

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$; on désigne par C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Justifier que $\mathbb{R}_+$ est le domaine de définition de la fonction f .
 b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
 c) Etudier les variations de f et tracer sa courbe C_f .
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
 b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f ; calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x .
 c) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ de la fonction f^{-1} .

Exercice 2

- 1) Soient les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x} + x - 1$ et $h(x) = e^x - x - 1$
 a) Dresser les tableaux de variation de g et h
 b) Montrer alors que pour tout $x \geq 0$ on a $g(x) \geq 0$ et $h(x) \geq 0$
 a) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$.
- 2) Montrer que pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1 - \frac{1}{nx} \leq e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1 - \frac{1}{1+nx}$.
- 3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \int_1^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{nt}}\right) dt$ et $V_n = nU_n$.
 a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \ln \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n}$.
 b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.
- 4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $x \geq 1$, on pose $F_n(x) = \int_n^{nx} \varphi(t) dt$ où $\varphi(t) = 1 - e^{-\frac{1}{t}}$
 a) Vérifier que pour tout réel $x \geq 1$ on a : $F'_n(x) = n \left(1 - e^{-\frac{1}{nx}}\right)$.
 b) Calculer $F_n(1)$ puis déduire que $U_n = \frac{1}{n} \int_n^{2n} \varphi(t) dt$.
 c) Interpréter graphiquement les termes de chacune des suites (U_n) et (V_n) .

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}} & \text{si } x > 0, \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

et soit (C_n) sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que f_n est continue sur $[0, +\infty[$.
 b) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0.

- c) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[, f'_n(x) = \left(1 + \frac{1}{nx}\right) e^{-\frac{1}{nx}}$
- d) Dresser le tableau de variation de f_n .
- 2) On se propose d'étudier la branche infinie de (C_n) .
- a) Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[, 0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$.
- b) En déduire que pour $u \in [0, +\infty[, 0 \leq e^{-u} - (1 - u) \leq \frac{u^2}{2}$.
- c) Montrer alors que $\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}$.
- d) Conclure.
- 3) Tracer la courbe (C_1) et son asymptote en précisant la tangente en 0.
- 4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
- a) Montrer que $\forall x \in [0, 1], f_n(x) \leq x$. En déduire que $\forall n \geq 1, I_n \leq \frac{1}{2}$.
- b) En utilisant 2)c) montrer que $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$.
- c) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 4

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_0^1 e^{-x}(x-1)^n dx$

- 1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+1} - (n+1)U_n = (-1)^{n+1}$.
- b) Calculer U_1 et U_2 .
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$
- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{e^{-1}}{2n+1} \leq V_n \leq \frac{1}{2n+1}$
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{-1}{2n+2} \leq W_n \leq \frac{-e^{-1}}{2n+2}$
- c) Déterminer alors la limite de la suite U .
- 3) a) Montrer que les suite V et W sont monotones.
- b) Montrer que les suite V et W sont adjacentes.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Soit g la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \ln(\tan x)$.
- a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équation : $x = 0, x = \ln(\sqrt{3})$ et $y = 0$.

- c) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
- d) Préciser la position relative de (C) par rapport à T .
- 3) Tracer (C) et T .
- 4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.
- b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in] -1, 1[$.
- c) Tracer la courbe (C') de f^{-1} .
- 5) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = -1 + \frac{2e^x}{1+e^x}$
- b) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et soit (C) sa courbe représentative

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$
- c) Montrer que le point $I(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (C)
- d) Donner une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point I
- 2) a) Montrer que pour tout réel t on a : $f'(t) \leq \frac{1}{2}$
- b) En intégrant les deux membres de l'inégalité précédente montrer que pour réel $x \geq 0$ on a : $f(x) \leq \frac{1}{2}(x+1)$
- c) Déterminer alors la position de (C) par rapport à T .

3) Tracer (C) et T

- 4) Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_{-1}^0 \frac{e^{2nt}}{1+e^{2t}} dt$
- a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive.
- b) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
- c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $I_n \leq \frac{1}{2n}$
- d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 22

A) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{e^x+1}$ et soit C_f sa courbe

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f .
- b) Montrer que le point $I(0, \frac{3}{2})$ est un centre de symétrie de C_f .
- 2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
- b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout

On a représenté ci- dessous les points A et I dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Tracer la courbe (C) en précisant sa tangente au point O .

4) On désigne par S_1 la partie du plan limitée par la courbe (C) la droite (OA) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{8}$ et on désigne par S_2 la partie du plan limitée par la courbe (C) la droite (OA) et les droites d'équations $x = \frac{\pi}{8}$ et $x = \frac{\pi}{4}$

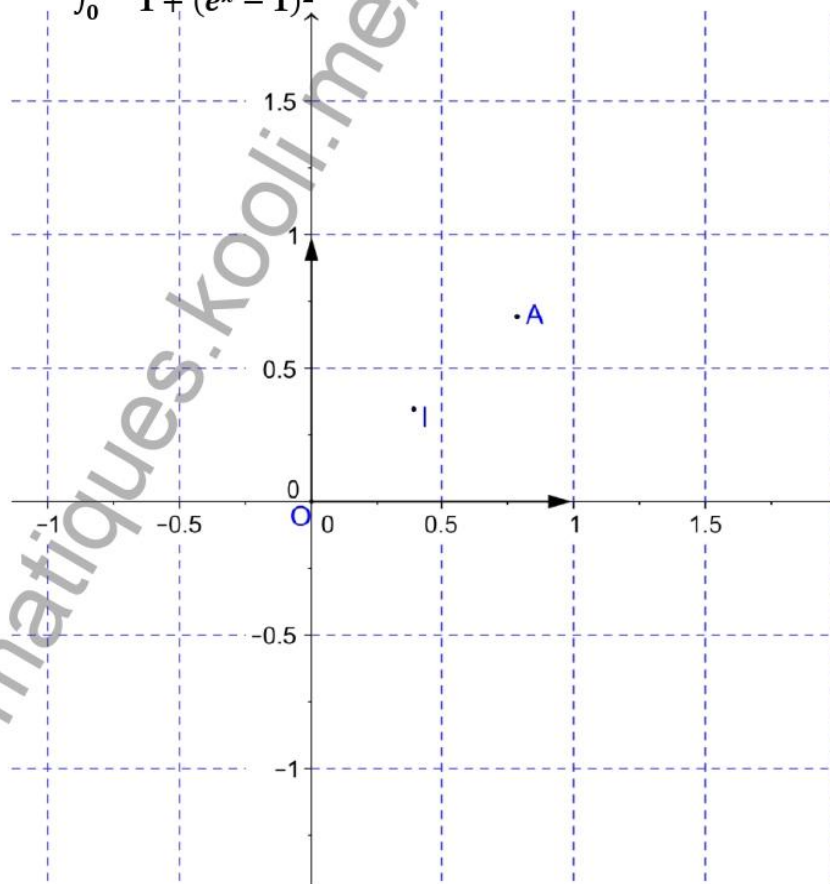
a) Justifier que S_1 et S_2 ont la même aire.

b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$.

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque de f .

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour x appartenant à J .

c) Donner la valeur de $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2} dx$.



Exercice 26

Pour tout entier naturel non nul, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{\frac{-x}{n}}$ et soit C_n sa représentation graphique.

1) a) Dresser le tableau de variation de f_n .

b) Vérifier que toutes les courbes C_n passent par le point $J(0, 1)$.

- d) Tracer la courbe C_f et préciser sa tangente au point d'abscisse ,
- 3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- b) Tracer dans le même repère la courbe $C_{f^{-1}}$ de la fonction f^{-1} réciproque de f .
- c) Calculer la mesure A de l'aire du domaine plan :
- $$\mathcal{D} = \{M(x, y) \in P / -1 \leq x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq f^{-1}(x)\} \cup \{M(x, y) \in P / 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \leq y \leq f^{-1}(x)\}$$

Exercice 19

- A) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x}$
- 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g'(x) = (x - 2)e^{-x}$
- 2) Etudier le sens de variation de g . Calculer $g(2)$.
- 3) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g(x) > 0$.
- B) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + xe^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative.
- 1) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = g(x)$.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- c) Dresser le tableau de variation de f
- 2) Montrer que le point I de (C) d'abscisse 2 est un point d'inflexion de (C) .
- 3) a) Montrer que la droite $D : y = x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.
- b) Etudier la position de (C) et D .
- c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat obtenu graphiquement.
- 4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $0,5 < \alpha < 1$
- 5) On note f^{-1} la réciproque de f et soit (C') sa courbe représentative.
- a) Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- b) Calculer $f(1)$ puis $(f^{-1})'(\frac{1}{e})$.
- d) Construire (C) et (C') dans le même repère
- 5) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) la droite D et les droites $x = 0$ et $x = 1$

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - \frac{2}{1+e^x}$ On désigne par (C) sa courbe représentative.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- c) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point O .
- 2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x}{2} - f(x)$
- a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$
- b) Dresser le tableau de variation de g

2) Soit g la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = -\ln(\cos x)$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $h\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$.

b) Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $h'(x) = f(x)$.

c) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $\int_{\frac{\ln 2}{2}}^x f(t) dt = h(x) - \frac{\pi}{4}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > \frac{\ln 2}{2}$, on pose $F_n(x) = \int_{\frac{\ln 2}{2}}^x [f(t)]^n dt$.

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{4}$

b) Montrer que pour tout $t > 0$, $[f(t)]^2 = \frac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}}$, calculer alors $F_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x)$.

c) Montrer que F_n est strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[$

d) Vérifier que pour tout $t > \frac{\ln 2}{2}$, on a : $f(t) \leq 2e^{-t}$. En déduire que $F_n(x) < \sqrt{2}$.

e) Montrer alors que F_n admet une limite finie U_n quand x tend vers $+\infty$.

4) a) Donner les valeurs de U_1 et U_2 .

b) Vérifier que pour tout $t > 0$, $[f(t)]^{n+2} + [f(t)]^n = -f'(t) \times [f(t)]^{n-1}$.

En déduire que : $F_{n+2}(x) + F_n(x) = \frac{1 - [f(x)]^n}{n}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+2} + U_n = \frac{1}{n}$ et que (U_n) est décroissante

d) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $V_n = 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \times U_{2k+2} + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \times U_{2k}$

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{2} (\ln 2 - V_n)$.

c) En déduire que (V_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 24

A) Soit f la fonction définie sur $] -\ln 2, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^x - 1}}$.

On désigne par C_f sa représentation dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout $x \in] -\ln 2, +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{-e^x}{(2e^x - 1)\sqrt{2e^x - 1}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f et préciser $f(0)$.

c) Construire C_f .

2) Soit g la fonction définie sur $[0, \pi[$ par : $g(x) = -\ln(1 + \cos x)$.

- a) Dresser le tableau de variations de g .
- b) Montrer que g réalise une bijection de $[0, \pi[$ sur $[-\ln 2, +\infty[$
- c) Soit g^{-1} la réciproque de g . Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\ln 2, +\infty[$ et que $\forall x \in]-\ln 2, +\infty[$ on a $(g^{-1})'(x) = f(x)$

B) Soit F_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- 1) a) Montrer que $F_1(x) = g^{-1}(x) - \frac{\pi}{2}$
- b) On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. Montrer que $A = \frac{\pi}{6}$.
- c) Vérifier que, pour tout réel $t \geq 0$, on a : $\frac{1}{2e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{2 - e^{-t}}$, puis expliciter $F_2(x)$.

2) On admet que F_n admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$

et on note $L_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$

- a) Calculer L_1 et L_2
- b) En remarquant que pour tout réel $t \geq 0$ on a : $0 \leq f(t) \leq 1$, montrer que $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$
- c) En déduire que la suite (L_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
- 3) a) Montrer que, pour tout réel ≥ 0 , $f(t) + [f(t)]^3 = -2f'(t)$
- b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) \leq F_{n+2}(x) = \frac{2}{n} [1 - (f(x))^n]$

4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (-1)^n L_{2n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

- a) Montrer que, $U_{n+1} = U_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
- a) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \ln(1 + \tan x)$ et soit (C) sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$
- b) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) a) Vérifier que les points $O, A(\frac{\pi}{4}, \ln 2)$ et $I(\frac{\pi}{8}, \frac{\ln 2}{2})$ sont des points de (C) .

(On donne $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$)

- b) Montrer que $f(\frac{\pi}{4} - x) = \ln 2 - f(x)$ pour x appartenant à $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$

(On rappelle que $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$)

- c) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe (C) .

c) Pour tout entier naturel non nul, étudier la position relative de C_n et C_{n+1} sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$.

2) Dans la figure ci-dessous, on a tracé les courbes C_1 et C_3 ainsi que la droite $\Delta : y = x$.

a) On a tracé deux courbes une en trait interrompu et une en trait continu.

Indique celle qui est la courbe de C_1 et celle qui la courbe de C_2

b) Tracer alors la courbe C_2 de la fonction f_2 dans le même repère.

3) On considère la fonction g_n définie sur $[0, +\infty[$ par $g_n(x) = f_n(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de g_n .

b) Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in]0, 1[$ tel que $g_n(x_n) = 0$, on définit ainsi une suite (x_n) pour tout entier naturel non nul.

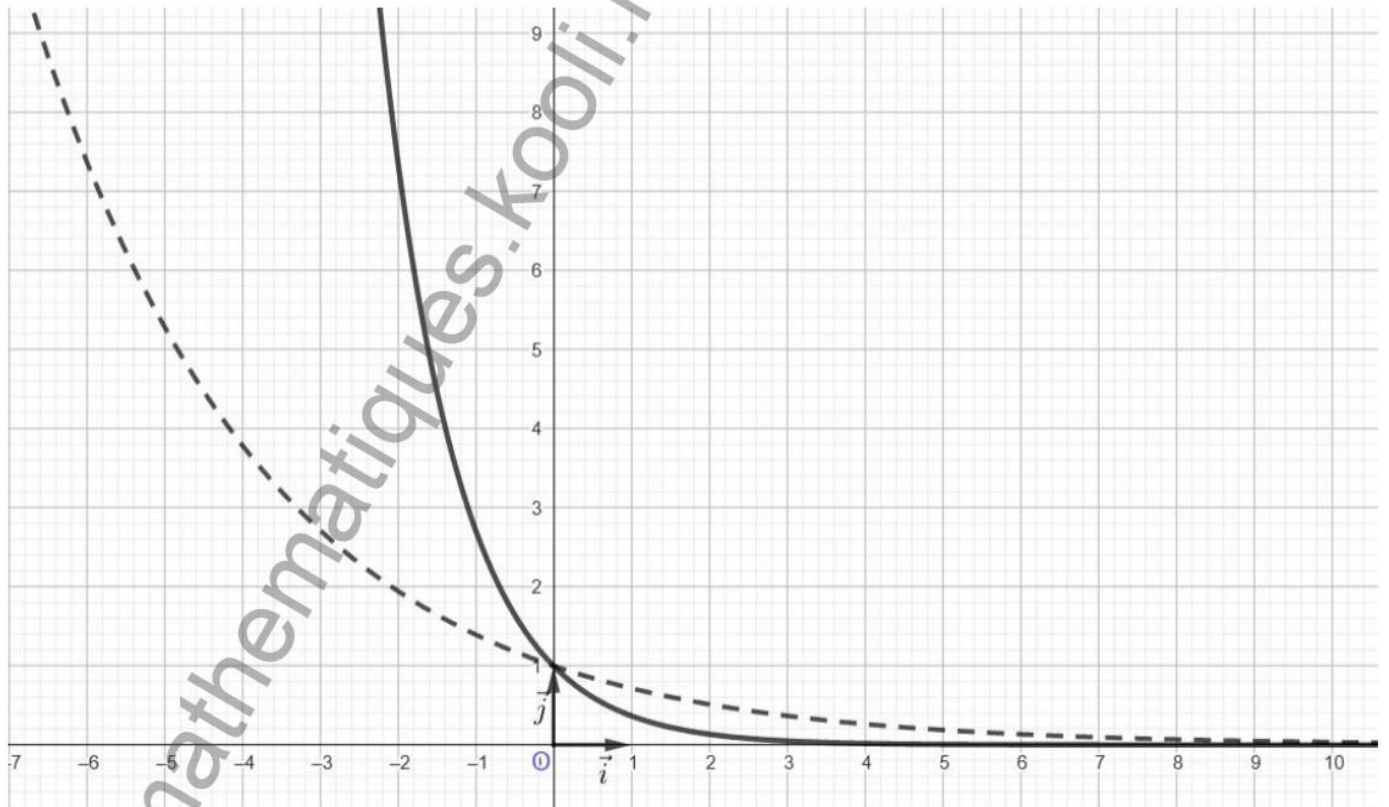
c) Vérifier que x_n est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_n de f_n et la droite Δ .

d) Placer les trois premiers termes de suite (x_n) sur l'axe des abscisses.

4) a) Montrer que $g_{n+1}(x_n) = e^{\frac{-x_n}{n+1}} - e^{\frac{-x_n}{n}}$

b) Montrer que $g_{n+1}(x_n) > g_{n+1}(x_{n+1})$ puis conclure que la suite (x_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.



b) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

5) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, I_n = -\ln(2(1-\alpha)) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k \right)$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k \right)$.

Exercice 8

1) Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $G_n(x) = \int_0^x e^{-nt} dt$.

a) Montrer que : $G_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{n}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_n(x) = \frac{1}{n}$.

2) a) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout réel $p \geq 0$, $p - \frac{p^2}{2} \leq \ln(1+p) \leq p$.

3) Soit la fonction F_n définie sur $[0, +\infty[$ par : $F_n(x) = \int_0^x e^{-t} \ln(1 + e^{-nt}) dt$.

a) Montrer que : F_n est croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$: $G_{n+1}(x) - \frac{G_{2n+1}(x)}{2} \leq F_n(x) \leq G_{n+1}(x)$.

c) Montrer que F_n admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On pose $U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$.

d) Montrer que tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{4n+2} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

e) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

4) Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $H_n(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1 + e^{nt}} dt$

a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$F_n(x) = \ln 2 - e^{-x} \ln(1 + e^{-nx}) - nH_n(x).$$

b) Déduire que H_n admet une limite finie W_n lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n = \ln 2$.

Exercice 9

1) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)e^x + 1$.

a) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C .

b) Préciser la position de C par rapport à la droite $D : y = x$.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

b) Construire la courbe C' de f^{-1} .

3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan comprise entre les courbes C et C' .

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$
et soit C_f sa courbe représentative (unité graphique cm).

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
b) Montrer que la droite $\Delta: y = x$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$
c) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ
- 2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	3	+
$f(x)$	-1	$+\infty$

- a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}_+$ une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
b) Tracer la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$ (On précisera la demi tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et on prendra $\alpha \approx 0,4$)
- 3) On désigne par (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_{\alpha}^1 |f(x)|^n dx$
a) Calculer U_1 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$
c) En déduire la limite de la suite (U_n) .

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ et soit (C) sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que le point $\Omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C) .
b) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe (C) .
- 2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
b) Vérifier que : $\alpha = \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$.
- 3) Pour tout entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^{\alpha} \frac{e^{nx}}{(1+e^x)^n} dx$
a) Montrer que $I_1 = -\ln(2(1-\alpha))$.
b) Vérifier que pour tout réel x , $f'(x) = f(x) - (f(x))^2$
c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2^n} - \alpha^n \right)$.
d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive, que peut-on en déduire ?
- 4) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\alpha}{2^n} \leq I_n < \alpha^{n+1}$.

4) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f^{-1}(U_n) \end{cases}$

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 1$.
- b) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.
- c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 10

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$$

- 1) Etudier les variations de f_n .
- 2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution U_n et que $U_n \in]0, 1[$.

On définit ainsi sur $\mathbb{N}^*$, une suite (U_n) .

- 3) a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(U_{n+1}) < 0$.
- c) Montrer que la suite (U_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 4) a) Montrer que pour $n \geq 1$, $\ln(U_n) = -\frac{U_n}{2n+1}$.
- b) Calculer la limite de la suite (U_n) .

Exercice 11

- 1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

- a) Déterminer le domaine de définition de f .
- b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- d) Etudier la branche infinie de (C_f) .

- 2) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $f''(x) = \frac{1}{4} \times \frac{e^x(e^x - 2)}{(e^x - 1)\sqrt{e^x - 1}}$

- b) En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.
- c) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à (C_f) au point I .
- d) Tracer T et (C_f) .

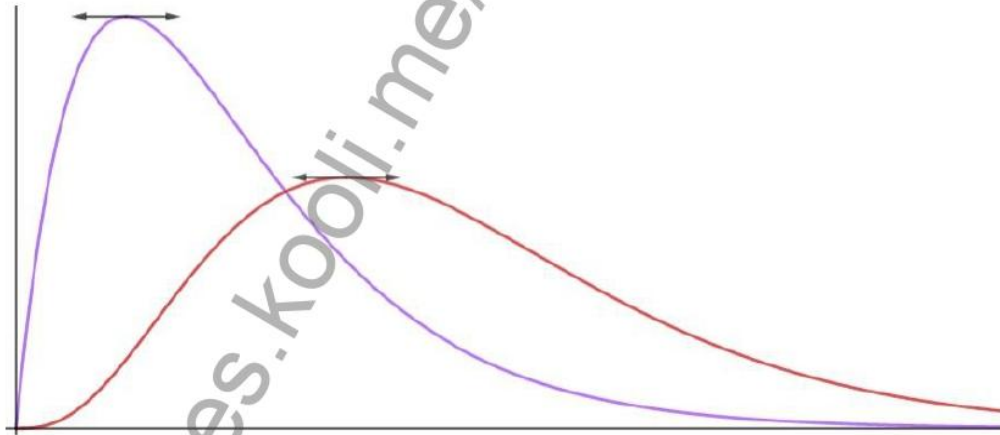
- 3) Soit u la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $u(x) = \ln(1 + \tan^2 x)$.

- a) Calculer que $u'(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- b) Justifier que $u\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, +\infty[$.

- 4) Soit la fonction G définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $G(x) = \int_0^{\ln(1+\tan^2 x)} f(t) dt$.

- a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $G'(x) = 2\tan^2 x$.

- 2) a) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $\frac{1}{1+t} \leq 1 - \frac{t}{2}$.
- b) Déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{4}$.
- c) Prouver alors que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}$.
- 3) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{U_{k+1}}{U_k} \leq e^{-\frac{1}{4k}}$.
- b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a : $U_n \leq e^{-(1 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k})}$.
- 4) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et $t \in [k, k+1]$ on a : $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.
- b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a : $\int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.
- c) Montrer alors que pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a : $U_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4} \ln(n)}$.
- d) Déterminer alors la limite de suite (U_n) .



Exercice 16

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = - \int_1^0 \frac{x}{n+e^x} dx$

- 1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \leq 0$.
- b) Montrer que la suite U est monotone.
- c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in [0, 1]$ on a : $\frac{x}{n+3} \leq \frac{x}{n+e^x} \leq \frac{x}{n+1}$.
- d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{-1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{-1}{2(n+3)}$.
- e) Déterminer la limite de la suite U .
- 2) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \sum_{k=1}^n |U_k|$
- a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.
- b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^{n+3} \frac{1}{k} \geq \ln(n+4) - \ln 4$.

b) En déduire une deuxième expression de $G(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Calculer alors $\mathcal{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations : $y = 0$, $x = 0$ et $x = \ln 2$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)e^{-x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

1) a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Etudier les branches infinies de (C_f) .

c) Tracer (C_f) .

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \int_0^n f(x) dx$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = 2 - (n+2)e^{-n}$.

b) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_k = \int_{k-1}^k f(x) dx$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \sum_{k=1}^n U_k$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, U_n = (e-1)ke^{-k} + (e-2)e^{-k}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = (e-1) \sum_{k=1}^n ke^{-k} + \frac{e-2}{e-1}(1-e^{-n})$.

5) Soit $S_n = \sum_{k=1}^n ke^{-k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$.

Exercice 13

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par : $f(x) = e^{-x} - \ln(1-x) - 2$ et soit C_f sa courbe.

1) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x + x - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de u .

b) Calculer $u(0)$ puis déduire le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) a) Vérifier que pour tout $x < 0, f(x) = (x-1) \left[\left(\frac{e^{-x}}{-x} \right) \left(1 - \frac{1}{1-x} \right) - \frac{\ln(1-x)}{1-x} \right] - 2$.

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.

c) Vérifier que pour tout $x < 1, f'(x) = \frac{e^{-x}u(x)}{1-x}$.

d) Dresser le tableau de variation de f .

2) On a tracé ci-dessous les courbes C_h et C_g des fonctions h et g définies par :

$$h(x) = e^{-x} \text{ et } g(x) = \ln(1-x) - 2.$$

C_h et C_g se coupent en deux points d'abscisses respectives α et β tel que $\alpha < \beta$.

a) Justifier que α et β sont les seules solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $]-\infty, 1[$.

b) Placer les points de C_f d'abscisses α et β .

c) Tracer C_f dans le même repère.

Exercice 14

1) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - x$.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$

b) Dresser le tableau de variation de u .

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2 - x)e^x - 1$.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de g .

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions ; on notera par α la solution qui appartient à l'intervalle $]-\infty, 1]$ et par β l'autre solution.

d) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ on désigne par C_f sa courbe représentative.

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ et que $f(\beta) = \frac{1}{\beta - 1}$.

c) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ et dresser le tableau de variation de f .

d) Tracer dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm) la courbe de f .

On prendra $\alpha = -1, 1$ et $\beta = 1, 8$.

4) Soit $\mathcal{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$. Calculer $\mathcal{A}$.

Exercice 15

Soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit (C_n) la courbe de f_n dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 10$.

A)

1) a) Dresser le tableau de variation de f_1 .

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, dresser le tableau de variation de f_n .

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les positions relatives de (C_{n+1}) et (C_n) .

3) On a tracé ci-dessous les courbes (C_1) et (C_3) .

a) Sans justification, graduer le repère puis nommer sur le graphique les deux courbes.

b) Tracer soigneusement la courbe (C_2) ainsi que les demi-tangentes à l'origine pour chacune des trois courbes.

B) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = f_n(n)$.

1) a) En utilisant les résultats de la partie A) démontrer que (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

b) La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

- c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$
- d) Vérifier que $\ln(1 + e^{-\alpha}) = -[\alpha + \ln(\alpha - 1)]$.
- 3) Construire C_f et $C_{f^{-1}}$.
- 4) Soit m un réel strictement supérieur à α et soit $A(m)$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = m$.
Montrer que $A(m) = -\ln(1 + e^{-m}) - [\alpha + \ln(\alpha - 1)]$ et en déduire $\lim_{m \rightarrow +\infty} A(m)$.
- B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g(t) = f(t) - 1$ et $I_n = \int_0^\alpha g^n(t) dt$.
- 1) Vérifier que $I_1 = \alpha + \ln[2(\alpha - 1)]$.
- 2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = g^2(x) - g(x)$.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left[(\alpha - 1)^n - \frac{1}{2^n} \right]$.
- c) En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $I_n = \alpha + \ln[2(\alpha - 1)] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (\alpha - 1)^k - \frac{1}{2^k}$
- 3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$
- b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (\alpha - 1)^k - \frac{1}{2^k}$
- 4) Soit $S_n = \sum_{k=1}^n I_k$; $n \in \mathbb{N}^*$
- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $g(t) + g^2(t) + \dots + g^n(t) = e^{-t} - \frac{g^{n+1}(t)}{1 - g(t)}$
- b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = 1 - e^{-\alpha} - \int_0^\alpha \frac{g^{n+1}(t)}{1 - g(t)} dt$
- c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
- $$0 \leq \int_0^\alpha \frac{g^{n+1}(t)}{1 - g(t)} dt \leq 2I_{n+1} \text{ en déduire } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha \frac{g^{n+1}(t)}{1 - g(t)} dt$$
- d) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ et soit C_f sa courbe représentative

- 1) a) Dresser le tableau de variation de f .
- b) En déduire que pour tout $x \geq \frac{\ln 2}{2}$ on a : $0 < f(x) \leq 1$
- c) Tracer C_f .

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_n \geq \frac{1}{2} [\ln(n+4) - \ln 4]$.

d) Déterminer alors la limite de la suite V .

Exercice 17

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{1-x}$ et soit (C_g) sa courbe représentative.

a) Dresser le tableau de variation de g .

b) Etudier les branches infinies de (Γ) .

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ interpréter les résultats graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Etudier la position relative de (C_g) et (C_f) .

d) Tracer (C_g) et (C_f) dans le même repère.

3) Soit x un réel de l'intervalle $[1, +\infty[$ et les points M et N d'abscisse x tel que $M \in (C_g)$ et $N \in (\Gamma)$.

a) Calculer la distance MN en fonction de x .

b) Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale.

4) a) Calculer $S(t)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_f) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$ tel que t un réel de l'intervalle $[1, +\infty[$.

b) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)$.

5) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_1^2 (x-1)^n e^{1-x} dx$

a) Calculer U_1 .

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

6) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$U_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)U_n.$$

b) Calculer U_2 et U_3 .

c) En déduire $I = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2)e^{1-x} dx$

Exercice 18

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + xe^x$.

a) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + e^x(x-1)$. On désigne par C_f

a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la droite $D : y = x$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c) Etudier la position de C_f par rapport à la droite D .