

Enoncé Intégrale 4ème Mathématiques et Sc Expérimentales

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos x$.

- 1) a) Calculer $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] ; f'(x)$.
b) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$.
- 2) Soit g la fonction réciproque de f .
a) Justifier que g est dérivable sur $[0, 1]$.
b) Montrer que $\forall x \in [0, 1[: g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 3) a) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

Exercice 2

1) Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- a) Etudier la dérivabilité de f à droit en 0 et interpréter le résultat graphiquement.
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- c) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$.
- d) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$
- e) Construire C_f et C' la courbe représentative de f^{-1} .

2) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations

$x = 0$ et $y = 1$. Montrer que $A = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$

- 3) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$
a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. En déduire que (U_n) est convergente.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

4) On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $V_n - I = (-1)^n U_n$ où $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $|V_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

5) Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Soit F la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$

a) Montrer F est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $F'(x) = \varphi(\tan x)$

b) Déterminer $F(x)$ dans chacun des cas suivants $\varphi(t) = 1$ et $\varphi(t) = t^2$

c) En déduire que $I = \frac{\pi}{4}$ et déterminer la valeur exacte de A .

Exercice 3

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

1) a) Justifier l'existence de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq 0$.

c) Montrer que la suite U est décroissante. Que peut-on conclure ?

d) Vérifier que : $U_1 = 1$ et que $U_2 = \frac{\pi}{4}$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x dx = \frac{1}{n+1} U_{n+2}$$

b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\frac{n}{n+1} U_n \leq U_{n+1} \leq U_n$

En déduire la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

3) a) Montrer par récurrence que : pour tout $n \geq 2$ on a : $n U_n U_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

b) En déduire la limite de la suite U .

Exercice 4

A) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

1) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

b) Tracer la courbe C_f de f .

c) Montrer graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

- 2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]1, 2]$.
 b) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x .
 c) Tracer C' la courbe de f^{-1} .
- 3) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \tan x$
 a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
 b) Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.
 c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$, calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
- 4) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe C_f et les droites d'équations :
 $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 5

A) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :

$$U_0 = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = \int_0^1 x^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

- 1) a) Calculer U_0 et U_1
 b) En utilisant deux intégrations par parties montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$U_{n+2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4(n+1)(n+2)}{\pi^2} U_n$$

- c) Calculer U_2 et U_3
- 2) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
 b) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$
 c) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

B) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

- 1) a) Montrer que la suite (V_n) est décroissante.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq V_n \leq \frac{1}{5n^5}$
 c) Déterminer alors la limite de la suite (V_n) .

2) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \int_{\frac{(-1)^n}{n}}^{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} x^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

- a) Exprimer W_{2n+1} en fonction de V_{2n+1}
 b) Exprimer W_{2n} en fonction de V_{2n}
 c) Déterminer alors la limite de la suite (W_n) .