Nombres coplexes 4ème Sc Expérimentales et Sc Techniques

Exercice 1

Pour chaque question une seule réponse est correcte.

1) La forme exponentielle de $z = \sin\theta + i\cos\theta$; $\theta \in \mathbb{R}$ est :

a) $ie^{-i\theta}$ b) $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ c) $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

2) Une mesure d'argument de $Z = (1+i)^{2023}$ est :

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{4}$

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $(1+i)z^2 - \left(1+i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3} + i = 0$

On désigne par z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

alors $arg(z_1) + arg(z_2)$ est congru à :

a) $\frac{\pi}{12}$ b) $-\frac{\pi}{12}$ c) $\frac{\pi}{3}$

4) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E'): $z^3 = 2 + 2i$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') sont :

a) $z_k = \sqrt[3]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in \{0, 1, 2\}$

b) $z_k = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in \{0, 1, 2\}$

c) $z_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in \{0, 1, 2\}$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I) **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - \left(1+2e^{i\theta}\right)z + e^{i\theta} + e^{2i\theta} = 0$; $\theta \in \left]0, \pi\right[$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $e^{i\theta}z^2 - \left(1+2e^{i\theta}\right)z + e^{i\theta} + 1 = 0$

2) On considère les points A ; M et N d'affixes respectives , $e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$

a) Déterminer l'ensemble des points N lorsque θ varie dans $\left]0, \pi\right[$

b) Montrer que pour tout réel $\in \left]0, \pi\right[$, les points A ; M et N ne sont pas alignés.

3) **a)** Montrer que le quadrilatère $OANM$ est un losange

b) Soit $A(\theta)$ l'aire du losange $OANM$, montrer que $A(\theta) = \sin\theta$

c) Déterminer la valeur de θ pour que $A(\theta)$ soit maximale.

Exercice 3

1) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes : $z_A = -4$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -iz_B$

a) Montrer que le triangle OBC est isocèle et que $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) a) Mettre z_B sous forme exponentielle

b) Déduire que B appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2.

c) Placer le point A et construire les points B et C.

2) Soit D le point d'affixe $z_D = (1-i)z_B$

a) Montrer que $z_{\overrightarrow{AB}} = \sqrt{3}z_C$

b) Déduire que les points A, B et D sont alignés.

c) Calculer l'aire du quadrilatère $OADC$.

Exercice 4

I) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - (1+i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

1) Vérifier que : $(3-i\sqrt{3})^2 = 6 - 6i\sqrt{3}$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

II) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes : $z_A = 2$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$

1) Mettre z_B et z_C sous forme exponentielle.

2) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2.

a) Vérifier que le cercle $\mathscr{C}$ est circonscrit au triangle ABC.

b) Placer le point A et construire les points B et C.

3) a) Montrer que $\frac{z_C}{z_B - z_A} = \frac{z_A}{z_C - z_B} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Déduire que $(OC) \perp (AB)$ et $(OA) \perp (BC)$.

c) Montrer alors que le point O est l'orthocentre du triangle ABC.

4) a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

b) Soit H le point d'affixe $z_H = -1$. Vérifier que H est le milieu de $[BC]$.

c) Calculer alors l'aire du triangle ABC.

Exercice 5

1) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives : i ; $1-i$; $5+i$ et $4+3i$

2) Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

3) A tout point M du plan d'affixe $z \neq 1-i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+1}{z-1+i}$

a) Montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$

b) En déduire que si M' appartient au cercle trigonométrique alors M appartiendra à une droite que l'on précisera.

4) **a)** Montrer que $(z'-i)(z-1+i)=2+i$ et que $AM' \times BM = \sqrt{5}$

b) Montre que si M appartient à un cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 6

Le plan complexe est d'un muni repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(1+i)z+i=0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) : $z^2-(1+i)e^{i\theta}z+ie^{2i\theta}=0 \quad \theta \in [0, 2\pi[$

2) On considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1=e^{i\theta}$ et $z_2=ie^{i\theta}$

Montrer que le triangle OM_1M_2 est direct et isocèle rectangle en O

3) On pose $Z=z_1+z_2$

a) Ecrire Z sous la forme exponentielle

b) Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$.

Montrer que lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, le point I décrit un cercle $\mathcal{C}$ que l'on déterminera

c) Montrer que la droite (M_1M_2) est tangente au cercle $\mathcal{C}$

4) On suppose que $\theta \in [0, \pi]$

a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}}\right) \equiv \theta+\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

b) En déduire la valeur de θ pour laquelle la droite (M_1M_2) est parallèle à $(O, \vec{v})$

c) Construire les points M_1 et M_2 pour la valeur de θ trouvée.

Exercice 7

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2+2(\sqrt{3}-i)z-4i\sqrt{3}=0$.

1) **a)** Vérifier que $(2\sqrt{3}+2i)^2=8+8i\sqrt{3}$

b) Résoudre dans C l'équation (E).

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=-2\sqrt{3}$ et $z_B=\sqrt{3}-3i$.

a) Montrer que le triangle OAB est isocèle en O.

b) Dans la figure ci-dessous, on a placé le point A dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Construire le point B dans le même repère.

3) Soient les points C et D d'affixes respectives $z_C=2i$ et $z_D=-\frac{z_B}{2}$

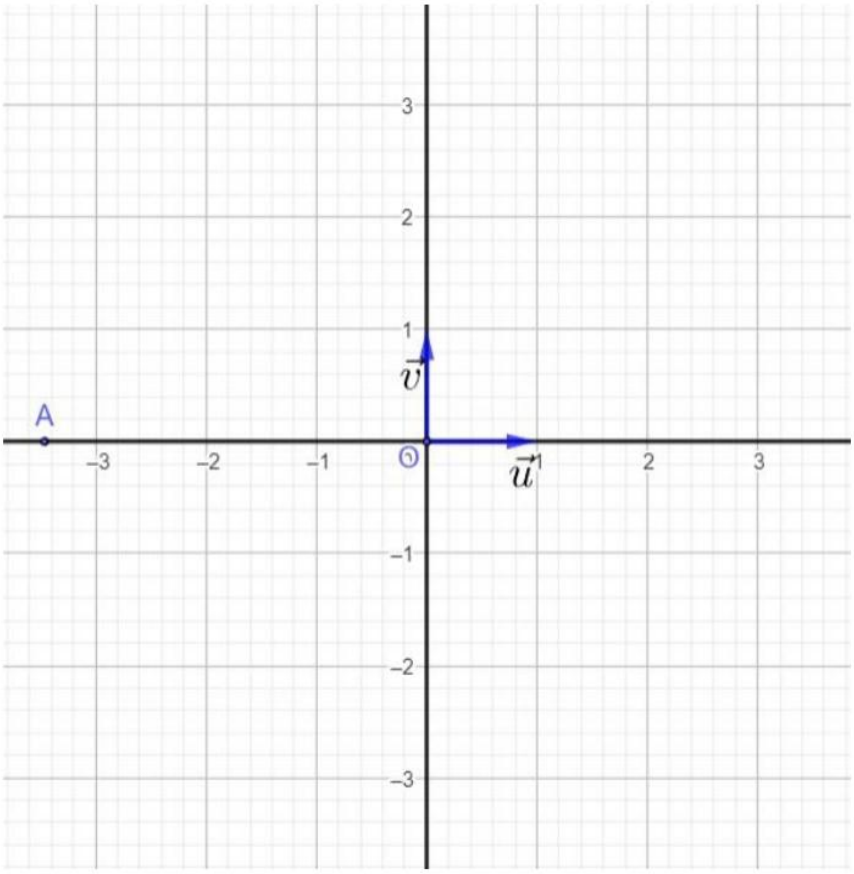
a) Montrer que $\frac{z_B-z_D}{z_A-z_C}=\frac{3\sqrt{3}}{4}i$

En déduire que la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC).

b) Montrer que les points A , D et C sont alignés.

c) Placer le point C et construire le point D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

d) Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $6\sqrt{3}$.



Exercice 8

On considère dans C, l'équation (E): $z^2 + (1 - 3i\sqrt{3})z - 8 = 0$.

(A)

1) **a)** Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $(3 - i\sqrt{3})^2$.

b) Résoudre l'équation (E)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la figure ci-dessous, les points I et A sont d'affixes respectives 1 et $a = 1 + i\sqrt{3}$.

2) **a)** Vérifier que $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ puis écrire $\frac{1}{a}$ et a^2 sous forme exponentielle.

b) Construire dans la figure ci-dessous, les points B et C d affixes respectives $\frac{1}{a}$ et a^2.

(B) Dans la figure ci-dessous, M est un point de la droite (IA) d'affixe z et distinct de I.

On désigne par N, P et P' les points d'affixes respectives z^2 , $\frac{1}{z}$ et $\overline{z}$.

1) Justifier que : $Re(z) = 1$.

Dans la suite, on pose $z = 1 + ib$, où b est un réel non nul.

2) a) Montrer que les droites (MN) et (OM) sont perpendiculaires

b) Vérifier que : $Im(z^2) = 2\,Im(z)$

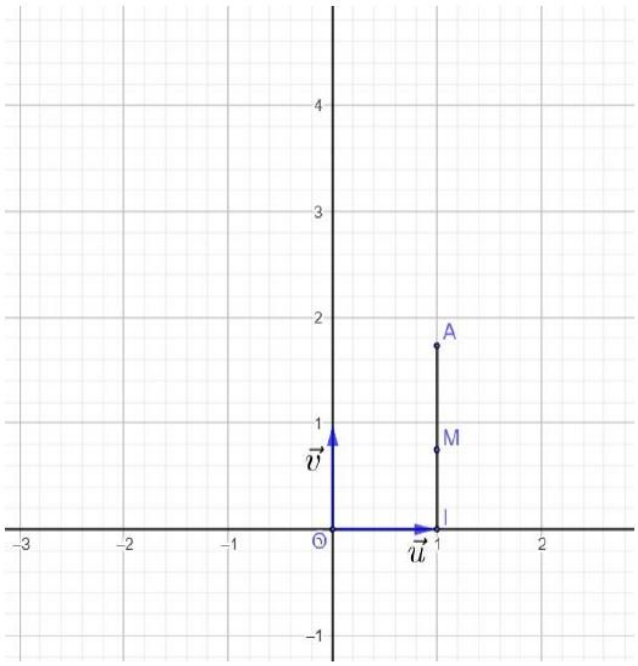
c) Construire alors le point N.

3) a) Montrer que les points O, P et P' sont alignés.

b) Justifier que les points I et P sont distincts.

c) Montrer que le point P appartient au cercle de diamètre $[OI]$

d) Construire alors le point P.



Exercice 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$.

Dans l'annexe ci-joint $\mathcal{C}_1$ est le cercle de centre O et passant par le point K d'affixe $z_K = -2\sqrt{2}i$

Soient les points A d'affixe $a = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ et C d'affixe $c = a + \overline{a}$

1) a) Montrer que $= 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Construire alors le point A.

b) Vérifier que C appartient à la droite $(O\,,\vec{u}\,)$ puis construire le point C.

c) Vérifier que A est le milieu de $[CK]$

2) Pour $\theta \in [0\,,2\pi[$, on note M le point d'affixe $z_M = a + 2\sqrt{2}e^{i\theta}$.

a) En calculant $|z_M - a|$, montrer que les points C , M et K appartiennent à un même cercle notée $\mathcal{C}_2$ de centre A et dont on précisera le rayon.

b) Soit B le point d'affixe $b = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$

Montrer que la droite (OB) est tangente au cercle $\mathcal{C}_2$ en O.

c) Construire alors le point B.