# INTEGRALES 4$^{\text{ème}}$ Mathématiques



## Exercice 1

Soit $f$ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos x$.

1) a) Calculer $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ; $f'(x)$.

b) Justifier que $f$ réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$.

2) Soit $g$ la fonction réciproque de $f$.

a) Justifier que $g$ est dérivable sur $[0, 1[$ .

b) Montrer que $\forall x \in [0, 1[ : g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) a) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

## Exercice 2

Indiquer la bonne réponse

1) Soit $I = \int_0^1 2t\cos^2(\pi t)dt$ et $J = \int_0^1 2t\sin^2(\pi t)dt$ alors $I + J =$

a) $-1$ b) $1$ c) $\pi$

2) Soit $K = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$ alors $K =$

a) $0$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\pi$

## Exercice 3

Soit la suite réelle $(I_n)$ définie sur $\mathbb{N}$, par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}\sin(\pi x)\, dx$

1) Montrer que $I_0 = \frac{1}{\pi}$

2) a) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente.

c) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3) a) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $I_{n+1} = \frac{1}{\pi} - \frac{(2n+2)(2n+3)}{\pi^2} I_n$

b) Calculer alors $J = \displaystyle\int_0^1 (x^3 - 3x)\sin(\pi x)\, dx$

## Exercice 4

Soit $f$ la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ et soit $C_f$ sa courbe représentative.

On se prose de calculer $\mathscr{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par $C_f$ l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

Soit la suite $(U_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$.

Pour tout $x \in [0\,,1]$ on pose $f_n(x) = x(1-x^2)^{n+1}$

1) Calculer $U_1$ puis vérifier que $U_2 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

2) a) Justifier que pour tout entier naturel non nul $n$ on a : $U_n - U_{n+1} = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n \, dx$

b) Calculer pour tout $\in [0\,,1]$ , $f'_n(x)$

c) En déduire que pour tout entier naturel non nul $n$ on a : $U_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} U_n$

d) Montrer, alors par récurrence que pour tout entier naturel non nul $n$ on a :

$$U_n = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \ldots \times \frac{2n}{2n+1}$$

3) Soient les fonctions $F_n$ et $G_n$ définies sur $\mathbb{R}$ et pour entier naturel non nul $n$ par :

$$F_n(x) = \int_0^{\sin x} (1-t^2)^n \, dt \quad \text{et} \quad G_n(x) = \int_0^x \cos^{2n+1} t \, dt$$

a) Calculer pour tout réel , $F'_n(x)$ et $G'_n(x)$ et en déduire que pour tout réel $x$

$$F_n(x) = G_n(x)$$

b) Montrer alors que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t \, dt = \frac{16}{35}$

5) Calculer $\mathcal{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $C_f$ et $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

**Exercice 13**

A) Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

1) a) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}_+$ .

b) Tracer la courbe $C_f$ de $f$.

c) Montrer graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

2) a) Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $]1\,,2]$.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de $x$.

c) Tracer $C'$ la courbe de $f^{-1}$.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \tan x$

a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.

c) Montrer que $g^{-1}$ est dérivable sur $[0\,,+\infty[$,calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $\in [0\,,+\infty[$.

4) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe $C_f$ et les droites d'équations :

$x = 0$ et $x = 1$.

**Exercice 14**

Soit $h$ une fonction définie sur $[0\,,1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ et soit $C_h$ sa courbe

1) Soit $M(x\,,y)$ un point de $C_h$ avec $y = h(x)$

a) Montrer que $OM = 1$

b) En déduire que $C_h$ est un arc du cercle de centre $O$ et de rayon 1.

c) Soit $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ montrer que $I = \frac{\pi}{4}$

2) Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,,1]$ par $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ et soit $C_f$ sa courbe

a) Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0

b) Dresser le tableau de variations de $f$ et tracer $C_f$ ( unité graphique 4 $cm$ )

3) a) Montrer que $f$ admet une fonction réciproque que l'on note $g$ définie sur $[0\,,1]$

b) Tracer $C_f$ et $C_g$ la courbe représentative de $g$

d) Montrer que $\forall \in [0\,,1]\,, g(x) = 1-\sqrt{1-x^2}$

4) Soit $A$ l'aire de la partie du plan limitée par $C_f$ et $C_g$

et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Calculer $A$ puis déterminer $\int_0^1 f(x)dx$

5) Soit la suite $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}dt \quad \forall n \in IN$

1) a) Etudier la parité de $f$.

b) Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en $-2$ et à gauche en $2$. Interpréter les résultats graphiquement.

c) Montrer que $f$ est dérivable sur $]-2\,,2[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in ]-2\,,2[$.

d) Dresser le tableau de variation de $f$ et tracer $C_f$.

2) Soit $F$ la fonction définie sur $[-2\,,2]$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Soit $G$ la fonction définie sur $[0\,,\pi]$ par : $G(x) = F(2\cos x)$.

a) Déterminer $F(0)$

b) Montrer que $G$ est dérivable sur $[0\,,\pi]$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in [0\,,\pi]$.

c) Calculer $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et en déduire que $\forall x \in [0\,,\pi]$ on a : $G(x) = -2x + \sin(2x) + \pi$.

3) a) Calculer $F\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)$

b) Calculer alors $\mathscr{A}$.

**Exercice 5**

1) Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,,1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.

a) Etudier la dérivabilité de $f$ à droit en $0$ et interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de $f$.

c) Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

d) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

e) Construire $C_f$ et $C'$ la courbe représentative de $f^{-1}$.

2) Soit $A$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $C_f$ et les droites d'équations

$x = 0$ et $y = 1$ Montrer que $A = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

3) On considère la suite $(U_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

a) Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante. En déduire que $(U_n)$ est convergente.

b) Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}$ , on a : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4) On considère la suite $(V_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a) Montrer que pour tout $t \in [0\,,1]$ et pour tout $\in \mathbb{N}$ , on a :

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de $F$.

3) Soit $G$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = F(x^2)$.

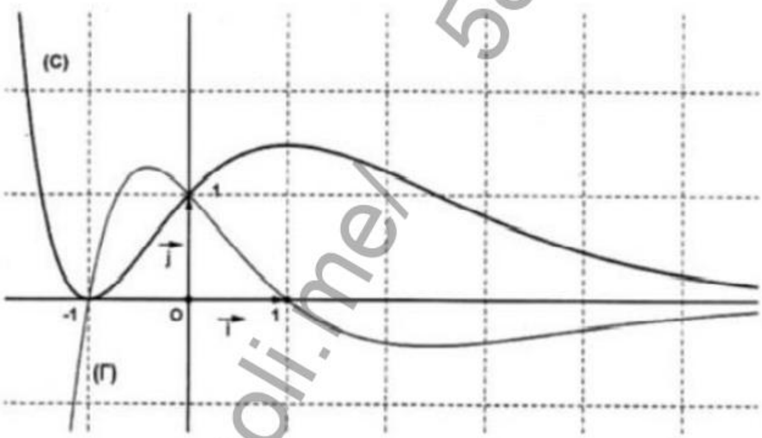
a) Montrer que $G$ est dérivable à droite en 0.

b) Etudier les variations de $G$ sur $\mathbb{R}$.

c) Donner l'allure de la courbe de $C_G$ de $G$.

## Exercice 8

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O\,\vec{i}\,,\vec{j})$ les courbes $(C)$ et $(\Gamma)$, représentative d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée $f'$.




1) Reconnaitre la courbe représentative de $f$ et celle de $f'$.

2) Déterminer $(0)$ , $f'(0)$, $f(-1)$ et $f'(-1)$.

3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de $f'$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

4) Soit $(U_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_0^1 x^n f'(x)\ dx$

a) A l'aide d'uneintégration par parties montrer que $U_1 = f(1) - \int_0^1 f(x)\ dx$

b) Montrer que $(U_n)$ est décroissante

c) Montrer que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d) Déduire que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

## Exercice 9

A) On pose $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) Déterminer le domaine de définition de $F$.

2) Etudier la dérivabilité de $F$ et en déduire que $F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) On pose $g(x) = F(\tan x)$ ; $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Calculer $g(0)$.

a) A l'aide d'une intégration par partie montrer que $I_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1}$

b) Calculer $I_0$ et calculer $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt$ *et* $\int_0^1 (1-t^2)\sqrt{1-t^2}\,dt$

## Exercice 15

Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,,1[$ par $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ et soit $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

1) a) Montrer que pour tout $x \in [0\,,1[$ on a : $f'(x) = \frac{2x-x^3}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$

b) Dresser le tableau de variation de $f$.

c) Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera.

d) Construire $C_f$ et $C_{f^{-1}}$ courbe de $f^{-1}$.

2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

3) Soit $F$ la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt$

a) Montrer que $F$ est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ on a : $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$

c) Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

d) En déduire que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx = \frac{\pi-2}{8}$

4) Calculer $A$ l'aire de la partie du plan limitée par $C_f$ et $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

## Exercice 16

A) Soit la suite $(U_n)$ définie sur $\mathbb{N}$, par :

$U_0 = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = \int_0^1 x^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$

1) a) Calculer $U_0$ et $U_1$

b) En utilisant deux intégrations [...] $\in \mathbb{N}$ ;

**b)** Montrer que $g$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$.

**c)** En déduire que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ; $F(\tan x) = x$.

**4) a)** Montrer que $F$ est la fonction réciproque de la fonction $f(x) = \tan x$.

**b)** Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$

**c)** Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$.

**B)** Soit $(U_n)$ la suite définie sur $IN^*$ par : $U_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$

**1)** Montrer que pour tout réel $x$ : $1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

**2)** En déduire que $U_n - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx$

**3) a)** Montrer que pour tout $x \in [0\ ,\ 1]$ et pour tout $n \in IN^*$ ; $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$

**b)** En déduire que pour tout $n \in IN^*$ : $\left|U_n - \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{1}{2n+3}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

## *Exercice 10*

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ et soit $C_f$ sa courbe représentative unité graphique $2\ cm$

**1) a)** Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

**b)** Dresser le tableau de variation de $f$.

**c)** Tracer $C_f$.

**2)** Soit $g$ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \int_0^{\tan^2 x} f(t)\ dt$

**a)** Montrer que $g$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g'(x) = 4\tan^2 x$

**b)** En déduire l'expression de $g(x)$.

**c)** Déterminer l'aire $A$ de la partie du plan limitée par $C_f$ l'axe $(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$

**3)** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\sqrt{k}}{n+k}\right)$

**a)** Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, 2 \dots n-1\}$ on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\ dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

**b)** En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n - \frac{1}{n} \leq A \leq S_n$

**b)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

$1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^n t^{2n}-\frac{1}{1+t^2}=(-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$

**b)** En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ , on a : $V_n-I=(-1)^n U_n$ où $I=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$

**c)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ ; on a : $|V_n-I|\leq\frac{1}{2n+1}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$

**5)** Soit $\varphi$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $F$ la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_0^{\tan x}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$

**a)** Montrer $F$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x)=\varphi(\tan x)$

**b)** Déterminer $F(x)$ dans chacun des cas suivants $\varphi(t)=1$ et $\varphi(t)=t^2$

**c)** En déduire que $I=\frac{\pi}{4}$ et déterminer la valeur exacte de $A$.

## Exercice 6

Soit la suite réelle $U$ définie sur $IN^*$ par : $U_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

**1)** **a)** Justifier l'existence de $U_n$ pour tout $n\in IN^*$.

**b)** Montrer que $\forall n\in IN^*$ , $U_n\geq 0$ .

**c)** Montrer que la suite $U$ est décroissante. Que peut-on conclure ?

**d)** Vérifier que : $U_1=1$ et que $U_2=\frac{\pi}{4}$.

**2)** **a)** A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{n+1}U_{n+2}$

**b)** En déduire $\forall n\in IN^*$ on a : $U_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}\ U_n$.

**c)** Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ on a : $\frac{n}{n+1}\ U_n\leq U_{n+1}\leq U_n$

En déduire la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ .

**3)** **a)** Montrer par récurrence que : pour tout $n\geq 2$ on a : $nU_n\,U_{n-1}=\frac{\pi}{2}$

**b)** En déduire la limite de la suite $U$.

## Exercice 7

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, par $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x+x^2}$ et soit $C_f$ sa courbe représentative.

**1)** **a)** Dresser le tableau de variation de $f$ et tracer $C_f$.

**b)** Justifier que pour tout $t\geq 0$ on a : $\frac{2}{3}\leq f(t)\leq 1$

**2)** On pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ , $\forall x\geq 0$.

**a)** Etudier la dérivabilité de $F$ ... nt croissante sur $\mathbb{R}$.

$$U_{n+2}=\frac{2}{\pi}-\frac{4(n+1)(n+2)}{\pi^2}U_n$$

c) Calculer $U_2$ et $U_3$

2) a) Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante.

b) Montrer que $\forall n\geq 1$ on a : $0\leq U_n\leq\frac{1}{n+1}$

c) Déterminer la limite de la suite $(U_n)$.

B) Soit la suite $(V_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n=\int_0^{\frac{1}{n}}x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

1) a) Montrer que la suite $(V_n)$ est décroissante.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a : $0\leq V_n\leq\frac{1}{5n^5}$

c) Déterminer alors la limite de la suite $(V_n)$.

2) Soit la suite $(W_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n=\int_{\frac{(-1)^n}{n}}^{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}x^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

a) Exprimer $W_{2n+1}$ en fonction de $V_{2n+1}$

b) Exprimer $W_{2n}$ en fonction de $V_{2n}$

c) Déterminer alors la limite de la suite $(W_n)$.

## Exercice 17

Soit $f$ la fonction définie sur $IR_+^*$ par : $f(x)=-1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

1) a) Dresser le tableau de variation de $f$

b) En déduire le signe de $f(x)$ pour tout réel $x$ strictement positif.

2) Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x)=\sqrt{x^2+2x}-x+1$ et soit $G$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x)=\int_0^x t\,h(t)dt$

a) Etudier la dérivabilité de $h$ à droite en 0.

b) Dresser le tableau de variation de $h$.

3) Montrer que $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $G'(x)$.

a) Montrer que pour tout réel $x$ positif on a : $G(x)\geq\frac{1}{2}x^2$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{x}$

e) Dresser le tableau de variation de $G$ et donner l'allure de la courbe $C_G$ de $G$.

## Exercice 18

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ et soit $C_f$ sa courbe représentative

( unité graphique 2 $cm$ )

On donne la fonction $F$ définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x)=\int_0^{\sqrt{\sin x}}f(t)dt$.

## Exercice 11

Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,,2]$ par : $f(x)=\sqrt{x(2-x)}$ et soit $C_f$ sa courbe représentative.

1) *a*) Montrer que la droite $\Delta$: $x=1$ est axe de symétrie de $C_f$.

*b*) Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0.

*c*) Dresser le tableau de variation de $C_f$. d) Construire $C_f$.

2) Soit $f$ la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x)=\int_0^{1+\sin x} f(t)\ dt$

a) Justifier l'existence de $F(x)$.

b) Montrer que $F$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Expliciter $F(x)$ pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

3) Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $C_f$ et l'axe des abscisses.

4) Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,,2]$ par : $g(x)=x\sqrt{x(2-x)}$ et soit $C_g$ sa courbe représentative. On donne ci-contre le tableau de variation de $g$.

a) Etudier la position de $C_f$ et $C_g$..

b) Construire $C_g$ dans le même repère que $C_f$.

c) Calculer l'aire du domaine plan limitée par $C_f$ et $C_g$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | | | | ‖ |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | $\searrow$ | $0$ |

## Exercice 12

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,,4[$ par : $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$ et soit $C_f$ sa courbe représentative.

1) a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]0\,,4[$ et que $\forall x\in\,]0\,,4[$ on a : $f'(x)=\frac{4}{\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^3}$

b) Dresser le tableau de variations de $f$.

c) Montrer que $f$ réalise une bijection de $]0\,,4[$ sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que le point $A(2\,,0)$ est un centre de symétrie de $C_f$.

b) Ecrire une équation de la tangente $T$ à $C_f$ en $A$.

4) On suppose que le point $I$ d'abscisse , $(\alpha\simeq 3,9)$ est l'unique point d'intersection de la courbe $C_f$ et la droite $\Delta$: $y=x$.

a) Tracer $C_f$ et $T$.

b) Soit $f^{-1}$ la réciproque de $f$ et soit $C_{f^{-1}}$ sa courbe

Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O\,\vec{i}\,,\vec{j})$.

1) a) Déterminer le domaine de définition de $f$.

b) Montrer que $F$ est dérivable sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$.

c) En déduire que pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $F(x) = \frac{x}{2}$

2) Calculer alors $\mathscr{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $C_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Exercice 19**

1) a) Dresser le tableau de variation de la fonction $\varphi$ définie sur $[0\,,1]$ par : $\varphi(t) = t(1-t)$.

b) En déduire que pour tout réel $t \in [0\,,1]$ on a : $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{4}$

2) On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1}$

Soit la fonction $G$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = F\left(\frac{1-\tan x}{2}\right)$.

a) Vérifier que la fonction $F$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et déterminer sa fonction dérivée.

b) Vérifier que $G\left(-\frac{\pi}{4}\right) = F(1)$.

c) Calculer $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

3) a) Déterminer $G'(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $G(x) = -x + F(1) - \frac{\pi}{4}$

c) En déduire que $\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{\pi}{2}$

4) On considère la suite $(I_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n \, dt$

a) Calculer $I_1$

b) Montrer que pour tout entier naturel $n$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$ c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

5) On cosidère la suite $(U_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^k I_k$

a) On pose pour tout réel $t \in [0\,,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$W_n = 2t(1-t) + 2^2t^2(1-t)^2 + 2^3t^3(1-t)^3 + \cdots + 2^n t^n(1-t)^n$

Montrer que $W_n = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} - 1 - \frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1}$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul on a : $\left|U_n + 1 - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2^{n+2}}$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

**Exercice 20**