Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}ln(1+e^{-x})$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x}$

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}ln(1+e^x)$.

d) En déduire que la droite Δ: $y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.

Etudier la position relative de (C_f) et Δ.

e) Tracer (C_f) et Δ.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

Exercice 4

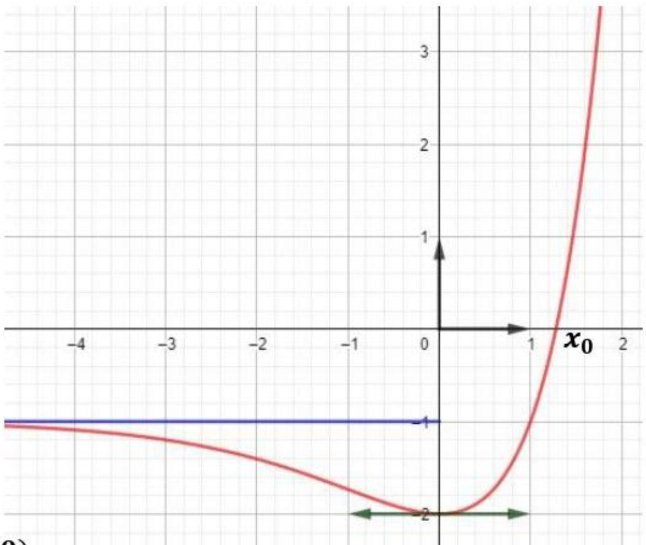
1) La courbe (Γ) ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

* La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $-\infty$.

* La courbe (Γ) admet une seule tangente horizontale.

* La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses $(O, \vec{i})$ en un unique point x_0.



En utilisant le graphique :

a) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.

b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (\alpha x + \beta)e^x - 1$ où α et β sont deux réels.

a) Exprimer $g(0)$ et $g'(0)$ en fonction de α et β.

b) Déduire, en utilisant 1)a), que pour tout réel x on a : $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x+1}{x}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative.

3) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Justifier que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

4) **a)** Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que $f(x_0) = \frac{1}{x_0-1}$.

d) Tracer (C_f). (On prendra $x_0 = 1,2$).

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + e^x & si\ x \le 0 \\ f(x) = x - x\ln x & si\ x > 0 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative (unité graphique 2 cm).

1) **a)** Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 est que le nombre dérivé à gauche en 0 est 2.

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

2) **a)** Etudier les variations de f sur $]-\infty, 0[$ puis sur $]0, +\infty[$.

b) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) **a)** Montrer que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

b) Préciser pour tout réel $x \le 0$, la position de (C) par rapport à Δ.

c) Préciser pour tout réel $x > 0$, la position de (C) par rapport à $\Delta' : y = x$.

d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe (C) au point $A(e, 0)$.

4) Tracer Δ , Δ' , T et (C).

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

On désigne par (C') la courbe représentative de g^{-1}.

b) Vérifier que la droite T définie dans A)3)d) est tangente à la courbe (C') au point $B(0, e)$.

c) Tracer (C').

Lien pour télécharger l'intégralité de la série

Fonction Exponentielle 4ème Sc Techniques

Exercice 2

$f(x)=\frac{1}{2}ln(1+e^{-x})$; $x\in\mathbb{R}$

1) a) $x\mapsto 1+e^{-x}$ **est dérivable et strictement positive sur** $\mathbb{R}$

donc $x\mapsto ln(1+e^{-x})$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **ainsi** f **est dérivable sur** $\mathbb{R}$

pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\left[\frac{1}{2}ln(1+e^{-x})\right]'=\frac{1}{2}\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)=-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-x}e^{x}}{(1+e^{-x})e^{x}}\right]=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+e^{x}}$

b) pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+e^{x}}<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}ln(1+e^{-x})=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}1+e^{-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}ln(1+e^{-x})=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}1+e^{-x}=1$

c) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}ln(1+e^{-x})=\frac{1}{2}ln[e^{-x}(e^{x}+1)]=\frac{1}{2}[ln(e^{-x})+ln(e^{x}+1)]$

$=\frac{1}{2}[-x+ln(e^{x}+1)]=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}ln(1+e^{x})$

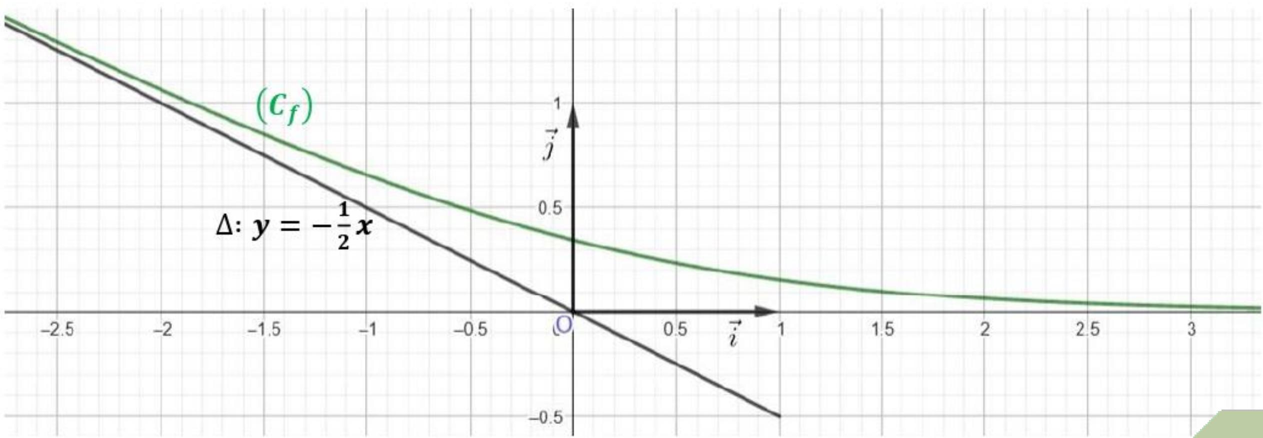
d) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}ln(1+e^{x})+\frac{1}{2}x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}ln(1+e^{x})=0$

donc la droite $\Delta: y=-\frac{1}{2}x$ **est une asymptote à** (C_f) **en** $-\infty$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, **on a:** $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}ln(1+e^{x})>0$

donc $\forall x\in\mathbb{R}$, (C_f) **est au-dessus de** Δ.

e)



2) **a)** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$

pour montrer que $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α , il suffit de démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (f(x) - x)' = f'(x) - 1 < 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, on a: $f'(x) < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$

g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

or $0 \in \mathbb{R}$ donc $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

ainsi l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

b) $g(0) = f(0) - 0 \simeq 0,35$; $g(1) = f(1) - 1 \simeq -0,34$ donc $0 < \alpha < 1$.

3) **a)** Pour tout $x \geq 0$ on a : $f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow |f'(x)| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow$

$|f'(x)| - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4(1+e^x)} - \frac{1+e^x}{4(1+e^x)} = \frac{1-e^x}{4(1+e^x)}$

$x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 \Rightarrow -e^x \leq -1 \Rightarrow 1 - e^x \leq 0 \Rightarrow \frac{1-e^x}{4(1+e^x)} \leq 0$

ainsi pour tout $x \geq 0$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

b) Pour tout $x \geq 0$ et $0 < \alpha < 1$ on a : f est continue sur $[\alpha, x]$ dérivable sur $]\alpha, x[$

d'après le théorème des accroissement finis pour tout $x \geq 0$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

Exercice 4

1) La courbe

a) $g(0) = -2$ et $g'(0) = 0$

b)

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) $g(x) = (\alpha x + \beta)e^x - 1$; $x \in \mathbb{R}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$

a) $g(0) = \beta - 1$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$g'(x) = [(\alpha x + \beta)e^x - 1]' = \alpha e^x + (\alpha x + \beta)e^x$; $g'(0) = \alpha + \beta$

b) $\begin{cases} g(0) = \beta - 1 = -2 \\ g'(0) = \alpha + \beta = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

ainsi pour tout réel x on a : $g(x) = (x - 1)e^x - 1$.

3) $f(x)=\frac{e^x+1}{x}$; $x\in\mathbb{R}^*$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^x+1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x+1}{x}=+\infty$

la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à (C_f).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=+\infty$

ainsi la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

4) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$on a :

$$f'(x)=\left(\frac{e^x+1}{x}\right)'=\frac{xe^x-e^x-1}{x^2}=\frac{(x-1)e^x-1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

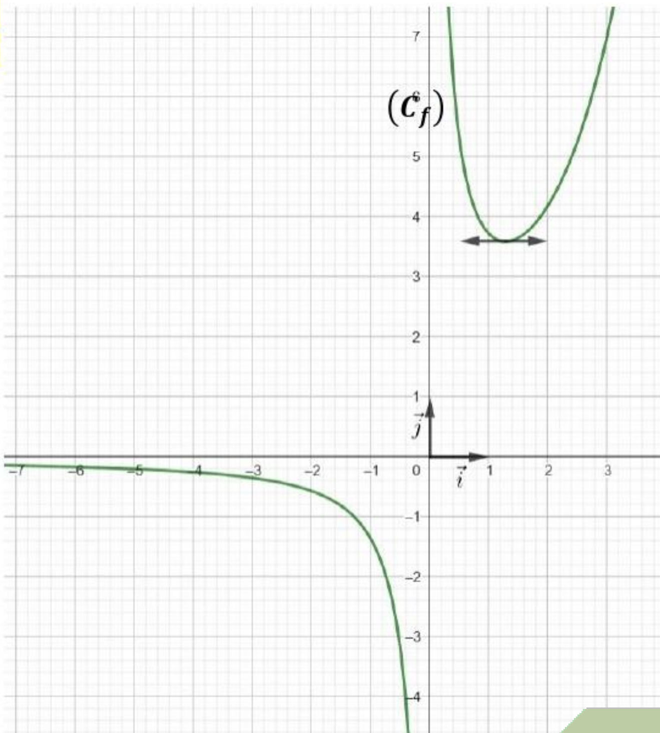
b) Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$on a : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$, donc $f'(x)$ prend le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$f(x_0)$	↗	$+\infty$

c) $f(x_0)=\dfrac{e^{x_0}+1}{x_0}$ or $g(x_0)=0 \Leftrightarrow (x_0-1)e^{x_0}-1 \Leftrightarrow e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0-1}$ donc

$$f(x_0)=\frac{\frac{1}{x_0-1}+1}{x_0}=\frac{\frac{1+x_0-1}{x_0-1}}{x_0}=\frac{\frac{x_0}{x_0-1}}{x_0}=\frac{1}{x_0-1}$$

d)



Exercice 6

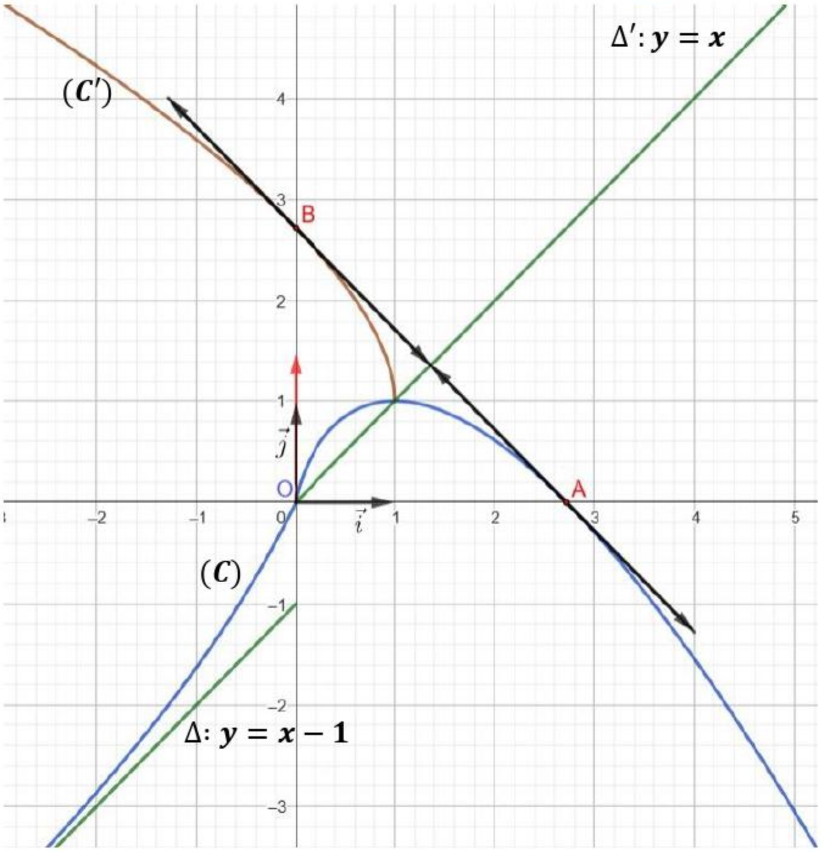
position de (C) par rapport à Δ'	(C) au-dessus de Δ'		(C) au-dessous de Δ'
	Intersection	$(1,1)$	

d) $f'(e) = -1 \;\; ; \;\; f(e) = 0$

$T : y = f'(e)(x-e) + f(e)$; $T : y = -(x-e)$; $T : y = -x + e$

Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe (C) au point $A(e\,,0)$.

4)



5) $g(x) = f(x)$ si $x \in [1\,,+\infty[$

a) g est continue et strictement décroissante sur $[1\,,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $[1\,,+\infty[$ sur $J = g([1\,,+\infty[) =]-\infty\,,1]$

ainsi g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle $J =]-\infty\,,1]$

b) Soit T' la tangente à la courbe (C') au point $B(0\,,e)$

$$g(e) = 0 \;\Leftrightarrow\; g^{-1}(0) = e \;;\; (g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{1}{g'(e)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$T' : y = (g^{-1})'(0)(x-0) + g^{-1}(0)$; $T' : y = -x + e$ or $T : y = -x + e$

ainsi T est tangente à la courbe (C') au point $B(0\,,e)$.

c) $(C') = S_{\Delta'}(C)$ avec $\Delta' : y = x$

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + e^x & si \ \ x \le 0 \\ f(x) = x - x\ln x & si \ x > 0 \end{cases} ; \quad x \in \mathbb{R}$$

1) a) $f(0) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x - 1 + e^x = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x - x\ln x = 0$

on a : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ **ainsi f est continue en 0.**

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x - 1 + e^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 + \dfrac{e^x - 1}{x} = 2$

ainsi f est dérivable à gauche en 0 et $f'_d(0) = 2$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x - x\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \ln x = +\infty$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et (C) admet à à droite en 0 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

2) a) f est dérivable sur $]-\infty\,,0[$

$f'(x) = (x - 1 + e^x)' = 1 + e^x > 0$ donc f est croissante sur $]-\infty\,,0[$

f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$:

$f'(x) = (x - x\ln x)' = 1 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

donc $f'(x)$ prend le signe de $-\ln x$ sur $]0\,,+\infty[$

si $x \in\,]0, 1]$ on a : $\ln x \le 0 \ \Rightarrow\ -\ln x \ge 0 \ \Rightarrow\ f'(x) \ge 0$ donc f est croissante sur $]0, 1]$

si $x \in [1\,,+\infty[$ on a : $\ln x \ge 0 \ \Rightarrow\ -\ln x \le 0 \ \Rightarrow\ f'(x) \le 0$ donc f est décroissante sur $[1\,,+\infty[$

b)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			1	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x - 1 + e^x = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x - \text{x}\ln x = \lim\limits_{x\to +\infty} x(1 - \ln x) =$

3) a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - (x - 1) = \lim\limits_{x\to -\infty} x - 1 + e^x - (x - 1) = \lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$

ainsi la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

b) Pour tout $x \le 0$, on a : $f(x) - (x - 1) = e^x > 0$

ainsi pour tout $x \le 0$, (C) est au-dessus de Δ.

c) Pour tout $x > 0$, on a : $f(x) - x = x - \text{x}\ln x - x = -x\ln x$

donc $f(x) - x$ prend le signe de $-\ln x$ sur $]0\,,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$			