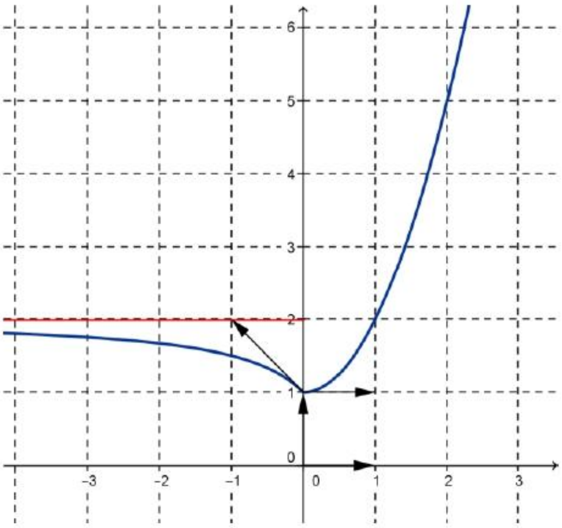
Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

La courbe C_f représentée ci-dessous et celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1) **Déterminer graphiquement les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$**

2) **Déterminer graphiquement $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$. Déterminer le domaine de dérivabilité de f.**

3) **Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.**

4) **Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.**

   a) **Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.**

   b) **Construire la courbe $C_{g^{-1}}$ de g^{-1} puis dresser le tableau de variation de g^{-1}.**

   c) **Calculer $g^{-1}(2)$ puis $(g^{-1})'(2)$.**

   d) **La fonction g^{-1} est-elle dérivable à droite en 1 ? Justifier votre réponse.**

Exercice 2

1) **Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$**

   a) **Dresser le tableau de variations de la fonction P.**

   b) **Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $-2 < \alpha < -1$**

   c) **Dresser alors le tableau de signe $P(x)$.**

2) **Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+x^3}{1-x^3}$ et soit C_f sa courbe représentative.**

   a) **Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.**

   b) **Montrer que f est dérivable sur D_f et que pour tout $x \in D_f$ on a ; $f'(x) = \frac{P(x)}{(1-x^3)^2}$**

   c) **Dresser alors le tableau de variation de la fonction f.**

3) **Déterminer les asymptotes de C_f.**

4) a) **Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.**

   b) **Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $h(x) = \frac{x^3(x+1)}{\ }$**

4) Tracer la tangente T et C_f

5) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

On note f^{-1} sa fonction réciproque.

b) Tracer $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.

d) Montrer que pour tout $x \in I$, $f^{-1}(x) = \frac{2(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$.

B)

1) Montrer que pour tout $\in [0, +\infty[$, $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$ et que $1 < \alpha < 2$

b) En déduire que pour tout $x \in [0, \alpha]$, $f(x) \geq x$.

3) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leq \alpha$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

ANNEXE

Figure 2

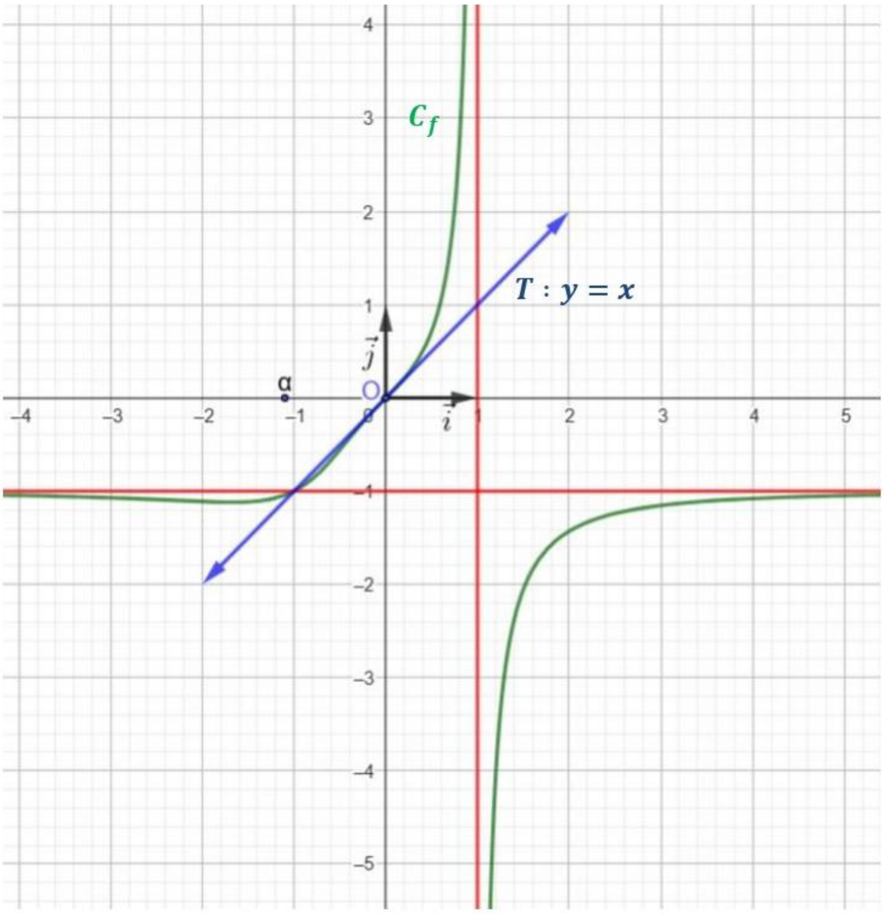
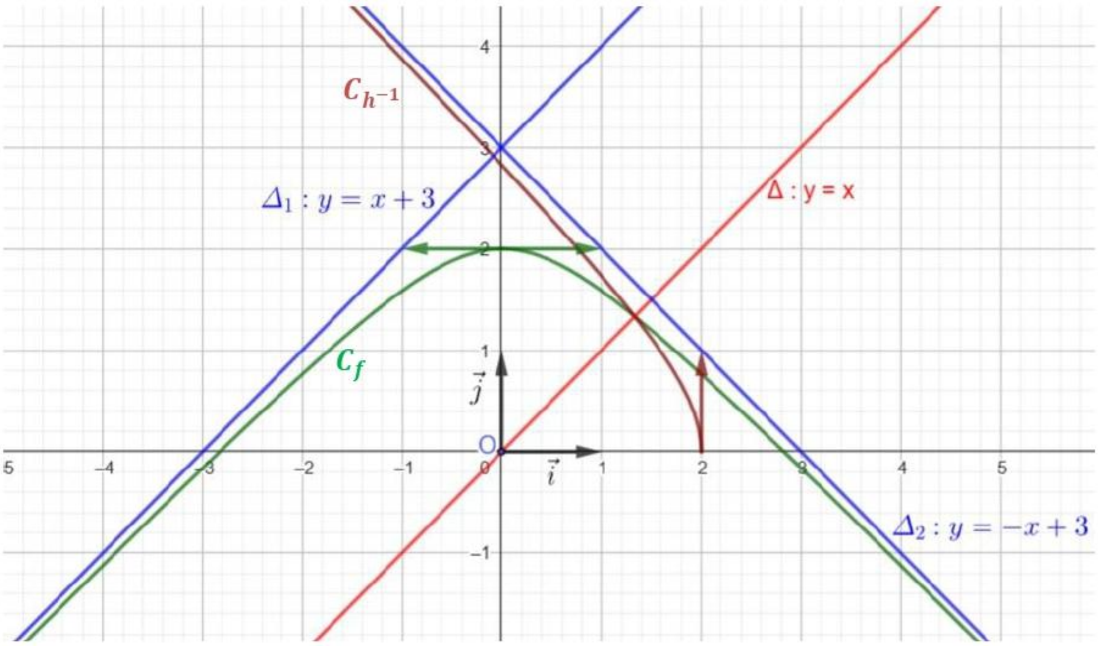


Figure 3



b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{3}{x}}_{0}-\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+x=\lim\limits_{x\to+\infty}3-\sqrt{x^2+1}+x=\lim\limits_{x\to+\infty}3+x-\sqrt{x^2+1}$

$$=\lim_{x\to+\infty}3+\frac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}3+\frac{-1}{\underbrace{x+\sqrt{x^2+1}}_{+\infty}}=3$$

donc la droite $\Delta_2: y=-x+3$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage $+\infty$

c) Voir annexe figure 2

4)

a) h est la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$ donc $h(x)=f(x)$ si $x\in[0,+\infty[$

on a h est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ donc h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $h(\mathbb{R}_+)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),h(0)\right]=]-\infty,2]$

b) On a h est continue sur $[0,+\infty[$ donc h^{-1} est continue sur $h([0,+\infty[)=]-\infty,2]$

On a h est décroissante sur $[0,+\infty[$ donc h^{-1} est décroissante sur $h([0,+\infty[)=]-\infty,2]$

5) a) On a h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$; $h'(x)\neq 0$ donc h^{-1} est dérivable sur $h(]0,+\infty[)=]-\infty,2[$

b) La courbe de C_h admet à droite en 0 une demi-tangente horizontale pour raison de symétrie avec la droite $\Delta: y=x$ la courbe $C_{h^{-1}}$ aura à gauche en $h(0)=2$ une demi-tangente verticale donc h^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 2.

c) On pose $h^{-1}(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad h(y)=x$

$x\in]-\infty,2] \qquad y\in[0,+\infty[$

$h(y)=x \;\Leftrightarrow\; 3-\sqrt{y^2+1}=x \;\Leftrightarrow\; \sqrt{y^2+1}=3-x \;\Rightarrow\; y^2+1=(3-x)^2 \;\Leftrightarrow$

$y^2+1=9-6x+x^2 \;\Leftrightarrow\; y^2=x^2-6x+8 \;\Leftrightarrow\; \left[\, y=-\sqrt{x^2-6x+8} \text{ ou } y=\sqrt{x^2-6x+8}\,\right]$

or $y\in[0,+\infty[$ donc $y=\sqrt{x^2-6x+8}$

ainsi pour tout $x\in]-\infty,2]$; $h^{-1}(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$

d) $C_{h^{-1}}=S_\Delta(C_h)$ avec $\Delta: y=x$ (Voir annexe figure 2)

Exercice 4

A) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1$; $x\in\mathbb{R}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}+1=2$

donc la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}+1=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}+1=0$

donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à C_f au voisinage de $-\infty$

$f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x)\,,\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]0\,,2[$ **ainsi** $J =]0\,,2[$

b) $C_{f^{-1}} = S_\Delta(C_f)$ **avec** Δ: $y = x$ **(Voir annexe figure 3)**

c) f **est dérivable en 0 et** $f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$ **donc** f^{-1} **est dérivable en** $f(0) = 1$; $f^{-1}(1) = 0$

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'[f^{-1}(1)]} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ **ainsi** $(f^{-1})'(1) = 2$

d) Pour tout $x \in]0\,,2[$ **on a :**

$$f\left(\frac{2(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\right) = \frac{\frac{2(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}}{\sqrt{\left(\frac{2(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\right)^2+4}} + 1 = \frac{\frac{2(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x}}}{\sqrt{\frac{4(x-1)^2}{1-(x-1)^2}+4}} + 1 = \frac{\frac{2(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x}}}{\sqrt{\frac{4x^2-8x+4}{-x^2+2x}+4}} + 1 = \frac{\frac{2(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x}}}{\sqrt{\frac{4x^2-8x+4-4x^2+8x}{-x^2+2x}}} + 1$$

$$= \frac{\frac{2(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x}}}{\sqrt{\frac{4}{-x^2+2x}}} + 1 = \frac{\frac{2(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x}}}{\frac{2}{\sqrt{-x^2+2x}}} + 1 = \frac{2(x-1)}{2} + 1 = x - 1 + 1 = x$$

ainsi pour tout $x \in]0\,,2[$, $f^{-1}(x) = \frac{2(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

<u>**Remarque**</u> $x \in D_{f^{-1}}$ **et** $f^{-1}(x) \in D_f$ **alors** $f[f^{-1}(x)] = x$

B)

1) pour tout $x \in \mathbb{R}$ **on a :** $f'(x) = \frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$

$x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+4 \geq 4 \Rightarrow \sqrt{x^2+4} \geq 2 \Rightarrow (x^2+4)\sqrt{x^2+4} \geq 4\times 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} \leq \frac{1}{4\times 2}$

$\Rightarrow 0 < \frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$ **ainsi pour tout** $x \in [0,+\infty[$ **on a :** $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$

2) a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

Soit h **la fonction définie sur** $[0,+\infty[$ **par** $h(x) = f(x) - x$ **pour montrer que l'équation** $f(x) = x$ **admet** $[0,+\infty[$ **une unique solution** α **dans** $[0,+\infty[$ **il suffit de montrer que l'équation** $h(x) = 0$ **admet une unique solution** α **dans** $[0,+\infty[$.

f **est dérivable sur** $[0,+\infty[$ **donc** h **est dérivable sur** $[0,+\infty[$

pour tout $x \in [0,+\infty[$; $h'(x) = (f(x)-x)' = f'(x) - 1$

or $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad < f'(x) - 1 \leq 0 \Rightarrow h'(x) \leq 0$

h **est continue et strictement décroissante sur** $[0,+\infty[$ **donc** h **réalise une bijection de** $[0,+\infty[$ **sur**

$h([0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} h(x)\,,h(0)\right]$ **or** $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \overbrace{f(x)}^{0} - x = -\infty$ **et** $h(0) = f(0) - 0 = 1$

donc $h([0,+\infty[) =]-\infty\,,1]$ **or** $0 \in]-\infty\,,1]$ **donc** $h(x) = 0$ **admet une unique solution** α **dans** $[0,+\infty[$.

ainsi l'équation $f(x) = x$ **admet une unique solution** α **dans** $[0,+\infty[$.

$h(1) = f(1) - 1 \simeq 0,44$ $\quad h(2) = f(2) - 2 \simeq -029$ $\quad h(1)\times h(2)$ **donc** $1 < \alpha < 2$

b) on a : $0 \leq x \leq \alpha$ **et** h **est décroissante sur** $[0,+\infty[$ **donc décroissante sur** $[0,\alpha]$

Exercice 1

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

2) On a $\vec{u}\binom{1}{-1}$ est un vecteur directeur de la demi tangente à gauche en 0 donc

$f'_g(0) = -1$

C_f admet à droite en 0 une demi tangente horizontale donc $f'_d(0) = 0$.

On a $\vec{v}\binom{1}{2}$ est un vecteur directeur de la demi tangente à gauche en 0 donc $f'(1) = 2$

$D_v = \mathbb{R}^*$

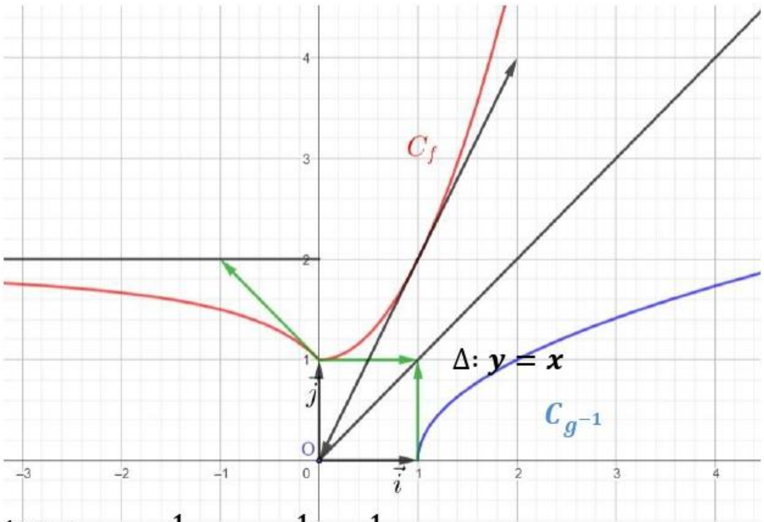
3)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) **a)** On a : $g(x) = f(x)$ si $x \in [0,+\infty[$ g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

donc g réalise une bijection de $[0,+\infty[$

sur $J = g([0,+\infty[) = [1,+\infty[$



b)

$C_{g^{-1}} = S_\Delta(C_g)$ avec

Δ: $y = x$

c) on a $g(1) = 2$ donc $g^{-1}(2) = 1$ $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(2))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{2}$

d) La courbe de C_g admet à droite en 0 une demie tangente horizontale pour raison de symétrie avec la droite Δ: $y = x$ la courbe $C_{g^{-1}}$ aura à gauche en $g(0) = 1$ une demie tangente verticale donc g^{-1} n'est pas dérivable à droite en 1

Exercice 2

1) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$; $x \in \mathbb{R}$

a) P est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$; $P'(x) = (2x^3 + 3x^2 + 1)' = 6x^2 + 6x$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 6x(x+1) = 0$ donc $x = 0$ ou $x = -1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+x^3}{1-x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+x^3}{1+x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{\overbrace{x+x^3}^{2}}{\underbrace{1-x^3}_{0^+}} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\overbrace{x+x^3}^{2}}{\underbrace{1-x^3}_{0^-}} = \infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ **donc la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$**

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ **donc la droite d'équation $x=1$ est une asymptote à C_f**

4) a) $f'(0)=1$ **et** $f(0)=0$ **donc** $T : y = f'(0)(x-0)+f(0)$ **ainsi** $T : y = x$

b) $h(x) = \frac{x^3(x+1)}{1-x}$; $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^3		$-$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	||	$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	||	$-$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

on a : $f(x) - x = \frac{x+x^3}{1-x^3} - x = \frac{x+x^3-x+x^4}{1-x^3} = \frac{x^4+x^3}{1-x^3} = \frac{x^3(x+1)}{1-x^3} = \frac{x^3(x+1)}{(1-x)(1+x+x^2)} = h(x) \times \frac{1}{1+x+x^2}$

donc $f(x)-x$ prend le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$; $1+x+x^2>0$; $\Delta<0$

d'où le tableau de position de C_f par rapport à T

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	
position de C_f et T		**C_f au dessus de T**		**C_f au dessous de T**		**C_f au dessus de T**	||	**C_f au dessous de T**	
			int $(-1,-1)$		int $(0,0)$				

c) Voir annexe figure 1

Exercice 3

1) a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x^2+1>0$ donc $D_f = \mathbb{R}$

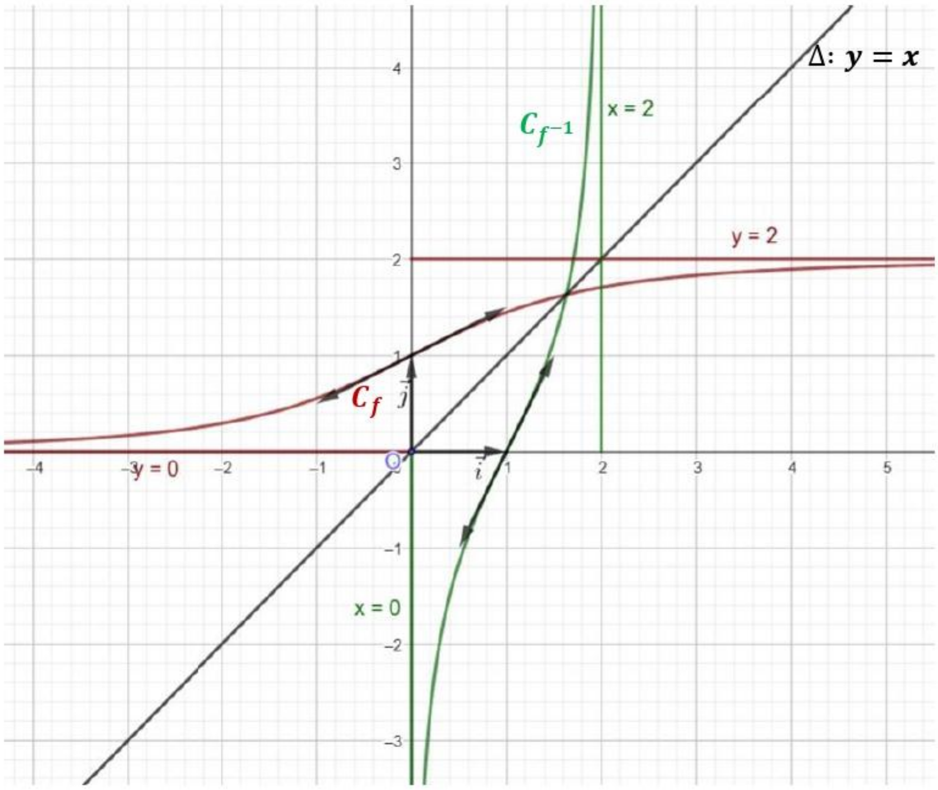
b) $x \mapsto x^2+1$ **est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$**

donc $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \left(3-\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Figure 4



Donner le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

c) Etudier la position relative de C_f et T.

d) Tracer T et C_f. (on prendra $f(\alpha) \simeq -1,1$)

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3 - \sqrt{x^2+1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

c) Dresser le tableau de variations de f.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) < 0$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

d) Etudier la position relative de C_f et Δ: $y = x$

3) a) Montrer que la droite Δ_1: $y = x + 3$ est une asymptote à C_f au voisinage $-\infty$

b) Montrer que C_f admet au voisinage $+\infty$ une asymptote oblique Δ_2 que l'on précisera

c) Tracer C_f , Δ , Δ_1 et Δ_2

4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty,2]$.

b) Montrer que la fonction h^{-1} réciproque de h est continue sur $]-\infty,2]$ et préciser son sens de variation sur $]-\infty,2]$.

5) a) Montrer que h^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]-\infty,2[$.

b) Montrer que h^{-1} n'est pas dérivable à gauche 2.

c) Calculer $h^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in]-\infty,2]$.

d) Tracer $C_{h^{-1}}$ courbe représentative de h^{-1}.

Exercice 9

A) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + 1$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{-12x}{(x^2+4)^2\sqrt{x^2+4}}$.

b) En déduire que le point $A(0,1)$ est un point d'inflexion à la courbe C_f

c) Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}$ donc $f'(x)$ prend le signe de $-x$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\sqrt{x^2+1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\sqrt{x^2+1}\right) = -\infty$; $f(0) = 2$

2) $g(x) = f(x) - x$; $x \in \mathbb{R}$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = [f(x) - x]' = f'(x) - 1$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) - 1 \leq -1$ $\Rightarrow f'(x) - 1 < 0$ ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) < 0$

b) On a g est continue et strictement décroissante ($g'(x) < 0$) sur $\mathbb{R}$ donc g réalise une bijection de sur $g(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty}\left[3-\sqrt{x^2+1}-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[3-\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[3-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[3-\frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}-x}_{+\infty}}\right] = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \overbrace{f(x)}^{-\infty}\overbrace{-x}^{-\infty} = -\infty$$

ainsi $g(\mathbb{R}) =]-\infty, 3[$ or $0 \in]-\infty, 3[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α

$g(1) = f(1) - 1 = 2 - \sqrt{2} \simeq 0,59$, $g(2) = f((2) - 2 = 1 - \sqrt{5} \simeq 1,24$; $g(1) \times g(2 < 0)$

donc $1 < \alpha < 2$

c) $x \in]-\infty, \alpha]$ donc $x \leq \alpha$ et g est décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ donc $g(x) \geq g(\alpha) \Rightarrow g(x) \geq 0$

$x \in [\alpha, +\infty[$ donc $x \geq \alpha$ et g est décroissante sur $[\alpha, +\infty[$ donc $g(x) \leq \alpha \Rightarrow g(x) \leq 0$

conclusion

si $x \in]-\infty, \alpha]$ alors $g(x) \geq 0$

si $x \in [\alpha, +\infty[$ alors $g(x) \leq 0$

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) - x = g(x)$ donc $f(x) - x$ prend le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	∞
$f(x) - x$	$+$	0	$-$
position de C_f et Δ	C_f est au dessus de Δ	intersection (α, α)	C_f est au dessous de Δ

3) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x+3) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3 - \sqrt{x^2+1} - x - 3 = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$

donc la droite $\Delta_1 : y = x + 3$ est une asymptote à C_f au voisinage $-\infty$

x	$-\infty$		α		-1		0		$+\infty$
$P'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 + 3x^2 + 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = \infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 + 3x^2 + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = \infty$

b) P est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,,-1]$ donc P réalise une bijection de $]-\infty\,,-1]$ sur

** $P(]-\infty\,,-1]) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)\,, P(-1)\right] =]-\infty\,,2]$ or $0 \in]-\infty\,,2]$ donc l'équation $P(x) = 0$ admet dans $]-\infty\,,-1]$ une unique solution

** P est continue et strictement croissante sur $[-1\,,0]$ donc P réalise une bijection de $[-1\,,0]$ sue $P([-1\,,0]) = [P(0), P(-1)] = [1\,,2]$ or $0 \notin [1\,,2]$ donc l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solutions dans $[-1\,,0]$.

c) P est continue et strictement croissante sur $[0\,,+\infty[$ donc P réalise une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur $P([0\,,+\infty[) = \left[P(0), \lim\limits_{x\to+\infty} P(x)\right[= [1\,,+\infty[$ or $0 \notin [1\,,\infty[$ donc l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solutions $[0\,,+\infty[$

*** Conclusion l'équation $P(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α

$P(-2) = -3$ et $P(-1) = 2$ on a $P(-2) \times P(-1) < 0$ donc $-2 < \alpha < -1$

c) D'après le tableau variations de la fonction P on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

2) $f(x) = \frac{x+x^3}{1-x^3}$

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}$ / tel que $1 - x^3 \neq 0\}$

$1 - x^3 = 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x+x^2) = 0$ donc $1 - x = 0$ ou $1 + x + x^2 = 0$ impossible car $\Delta < 0$

ainsi $D_f = \mathbb{R}\backslash(1)$

b) f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son domaine de définition $D_f = \mathbb{R}\backslash(1)$

$$f'(x) = \left(\frac{x+x^3}{1-x^3}\right)' = \frac{(1+3x^2)(1-x^3) + 3x^2(x+x^3)}{(1-x^3)^2} = \frac{1 - x^3 + 3x^2 - 3x^5 + 3x^3 + 3x^5}{(1-x^3)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{(1-x^3)^2} = \frac{P(x)}{(1-x^3)^2}$$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash(1)$ on a : $f'(x) = \frac{P(x)}{(1-x^3)^2}$

donc $f'(x)$ prend le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash(1)$

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	-1

2) a) $x \mapsto x^2+4$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x^2+4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1\right)'=\frac{\sqrt{x^2+4}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\times x}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+4}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}=\frac{\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}=\frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}=\frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

b) pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x)=\frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}+1=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}+1=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}+1=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}+1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}+1=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}+1=2$$

3) a) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f''(x)=\left(\frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}\right)'=4\left(\frac{1}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}\right)'=4\times\frac{-\left[(x^2+4)\sqrt{x^2+4}\right]'}{\left[(x^2+4)\sqrt{x^2+4}\right]^2}$$

$$=4\times\frac{-\left[2x\sqrt{x^2+4}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\times(x^2+4)\right]}{(x^2+4)^3}=4\times\frac{-\left[2x\sqrt{x^2+4}+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\times(x^2+4)\right]}{(x^2+4)^3}$$

$$=4\times\frac{-[2x(x^2+4)+x(x^2+4)]}{(x^2+4)^3\sqrt{x^2+4}}=4\times\frac{-3x(x^2+4)}{(x^2+4)^3\sqrt{x^2+4}}=\frac{-12x}{(x^2+4)^2\sqrt{x^2+4}}$$

ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f''(x)=\frac{-12x}{(x^2+4)^2\sqrt{x^2+4}}$

b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f''(x)=\frac{-12x}{(x^2+4)^2\sqrt{x^2+4}}$

$f''(x)=0 \Rightarrow -12x=0$ donc $x=0$ si $x \le 0$ $f''(x)\ge 0$ et si $x \ge 0$ $f''(x)\le 0$

on a $f''(x)$ s'annule en 0 tout en changent de signe alors le point $(0,f(0))$ est un point d'inflexion de C_f

or $f(0)=1$ donc le point $A(0,1)$ est un point d'inflexion à la courbe C_f

c) $f'(0)=\frac{4}{4\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$; $f(0)=1$

$T : y=f'(0)(x-0)+f(0)$; $T : y=\frac{1}{2}x+1$

4) Voir annexe figure 3

5) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$\Rightarrow h(0) \geq h(x) \geq h(\alpha) \;\Rightarrow\; 1 \geq h(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; h(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; f(x) - x \geq 0 \;\Rightarrow\; f(x) \geq x$

3) $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \;;\; n \in \mathbb{N}$

a) Pour $n = 0$ non a $U_0 = \frac{1}{2}$; $0 < U_0 \leq \alpha$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $0 < U_n \leq \alpha$ et montrons que $0 < U_{n+1} \leq \alpha$

on a $0 < U_n \leq \alpha$ et f est croissante sur $[0, +\infty[$ donc $f(0) < f(U_n) \leq f(\alpha) \Rightarrow 1 < U_{n+1} \leq \alpha$

Conclusion pour tout $\in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leq \alpha$.

b) On a pour tout $0 \leq x \leq \alpha$; $f(x) \geq x$ or $0 < U_n \leq \alpha$ donc $f(U_n) \geq U_n \Rightarrow U_{n+1} \geq U_n$

ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, (U_n) est croissante.

c) La suite (U_n) est croissante est majorée par α donc la suite (U_n) est convergente et converge vers un réel L

f est continue sur $[0, \alpha]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = L$; $L \in [0, \alpha]$ donc f est continue en L

$U_{n+1} = f(U_n)$ donc $L = f(L)$ donc $L = \alpha$

ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \alpha$

4) **a)** pour tout $\in [0, +\infty[$ on a : $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

f est continue sur $[U_n, \alpha]$ dérivable sur $]U_n, \alpha[$ d'après TAF on a $|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ or

or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

b) pour $n = 0$ on a : $|U_0 - \alpha| = \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$ donc $|U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$ et montrons que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$

On a $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \Rightarrow \frac{1}{2}|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ or $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

donc $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$

conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$; on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

c) pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$