Intégrale 4ème Sc Expérimentales et 4ème Mathématiques

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos x$.

1) a) Calculer $\forall x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x)$.

b) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0\,,1]$.

2) Soit g la fonction réciproque de f.

a) Justifier que g est dérivable sur $[0\,,1[$.

b) Montrer que $\forall x \in [0\,,1[: g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) a) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

Exercice 2

1) Soit f la fonction définie sur $[0\,,1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.

a) Etudier la dérivabilité de f à droit en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$.

d) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

e) Construire C_f et C' la courbe représentative de f^{-1}.

2) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$ et $y = 1$ Montrer que $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

3) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. En déduire que (U_n) est convergente.

b) Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}$, on a : $0 \le U_n \le \frac{1}{2n+1}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4) On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a) Montrer que pour tout $t \in [0\,,1]$ et pour tout $\in \mathbb{N}$, on a :

$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $V_n - I = (-1)^n U_n$ où $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $|V_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

5) Soit F la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{t^2}{1+t^2}\, dt$

a) Montrer F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire l'expression de $F(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

c) Déterminer alors la valeur exacte de A.

Exercice 3

Soit la suite réelle U définie sur IN^* par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$

1) **a)** Justifier l'existence de U_n pour tout $n \in IN^*$.

b) Montrer que $\forall n \in IN^*$, $U_n \geq 0$.

c) Montrer que la suite U est décroissante. Que peut-on conclure ?

d) Vérifier que : $U_1 = 1$ et que $U_2 = \frac{\pi}{4}$.

2) **a)** A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{n+1} U_{n+2}$

b) En déduire $\forall n \in IN^*$ on a : $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, U_n$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\frac{n}{n+1}\, U_n \leq U_{n+1} \leq U_n$

En déduire la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

3) **a)** Montrer par récurrence que : pour tout $n \geq 2$ on a : $nU_n\, U_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

b) En déduire la limite de la suite U.

Exercice 4

A) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

1) **a)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

b) Tracer la courbe C_f de f.

c) Montrer graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

2) **a)** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]1, 2]$.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

c) Tracer C' la courbe de f^{-1}

3) a) pour $n = 2$ on a $2U_2U_1 = 2 \times \frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{2}$ vrai

soit $n \geq 2$ supposons que $nU_n\, U_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ et montrons que $(n+1)U_{n+1}\, U_n = \frac{\pi}{2}$

d'après 2) b) et $\forall n \in IN^*$ on a $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, U_n$ donc $\forall n \geq 2$ on a $U_{n+1} = \frac{n}{n+1}\, U_{n-1}$

par suite $(n+1)U_{n+1}\, U_n = (n+1) \times \frac{n}{n+1}\, U_{n-1} \times U_n = nU_n\, U_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

conclusion $\forall n \geq 2$ on a $nU_n\, U_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

b) $\forall n \geq 2$ on a $nU_n\, U_{n-1} = \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; U_n\, U_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$

posons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n-1} = L$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n\, U_{n-1} = L^2$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n\, U_{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$ ainsi $L^2 = 0$ donc $L = 0$

conclusion $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

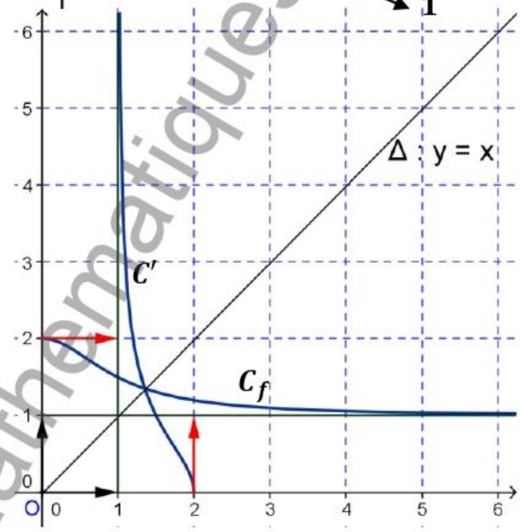
1) a) $\forall x \in \mathbb{R}_+$; $f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \leq 0$ $f'(x) = 0$; $x = 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	1

$f(0) = 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

b)



c) La droit Δ: $y = x$ coupe C_f en un seul point alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

2) a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right] =]1, 2]$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]1, 2]$.

b) On pose

$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$

$x \in]1, 2] \qquad\qquad y \in \mathbb{R}_+$

$f(y) = x \iff \frac{y^2+2}{y^2+1} = x \iff y^2 + 2 = xy^2 + x \iff y^2(1-x) = x - 2 \iff y^2 = \frac{x-2}{1-x}$

$\iff y = \pm\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$ or $y \in \mathbb{R}_+$ donc $y = \sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$ donc $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$

c) On a : $C' = S_\Delta(C_f)$ avec $\Delta : y = x$.

3) $g(x) = \tan x \;;\; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

a) $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\;;\; g'(x) = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x > 0$

g est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur

$J = g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[g(0);\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)\right[= [0\,;\,+\infty[$

ainsi g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[0\,;\,+\infty[$

b) Pour $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on pose $g^{-1}(0) = y \iff g(y) = 0 \iff \tan y = 0$ donc $y = 0$

ainsi $g^{-1}(0) = 0$

Pour $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on pose $g^{-1}(1) = y \iff g(y) = 1 \iff \tan y = 1$ donc $y = \frac{\pi}{4}$

ainsi $g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

c) On a g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\;;\; g'(x) \neq 0$

donc g^{-1} est dérivable sur $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0\,;\,+\infty[$

pour $x \in [0\,;\,+\infty[$ et $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a ; $y = g(x) \iff f(y) = x \iff \tan y = x \Rightarrow \tan^2 y = x^2$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

4) $A = \int_0^1 |f(x)|\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$ car $f(x) > 0$

$$= \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2+1+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right] dx = \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{x^2+1}\right] dx$$

$$= \int_0^1 [1 + (g^{-1})'(x)]\, dx = [x + g^{-1}(x)]_0^1 = 1 + g^{-1}(1) - g^{-1}(0) = 1 + \frac{\pi}{4}\ u.a$$

Exercice 5

A) 1) a) $U_0 = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}\sin(0) = \frac{2}{\pi}$

$U_1 = \int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \qquad \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{cases}$

$U_1 = \left[\frac{2}{\pi}x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[\frac{2}{\pi}x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

$$= \left[\frac{2}{\pi} x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \left[\frac{2}{\pi} x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 + \frac{4}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ U_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx$

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+2} \\ v'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+2)x^{n+1} \\ v(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+2)x^{n+1} \\ v(x) = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{cases}$$

$$U_{n+2} = \left[\frac{2}{\pi} x^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{\pi}(n+2)x^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{2}(n+2)\int_0^1 x^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{2}(n+2)\int_0^1 x^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$\begin{cases} g(x) = x^{n+1} \\ h'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(x) = (n+1)x^{n} \\ h(x) = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(x) = (n+1)x^{n} \\ h(x) = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{cases}$$

$$U_{n+2} = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}(n+2)\left[\left[-\frac{2}{\pi}x^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{2}{\pi}(n+1)x^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}(n+2)\left[\left[-\frac{2}{\pi}x^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}(n+1)\int_0^1 x^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}(n+2)\frac{2}{\pi}(n+1)\left(\int_0^1 x^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4(n+1)(n+2)}{\pi^2}U_n$$

c) $U_2 = \frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}U_0 = \frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}\times\frac{2}{\pi} = \frac{2\pi^2-16}{\pi^3}$

$U_3 = \frac{2}{\pi} - \frac{12}{\pi^2}U_1 = \frac{2}{\pi} - \frac{12}{\pi^2}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{24}{\pi^3} + \frac{48}{\pi^4} = \frac{2\pi^3-24\pi+48}{\pi^4}$

2) a) $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx - \int_0^1 x^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx$

$$= \int_0^1 \left[x^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]dx = \int_0^1 x^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1\right]dx$$

$0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{\pi}{2}x \le \frac{\pi}{2}$ $\quad 0 \le \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \le 1 \Rightarrow -1 \le \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1 \le 0$

$\Rightarrow x^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1\right] \le 0 \Rightarrow \int_0^1 x^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1\right]dx \le 0$

donc $U_{n+1} - U_n \le 0$ par suite la suite (U_n) est décroissante.

b) On a : $\forall x \in [0\,,1]$ et $\forall n \ge 1$ $\quad 0 \le \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \le 1 \Rightarrow 0 \le x^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \le x^n$

$$\Rightarrow 0 \le \int_0^1 x^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx \le \int_0^1 x^n\, dx \Rightarrow 0 \le U_n \le \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow 0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$$

c) on a $0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

B) 1) a)

$$V_{n+1}-V_n=\int_0^{\frac{1}{n+1}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx-\int_0^{\frac{1}{n}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{n+1}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx+\int_{\frac{1}{n}}^{0} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx=\int_{\frac{1}{n}}^{0} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx+\int_0^{\frac{1}{n+1}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$$

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx=-\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$$

or pour tout $0\le x\le 1$ on a : $0\le x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\le 1 \Rightarrow x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ge 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ donc

$-\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx\le 0$ donc $V_{n+1}-V_n<0$

par suite la suite (V_n) est décroissante.

b) $0\le x\le 1 \Rightarrow 0\le\frac{\pi}{2}x\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0\le\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\le 1 \Rightarrow 0\le x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\le x^4 \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*$ on a :

$0\le\int_0^{\frac{1}{n}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx\le\int_0^{\frac{1}{n}} x^4\,dx$ $\quad 0\le V_n\le\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{n}} \Rightarrow 0\le V_n\le\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{n}\right)^5 \Rightarrow 0\le V_n\le\frac{1}{5n^5}$

conclusion $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a : $0\le V_n\le\frac{1}{5n^5}$

c) $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a : $0\le V_n\le\frac{1}{5n^5}$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty}0=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{5n^5}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$

2) $W_n=\int_{\frac{(-1)^n}{n}}^{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$; $n\in\mathbb{N}^*$

a) $W_{2n+1}=\int_{\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}}^{\frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n\pm1}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx=\int_{\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}}^{\frac{(-1)^{2(n+1)}}{2n\pm1}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx=\int_{\frac{[(-1)^2]^n(-1)^1}{2n+1}}^{\frac{[(-1)^2]^{n+1}}{2n+1}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$$=\int_{\frac{-1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n+1}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=2\int_0^{\frac{1}{2n+1}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=2V_{2n+1}$$

car $x\mapsto x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ est une fonction paire

b) $W_{2n}=\int_{\frac{(-1)^{2n}}{2n}}^{\frac{(-1)^{2n+1}}{2n}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx=\int_{\frac{[(-1)^2]^n}{2n}}^{\frac{[(-1)^2]^n(-1)^1}{2n}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx=\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{-1}{2n}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$

$$=-\int_{\frac{-1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx=-2\int_0^{\frac{1}{2n}} x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx=-2V_{2n}$$

c) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}V_{2n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}V_{2n}=0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}2V_{2n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}-2V_{2n}=0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}W_{2n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}W_{2n}=0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=0$

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \tan x$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0\,,+\infty[$,calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in [0\,,+\infty[$.

4) Calculer l'aire A du domaine plan limité par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 5

A) Pour $\in [0\,,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la suite (U_n) définit par :

$$U_0 = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* :\ U_n = \int_0^1 x^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$$

1) a) Calculer U_0 et U_1

b) En utilisant deux intégrations par parties montrer que $\forall x \in [0\,,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$U_{n+2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4(n+1)(n+2)}{\pi^2}U_n$$

c) Calculer U_2 et U_3

2) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b) Montrer que $\forall\, n \geq 1$ on a : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

B) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$; $x \in [0\,,1]$

1) a) Montrer que la suite (V_n) est décroissante.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq V_n \leq \frac{1}{5n^5}$

c) Déterminer alors la limite de la suite (V_n).

2) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \int_{\frac{(-1)^n}{n}}^{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} x^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$

a) Exprimer W_{2n+1} en fonction de V_{2n+1}

b) Exprimer W_{2n} en fonction de V_{2n}

c) Déterminer alors la limite de la suite (W_n).

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = +\infty$

c) f est continue et strictement croissante sur $[0\,,1[$ donc f réalise une bijection de $[0\,,1[$ sur $f([0\,,1[) = [0\,,+\infty[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$.

d) **Méthode 1**

On pose $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in [0\,,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in [0\,,1[\end{cases}$

$f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y}{1-y}} = x \Rightarrow \frac{y}{1-y} = x^2 \Leftrightarrow y = (1-y)x^2 \Leftrightarrow y = x^2 - yx^2 \Leftrightarrow$

$y + yx^2 = x^2 \Leftrightarrow y(1+x^2) = x^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{1+x^2}$

ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

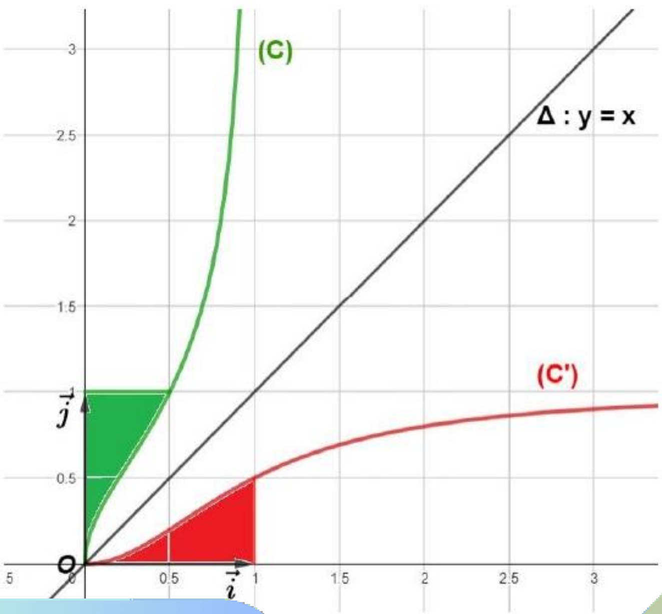
Méthode 2

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$f\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{\frac{1+x^2}{1+x^2}-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}}} = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}(1+x^2)} = \sqrt{x^2} = |x| = x$; car $x \in \mathbb{R}_+$

ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

c) $C' = S_\Delta(C_f)$ avec $\Delta : y = x$



Correction Intégrale 4ème Sc Expérimentales et Mathématiques

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\cos x$

1) a) f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x)=-\sin x$

b) On a $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x)=-\sin x\ \leq 0$; $f'(x)=0$; $x=0$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ alors f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right),f(0)\right]=[0,1]$

2) g réciproque de f.

a) f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x)\neq 0$ alors g est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0,1[$.

b) $\forall x\in[0,1[$; $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sin y}$

pour $x\in[0,1[$ et $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a ; $y=g(x)\ \Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow \cos y=x$

or $(\cos y)^2+(\sin y)^2=1\ \Leftrightarrow\ (\sin y)^2=1-(\cos y)^2\ \Leftrightarrow \sin y=\pm\sqrt{1-(\cos y)^2}$

or $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin y>0$ donc $\sin y=\sqrt{1-(\cos y)^2}=\sqrt{1-x^2}$

et par suite $g'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) a) Pour $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on pose $g\left(\frac{1}{2}\right)=y\Leftrightarrow f(y)=\frac{1}{2}$ donc $\cos y=\frac{1}{2}$ donc $y=\frac{\pi}{3}$ par suite $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

pour $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on pose $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=y\Leftrightarrow f(y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $y=\frac{\pi}{6}$ par suite $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$

b) $$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}g'(x)\,dx=[g(x)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=-\left(g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)\right)=-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Exercice 2

1) On a : $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$; $x\in[0,1[$

a) $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x}{1-x}}{x\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x(1-x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{(1-x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=+\infty$$

donc f n'est pas dérivable à droit en 0 et C_f admet à droit en 0 une demie tangente verticale dirigée vers le haut.

b) f est dérivable sur $]0,1[$; pour tout $x\in]0,1[$ on a : $f'(x)=\frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=\frac{1}{2(1-x)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}>0$

2) On a A est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites $x = 0$ et $y = 1$

Soit A' l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C' et les droites d'équations $y = 0$ et $x = 1$

ainsi $A' = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

or la courbe C' est le symétrique de C_f par rapport à la droite Δ: $y = x$; donc $A' = A$

ainsi $A = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

3) $U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$; $n \in \mathbb{N}$

a) Pour tout $\in \mathbb{N}$, on a :

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+4}}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{2n+4}}{1+t^2} - \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{2n+4} - t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}(t^2-1)}{1+t^2}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^{2n+2}(1-t^2)}{1+t^2}\,dt$$

or $0 \le t \le 1 \Rightarrow 0 \le t^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le -t^2 \le 0 \Rightarrow 0 \le 1 - t^2 \le 1$

et comme $1 + t^2 > 0$ et $t^{2n+2} > 0$ alors $\frac{t^{2n+2}(1-t^2)}{1+t^2} > 0$ ainsi

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}(1-t^2)}{1+t^2}\,dt > 0 \Rightarrow -\int_0^1 \frac{t^{2n+2}(1-t^2)}{1+t^2}\,dt < 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$$

donc la suite (U_n) est décroissante.

pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} > 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt > 0 \Rightarrow U_n > 0$

la suite (U_n) est décroissante et minorée par 0 donc (U_n) est convergente et converge vers un réel α.

b) Pour tout $\in \mathbb{N}$, et pour tout $0 \le t \le 1$ on a :

$0 < t^2 \le 1 + t^2 \Rightarrow 0 < \frac{t^2}{1+t^2} \le 1 \Rightarrow 0 < \frac{t^{2n}t^2}{1+t^2} \le t^{2n} \Rightarrow 0 \le \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \le t^{2n}$

$t \mapsto \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$ et $t \mapsto t^{2n}$ sont continues sur $[0,1]$ donc

$$0 \le \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \le \int_0^1 t^{2n}\,dt \Rightarrow 0 \le U_n \le \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \Rightarrow 0 \le U_n \le \frac{1}{2n+1}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

4) On a : $V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ $n \in \mathbb{N}$

a) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n}$

on remarque bien W_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 est de raison $-t^2$ donc pour tout $t \in [0\,,1]$ et pour tout $nn \in \mathbb{N}$, on a :

$$W_n = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} = \frac{1-(-1)(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} = \frac{1+(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} \text{ ainsi}$$

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

ainsi pour tout $t \in [0\,,1]$ et pour tout $\in \mathbb{N}$, on a :

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

b) Pour tout $t \in [0\,,1]$ et pour tout $\in \mathbb{N}$, on a :

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

$t \mapsto 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$ sont continues sur $[0\,,1]$ donc

$$\int_0^1 \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \int_0^1 (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \quad \text{donc}$$

$$\int_0^1 (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n})\, dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \text{ donc}$$

$$\left[t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = (-1)^n U_n \quad \text{donc}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = (-1)^n U_n \quad \text{donc}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = (-1)^n U_n \quad \text{donc}$$

$$V_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n U_n = V_n - I \quad \text{avec} \quad I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$|V_n - I| = |(-1)^n U_n| = \left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt\right| = |(-1)^n| \times \left|\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt\right|$$

$$= |-1|^n \times \left|\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt\right|$$

c) $A = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = \int_0^{\tan\frac{\pi}{4}} \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = F\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

$$= 1 - \tan\frac{\pi}{4}\ ua$$

Exercice 3

1) a) $x \mapsto \sin x$ est continue $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$x \mapsto sin^n x$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ainsi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, x\, dx$ existe d'où l'existence de U_n.

b) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\sin x \geq 0 \Rightarrow sin^n\, x \geq 0$ et $0 < \frac{\pi}{2}$

donc $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in IN^*$ on a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, x\, dx \geq 0$ ainsi $\forall n \in IN^*$, $U_n \geq 0$

c) on a $\forall n \in IN^*$

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+1}\, x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+1}\, x - sin^n\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\,(\sin x - 1)\, dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\,(1 - \sin x)\, dx$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 - \sin x \geq 0$

et comme $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $sin^n\, x \geq 0$ alors $sin^n(1 - \sin x) \geq 0$

$x \mapsto sin^n(1 - \sin x)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\,(1 - \sin x)\, dx \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\,(1 - \sin x)\, dx \leq 0$$

ainsi $\forall n \in IN^*$ on a $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow U_{n+1} < U_n$ d'où la suite U est décroissante et comme la suite U est majorée par 0 alors la suite U est convergente.

d) on a $U_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -(-1) = 1$$

$$U_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \cos(2x)]\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(\pi)\right) = \frac{\pi}{4}$$

Pour tout $t \in [0,1]$ on a : $t^2 \leq 1+t^2 \Rightarrow \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{t^2 t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n} \Rightarrow \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n} \Rightarrow$

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 t^{2n}\,dt \Rightarrow \left|\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right| \leq \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \Rightarrow |V_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = I$

5) $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$

Résolution des questions a) et b) pour 4ème Mathématiques

a) $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$

$\mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $\in \left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan x \in \mathbb{R}$

donc F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$F'(x) = (\tan x)' \times \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = (1+\tan^2 x)\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \tan^2 x$$

b) pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$F'(x) = \tan^2 x = 1 + \tan^2 x - 1$ donc $F(x) = \tan x - x + c$; $c \in \mathbb{R}$

or $F(0) = 0$ donc $F(x) = \tan x - x$

Résolution des questions a) et b) pour 4ème Sc Expérimentales

a) $u(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc u admet des primitives sur $\mathbb{R}$ soit G une primitive de u sur $\mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = [G(t)]_0^{\tan x} = G(\tan x) - G(0)$$

On a G est dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \tan x$ dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $\in \left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan x \in \mathbb{R}$

donc F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$F'(x) = [G(\tan x) - G(0)]' = [G(\tan x)]' - [G(0)]' = [G(\tan x)]'$ car $G(0) = cte$

$= (\tan x)' \times \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = (1+\tan^2 x)\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \tan^2 x$

b) pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$F'(x) = \tan^2 x = 1 + \tan^2 x - 1$ donc $F(x) = \tan x - x + c$; $c \in \mathbb{R}$

or $F(0) = 0$ donc $F(x) = \tan x$

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*; \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\, cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \times sin^n x \times \cos x\, dx$

posons $U(x) = \cos x$ $\quad U'(x) = -\sin x$

$V'(x) = \cos x \times sin^n x \quad V(x) = \frac{1}{n+1} sin^{n+1} x$ ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\, cos^2 x\, dx = [\cos x \times sin^{n+1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\sin x \times sin^{n+1} x]\, dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\overbrace{\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} \times sin^{n+1}\frac{\pi}{2}}^{0} - \left(\overbrace{\cos 0 \times \underbrace{sin^{n+1} 0}_{0}}^{0}\right)\right] + \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+2} x\, dx$$

$$= \frac{1}{n+1} U_{n+2}$$

b) $\forall n \in IN^*$ on a $U_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+2} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x \times \sin^2 x\, dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,(1 - \cos^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n x - \sin^n x \cos^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x\, dx = U_n - \frac{1}{n+1} U_{n+2}$$

ainsi $U_{n+2} = U_n - \frac{1}{n+1}U_{n+2} \Leftrightarrow U_{n+2} + \frac{1}{n+1}U_{n+2} = U_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+1}U_{n+2} + \frac{1}{n+1}U_{n+2} = U_n \Leftrightarrow$
$\frac{n+2}{n+1}U_{n+2} = U_n \Leftrightarrow U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n.$

c) On a d'après 1) c) $\forall n \in IN^*$; $U_{n+1} \le U_n$

donc pour tout entier $n \ge 2$ on a : $U_{n+1} \le U_n$ (1)

pour tout entier $n \ge 2$ on a : $n \le n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} \le 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} U_{n+1} \le U_{n+1} \le U_n \Rightarrow$

d'après 2) b) on a $U_3 = \frac{2}{3} U_1 = \frac{2}{3}$

pour $n = 2$ on a : $\frac{2}{3} U_2 = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$ or $\frac{\pi}{6} < \frac{2}{3}$ ainsi $\frac{2}{3} U_2 \le U_3$ vrai

supposons que $\frac{n}{n+1} U_n \le U_{n+1}$ et montrons que $\frac{n+1}{n+2} U_{n+1} \le U_{n+2}$

$$\frac{n+1}{n+2} U_{n+1} - U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_{n+1} - \frac{n+1}{n+2} U_n = \frac{n+1}{n+2}\left(\overbrace{U_{n+1} - U_n}^{<0}\right) < 0$$

Donc $\frac{n+1}{n+2} U_{n+1} \le U_{n+2}$

conclusion pour tout entier $n \ge 2$ on a : $\frac{n}{n+1} U_n \le U_{n+1}$ (2)

de (1) et (2) on a pour tout entier $n \ge 2$; $\frac{n}{n+1} U_n \le U_{n+1} \le U_n$

pour tout entier $n \ge 2$ on a : $\frac{n}{n+1} U_n \le U_{n+1} \le U_n \Rightarrow \frac{n}{n+1} \le \frac{U_{n+1}}{U_n} \le 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$