Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

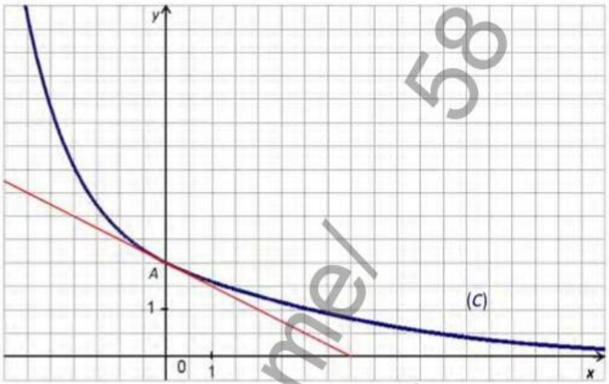
Exercice 1

Pour chaque question indiquer la réponse exacte.

1) Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ la bijection de $]2, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$

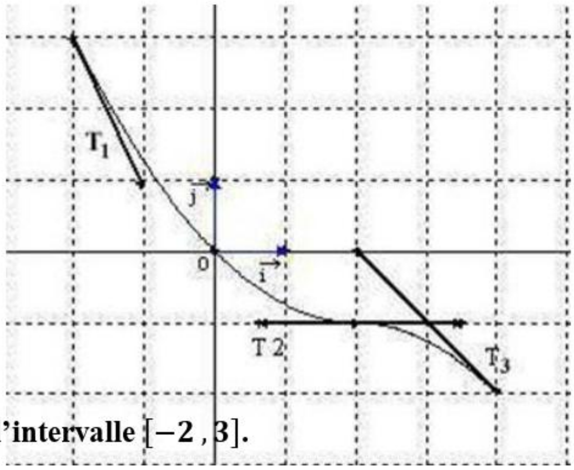
a) $(f^{-1})(y) = \frac{-2y^2}{1-y^2}$ b) $(f^{-1})(y) = \frac{2y^2}{1-y^2}$ c) $(f^{-1})(y) = \frac{-2y^2}{y^2-1}$

2) La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



a) $(f^{-1})'(2) = -2$ b) $(f^{-1})'(2) = -\frac{1}{2}$ c) $(f^{-1})'(2) = 2$

Exercice 2



Le graphique ci-contre est celui d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $[-2, 4]$.

T_1 est la demi-tangente au point d'abscisse 1.

T_2 est la tangente au point de coordonnées $(2, -1)$.

T_3 est la tangente au point de coordonnées $(4, -2)$.

1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant

a) $f'_d(-2) = -2$; $f'_g(4) = 2$; $f'(2) = 0$

b) La fonction f réalise une bijection de $[-2, 4]$ sur l'intervalle $[-2, 3]$.

2) Justifier que la fonction réciproque f^{-1} de f n'est pas dérivable au point -1.

3) Calculer $(f^{-1})'_d(3)$ et $(f^{-1})'_g(-2)$.

4) Tracer la courbe C' de la fonction f^{-1}.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in [0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{-10x}{(x^2+1)^2}$

2) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$ et préciser le nombre dérivé de f à droite en 0.

3) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur $]-1\,,4]$.

4) Soit g la réciproque de f.

a) Donner le tableau de variation de g

b) Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

c) Montrer que g est dérivable sur $]-1\,,4[$ on précisera la dérivabilité de g à gauche en 4

d) Expliciter $g(x)$ pour tout $x \in\,]-1\,,4]$.

Exercice 4

1) Soit la fonction f définie sur $]-4\,,+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x+3}{x+4}$ soit C_f sa courbe représentative

a) Calculer $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter les résultats graphiquement.

b) Dresser le tableau de variations de f

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

3) a) Etudier la position relative de C_f et la droite $\Delta : y = x$

b) Tracer C_f ; $C_{f^{-1}}$ et Δ

4) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=-1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 \le U_n \le 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

5) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n=\frac{U_n-1}{U_n+3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} V_k$

c) Exprimer U_n en fonction de n et retrouver la limite de (U_n).

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sqrt{\tan x}$.

1) Etudier la dérivabilité de f en 0^+ et interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que f est une bijection de $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0\,,+\infty[$.

3) Soit g la fonction réciproque de f.

Montrer que g est dérivable sur $[0\,,+\infty[$ et que $\forall x \in [0\,,+\infty[$ on a : $g'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

4) Soit h la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $h(x)=g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)$

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α autre que 0 et que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

c) Etudier la position relative de la droite $\Delta: y = x$ et la courbe (C_g).

4) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{4x^2+1}$.

5) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) Soit la suite S_n définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right) - g^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = \frac{1}{\pi}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\right)$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$.

b) Vérifier que $\forall x \in [0, 1]$ on a : $f'(x) = x\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $\left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$.

b) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est dérivable sur $\left]\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right[$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en $\frac{1}{\pi}$ et $\frac{2}{\pi}$

d) Calculer $f^{-1}\left(\frac{3}{2\pi}\right)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2\pi}\right)$

3) Soit la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Montrer que $\forall x \in]0, 1[$ on a : $0 < f'(x) < 1$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0, 1]$ une unique solution α

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, 1]$.

4) Soit la suite réelle (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2}\alpha \\ \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \alpha$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

a) Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

b) En déduire que $\forall x \in [0,+\infty[$ on a : $g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

c) Montrer alors que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+g\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ est une constante.

Exercice 6

Soit la fonction : $x \mapsto 1+\sin(\pi x)$ $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sur $[0, 2]$.

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,2[$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0.

d) Vérifier que : $\forall x \in]0,2[$ $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$

2) Soit la fonction g définie sur $]0,2[$ par : $g(x)=f^{-1}(2-x)+f^{-1}(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0,2[$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0,2[$.

c) Calculer $g(1)$. En déduire que : $\forall x \in]0,2[$ on a : $f^{-1}(2-x)=-f^{-1}(x)$.

3) Soit la suite réelle U définie sur IN^* par : $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$

a) Montrer que $\forall n \in IN^*$; $\forall k \in \{0,1,2,\dots,n\}$ on a :

$$f^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \le f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) \le f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

b) En déduire que : $\forall n \in IN^*$ on a : $\frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \le U_n \le \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

c) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $]0,1]$ par : $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}-1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$ on a : $f'(x)=\frac{-1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer f admet une fonction réciproque f^{-1} et déterminer son domaine de définition.

c) Tracer (C) et (C') courbe représentative de f^{-1}.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=f(\cos^2 x)$. Soit (C_g) sa courbe représentative.

a) Montrer que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x)=\frac{1}{2}\tan x$.