

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 1

On a tracé ci-contre, C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-\infty, -1[\cup [0, 7]$

La droite $\Delta: y = -2x - 7$

est une asymptote à C_f au voisinage $(-\infty)$.

1) a) Déterminer par lecture graphique

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x$

$f'(-3)$; $f'(-2)$; $f'(1)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)+3}{x-3}$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)+3}{x-3}$ et $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{f(x)-5}{x-7}$

b) La fonction f est-elle dérivable en 3 ?

c) Déterminer le point d'inflexion de C_f et déduire $f''(5)$

2) Ecrire une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse (-3) .

3) Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels f est dérivable.

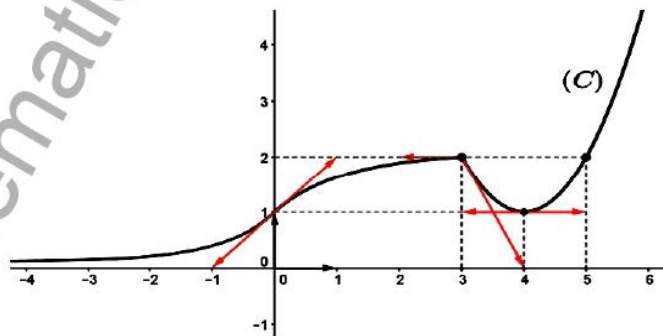
4) Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 2

Dans la figure ci-dessous, C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

L'axe des abscisses est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.

C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



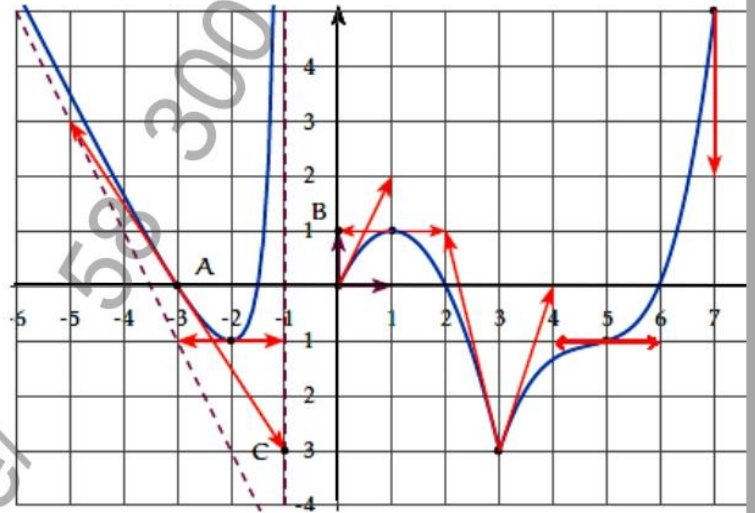
1) Déterminer : $f'(0)$, $f'(4)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)-2}{x-3}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)-2}{x-3}$

2) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion I de C_f .

3) Déterminer: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f \circ f(x)}{x}$

5) Dresser le tableau de variation de f .

6) Soit g la restriction de f sur l'



- a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty, 3]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- b) Soit g^{-1} la fonction réciproque de g est-elle dérivable à gauche en 2 ? Justifier votre réponse.
- c) Montrer que g^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$.

Exercice 3

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

- 1) Etudier la continuité de g en 1.
- 2) a) Etudier la dérivabilité de g à gauche en 1.
b) Déterminer une équation de la demi-tangente à (C_g) au point d'abscisse 1.
- 3) a) Etudier la dérivabilité de g à droite en 1.
b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c) La fonction g est-elle dérivable en 1 ? justifier.
- 4) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ puis calculer $g'(x)$.
- 5) a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Etudier la dérivabilité de g à droite en -1
c) Soit g^{-1} la fonction réciproque de g . Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 4

A) Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 4 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

- 1) Déterminer les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) La fonction f est-elle continue en -1 ?
- 3) a) Montrer que f est décroissante sur $]-\infty, 1]$
b) Dédire que f réalise une bijection de $]-\infty, 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -2, -1[$
- B) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} x \left(2 - \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right) & \text{si } x > 0 \\ 1 + x - \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

On note C_g sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $x \leq g(x) \leq 3x$
b) En déduire que g est continue à droite de 0.
- 2) Montrer que g est continue en 0.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 .

b) Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{1}{4f(x)}$ et en déduire le sens de variation de f .

c) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n - 1|$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire la limite de suite U .

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $] -\infty, 5[$ par $f(x) = \frac{4}{5-x}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Etudier la position relative de $\Delta : y = x$ et C_f

c) Tracer C_f et Δ

3) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $1 \leq U_n \leq 4$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans le plan munie d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 4)$, interpréter le résultat graphiquement

2) a) Montrer que f est continue en 0, en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$

b) Etudier la dérivabilité de f en 0, en déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

c) Calculer $f'(x)$ (fonction dérivée de f) pour tout réel x .

d) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0

3) Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$

a) Dresser le tableau de variation de g pour tout $x \in [1; +\infty[$

- b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[1; +\infty[$ une unique solution α
- c) En déduire le signe de g pour tout $x \in [1; +\infty[$.

Exercice 8

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} - 1$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de f .
- b) Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter le résultat graphiquement.
- c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$
- d) Dresser le tableau de variations de f .
- 2) a) Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α dans $[2, +\infty[$
- b) Vérifier que $\alpha = 2 + \sqrt{3}$
- c) Montrer que $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- d) Déduire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse α .
- 3) Soit g la restriction de la fonction f sur $[2, +\infty[$.
- a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
- b) g^{-1} est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier votre réponse.
- c) Calculer $(g^{-1})'(1)$.
- d) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [2, +\infty[$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

- 1) Montrer que f est dérivable sur $]2, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$
- 2) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) a) Montrer que f réalise une bijection de $]2, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- b) Calculer $f^{-1}(4)$.
- c) Justifier que f^{-1} est dérivable en 4 et calculer $(f^{-1})'(4)$.
- d) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J .
- 4) Montrer que pour tout réel $x \in J$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-3}$
- 5) Soit la fonction h définie sur $]4, +\infty[$ par $h(x) = f\sqrt{x}$

a) Montrer que h est dérivable sur $]4, +\infty[$ et calculer $h'(x)$.

b) Dédire le tableau de variation de la fonction h .

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 0]$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

4) Soit la fonction g définie sur $]-\infty, 0]$ par $g(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty, 0]$

c) Vérifier que $\alpha \in]\frac{-3}{5}, \frac{-1}{5}[$

d) En déduire la position relative de C_f et la droite $\Delta: y = x$

5) a) La fonction f^{-1} (fonction réciproque de f) est-elle dérivable à droite en (-1) ?

Justifier votre réponse.

b) Calculer $f\left(\frac{-1}{2}\right)$, Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{-3}{5}$ et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{-3}{5}\right)$

c) Tracer (C) la courbe de f^{-1} dans le même repère (on précisant sur la demi-tangente).

d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 1}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) Montrer que la droite $D: y = x + 1$ est une asymptote oblique de C_f .

b) Etudier la position relative de la courbe de C_f par rapport à son asymptote D .

c) Tracer la courbe C_f et la droite D .

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit f^{-1} la réciproque de f expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Calculer $f(\sqrt{2})$ puis $(f^{-1})'(2)$.

d) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.