Résumé dérivabilité Bac

I) Rappels

* Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I

$(f+g)'=f'+g'$ $\quad(f.g)'=f'.g+g'.f$ $\quad((f)^n)'=nf'f^{n-1}$

si $a\in\mathbb{R}$ $(af(x))'=af'(x)$ si $g(x)\neq 0$ $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'.g-g'.f}{g^2}$ si $f(x)\neq 0$ $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$

si $f(x)>0$ $\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

si $x\in\mathbb{R}$ $(\sin(ax+b))'=a\cos(ax+b)$; $(\cos(ax+b))'=-a\sin(ax+b)$

si $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,,k\in\mathbb{Z}\right\}$ $(\tan x)'=1+tan^2(x)$

* Si $\lim\limits_{x\to a^{\pm}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b$; $b\in IR$

alors f est dérivable à gauche en a (resp à droite en a) et $\lim\limits_{x\to a^{\pm}}\frac{f(x)=f(a)}{x-a}=f'(a)$

* Si $\lim\limits_{x\to a^{\pm}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$ alors **f est n'est pas dérivable** à gauche en **a** respectivement à droite en **a** et la courbe de f admet à gauche en **a** (resp à droite en) **une demi tangente verticale dirigée vers le haut ou vers le bas** (on respecte la règle de signe)

* Soit f une fonction dérivable en un réel x_0 et T la tangente à,C_f au point d'abscisse x_0

alors $T : y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

II) Dérivabilité d'une fonction composée

* *Théorème* Soit f une fonction dérivable en un réel a et g une fonction dérivable en $f(a)$. Alors la fonction $(g\ o\ f)$ est dérivable en a et $(g\ o\ f)'(a)=f'(a)\times g'(f(a))$

* *Conséquence* Soit f et g deux fonctions

Si
- ¤ f est dérivable sur un intervalle I
- ¤ g est dérivable sur un intervalle J
- ¤ $\forall x\in I$ on a $f(x)\in J$

alors la fonction $(g\ o\ f)$ est dérivable sur I et $\forall x\in I$ on a $(g\ o\ f)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$

III) Théorème et inégalités des acrroissement finies

1) Théorème des accroissements finies

* *Théorème* Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ (avec $a<b$) et dérivable sur $]a\,,b[$ alors il existe au moins un ~~réel $c\in$~~ $[a\,,b]$

tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

. * ***Théorème de Rolle*** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ (avec $a<b$) et dérivable sur $]a\,,b[$

Si $\boldsymbol{f(a)=f(b)}$ alors il existe au moins un réel $c\in\,]a\,,b[$ tel que $\boldsymbol{f'(c)=0}$

2) inégalités des accroissements finis

* ***Théorème*** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ (avec $a<b$) et dérivable sur $]a\,,b[$ alors il existe deux réels m et M tels que $\forall x\in\,]a\,,b[$ on a :

$\boldsymbol{m\leq f'(x)\leq M}$ alors $\boldsymbol{m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)}$

* ***Corollaire*** Soit f une fonction dérvable sur un intervalle I et M un réel strictement positif tel que $\forall x\in I$ on a : $\boldsymbol{|f'(x)|\leq M}$

Alors pour tous réel a et b de I on a : $\boldsymbol{|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|}$

IV) Sens de variation d'une fonction

* ***Théorème*** Soit I un intervalle de l'une des formes suivantes $[a\,,b]$ ou $[a\,,b[$ ou $]a\,,b]$ où a et b sont des réels tel que $a<b$ et f une fonction continue sur I et dérivable sur $]a\,,b[$

¤ **Si** $\forall x\in I\;\; f'(x)\geq 0$ (resp $f'(x)>0$) alors la fonction f **est croissante sur *I***

(resp f **est croissante sur *I***)

¤ **Si** $\forall x\in I\;\; f'(x)\leq 0$ (resp $f'(x)<0$) alors la fonction f **est décroissante sur *I***

(resp **est décroissante sur *I***)

¤ **Si** $\forall x\in I\;\; f'(x)=0$ alors la fonction f est ________________ sur I

* ***Théorème*** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' n'est nulle sur aucun intervalle contenu dans I

¤ **Si** $\forall x\in I\;\; \boldsymbol{f'(x)\geq 0}$ alors la fonction f **est strictement croissante sur *I***

¤ **Si** $\forall x\in I\;\; \boldsymbol{f'(x)\leq 0}$ alors la fonction f **est strictement décroissante sur *I***