Correction d'un exercice limite continuité

Enoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+1} & \text{si } x\geq 0\\ \dfrac{x^2}{2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)} & \text{si } x<0\end{cases}$$

et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

2) a) Montrer que pour tout $x\geq 0$ on a :

$$\frac{1-\sqrt{x}}{x+1}\leq f(x)\leq\frac{1+\sqrt{x}}{x+1}$$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} 2f(x)+x$ et interpréter le résultat graphiquement.

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\ o\ f(x)$

Correction

1)

**** $f(0)=\frac{1+\sqrt{0}\cos 0}{0+1}=1$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{2(x^2+1-1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{2x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{2}=1$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+1}=1$$

on a $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$ donc f est continue en 0.

**** $x\mapsto\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,+\infty[$

$x\mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,+\infty[$ et elle est positive donc

$x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$

$x \mapsto 1+\sqrt{x}\cos x$ est continue sur $[0\,,+\infty[$

$x \mapsto x^2+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty\,,0\,[$ et elle est positive donc

$x \mapsto \sqrt{x^2+1}-1$ est continue sur $]-\infty\,,0\,[$ et $\sqrt{x^2+1}-1 \neq 0$

$x \mapsto \frac{x^2}{2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}$ est continue sur $]-\infty\,,0\,[$

ainsi f est continue sur $]-\infty\,,0\,[$ et sur $[0\,,+\infty[$

et comme f est continue en 0 donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\cos x \leq \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad 1-\sqrt{x} \leq 1+\sqrt{x}\cos x \leq 1+\sqrt{x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{x+1} \leq \frac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+1} \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+1} \quad (\text{car } x+1>0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1-\sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+1}$$

b) Pour tout $x \geq 0$ on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+1}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\sqrt{x}}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}^{-1}}{\underbrace{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}_{+\infty}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}^{-1}}{\underbrace{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}_{+\infty}} = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

donc la droite d'équation $y=0$ est une horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$.

3) a)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{-x}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} 2f(x)+x = \lim_{x\to-\infty} 2\left(\frac{x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-1)}\right)+x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}+x$$

$$= \frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}+x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2}+x$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+1+x = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x+1$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}+1$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}+1 = 1$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 2f(x)+x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} 2\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2}$ donc la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ et une assymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$

4)

$\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) =??$ on a $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) =$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) =??$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\cos x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{\cos x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\,o\,f(x) =??$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f\,o\,f(x) = 0$