Correction révision nombres complexes série n° 1

1) Définitions

Il existe un ensemble appelé ensemble des nombre complexes noté $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

* L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

* Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$

* L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

* Tout nombre complexe z s'écrit d'une manière unique sous la forme algébrique suivante : $z = a + ib$ avec $(a\,,b) \in \mathbb{R}^2$

a est appelé partie réelle de z que l'on note $a = Re(z)$

b est appelé partie imaginaire de z que l'on note $b = Im(z)$

Exercice 1

Ecrire sous la forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = (1+i)^2 \quad z_2 = (1-i)^2 \quad z_3 = (1+i)^3 \quad z_4 = 2(1+i) - 3i(2-2i)$

$z_5 = (1-i)(2+3i) \quad z_6 = (2-i)(4+2i) \quad z_7 = (1-3i) + 2i(1-4i)$

Correction

$z_1 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ à retenir $(1+i)^2 = 2i$

$z_1 = (1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$ à retenir $(1-i)^2 = -2i$

$z_3 = (1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = 2i(1+i) = 2i - 2 = -2 + 2i$

$z_4 = 2(1+i) - 3i(2-2i) = 2 + 2i - 3i - 6 = -4 - i$

$z_5 = (1-i)(2+3i) = 2 + 3i - 2i + 3 = 5 + i$

$z_6 = (2-i)(4+2i) = 8 + 4i - 4i + 2 = 10$

$z_7 = (1-3i) + 2i(1-4i) = 1 - 3i + 2i + 8 = 9 - i$

2) Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$

Soit $M(x\,,y)$ un point de P, on appelle et on note affixe de M le nombre complexe

$$aff(M) = z_M = x + iy$$

Pour tout points M et N de P on appelle et on note affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$, le nombre complexe

$$aff(\overrightarrow{MN}) = z_{\overrightarrow{MN}} = z_N - z_M$$

Pour tous vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ du plan et tous réels α et β on a :

$$aff(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}) = \alpha\, aff(\vec{e_1}) + \beta\, aff(\vec{e_2})$$

Exercice 2

Soit les points A, B et C d'affixes respectives : $2+3i$, $1-2i$ et $-3-4i$

1) Placer les points A, B et C.

2) Déterminer les affixes des vec… $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{A…}$

Correction

1) $z_A = 2+3i\,;\; z_B = 1-2i\,;\; z_C = -3-4i$

$z_{\overrightarrow{OA}} = z_A = 2+3i$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1-5i$

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -3-4i-2-3i = -5-7i$

$z_{(-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC})} = -2z_{\overrightarrow{AB}} + 3z_{\overrightarrow{AC}} = -2(-1-5i)+3(-5-7i) = -12-11i$

$z_{(-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{OA})} = -2z_{\overrightarrow{AB}} + 3z_{\overrightarrow{AC}} + 4\,z_{\overrightarrow{OA}} = -5+i$

3) Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a+ib$ avec $(a\,,b) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle et on note conjugué de z, le nombre complexe définie par : $\overline{z} = a-ib$

* $z+\overline{z} = 2a$ * $z-\overline{z} = 2ib$ * $z\times\overline{z} = a^2+b^2$

* $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$ * $\overline{z\times z'} = \overline{z}\times\overline{z'}$ * $\overline{z^n} = (\overline{z})^n \;\; n\in\mathbb{N}^*$ * $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ **pour** $z' \neq 0$

Exercice 3

1) **Ecrire sous la forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :**

$$z_1 = \frac{1+3i}{2-i} \qquad z_2 = \frac{(1+2i)^2}{1-5i} \qquad z_3 = \frac{5-5i}{-3i+1} - \frac{1-18i}{3-4i}$$

2) **Montrer que le nombre complexe** $z = \frac{\sqrt{3}+3i}{1+i\sqrt{3}}$ **est un réel**

3) **Soient les nombres complexes suivants**

$z_1 = (2-3i)^{2024} + (2+3i)^{2024}$

$z_2 = \left(\frac{3-i}{1+i}\right)^n - \left(\frac{3+i}{1-i}\right)^n\;;\; n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$

Montrer que z_2 est un réel et que z_2 est imaginaire pur.

Correction

1) $z_1 = \frac{1+3i}{2-i} = \frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+6i-3}{5} = \frac{-1}{5} + \frac{7}{5}i$

$$z_2 = \frac{(1+2i)^2}{1-5i} = \frac{1+4i-4}{1-5i} = \frac{-3+4i}{1-5i} = \frac{(-3+4i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{-3-15i+4i-20}{26} = \frac{-23-11i}{26}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{11}{26}i$$

$$z_3 = \frac{5-5i}{-3i+1} - \frac{1-18i}{3-4i} = \frac{(5-5i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} - \frac{(1-18i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{20+10i}{10} - \frac{75-50i}{25} = -1+3i$$

2) $z = \frac{\sqrt{3}+3i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+3i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}-3i+3i+3\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} \in \mathbb{Z}$

3) $z_1 = (2-3i)^{2024} + (2+3i)^{2024}$

$$\overline{z_1} = \overline{(2-3i)^{2024} + (2+3i)^{2024}} = \overline{(2-3i)^{2024}} + \overline{(2+3i)^{2024}}$$
$$= \overline{(2-3i)}^{2024} + \overline{(2+3i)}^{2024} = (2+3i)^{2024} + (2-3i)^{2024} = z_1$$

donc z_1 est un réel

$$z_2 = \left(\frac{3-i}{1+i}\right)^n - \left(\frac{3+i}{1-i}\right)^n \; ; \; n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$$

$$\overline{z_2} = \overline{\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^n - \left(\frac{3+i}{1-i}\right)^n} = \overline{\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^n} - \overline{\left(\frac{3+i}{1-i}\right)^n} = \overline{\left(\frac{3-i}{1+i}\right)}^n - \overline{\left(\frac{3+i}{1-i}\right)}^n$$
$$= \left(\frac{3+i}{1-i}\right)^n - \left(\frac{3-i}{1+i}\right)^n = -\left[\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^n - \left(\frac{3+i}{1-i}\right)^n\right] = z_2$$

donc z_1 est imaginaire pur.

4) Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M(a, b)$ on appelle et on note $|z|$ le réel positif définie par : $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \times \overline{z}}$

Pour tous nombres complexes z et z'

$|z.z'| = |z|.|z'|$; $|z^n| = |z|^n$ $n \in \mathbb{N}^*$; pour $z' \neq 0$ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $|z| = |\overline{z}|$

Pour tous point M et N du plan on a : $MN = |z_N - z_M|$

Exercice 4

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = -2 + 2i$

$z_3 = 5i$; $z_4 = -3i$; $z_5 = -2$; $z_6 = 4$; $z_7 = (2+2i)^2(1-2i)^3(3-i)^4$; $z_8 = \frac{(1+i)^3(2-i)^5}{(1+3i)^3(1-i)^2}$

Correction

$z_1 = 2 - 3i \qquad |z_1| = \sqrt{4+9} = 13$

$z_2 = -2 + 2i \qquad |z_2| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{8}$

$z_3 = 5i \qquad |z_3| = 5$

$z_4 = -3i \qquad |z_4| = 3$

$z_6 = 4 \qquad |z_6| = 4$

$z_7 = (2+2i)^2(1-2i)^3(3-i)^4$

$|z_7| = |(2+2i)^2(1-2i)^3(3-i)^4|$

2) **a)** Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$ on a : $z' + i = \frac{1-z}{1-iz} + i = \frac{1-z}{1-iz} + \frac{i(1-iz)}{1-iz} = \frac{1-z+i+z}{1-iz} = \frac{1+i}{1-iz} = \frac{i(1+i)}{i(1-iz)} = \frac{-1+i}{z+i}$

b) On a $BM \times BM' = |z_M - z_B| \times |z_{M'} - z_B| = |z+i| \times |z'+i| = |(z+i)(z'+i)|$

$$= \left|(z+i)\left(\frac{-1+i}{z+i}\right)\right| = |-1+i| = \sqrt{2}$$

c) $M \in C_{(B,1)} \Leftrightarrow BM = 1$ or $BM \times BM' = \sqrt{2}$ donc $BM' = \sqrt{2}$ ainsi $M' \in C_{(B,\sqrt{2})}$

Exercice 7

Montrer que le nombre complexe $z = \frac{a+b}{1+ab}$ est un réel

où a et b sont deux nombres complexes tels que $ab \neq -1$ et $|a| = |b| = 1$

Correction

$z = \dfrac{a+b}{1+ab}$; $ab \neq -1$; $|a| = |b| = 1$

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)} = \frac{\overline{a+b}}{\overline{1+ab}} = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{1+\bar{a}\bar{b}}$$

Or $|a| = 1 \Leftrightarrow |a|^2 = 1 \Leftrightarrow a\bar{a} = 1 \Leftrightarrow \bar{a} = \dfrac{1}{a}$ de même $\bar{b} = \dfrac{1}{b}$

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}} = \frac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{1+ab}{ab}} = \frac{a+b}{1+ab} = z$$

ainsi le nombre complexe $z = \frac{a+b}{1+ab}$ est un réel.

$x^2+y^2+4y+4=4x^2+4y^2+8y+4 \;\Leftrightarrow\; 3x^2+3y^2+4y=0 \;\Leftrightarrow\; 3\left(x^2+y^2+\frac{4}{3}y\right)=0 \;\Leftrightarrow$

$x^2+y^2+\frac{4}{3}y=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9} \;\Leftrightarrow\; M\in C_{\left(I,\frac{2}{3}\right)} \;\Leftrightarrow F=C_{\left(I,\frac{2}{3}\right)}$

avec $z_I=\frac{2}{3}i$

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points $A(1)$, $B(-i)$, à tout point $M\neq B$ d'affixe z

on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\frac{1-z}{1-iz}$

1) a) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit un réel.

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'|=1$

2) a) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ on a : $z'+i=\frac{-1+i}{z+i}$

b) En déduire que $BM\times BM'=\sqrt{2}$

c) En déduire que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Correction

$z'=\frac{1-z}{1-iz}$; $M\neq B$

1) *a)* $z'\in\mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \overline{z'}=z' \;\Leftrightarrow\; \overline{\left(\frac{1-z}{1-iz}\right)}=\frac{1-z}{1-iz} \;\Leftrightarrow\; \frac{1-\bar{z}}{1+i\bar{z}}=\frac{1-z}{1-iz} \;\Leftrightarrow$

$(1-\bar{z})(1-iz)=(1+i\bar{z})(1-z) \;\Leftrightarrow\; 1-iz-\bar{z}+iz\bar{z}=1-z+i\bar{z}-iz\bar{z} \;\Leftrightarrow$

$2iz\bar{z}-i(z+\bar{z})+z-\bar{z}=0$ posons $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ donc

$2i(x^2+y^2)-2ix+2iy=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x+y^2+2y=0 \;\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=2$

donc $M\in C_{(I,\sqrt{2})}$

b) $|z'|=1 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{1-z}{1-iz}\right|=1 \;\Leftrightarrow\; \frac{|z-1|}{|iz-1|}=1 \;\Leftrightarrow\; \frac{|z-1|}{|i(z+i)|}=1 \;\Leftrightarrow\; \frac{|z_M-z_A|}{|z_M-z_B|}=1 \;\Leftrightarrow$

$\frac{AM}{BM}=1 \;\Leftrightarrow\; AM=BM \;\Leftrightarrow\; M\in med[AB]$

$= |(2+2i)^2| \times |(1-2i)^3| \times |(3-i)^4| = |2+2i|^2 \times |1-2i|^3 \times |3-i|^4$

$= \sqrt{8}^2 \times \sqrt{5}^3 \times \sqrt{10}^4 = 8 \times 5\sqrt{5} \times 100 = 4000\sqrt{5}$

$$z_8 = \frac{(1+i)^3(2-i)^5}{(1+3i)^3(1-i)^2}$$

$$|z_8| = \left|\frac{(1+i)^3(2-i)^5}{(1+3i)^3(1-i)^2}\right| = \frac{|(1+i)^3(2-i)^5|}{|(1+3i)^3(1-i)^2|} = \frac{|(1+i)^3| \times |(2-i)^5|}{|(1+3i)^3| \times |(1-i)^2|}$$

$$= \frac{|1+i|^3 \times |2-i|^5}{|1+3i|^3 \times |1-i|^2} = \frac{\sqrt{2}^3 \times \sqrt{5}^5}{\sqrt{10}^3 \times \sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}^3 \times \sqrt{5}^5}{\sqrt{2}^3 \times \sqrt{5}^3 \times \sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{5}^2}{\sqrt{2}^2} = \frac{25}{4}$$

Exercice 5

1) On donne $A(-2i)$ et $B(-i)$ Déterminer l'ensemble $E = \left\{M(z) \in P \text{ tel que : } \left|\frac{iz-2}{z+i}\right| = 1\right\}$

2) On posant $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ Déterminer l'ensemble

$F = \left\{M(z) \in P \text{ tel que : } \left|\frac{iz-2}{z+i}\right| = 2\right\}$

Correction

1) pour $z \neq -i$ donc $M \neq B$ on a :

$$M(z) \in E \Leftrightarrow \left|\frac{iz-2}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|iz-2|}{|z+i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|i(z+2i)|}{|z+i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|i| \times |z+2i|}{|z+i|} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|z_M - z_A|}{|z_M - z_B|} = 1 \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in med[AB]$$

ainsi $E = med[AB]$

2) pour $z \neq -i$ donc $M \neq B$ on a :

$$M(z) \in F \Leftrightarrow \left|\frac{iz-2}{z+i}\right| = 2$$

posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $z \neq -i$ donc $x \neq 0$ et $y \neq -1$ on a :

$$\left|\frac{iz-2}{z+i}\right| = \frac{|i(x+iy)-2|}{|x+iy+i|} = \frac{|-y-2+ix|}{|x+i(y+1)|} = \frac{\sqrt{(y+2)^2+x^2}}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+4y+4}{x^2+y^2+2y+1}}$$

$$M(z) \in F \Leftrightarrow \left|\frac{iz-2}{z+i}\right| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2+4y+4}{x^2+y^2+2y+1}} = 2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2+4y+4}{x^2+y^2+2y+1} = 4 \Leftrightarrow$$