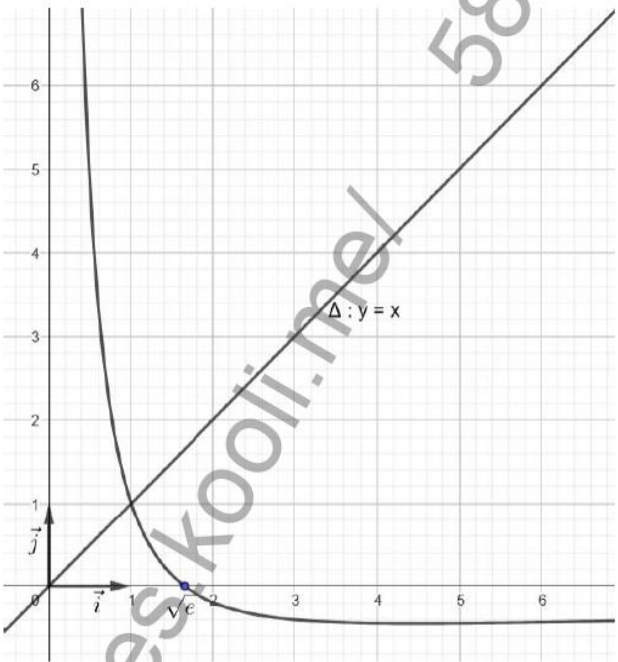
Exercice 1

Soit la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{a+b\ln(x)}{x}$ où a et b sont deux réels.

Soit F la primitive de f qui s'annule en 1.

Ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ La courbes représentative de f et la droite $\Delta : y = x$

C_f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\sqrt{e}$ et la droite Δ au point d'abscisse .



1) a) Exprimer en fonction de a et , $f(1)$ et $f(\sqrt{e})$

b) En déduire que pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$ on a : $f(x)=\dfrac{1-2\ln(x)}{x}$

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0\,,\sqrt{e}]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0\,,\sqrt{e}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note g^{-1} la fonction réciproque de g et C' sa courbe

b) Tracer $C_{g^{-1}}$ et préciser $(g^{-1})'(1)$.

3) Soit A l'aire du domaine plan limité par C_f , C' , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

a) Montrer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} f(t)\,dt=\frac{1}{4}$

b) En déduire la valeur de A.

c) Montrer que $\displaystyle\int_1^{e} F(t).f(t)\,dt = 0$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Interpréter le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

c) Montrer que C_f admet, au voisinage de $(+\infty)$, une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = 1 + \frac{(x-1)\ln x}{x}$

b) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $(x-1)\ln x \geq 0$

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$

4) On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g(x) = f(x) - x + 1$

On donne ci-contre le tableau de variation de g.

x	0		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

a) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour $x > 0$

b) En déduire que le point $A(1,0)$ est un point d'inflexion de C_f.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha \in]3,3\,;3,4[$.

5) Soit la droite Δ: $y = x$.

a) Montrer que la droite Δ coupe la courbe C_f uniquement au point d'abscisse α.

b) Tracer la tangente (T), la droite Δ et la courbe C_f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

On note f^{-1} la fonction réciproque de f, on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) Tracer (Γ).

7) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations :

$y = 1$, $y = e$ et $x = 0$

a) Montrer que $\int_1^e x\ln x \, dx = \frac{e^2+1}{4}$

b) Montrer que la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln^2 x$.

c) Montrer alors que $A = \frac{e^2-2e+5}{4}$ ua

Correction Fazzoura 5

Exercice 1

1) $f(x)=\frac{a+bln(x)}{x}\quad \forall x\in\,]0\,,+\infty[$

a) $f(1)=\frac{a+bln(1)}{1}=a$

$$f(\sqrt{e})=\frac{a+bln(\sqrt{e})}{\sqrt{e}}=\frac{a+bln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{e}}=\frac{a+\frac{1}{2}b}{\sqrt{e}}$$

b) On a graphiquement $f(1)=1$ donc $a=1$

et $f(\sqrt{e})=0$ donc $\frac{1+\frac{1}{2}b}{\sqrt{e}}=0$ donc $\frac{b}{2}=-1$ ainsi $b=-2$

donc $\forall x\in\,]0\,,+\infty[\quad f(x)=\frac{1-2ln(x)}{x}$

2) a) On a $g(x)=f(x)$ si $x\in\,]0\,,\sqrt{e}\,]$

On a g est cntinue et strictement décroissante sur $]0\,,\sqrt{e}\,]$ donc g réalise une bijection de $]0\,,\sqrt{e}\,]$ sur $g(]0\,,\sqrt{e}\,])=\left[g(\sqrt{e}),\lim\limits_{x\to0^+}g(x)\right[=[0\,,+\infty[$

b) $C'=S_\Delta(C)$ avec $\Delta:\,y=x$ voir traçage de C' en fin de la correction.

on a $g(1)=1\ \Leftrightarrow\ g^{-1}(1)=1$

$$(g^{-1})'(1)=\frac{1}{g'(g^{-1}(1))}=\frac{1}{g'(1)}$$

or $\forall x\in\,]0\,,\sqrt{e}\,]$; $g'(x)=\left(\frac{1-2ln(x)}{x}\right)'=\frac{-\frac{2}{x}\times x-1+2ln(x)}{x^2}=\frac{-3+2ln(x)}{x^2}$

ainsi $g'(1)=-3$ d'où $(g^{-1})'(1)=-\frac{1}{3}$

3) a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}f(t)\,dt=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1-2ln(t)}{t}\,dt=\int_0^{\sqrt{e}}\frac{1}{t}\,dt-2\int_0^{\sqrt{e}}\frac{1}{t}ln(t)\,dt$

$$=[ln|t|]_1^{\sqrt{e}}-2\times\frac{1}{2}[ln^2|t|]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=ln(\sqrt{e})-ln^2(\sqrt{e})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

b) Soit A_1 l'aire du domaine limité par C_f et les droites d'équations $x=1$ et $x=\sqrt{e}$ plus l'aire du triangle OAB

Soit A_2 l'aire du domaine limité par C' , la droite d'équation $y=1$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ plus l'aire du triangle OBC

pour raison de symétrie avec la droite $\Delta:\,y=x$ on a $A_1=A_2$ ainsi $A=2A_1$ donc

$$A=2\left(\int_1^{\sqrt{e}}f(x)\,dx+\frac{1\times1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\,ua$$

c) $\displaystyle\int_1^{e}F(t)f(t)\,dt=\int_1^{e}F(t)F'(t)\,dt=\frac{1}{2}\left[(F(t))^2\right]_1^e=\frac{1}{2}\left[(F(e))^2-(F(1))^2\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(F(e)\right)^2 \quad \text{car } F(1) = 0$$

or $\forall t \in \,]0\,,+\infty[\quad f(t) = \frac{1-2ln(t)}{t} = \frac{1}{t} - 2 \times \frac{1}{t} ln(t)$

f est continue sur $]0\,,+\infty[$ donc f admet au moins une primitive sur $]0\,,+\infty[$ ainsi

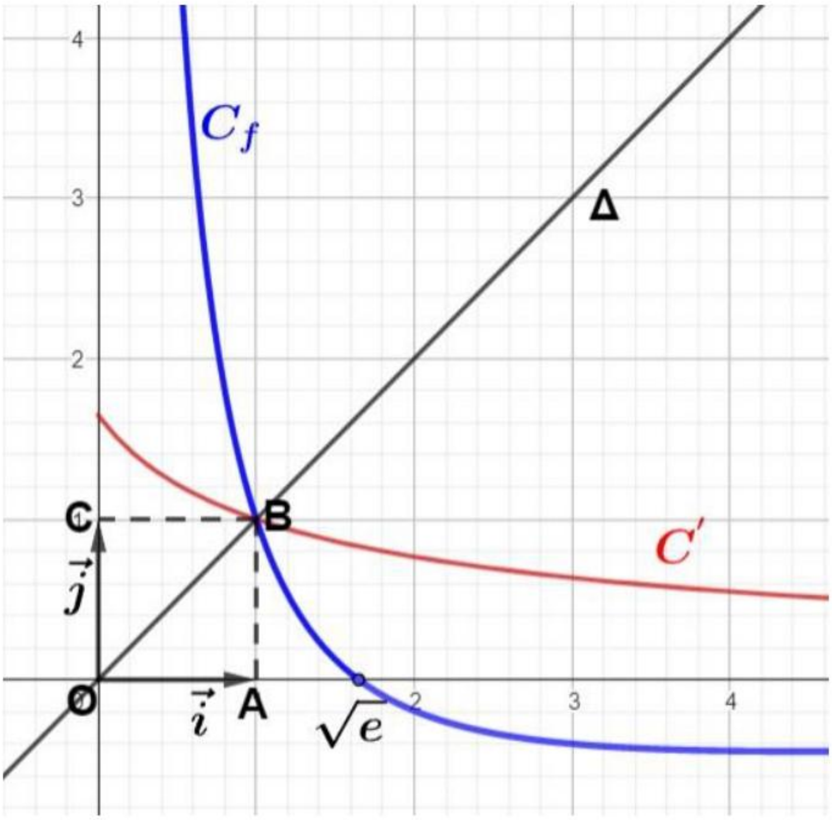
$F(t) = ln\,|t| - ln^2\,|t| + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$

$\quad = ln\,(t) - ln^2(t) + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$ car $t \in \,]0\,,+\infty[$

or $F(1) = 0$ donc $ln\,(1) - ln^2(1) + c = 0$ donc $c = 0$

ainsi $F(t) = ln\,(t) - ln^2(t)$ d'où $F(e) = ln\,(e) - ln^2(e) = 1 - 1 = 0$ donc

$\int_1^e F(t)f(t)\, dt = 0$



Exercice 2

$f(x) = xlnx - \frac{1}{2}ln^2x\ ;\ x \in \,]0\,,+\infty[$

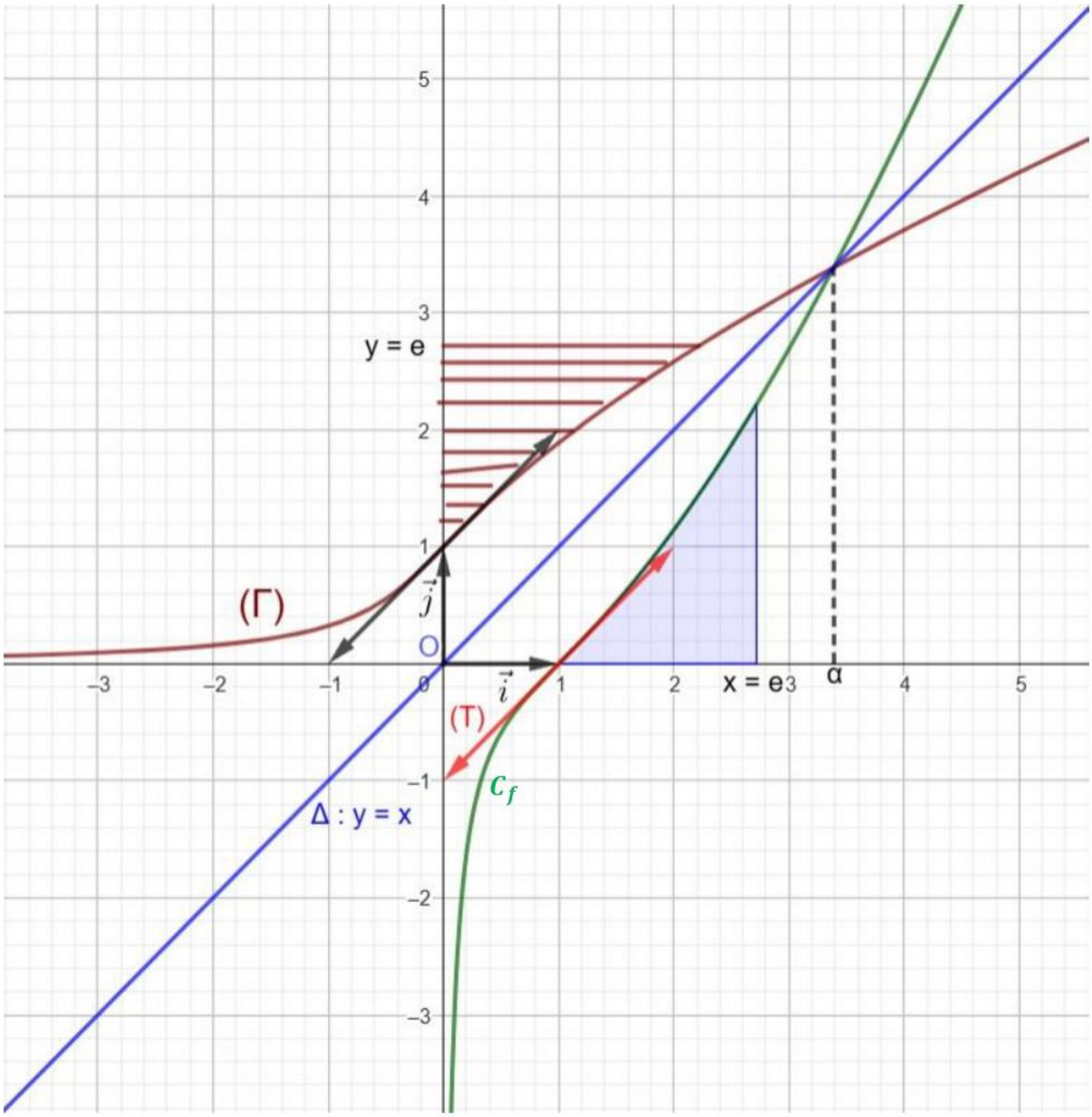
1) a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \overbrace{xlnx}^{0} - \frac{1}{2}\overbrace{ln^2x}^{+\infty} = -\infty$ la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à C_f

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xlnx - \frac{1}{2}ln^2x = \lim\limits_{x\to+\infty} xlnx\left(1 - \frac{1}{2} \times \overbrace{\frac{ln\,x}{x}}^{0}\right) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xlnx - \frac{1}{2}ln^2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x - \frac{1}{2} \times \overbrace{\frac{ln^2x}{x}}^{0} = +\infty$

donc C_f admet, au voisinage de $(+\infty)$, une branche parabolique de direction $(O\,,\vec{j})$.

2) a) f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et pour tout $x \in \,]0\,,+\infty[$,on a :


y = e
(Γ)
Δ : y = x
(T)
C_f
x = e
α
O

$$f'(x) = \left(x\ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x\right)' = \ln x + \frac{1}{x} \times x - \frac{1}{x} \times \ln x = \ln x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

$$= 1 + \frac{x\ln x}{x} - \frac{\ln x}{x} = 1 + \frac{(x-1)\ln x}{x}$$

b)

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	||	$-$	0	$+$	
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln x$	||	$+$	0	$+$	

ainsi **pour tout $x \in]0, +\infty[$, $(x-1)\ln x \geq 0$**

c) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $f'(x) = 1 + \frac{(x-1)\ln x}{x} > 0$ car $\forall x \in]0, +\infty[$, on a : $(x-1)\ln x \geq 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $f'(1) = 1$; $f(1) = 0$; $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ainsi **$(T) : y = x - 1$**

4) $g(x) = f(x) - x + 1$; $x \in]0, +\infty[$

a) $g(1) = f(1) - 1 + 1 = 0$

g est croissante sur $]0, +\infty[$

$0 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) \leq g(1) \Rightarrow g(x) \leq 0$

$x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1) \Rightarrow g(x) \geq 0$

d'où le signe de $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

b) Pour tout $0 < x \leq 1$ on a : $g(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) - x + 1 \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq x - 1$

donc pour tout $0 < x \leq 1$ on a : C_f est au-dessous de (T) (1)

Pour tout $x \geq 1$ on a : $g(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) - x + 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq x - 1$

donc pour tout $x \geq 1$ on a : : C_f est au-dessus de (T) (2)

de (1) et (2) la courbe C_f traverse (T) au point d'abscisse 1 or $f(1) = 0$

donc le point $A(1, 0)$ est un point d'inflexion de C_f

c) g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $g(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ or $1 \in \mathbb{R}$

donc l'équation $g(x) = 1$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α

$g(3,3) \simeq 0,93$; $g(3,4) \simeq 1,1$ donc $g(3,3) < 1 < g(3,4)$ ainsi $\alpha \in]3,3\,;3,4[$

5) $\Delta\colon y = x$

a) On a : $g(x) = 1$ admet une unique solution α donc $f(x) - x + 1 = 1$ admet une unique solution α donc $f(x) - x = 0$ admet une unique solution α donc $f(x) = x$ admet une unique solution α

ainsi la droite Δ coupe la courbe C_f uniquement anu point d'abscisse α.

b) Voir traçage de C_f en fin de correction.

6) a) f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc réalise f une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

b) $(\Gamma) = S_\Delta(C_f)$ avec $\Delta\colon y = x$ voir traçage de (Γ) en fin de correction.

7)

a) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx = ??$

On pose $U(x) = \ln x$ $\quad U'(x) = \frac{1}{x}$

$V'(x) = x$ $\quad V(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{1}{2}[x^2\ln x]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}[x^2]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a :

$$u'(x) = (x\ln^2x - 2x\ln x + 2x)' = \ln^2x + 2\times\frac{1}{x}\times\ln x\times x - 2\left(\ln x + \frac{1}{x}\times x\right) + 2$$

$$= \ln^2x + 2\ln x - 2\ln x - 2 + 2 = \ln^2x$$

donc la fonction u est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln^2x$.

c) Soit A' l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations :

$x = 1$, $x = e$ et $y = 0$ dont les symétries par la droite $\Delta\colon y = x$ sont les droites d'équations :

$y = 1$, $y = e$ et $x = 0$ et comme $(\Gamma) = S_\Delta(C_f)$ alors $A = A'$

$$A' = \int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e f(x)\,dx \;\; car\ \forall x \geq 1\,;\ f(x) \geq 0$$

$$= \int_1^e \left(x\ln x - \frac{1}{2}\ln^2x\right)dx = \int_1^e x\ln x\,dx - \frac{1}{2}\int_1^e \ln^2x\,dx$$

$$= \frac{e^2+1}{4} - \frac{1}{2}[x\ln^2x - 2x\ln x + 2x]_1^e = \frac{e^2+1}{4} - \frac{1}{2}(e - 2e + 2e - 2)$$

$$= \frac{e^2+1}{4} - \frac{e-2}{2} = \frac{e^2+1}{4} - \frac{2e-4}{4} = \frac{e^2-2e+5}{4}$$

ainsi $A = \dfrac{e^2-2e+5}{4}\ ua$