

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x})$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x}$
- b) Dresser le tableau de variations de f .
- c) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^x)$.
- d) En déduire que la droite $\Delta: y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.

Etudier la position relative de (C_f) et Δ .

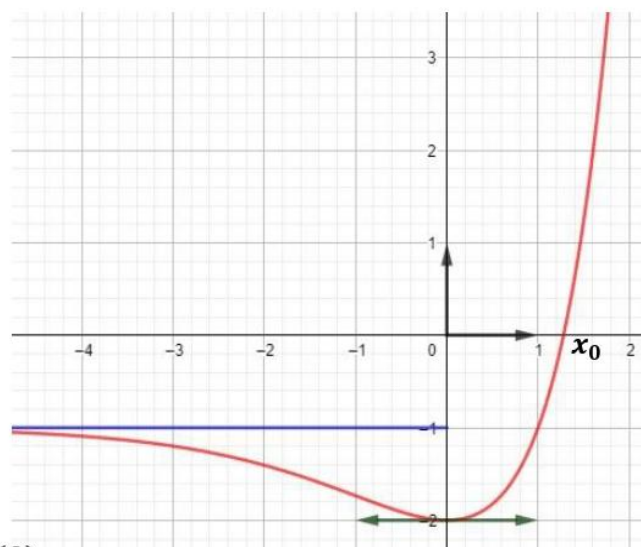
- e) Tracer (C_f) et Δ .
- 2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α .
- b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.
- 3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
- b) En déduire que tout $x \geq 0$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

Exercice 4

- 1) La courbe (Γ) ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

- * La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $-\infty$.
- * La courbe (Γ) admet une seule tangente horizontale.
- * La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses $(O, \vec{i})$ en un unique point x_0 .



En utilisant le graphique :

- a) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.
- b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.
- 2) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (\alpha x + \beta)e^x - 1$, où α et β sont deux réels.

a) Exprimer $g(0)$ et $g'(0)$ en fonction de α et β .

b) Déduire, en utilisant 1)a), que pour tout réel x on a : $g(x) = (x - 1)e^x - 1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative.

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Justifier que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

4) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que $f(x_0) = \frac{1}{x_0 - 1}$.

d) Tracer (C_f) . (On prendra $x_0 = 1, 2$).

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + e^x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x - x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative (unité graphique 2 cm).

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 est que le nombre dérivé à gauche en 0 est 2.

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Etudier les variations de f sur $] -\infty, 0[$ puis sur $] 0, +\infty[$.

b) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

b) Préciser pour tout réel $x \leq 0$, la position de (C) par rapport à Δ .

c) Préciser pour tout réel $x > 0$, la position de (C) par rapport à $\Delta' : y = x$.

d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe (C) au point $A(e, 0)$.

4) Tracer Δ , Δ' , T et (C) .

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

On désigne par (C') la courbe représentative de g^{-1} .

b) Vérifier que la droite T définie dans A)3)d) est tangente à la courbe (C') au point $B(0, e)$.

c) Tracer (C') .

Lien pour télécharger l'intégralité de la série

Fonction Exponentielle 4  me Sc Techniques