x_0 \in I$.

Il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$

Preuve :

La fonction f admet des primitives, soit G une primitive de f .

On considère la fonction F définie par $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$

F est aussi une primitive de f car $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

De plus on a $F(x_0) = G(x_0) - G(x_0) + y_0 = y_0$ **Donc F existe.**

Soit H une autre primitive de f vérifiant $H(x_0) = y_0$.

On sait qu'il existe un réel k tel que $H(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Donc en particulier on a $H(x_0) = F(x_0) + k$ d'où $y_0 = y_0 + k$ donc $k = 0$ donc $H = F$.

La fonction F est donc bien unique.

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$

Déterminer la primitive F de f telle que $F(3) = -5$

On vérifie facilement que les primitives de f sont $F(x) = x^2 + 3x + k$, $k \in \mathbb{R}$

Si on veut $F(3) = -5$ alors $3^2 + 3 \times 3 + k = -5$ d'où $k = -23$

La primitive cherchée est donc $F(x) = x^2 + 3x - 23$



EXERCICE N°4Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1/ $f(x) = (x^2 + x + 1)^3 (2x + 1)$, $I = \mathbb{R}$

2/ $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$, $I = \mathbb{R}$

3/ $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 - x^2 + 1}{x^2}$, $I =]0, +\infty[$

4/ $f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x - 1}}$, $I =]1, +\infty[$

5/ $f(x) = \frac{2 \sin x}{(2 + \cos x)^3}$, $I = \mathbb{R}$

6/ $f(x) = \lg x + \lg^3 x$, $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

7/ $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \sin x}}$, $I = \mathbb{R}$

8/ $f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$, $I =]0, +\infty[$

EXERCICE N° 5Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ 1/ a) Montrer que f admet sur $[0, +\infty[$ une unique primitive F telle que $F(0) = 0$.b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F(x) \geq 0$.2/ Soit G la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $G(x) = F(\tan^2 x)$ a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $G'(x) = \tan^2 x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.b) Donner l'expression de $G(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.c) En déduire la valeur de $F(1)$.

Scanned with CamScanner

EXERCICE N° 6Soit la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x^2 - \sqrt{1 - x^2}$.1/ a) Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-1, 1]$.b) Soit F la primitive de f sur $[-1, 1]$ telle que $F(0) = 0$ et G la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $G(x) = F(x) + F(-x)$.Calculer $G'(x)$ pour tout réel x de $[-1, 1]$. En déduire que F est impaire.2/ Soit H la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $H(x) = F(\cos x) - F(\sin x)$.a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $H'(x)$ pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.b) En déduire que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $H(x) = x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{3} \sin^3 x$.c) Calculer $F(1)$.



Exercice 1

- 1) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^2}$; $x \in \mathbb{R}_+^*$; $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{x} + C$; $x \in \mathbb{R}_+^*$
- 2) $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^4} = \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+2)^4}$; $x \in]-2, +\infty[$; $F(x) = -\frac{1}{2(x+2)^2} - \frac{1}{3(x+2)^3} + C$; $x \in]-2, +\infty[$
- 3) $f(x) = -\frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^6$; $x \in \mathbb{R}_+^*$; $F(x) = \frac{1}{7} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^7 + C$; $x \in \mathbb{R}_+^*$
- 4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}$; $x \in \mathbb{R}_+^*$; $F(x) = -\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} + C$; $x \in \mathbb{R}_+^*$
- 5) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$; $x \in \mathbb{R}$; $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$; $x \in \mathbb{R}$
- 6) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; $F(x) = \frac{3}{8}x + \cos x + C$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
- 7) $f(x) = -\frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $x \in \mathbb{R}_+^*$; $F(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + C$; $x \in \mathbb{R}_+^*$
- 8) $f(x) = x^2(x-1)^{2014} = (x-1)^{2014} + 2(x-1)^{2015} + (x-1)^{2016}$; $x \in \mathbb{R}$; $F(x) = \frac{1}{2017}(x-1)^{2017} + \frac{1}{1008}(x-1)^{2018} + \frac{1}{2019}(x-1)^{2019} + C$; $x \in \mathbb{R}$
- 9) $f(x) = \tan^4 x = \tan^2 x (\tan^2 x + 1) - (\tan^2 x + 1) + 1$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; $F(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
- 10) $f(x) = \frac{1}{\tan^4 x} + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1+\tan^2 x}{\tan^4 x}$; $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; $F(x) = \frac{-1}{3\tan^3 x} + C$; $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- 11) $f(x) = \sin x + \cos^2 x = \sin x + \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$; $x \in \mathbb{R}$; $F(x) = -\cos x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 2x + x) + C$; $x \in \mathbb{R}$
- 12) $f(x) = \sin^2 x \cos^3 x = \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x$; $x \in \mathbb{R}$; $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$; $x \in \mathbb{R}$
- 13) $f(x) = \sin^5 x = \sin x (1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x) = \sin x - \sin x \cos^4 x + 2\sin x \cos^2 x$; $x \in \mathbb{R}$
 $F(x) = -\cos x - \frac{1}{5}\cos^5 x + 2x \frac{1}{3}\cos^3 x + C$; $x \in \mathbb{R}$
- 14) $f(x) = \sin^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$; $x \in \mathbb{R}$; $F(x) = \frac{1}{32}\sin(4x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x + C$; $x \in \mathbb{R}$

Exercice 2

- 1/a) $f(x) = x^2 - \sqrt{1-x^2}$; $x \in [-1, 1]$. f est continue sur $[-1, 1]$ donc f admet au moins une primitive sur $[-1, 1]$.
- b) F la primitive de f sur $[-1, 1]$, telle que $F(0) = 0$ donc $F'(x) = f(x)$; $x \in [-1, 1]$
 $G(x) = F(x) + F(-x)$; $x \in [-1, 1]$. G est dérivable sur $[-1, 1]$ et on a: $G'(x) = F'(x) - F'(-x)$
 $= f(x) - f(-x)$; $x \in [-1, 1]$. $f(-x) = (-x)^2 - \sqrt{1-(-x)^2} = x^2 - \sqrt{1-x^2} = f(x)$; $\forall x \in [-1, 1]$
donc $G'(x) = 0$; $\forall x \in [-1, 1]$. $G(0) = F(0) + F(-0) = 0$ donc $G(x) = 0 \forall x \in [-1, 1]$.
d'où $F(-x) = -F(x)$; $\forall x \in [-1, 1]$ et par suite F est impaire. ($x \in [-1, 1]$, $-x \in [-1, 1]$)
- 2) $H(x) = F(\cos x) - F(\sin x)$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- a) $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \sin x$ et $F: x \mapsto F(x)$ sont dérivables sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $[0, 1]$
 $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x \in [0, 1]$ et $\sin x \in [0, 1]$ donc H est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.



$$\begin{aligned}
 H'(x) &= -\sin x \left(\cos x - \cos x \frac{f(\sin x)}{f(\cos x)} \right) - \cos x \left(\sin x - \sin x \frac{f(\cos x)}{f(\sin x)} \right) \\
 &= -\sin x \left[\cos^2 x - \sqrt{1-\cos^2 x} \right] - \cos x \left[\sin^2 x - \sqrt{1-\sin^2 x} \right] \\
 &= \left[-\sin x \cos^2 x + \sin^2 x \right] - \left[\cos x \sin^2 x - \cos^2 x \right] \\
 &= -\sin x \cos^2 x + \sin^2 x - \cos x \sin^2 x + \cos^2 x \\
 &= 1 - \sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x; \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]
 \end{aligned}$$

b) $H'(x) = 1 - \sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x; \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

donc $H(x) = x + \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - F\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

donc $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + C = 0$ Soit $C = -\frac{\pi}{4}$.

$H(x) = x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{3} \sin^3 x; \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) $H(0) = F(\cos(0)) - F(\sin(0)) = F(1) - F(0) = F(1)$

$H(0) = 0 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cos^3 0 - \frac{1}{3} \sin^3 0 = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}$ donc $F(1) = \frac{4-3\pi}{12}$

Exercice 3

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}; \quad x \in [0, 2]$

1) f est dérivable sur $[0, 2[$ et $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}^2} = \frac{-2x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}; \quad x \in [0, 2[$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

x	0	2
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	1	$\rightarrow +\infty$

2) a) $x \mapsto 2 \sin x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $2 \sin x \in [0, 2[$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
 F est la primitive de f sur $[0, 2[$ qui s'annule en 0 donc $F'(x) = f(x); \quad x \in [0, 2[$
et $F(0) = 0$. F est dérivable sur $[0, 2[$.

d'où $G(x) = F(2 \sin x)$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

$G'(x) = F'(2 \sin x) \times 2 \cos x = f(2 \sin x) \times 2 \cos x = \frac{2}{\sqrt{4-4 \sin^2 x}} \times 2 \cos x = \frac{4 \cos x}{\sqrt{4 \cos^2 x}}$
 $= \frac{4 \cos x}{2 \cos x} = 2; \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ Car $|\cos x| = \cos x; \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

b) $G'(x) = 2; \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $G(x) = 2x + C$. Comme $F(0) = 0$ donc $C = 0$





Soit $G(x) = 2x; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Exercice N°4

- 1) $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^3; x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{4}(x^2+x+1)^4 + C; x \in \mathbb{R}$
- 2) $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}; x \in \mathbb{R} \quad F(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C; x \in \mathbb{R}$
- 3) $f(x) = \frac{x^4+3x^3-x^2+1}{x^2} = x^2+3x-1+\frac{1}{x^2}; x \in]0, +\infty[; F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{x} + C; x \in]0, +\infty[$
- 4) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1} + \frac{3}{\sqrt{x-1}}; x \in]1, +\infty[; F(x) = \frac{4\sqrt{x-1}}{3} + 6\sqrt{x-1} + C; x \in]1, +\infty[$
- 5) $f(x) = \frac{2 \sin x}{(2+\cos x)^3} = -\frac{2x - \sin x}{(2+\cos x)^3}; x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{(2+\cos x)^2} + C; x \in \mathbb{R}$
- 6) $f(x) = \tan x + \tan^3 x = (1+\tan^2 x) \tan x; x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[; F(x) = \frac{1}{2} \tan^2 x + C; x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- 7) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}; x \in \mathbb{R} \quad F(x) = 2\sqrt{2+\sin x} + C; x \in \mathbb{R}$
- 8) $f(x) = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2}; x \in]0, +\infty[; F(x) = \cos(\frac{1}{x}); x \in]0, +\infty[.$

Exercice 5

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}; x \in [0, +\infty[$$

1) a) f est continue sur $[0, +\infty[$ donc f admet une unique primitive F sur $[0, +\infty[$ telle $F(0) = 0$

b) $F'(x) = f(x) \geq 0$, F est croissante sur $[0, +\infty[$ donc $\forall x \geq 0; F(x) \geq F(0) = 0$

2) a) $x \mapsto \tan^2 x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$; $\tan^2 x \in [0, +\infty[; \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$x \mapsto F(x)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ donc $x \mapsto G(x) = F(\tan^2 x)$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. $G'(x) = 2 \tan x \times (1+\tan^2 x) \times F'(\tan^2 x)$

$$= 2 \tan x (1+\tan^2 x) f(\tan^2 x) = 2 \tan x (1+\tan^2 x) \times \frac{\sqrt{\tan^2 x}}{2(1+\tan^2 x)} = \tan^2 x$$

pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ car $\sqrt{\tan^2 x} = \tan x \geq 0$

b) $G'(x) = \tan^2 x + 1 - 1$ donc $G(x) = \tan x - x + C; x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

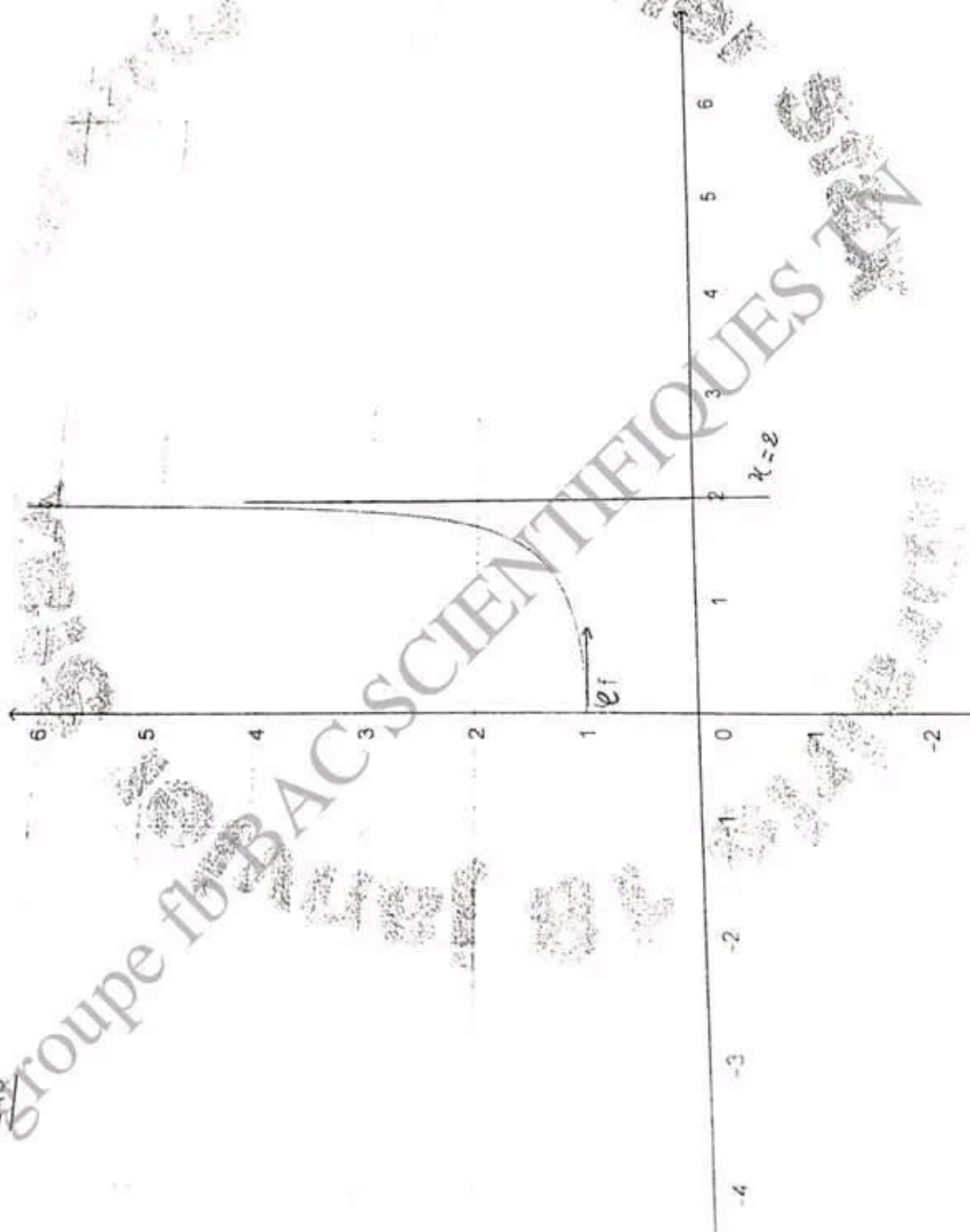
$G(0) = F(\tan^2 0) = F(0) = 0$ donc $C = 0$. Soit $G(x) = \tan x - x; x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

c) $G(\frac{\pi}{4}) = F(\tan^2(\frac{\pi}{4})) = F(1)$; $G(\frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$ donc $F(1) = 1 - \frac{\pi}{4}$

Exercice 6 = Exercice 8



Ex 3





$$= \frac{2ax + a + b}{(2x+1)^3}$$

$$= \frac{4x - 1}{(2x+1)^3}$$

$$\text{sig: } \begin{cases} 2a = 4 \\ a + b = -1 \end{cases} \quad \text{sig } \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}; f(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(2x+1)^3}$$

$$b) \text{ Soit } x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[.$$

$$\text{On a: } f(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(2x+1)^3}$$

$$= \frac{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{2}}{(2x+1)^2} - \frac{3 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{2}}{(2x+1)^3}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2} - \frac{3}{2} \times \frac{u'}{u^3}$$



تلخيص درس Primitive

Page Instagram : WaelDocuments

→ Une fn f et sur I possède des primitives sur I .

primitive usuelle

f	I	F
a	$\mathbb{R}$	$ax + Cte$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + Cte$
$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x} + Cte$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int_0 + \infty[$	$\sqrt{x} + Cte$
$\sqrt{x}$	$\int_0 + \infty[$	$\frac{2}{3} x \sqrt{x} + Cte$
$\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + Cte$
$\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + Cte$
$1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + Cte$
$1 + \cot^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$-\cot x + Cte$

f	F
u'	$u + Cte$
$u'v + u.v'$	$u.v + Cte$
$u' + v'$	$u + v + Cte$
$(\alpha u)'$	$\alpha u + Cte$
$u'.v - u.v'$	$\frac{u}{v} + Cte$

يمكنكم شراء كتب
مراجعة باك الوريا جميع
الشعب جميع المواد
حصرياً على صفحتنا
@WaelDocuments.com

$$u' v'(u)$$

$$u' u^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$$

$$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$u' \sqrt{u}$$

$$\frac{1}{u'(u-1)}$$

$$\frac{u'}{u^n}$$

$$v' u + cte$$

$$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + cte$$

$$\sqrt{u} + cte$$

$$\frac{2}{3} u \sqrt{u} + cte$$

$$u^{-1} + cte$$

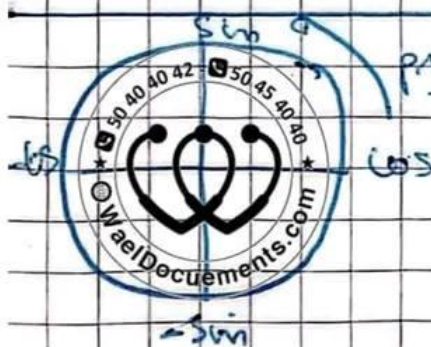
$$(n+1) u^{n+1}$$

WaelDocument.com

WaelDocument.com

@WaelDocument

AELDOCUMENTS.com



primitive

Rq: justifier l'unicité

et l'existence de F tq $F(0) = 0$.Rq: on justifie la continuité et comme on a $F(0) = 0$

donc F est unique.

Théorème: soit f une fn ct sur I alors $\exists!$ primitive F de f sur I qui prend y_0 en x_0

(c'est pour déterminer la cte).

IntégraleSoit f une fn ct sur $[a, b]$ et F est une primitive de f sur $[a, b]$ on appelle donc intégral de f sur $[a, b]$ le réel

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

يمكنكم شراء كتب
مراجعة باكالوريا جميع
الشعب جميع المواد
حصرياً على صفحتنا
WaelDocuments.com

$$P_1: \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$$

$$P_2: \int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$P_3: \int_a^b f(t) + g(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

(il doit être les m^êmes a et b).

$$P_4: \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt, c \in [a, b]$$

$$P_5: \int_a^a f(t) dt = 0.$$

$$\underline{P_6}: \int f \cdot g \neq \int f \cdot \int g$$

$$\int \frac{f}{g} \neq \frac{\int f}{\int g}$$

يمكنكم شراء كتب
مراجعة باكالوريا جميع
الشعب جميع المواد
حصرياً على صفحتنا
WaelDocuments.com

WaelDocument.com

WaelDocument.com

@WaelDocument

• Intégrales et inégalités:

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} f \text{ est cte sur } [a, b] \\ f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b] \end{array} \right\} \int_a^b f(x) dx > 0.$$

$$\textcircled{2} \text{ si } f \text{ une fn cte sur } [a, b] \\ \text{alors } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{3} f \text{ et } g \text{ 2 fn cte sur } [a, b] \\ \forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

• Integration par partie:

Soit f et g 2 fn cte sur $[a, b]$ et f' et g' 2 fn cte sur $[a, b]$

alors $\int_a^b f(t)g(t) dt = \left[f(t)g(t) \right]_a^b - \int_a^b g'(t)f(t) dt$
 valeur moyenne et inégalité de la moyenne:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt, \quad a < b \text{ est la valeur moyenne}$$

de f sur $[a, b]$.

th: f est ct sur $[a, b]$, f 2 réels m.e.m m et M et $a < b$:

$$m \leq f(x) \leq M \text{ alors } m \leq \bar{f} \leq M$$

corollaire: soit f une fn ct sur $[a, b]$,

alors $\exists c \in [a, b]$ tq $\bar{f} = f(c)$.

Fn définie sur un intervalle.

th: $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est définie sur I si f est ct sur I .

Rq: F est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

$\Rightarrow F$ est dv sur I et on a $F'(x) = f(x)$

th: Soit f ct sur I .

u une fn ct sur J .

$u(J) \subset I$

$a \in I$



WAELEDOCUMENTS.com

$$\Rightarrow F: x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t) dt$$

est dv sur J

et on a $F'(x) = u'(x) \cdot f(u(x))$

Rq: on peut aussi utiliser avec ce théorème le composé:

$$F(x) = G(u(x))$$

Th: Soit f une fn $\neq$ sur $\mathbb{R}$ centrée en 0 alors

① si f est pair: $\int_{-x}^x f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt$.

② si f est impair: $\int_{-x}^x f(t) dt = 0$.

Th: Soit $f \neq$ sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T alors $\forall a \in \mathbb{R}$ on a: $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

* L'aire d'une surface plane:

$A = \int_a^b |f(x)| dx$ est l'aire de la partie du plan part $\underline{f}$ et l'axe des abscisses et les droites d'éq $\underline{x=a}$ et $\underline{x=b}$.

$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ l'aire de la partie du plan part $\underline{f}$ et $\underline{g}$ et les droites $\underline{x=a}$ et $\underline{x=b}$.

Le volume des solides de révolution:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V(s) = \frac{4\pi R^3}{3}$$



s: sphère

Rq!: $\forall q$ fonction réelle: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (exemple)

$$\forall (x,y) \in \underline{q} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y \in [0,1] \end{cases}$$

يمكنكم شراء كتب
مراجعة باك الوريا جميع
الشعب جميع المواد
حصرياً على صفحتنا
WaelDocuments.com

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ x \in [-1, 1] \\ y \geq 0 \end{cases}$$



AELDOCUMENTS.COM

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \in [-1, 1] \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Γ_g : demi cercle de centre 0 et de rayon 1 situé au dessus de $(0, 1)$.

• l'aire d'une cercle: $A = \pi R^2$.

eq^o différentielle:

○ (E): $y' = ay$: les sol^s de (E) sont les fn^s sur $\mathbb{R}$ et définie par: $f(x) = k e^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$. Il faut utiliser l'exponentielle

○ (E): $y' = ay + b$: les sol^s de (E) sont les fn^s sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$.

○ $\omega \in \mathbb{R}^*$, l'ensemble des sol^s de l'eq^o diff $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fn^s sur $\mathbb{R}$ et définies par: $f(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x)$, $a, b \in \mathbb{R}$.



WaelDocument.com



WaelDocument.com



@WaelDocument

Rappel méthodes:

(1)

Définition:

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction F est une primitive de f si
 F dérivable sur I

$$\text{et } \forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Conséquence:

Si la fonction F est une primitive de f sur I
alors la fonction $x \mapsto F(x) + k$ ($k \in \mathbb{R}$)
est aussi une primitive de f sur I .

Primitive d'une fonction continue.

Théorème:

Toute fonction continue sur un intervalle I ,
admet au moins une primitive sur I .

Exemple:

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{-x}{\sqrt{3-x^2}}$

1) Justifier l'existence de la fonction
primitive de f sur $] -\sqrt{3}, \sqrt{3} [$.

2) Vérifier que la fonction $F: x \mapsto \sqrt{3-x^2} + 2022$
est une primitive de f sur $] -\sqrt{3}, \sqrt{3} [$.



①

Solution:

de $\mathbb{R}$

1)

$x \mapsto 3 - x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (comme étant une fonction polynôme)
et en particulier continue et strictement positive sur $] -\sqrt{3}, \sqrt{3} [$
d'où $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}}$ l'est aussi.

de plus $x \mapsto -x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (comme étant une fonction polynôme) et en particulier continue sur $] -\sqrt{3}, \sqrt{3} [$.

Ainsi f est continue sur $] -\sqrt{3}, \sqrt{3} [$ d'où l'existence
de fonction primitive de f sur $] -\sqrt{3}, \sqrt{3} [$.

2)

$x \mapsto 3 - x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ -
(comme étant une fonction polynôme)
et en particulier dérivable et strictement
positive sur $] -\sqrt{3}, \sqrt{3} [$ d'où

$x \mapsto \sqrt{3 - x^2}$ est dérivable sur $] -\sqrt{3}, \sqrt{3} [$.

Ainsi F est dérivable sur $] -\sqrt{3}, \sqrt{3} [$.

$$F'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{3-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{3-x^2}} = f(x)$$

d'où F est une primitive de f .

rappel :

f dérivable sur I
et $\forall x \in I, f(x) > 0$
alors $\sqrt{f}$ est dérivable
sur I .

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

2022



Théorème :

Si f une fonction continue sur un intervalle I , alors admet une seule primitive prenant une valeur donnée en un point donné de I . ③

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x$.
Déterminer la primitive de f qui prend la valeur -2 au point $x_0 = 1$.

Solution :

$x \mapsto 3x^2 + 2x$ est une fonction polynôme donc est continue sur $\mathbb{R}$ d'où l'existence de fonctions primitives de f sur $\mathbb{R}$.

$$F(x) = 3 \times \frac{1}{3} x^3 + 2 \times \frac{1}{2} x^2 + k \quad \cdot \int d(f + pg) = d(f) + p dg$$

$$F(x) = x^3 + x^2 + k \quad \cdot \int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$\text{or } F(1) = -2 \text{ sig } 1^3 + 1^2 + k = -2$$

$$\text{sig } \boxed{k = -4}$$

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -2 au point x_0 est $F : x \mapsto x^3 + x^2 - 4$.

Calcul de primitive:

$$\textcircled{1} \int f(x) = a \quad \rightarrow \quad F(x) = ax + k$$

Exp: $\int f(x) = 5 \quad \rightarrow \quad F(x) = 5x + k$

$$\textcircled{2} \int f(x) = x \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2} x^2 + k$$

$$\textcircled{3} \int f(x) = ax \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{a}{2} x^2 + k$$

Exp: $\int f(x) = 5x \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{5}{2} x^2 + k$

$$\textcircled{4} \int f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$$

$$\textcircled{5} \int f(x) = ax^n \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + k$$

Exp: $\int f(x) = 5x^5 \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{5}{6} x^6 + k$

$$\textcircled{6} \int f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \geq 2) \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$$

$$\textcircled{7} \int f(x) = \frac{a}{x^n} \quad n \geq 2 \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{-a}{(n-1)x^{n-1}} + k$$

Exp: $\int f(x) = \frac{5}{x^5} \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{-5}{4x^4} + k$

$$\textcircled{8} \int f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \rightarrow \quad F(x) = 2\sqrt{x} + k$$

$$\textcircled{9} \int f(x) = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + k$$



$$\text{donc } F(x) = -\frac{1}{u(x)} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{\underbrace{-3+1}_{-2}} \times \frac{1}{u(x)^2}$$

$$= -\frac{1}{2x+1} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$F(x) = -\frac{1}{2x+1} + \frac{3}{4(2x+1)^2} + C$$

f	$F(\text{primitive})$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{u^3}$	$-\frac{1}{2u^2}$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{1}{-n+1} u^{-n+1}$



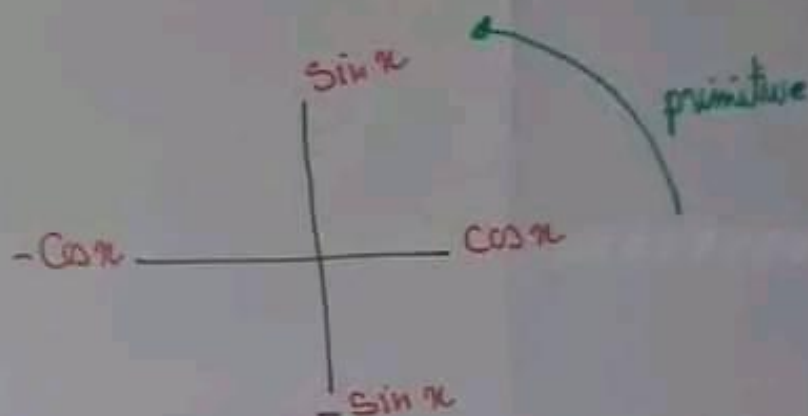
④

$$\textcircled{10} \int f(x) = \sin x \rightarrow F(x) = -\cos x + k$$

⑤

$$\textcircled{11} \int f(x) = \cos x \rightarrow F(x) = \sin x + k$$

⑧



$$\textcircled{12} \int f(x) = 1 + \tan^2 x \rightarrow F(x) = \tan x + k$$

$$\textcircled{13} \int f(x) = \sin(ax+b) \rightarrow F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + k$$

Exp:

$$\int f(x) = \sin(5x+\pi) \rightarrow F(x) = -\frac{1}{5} \cos(5x+\pi) + k$$

$$\textcircled{14} \int f(x) = \cos(ax+b) \rightarrow F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + k$$

Exp:

$$\int f(x) = \cos(5x+\pi) \rightarrow F(x) = \frac{1}{5} \sin(5x+\pi) + k$$

① Primitive de la somme:

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g$$

Exp:

$$\int f(x) = 5x^5 + 3x^3 + 1 \rightarrow F(x) = \frac{5}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + x + k$$



⑤

② Primitive de $f' f^n$:

⑥

$$\int f' f^n \rightarrow \frac{1}{n+1} f^{n+1}$$

Exp ① $f(x) = 2x(x^2+1)^5$
 $= (x^2+1)' (x^2+1)^5$

$$F(x) = \frac{1}{6} (x^2+1)^6 + k$$

Exp ② $f(x) = 5x^3(x^4+1)^7$

$$= \frac{5}{4} \times \frac{4x^3}{1} (x^4+1)^7$$

$$= \frac{5}{4} (x^4+1)' \times (x^4+1)^7$$

$$F(x) = \frac{5}{4} \times \frac{1}{8} (x^4+1)^8 + k$$

$$F(x) = \frac{5}{32} (x^4+1)^8 + k$$

③ Primitive $\frac{f'}{f^n}$ ($n \geq 2$).

$$\int \frac{f'}{f^n} \rightarrow \frac{-1}{(n-1) f^{n-1}}$$

Exp ① $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$
 $= \frac{(x+1)'}{(x+1)^3}$

$$F(x) = \frac{-1}{2(x+1)^2} + k$$



Exp ② $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+1)^5}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2x+2}{(x^2+2x+1)^5}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{4(x^2+2x+1)^4} + k$$

$$F(x) = \frac{-1}{8(x^2+2x+1)^4} + k$$

④ Primitive de $\frac{f'}{\sqrt{f}}$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} = 2\sqrt{f} + k.$$

Exp ① $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}}$

$$= \frac{(x+5)'}{\sqrt{x+5}}$$

$$\Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x+5} + k.$$

Exp ② $f(x) = \frac{-5x}{\sqrt{x^2-3}}$

$$= -\frac{5}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2-3}}$$

$$= -\frac{5}{2} \times \frac{(x^2-3)'}{\sqrt{x^2-3}}$$

$$F(x) = -\frac{5}{2} \times 2\sqrt{x^2-3} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = -5\sqrt{x^2-3} + k.$$



⑤ Primitive $f' \sqrt{f}$

$$\int f' \sqrt{f} = \frac{2}{3} f \sqrt{f}$$

Exp:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x\sqrt{x^2+1} \\ &= (x^2+1)' \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} (x^2+1) \sqrt{x^2+1}$$

Intégrale:

Définition de l'intégrale d'une fonction continue:

Définitions:

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I , pour tous réels a et b de I , le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de l'axe de la primitive F .

On appelle intégrale de f de a et b et on le note

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

⑧ Exemple:

① Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \left[\underset{\substack{\text{primitive de } \sin t \\ C_0 - \cos t}}{-\cos t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -[\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = -(\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 - \underbrace{\cos 0}_1) = 1.$$

② Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \, dx = \left[\underset{\substack{\text{primitive de } 1 + \tan^2 x \\ \tan x}}{\tan x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underbrace{\tan \frac{\pi}{4}}_1 - \underbrace{\tan 0}_0 = 1.$$

Conséquence:

① $\int_a^a f(x) \, dx = 0$

② $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx.$

Propriétés de l'intégrale:

1 - Relation de Chasles:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

2 - Linéarité de l'intégrale:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx.$$



⑨

Exemple:

Soit f , la fonction définie par: $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin x & \text{si } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ (10)

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
 &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) - \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Méthode d'intégration

① Expliciter une primitive

C'est la méthode qui consiste à déterminer une primitive F de la fonction f qu'on cherche à intégrer.

Une telle méthode utilise la définition:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



Exemple:

$$\text{Calculer } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underbrace{\tan \frac{\pi}{4}}_1 - \underbrace{\tan 0}_0 = 1.$$

② **Décomposition en élément simple:**

Dans d'autre cas on se ramène à décomposer la fonction f en une combinaison linéaire de fonction élémentaires.
C'est à dire qu'on écrit f sous forme suivante:

$$f = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n$$

où α_i : sont des constantes réelles.

g_i : sont des fonctions dont on connaît les primitives

Dans ce cas:

$$F = \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 + \dots + \alpha_n G_n$$

est une primitive de f .

Exemple:

$$A = \int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2} dx$$

$$= \int_1^2 x dx + 2 \int_1^2 1 dx - 3 \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 + 2 \left[x \right]_1^2 - 3 \left[\frac{1}{x} \right]_1^2 = 2$$

$$\boxed{A=2}$$



③ Linéarisation des fonctions trigonométriques.

(12)

C'est la méthode qui consiste à transformer les produits en sommes.

On peut utiliser les formules trigonométriques ou simplement les formules d'Euler.

Exemple:

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\pi + \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$



(12)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (13)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$e^{i\Delta} + e^{-i\Delta} = 2 \cos \Delta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$$

Remarque:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) = \cos x$$

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3$$

$$= \frac{1}{8} \left((e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2(e^{-ix}) + 3(e^{ix})(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3 \right)$$

$$= \frac{1}{8} (e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x})$$



$$= \frac{1}{8} \left[(e^{i3\pi} + e^{-i3\pi}) + 3(e^{i\pi} + e^{-i\pi}) \right] \quad (13)$$

$$= \frac{1}{8} (2\cos 3\pi + 3 \times 2\cos \pi)$$

$$= \frac{1}{8} (2\cos 3\pi + 6\cos \pi)$$

$$= \frac{1}{4} \cos 3\pi + \frac{3}{4} \cos \pi$$

$$\Rightarrow \cos^3 \pi = \frac{1}{4} \cos 3\pi + \frac{3}{4} \cos \pi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \pi d\pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} \cos 3\pi + \frac{3}{4} \cos \pi \right) d\pi$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3\pi d\pi + \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \pi d\pi$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \sin 3\pi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4} \left[\sin \pi \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{12} \left(\overset{-1}{\sin \frac{3\pi}{2}} - \overset{0}{\sin 0} \right) + \frac{3}{4} \left(\overset{1}{\sin \frac{\pi}{2}} - \overset{0}{\sin 0} \right)$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$$

$$(e^{-i\pi})^3$$





Exercice N°3

$$f(x) = (x-1) \sqrt{\frac{1}{2x+1}}$$

$$1) D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2x+1 > 0 \right\}$$

$$= \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$f(x) = a \sqrt{2x+1} + \frac{b}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{a(2x+1) + b}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{2ax + a + b}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= (2ax + a + b) \times \sqrt{\frac{1}{2x+1}}$$

$$= (x-1) \sqrt{\frac{1}{2x+1}} \quad \forall x \in \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$\text{sig: } \begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

$$\text{sig: } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$



(16)

$$\begin{aligned}
 C &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx = \left[2x\sqrt{x+3} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{x+3} dx \\
 &= [4 - 0] - 2 \left[\frac{2}{3} (x+3)\sqrt{x+3} \right]_0^1 \\
 &= 4 - \frac{4}{3} [8 - 3\sqrt{3}] \\
 &= 4 - \frac{32}{3} + \frac{12}{3} \sqrt{3} \\
 &= \frac{-20 + 12\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

(17)

Retenons :

$$① f(x) = \text{Poly} \times \cos x$$

$$U(x) = \text{Poly} \quad \rightarrow \quad U'(x)$$

$$V'(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad V(x)$$

$$② f(x) = \text{Poly} \times \sin x$$

$$U(x) = \text{Poly} \quad \rightarrow \quad U'(x) =$$

$$V'(x) = \sin x \quad \rightarrow \quad V(x) =$$

$$③ f(x) = \text{Poly} \times \sqrt{\text{Poly}} \text{ ou } \frac{\text{Poly}}{\sqrt{\text{Poly}}}$$

$$U(x) = \text{Poly} \quad \rightarrow \quad U'(x) =$$

$$V'(x) = \sqrt{\text{Poly}} \quad \rightarrow \quad V(x) =$$



(17)

Exercice:

(18)

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a) Étudier les variations de f sur $[0,1]$.

b) En déduire que $\frac{1}{2} \leq I_0 \leq 1$.

2. a) montrer que la suite (I_n) est minorée par 0.

b) montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3.

a) montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Solution:

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a) f dérivable sur $[0,1]$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

x	0	1
$f'(x)$		-
f	1	$\frac{1}{2}$

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{1}{2}$$

$$b) \quad I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{or } \forall x \in [0, 1] \text{ on a } \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$$

$$\text{sig } \int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 1 dx$$

$$\text{sig } \boxed{\frac{1}{2} \leq I_0 \leq 1}$$

$$2) \quad a) \quad x \in [0, 1] \text{ sig } x^n \geq 0 \quad \text{et} \quad x^n + 1 \geq 1$$

$$\text{sig } 0 \leq \frac{x^n}{1+x^2}$$

$$\text{sig } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$$

$$\text{sig } \boxed{0 \leq I_n}$$

$\Rightarrow I_n$ est minoré par 0.

$$b) \quad I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2} dx \leq 0$$

$\Rightarrow (I_n)$ est décroissante

c) I_n est minoré par 0
 (I_n) est décroissant
 $\Rightarrow$ d'après la suite (I_n) est convergente.

(20)

3) a) $x \in [0, 1]$ sig $1 \leq 1+x^2 \leq 2$
 sig $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$
 or $x^n \geq 0$ sig $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$

$n \mapsto \frac{x^n}{2}$ et $n \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ et $n \mapsto x^n$ sont continues sur $[0, 1]$

$$\text{alors } \int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\text{sig } \frac{1}{2} \int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\text{sig } \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$$

$$\text{sig } \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{sig } \boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

b) on a $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

D'après le Théorème d'enclassement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$



Exercice 1

On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$

- 1) Calculer $I + J$ et $I - J$.
- 2) En déduire I et J .

Exercice 2

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx.$$

1. Calcul de I

Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$.

- a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$.
- b) En déduire la dérivée f' de f .
- c) Calculer la valeur de I .

2. Calcul de J et de K

- a) Sans calculer explicitement J et K , vérifier que : $J + 2I = K$.
- b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K , montrer que : $K = \sqrt{3} - J$.
- c) En déduire les valeurs de J et de K .

Exercice 3

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$ pour tout n entier non nul.

1. Calculer I_0 et I_1 . (on pourra utiliser une intégration par parties).
2. Montrer que pour tout n entier $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$. Calculer I_2 .
3. Montrer que pour tout n entier, $I_{n+1} \leq I_n$. En déduire en utilisant la relation du 2° l'encadrement suivant : $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

Exercice 4

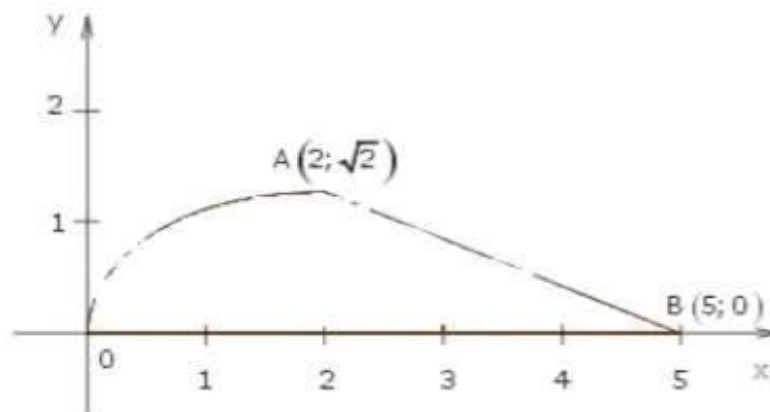
On considère l'intégrale : $I_n = \int_0^1 t^n e^{2t} dt$, où n est un entier naturel non nul.

- 1) En utilisant une intégration par parties, calculer I_1 .
- 2) En utilisant une intégration par parties, trouver une relation entre I_{n+1} et I_n .
- 3) En déduire I_2 et I_3 .
- 4) Utiliser les résultats précédents pour calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 (t^3 + 3t^2 + 2t)e^{2t} dt$.



Exercice 5

Dans un repère orthonormal, (unité graphique : 1 cm), on considère la courbe composée de l'arc (OA) d'équation : $y=\sqrt{x}$, pour $x \in [0 ; 2]$, et du segment [AB], où $A(2 ; \sqrt{2})$ et $B(5 ; 0)$.



Calculer la valeur exacte (en cm^3) du volume V du solide (S) engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine plan coloré.
Donner une valeur approchée de V en cm^3 (à un mm^3 près).

Exercice 6

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^2 \left(\frac{2t+3}{t+2}\right) e^{\frac{t}{n}} dt$.

1)a) Soit ϕ la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par : $\phi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$. Etudier les variations de ϕ sur $[0 ; 2]$. En déduire que, pour tout réel t de $[0 ; 2]$, $\frac{3}{2} \leq \phi(t) \leq \frac{7}{4}$.

b) Montrer que, pour tout réel t de $[0 ; 2]$, on a : $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \phi(t) e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$.

c) Par intégration, en déduire que : $\frac{3}{2} n (e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq U_n \leq \frac{7}{4} n (e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

d) On rappelle que : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) = 1$. Montrer que, si (U_n) possède une limite L , alors, $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

2)a) Vérifier que, pour tout t dans I , on a : $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$.

En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$.

b) Montrer que, pour tout t dans $[0 ; 2]$, on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$. En déduire que : $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} \times I$.

c) Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite L .

Exercice 7

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \text{ et, pour } n \geq 1, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

1. a) Soit f la fonction numérique définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Calculer la dérivée f' de f . En déduire u_0 .

b) Calculer u_1 .

2. a) Prouver que la suite (u_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer u_n).

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

b) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$, on a :

$$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}.$$

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$(1) \quad \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Déterminer la limite de (u_n) .

3. Pour tout entier $n \geq 3$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$.

a) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$.

Par une intégration par parties portant sur I_n , montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}.$$

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$(2) \quad (2n-1)u_n \leq \sqrt{2}.$$

c) À l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 1

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$1) I + J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} dx \quad \text{d'après la propriété de linéarité}$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 \cdot dx = [x]_0^{\frac{\pi}{3}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{I + J = \frac{\pi}{3}}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{u'(x)}{u(x)} dx$$

En posant $u(x) = \cos x + \sin x$ on a $u'(x) = \cos x - \sin x$

$$\text{donc } \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{d'où} \quad I - J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{u'(x)}{u(x)} dx = [\ln(u(x))]_0^{\frac{\pi}{3}} = [\ln(\cos x + \sin x)]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{soit } I - J = \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln 1 \Leftrightarrow \boxed{I - J = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$2) \text{ On a le système formé des deux équations: } I + J = \frac{\pi}{3} \quad (1) \quad \text{et} \quad I - J = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)}, \quad (1) - (2) \Rightarrow \boxed{J = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)}$$

Exercice 2

$$1) I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx. \quad f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$$

a) Posons $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et :

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}}$$

b) $f(x) = \ln(u(x))$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$$\text{avec } u(x) = x + \sqrt{x^2 + 2} = x + g(x) \Leftrightarrow u'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \Leftrightarrow u'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$\text{Donc on a: } f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2}} \times \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 2}} \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}}$$

$$c) I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0)$$

$$\text{soit } I = \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln \sqrt{2} \Leftrightarrow \boxed{I = \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$$

$$2) I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

$$a) J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx + 2 \times \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx \left(\text{car } \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} \right).$$

Donc on a bien : $J + 2I = K$

$$b) K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx = \int_0^1 1 \times \sqrt{x^2+2} dx$$

En utilise une intégration par parties: on pose $u'(x) = 1$ $v(x) = \sqrt{x^2+2}$

$$u(x) = x \quad v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 u \times v' dx \Leftrightarrow K = \left[x \times \sqrt{x^2+2} \right]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx$$

$$K = \left[x \times \sqrt{x^2+2} \right]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx = \left[x \times \sqrt{x^2+2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \left[x \times \sqrt{x^2+2} \right]_0^1 - J.$$

Finalement on a : $K = 3 - J$.

c) En utilisant les deux relations: $J + 2I = K$ (1) et $K = 3 - J$ (2)

On reporte l'équation (2) dans (1) on obtient: $J + 2I = 3 - J \Leftrightarrow 2J = 3 - 2I \Leftrightarrow J = \frac{3}{2} - I$.

Soit d'après la question 1) $J = \frac{3}{2} - \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

La relation (2) donne $K = 3 - J$ soit $K = 3 - \frac{3}{2} + \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow K = \frac{3}{2} + \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Exercice 3

On considère l'intégrale : $I_n = \int_0^1 t^n e^{2t} dt$, où n est un entier naturel non nul.

$$1) I_1 = \int_0^1 t e^{2t} dt \text{ on pose : } u(t) = t \text{ et } v'(t) = e^{2t}, \text{ d'où : } u'(t) = 1 \text{ et } v(t) = \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$\text{Donc } I_1 = \left[t \times \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{1}{2} e^{2t} dt \Leftrightarrow I_1 = \left[\frac{t}{2} \times e^{2t} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{4} e^{2t} \right]_0^1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

$$2) I_n = \int_0^1 t^n e^{2t} dt, \text{ on pose : } u'(t) = t^n \text{ et } v(t) = e^{2t}, \text{ d'où : } u(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} \text{ et } v'(t) = 2e^{2t}$$

$$I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \times e^{2t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \times 2e^{2t} dt \Leftrightarrow I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \times e^{2t} \right]_0^1 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} e^{2t} dt$$

$$\Leftrightarrow I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \times e^{2t} \right]_0^1 - \frac{2}{n+1} \times I_{n+1} \Leftrightarrow I_n = \frac{e^2}{n+1} - \frac{2}{n+1} \times I_{n+1} \Leftrightarrow 2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n.$$



$$3) \text{ on prend } n=1, 2I_2 = e^2 - 2I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^2}{2} - I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2+1}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_2 = \frac{e^2-1}{4}}$$

$$\text{si } n=2, \text{ alors: } 2I_3 = e^2 - 3I_2 \Leftrightarrow I_3 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}I_2 \Leftrightarrow I_3 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{e^2-1}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_3 = \frac{e^2+3}{8}}$$

$$4) I = (t^3 + 3t^2 + 2t)e^{2t} dt.$$

$$I = \int_0^1 (t^3 + 3t^2 + 2t) e^{2t} dt = \int_0^1 t^3 e^{2t} dt + \int_0^1 3t^2 e^{2t} dt + 2 \int_0^1 t e^{2t} dt \quad \text{En utilisant la linéarité de l'intégrale.}$$

$$\boxed{I = I_3 + 3I_2 + 2I_1}$$

$$I = \frac{e^2+3}{8} + 3 \frac{e^2-1}{4} + 2 \frac{e^2+1}{4} \Leftrightarrow I = \frac{e^2+6e^2+4e^2+3-6+4}{8} \Leftrightarrow \boxed{I = \frac{11e^2+1}{8}}$$

Exercice 4

$$\text{On pose } I_0 = \int_1^e x dx \text{ et } I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx \text{ pour tout } n \text{ entier non nul.}$$

$$1) I_0 = \int_1^e x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2-1}{2}.$$

$$I_1 = \int_1^e x (\ln x) dx, \text{ On utilise une intégration par parties:}$$

$$\text{On pose : } u'(x) = x \text{ et } v(x) = \ln x, \text{ d'où } u(x) = \frac{x^2}{2} \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$I_1 = \int_1^e x (\ln x) dx = [u \times v]_1^e - \int_1^e u \times v' dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx$$

$$\text{Soit, } I_1 = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e \Leftrightarrow I_1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_1 = \frac{e^2+1}{4}}$$

$$2) I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx \Leftrightarrow I_{n+1} = \int_1^e x (\ln x)^{n+1} dx$$

En effectuant une intégration par parties sur I_{n+1} :

$$\text{On pose : } u'(x) = x \text{ et } v(x) = (\ln x)^{n+1}, \text{ d'où } u(x) = \frac{x^2}{2} \text{ et } v'(x) = (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n$$

$$I_{n+1} = \int_1^e x (\ln x)^{n+1} dx = [u \times v]_1^e - \int_1^e u \times v' dx \Leftrightarrow I_{n+1} = \left[\frac{x^2}{2} \times (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n dx$$

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} \int_1^e x (\ln x)^n dx \Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n, \text{ ainsi on a } \boxed{2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2}$$

$$\text{Pour } n=1 \text{ on a : } 2I_2 + 2I_1 = e^2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^2}{2} - I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2+1}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_2 = \frac{e^2-1}{4}}$$





donc $\forall x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[;$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} - \frac{3}{2\sqrt{2x+1}}$$

2°)

f	F
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3} u\sqrt{u}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{2x+1} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{1}{4} u'(x) \sqrt{u(x)} - \frac{3}{4} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

donc

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} u(x) \sqrt{u(x)} - \frac{3}{4} \times 2 \sqrt{u(x)}$$

$$F(x) = \frac{1}{6} (2x+1) \sqrt{2x+1} - \frac{3}{2} \sqrt{2x+1} + C$$



3) $I_{n+1} - I_n = \int_1^e x(\ln x)^{n+1} dx - \int_1^e x(\ln x)^n dx$ en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e (x(\ln x)^{n+1} - x(\ln x)^n) dx \text{ en factorisant par } x(\ln x)^n, \text{ on a}$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e x(\ln x)^n (\ln x - 1) dx$$

Pour tout x de l'intervalle $[1; e]$, $x(\ln x)^n \geq 0$ et $\ln x - 1 \leq 0$

Donc : $x(\ln x)^n (\ln x - 1) \leq 0$, la positivité de l'intégrale permet d'écrire: $\int_1^e x(\ln x)^n (\ln x - 1) dx \leq 0$

D'où, $I_{n+1} - I_n \leq 0 \Leftrightarrow I_{n+1} \leq I_n$, on en conclut que la suite (I_n) est décroissante.

Montrons que : $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.

La relation du 2° peut s'écrire : $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2 \Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n$

Comme $I_{n+1} \leq I_n$, alors $\frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n \leq I_n$ en remplaçant I_{n+1} par sa valeur.

$$\frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n \leq I_n \Leftrightarrow \frac{e^2}{2} \leq I_n + \frac{n+1}{2}I_n \Leftrightarrow \frac{e^2}{2} \leq \left(1 + \frac{n+1}{2}\right)I_n \Leftrightarrow \frac{e^2}{2} \leq \frac{n+3}{2}I_n \text{ soit } \boxed{\frac{e^2}{n+3} \leq I_n}$$

Pour montrer le deuxième membre de l'inégalité, on utilise le même raisonnement au rang n :

on a $I_{n+1} \leq I_n \Leftrightarrow I_n \leq I_{n-1}$

La relation du 2° peut s'écrire au rang n : $2I_n + nI_{n-1} = e^2 \Leftrightarrow I_{n-1} = \frac{e^2}{n} - \frac{2}{n}I_n$

$I_n \leq I_{n-1} \Leftrightarrow I_n \leq \frac{e^2}{n} - \frac{2}{n}I_n$, en remplaçant I_{n-1} par sa valeur

$$I_n \leq \frac{e^2}{n} - \frac{2}{n}I_n \Leftrightarrow I_n \left(1 + \frac{2}{n}\right) \leq \frac{e^2}{n}, \text{ d'où après simplification: } \boxed{I_n \leq \frac{e^2}{n+2}}$$

En groupant les deux inégalités on obtient: $\boxed{\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^2}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^2}{n+2} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a: $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0}$

La suite (I_n) converge vers 0.

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2} \Leftrightarrow \frac{n \times e^2}{n+3} \leq n \times I_n \leq \frac{n \times e^2}{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times e^2}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times e^2}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times e^2}{n} = e^2, \text{ d'après le théorème des gendarmes, on a: } \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = e^2}$$

La suite (nI_n) converge vers e^2 .



Exercice 7

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1)a) On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par: $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et :

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

D'où, $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0)$. soit $\boxed{u_0 = \ln(1 + \sqrt{2})}$.

$$b) u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}} dx = \left[\sqrt{h(x)} \right]_0^1 = \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^1 \text{ soit } \boxed{u_1 = \sqrt{2} - 1}$$

2)a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{d'après la linéarité des intégrales.} \end{aligned}$$

Pour tout réel $x \in [0;1]$, $\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ et $1-x \leq 0$, donc $\frac{x^n(1-x)}{\sqrt{1+x^2}} \leq 0$.

Par passage à l'intégral (positivité de l'intégrale ou conservation de l'ordre), on en déduit que:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq 0, \text{ la suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}$$

$$\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \geq 0. \text{ La suite } (u_n) \text{ est minorée par 0.}$$

(u_n) est minorée et décroissante, elle est donc convergente.

b) Pour tout réel $x \in [0;1]$, on a: $0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1+x^2 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.

En prenant l'inverse on a: $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$, en multipliant par x^n qui est positif, on obtient:

$$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n, \text{ le passage à l'intégral donne: } \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\text{d'où: } \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}} \quad (1).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{ le théorème des gendarmes permet de conclure que } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

3)a) Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on pose: $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$.

$$\text{on a } u_n + u_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx \quad (\text{car } \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}).$$

Donc on a bien $\boxed{u_n + u_{n-2} = I_n}$.

En utilisant une intégration par parties:

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^1 v'(x) \times w(x) dx \quad \text{en posant : } v'(x) = x^{n-2} \quad v(x) = \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$w(x) = \sqrt{1+x^2} \quad w'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{D'où: } I_n = [v(x) \times w(x)]_0^1 - \int_0^1 v(x) \times w'(x) dx,$$

$$\text{soit } I_n = \left[\sqrt{1+x^2} \times \frac{x^{n-1}}{n-1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n-1} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$I_n = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{car: } \frac{x^{n-1}}{n-1} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^n}{(n-1)\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{Donc finalement on a: } \boxed{I_n = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1} u_n}.$$

comme $u_n + u_{n-2} = I_n$, en remplaçant l'expression de I_n ,

$$\text{on obtient après simplification: } \boxed{nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}}.$$

b) La suite (u_n) est décroissante, donc on a :

$$u_n \leq u_{n-2} \Leftrightarrow (n-1)u_n \leq (n-1)u_{n-2} \quad \text{en multipliant par } (n-1)$$

$$\Leftrightarrow nu_n + (n-1)u_n \leq nu_n + (n-1)u_{n-2} \quad \text{en ajoutant } nu_n$$

$$\Leftrightarrow nu_n + (n-1)u_n \leq \sqrt{2} \quad \text{puisque } nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$$

$$\text{ainsi on a: } \boxed{(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}} \quad (2)$$

$$\text{c) La relation (2) donne } (2n-1)u_n \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1} \quad 2n-1 > 0$$

$$\text{d'où en utilisant la relation (1) } \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$$

$$\text{on a l'encadrement: } \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1} \quad \text{et en multipliant par } n, \quad \boxed{\frac{n}{\sqrt{2}(n+1)} \leq nu_n \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{n\sqrt{2}}{2n-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{2}(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{2}}{2n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{en utilisant la limite du quotient de deux polynômes})$$

$$\text{Le théorème des gendarmes permet de conclure que: } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

La suite (nu_n) converge vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$.





Exercice N°4:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$1) D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x(1-x) > 0 \right\}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x(1-x)$	-	0	+	-

donc $D_f =]0, 1[$

• $x \mapsto x(1-x)$ est continue et ne s'annule pas sur $]0, 1[$

• $x \mapsto \frac{1}{x(1-x)}$ est continue et strictement positive sur $]0, 1[$

donc $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $]0, 1[$

donc f est continue sur $]0, 1[$

donc f admet une primitive sur $]0, 1[$





2) Soit F la primitive de f sur $]0, 1[$
tel que $F(\frac{3}{4}) = 0$

$$g: x \mapsto F(\cos^2 x); \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

a) montrons que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

Rappel : f une fonction définie sur I
 g une fonction définie sur J

Si :

- g est dérivable sur J
- $\forall x \in J; \quad g(x) \in I \quad (g(J) \subset I)$
- f est dérivable sur I

alors : $f \circ g$ est dérivable sur J