CMS

4ème

SECTION MATH

CORRIGEES
DES EXERCICES DU MANUEL SCOLAIRE

TOME 1

ABROUG FETHI
Professeur principale

BOUSSETTA JALLOULI
Professeur principale

CHAMS EDITION

MATHEMATIQUES

CMS

4ème

SECTION MATH

CORRIGEES DES EXERCICES DU MANUEL SCOLAIRE

TOME 1

ABROUG FETHI
Professeur principale

BOUSSETTA JALLOULI
Professeur principale

CHAMS EDITION

MATHEMATIQUES

Avant - propos

Cher élève de 4^{ime} Math..

Voila entre vos mains les corrigés détaillés de tous les exercices de votre manuel scolaire de mathématiques (tome 1 ; le Tome 2 ne tardera pas).

En s'exerçant en classe (A.S : 07-08) ; on était obligé de voir tous ces exercices, et c'est seulement en les manipulant qu'on s'est rendu compte de leur importance , de leur richesse et qu'on a apprécié la compétence et le professionnalisme du groupe rédacteur de ce manuel et des efforts considérables qu'ils ont déployés pour le bon choix des exercices.

Cher élève ;
C'est pour vous faire attacher encore plus à votre livre scolaire et à ses précieuses séries d'exercices ,que vient donc cet ouvrage ,par le quel nous voulons dire à chacun de vous : vous n'êtes pas seul ; on est là prés de vous à chaque instant ; pour vous rassurer lorsque vous répondez juste ; pour vous corriger lorsque vous vous trompez et pour vous débloquer lorsque vous en avez besoin.

Cher élève ;
Nous sommes sûrs que vous avez suffisamment de conscience qui vous incite à ne pas se précipiter à la correction avant de déployer le temps nécessaire et l'effort personnel convenable pour la résolution.

Nous tenons enfin à remercier tous les membres du groupe rédacteur de ce manuel scolaire et un merci spécial pour M^{er} **Charrada Taoufik** secrétaire général de notre fameuse association **A.T.S.M** qui a encouragé l'idée de ce livre.

Les auteurs
ABROUG FETHI & BOUSSETTA JALLOULI

Nous prions nos collègues et tous ceux qui utilisent ce document de bien vouloir nous faire part de leurs remarques qui seront les bienvenues (à l'adresse :f_abroug@yahoo.fr) et dont nous les remercions vivement.

Sommaire

QCM :

1) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) f(2)=3 et f(5)=1

3) admet au moins une solution dans $[-2,5]$

VRAI-FAUX :

1) (vrai)

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(-x)=\lim_{X\to-\infty} f(X)=-\infty$

2) (faux)

contre exemple : f(x)=x

f est croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3) (faux)

contre exemple : $f(x)=\frac{1}{x}$; $D_f=\mathbb{R}^*$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

f n'est pas bornée

($\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$)

4) (faux)

contre exemple : $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; $D_f=\mathbb{R}^*$

$\lim_{x\to0} f(x)=1$

$\Delta : x=0$ n'est pas une asymptote à (ζ_f)

5) (faux)

contre exemple : f(x)=4+sinx

$g(x)=3-\frac{1}{1+x^2}$; $h(x)=5+\frac{1}{1+x^2}$

on a : $g(x)\le f(x)\le h(x)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=3$; $\lim_{x\to+\infty} h(x)=5$

mais f n'a pas de limite en $+\infty$

EX 1 :

pour x>0 on a : $f(x)=\frac{x}{x}\sqrt{2x}=\sqrt{2x}$

pour x<0 on a : $f(x)=-\sqrt{-2x}$

$f(0)=0$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x} & \text{si } x\ge0\\ -\sqrt{-2x} & \text{si } x\le0\end{cases}$$

* $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{2x}=0=f(0)$

$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}-\sqrt{-2x}=0=f(0)$

f est continue en 0

* la fonction : $x\mapsto 2x$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$

d'où f est continue sur $]0,+\infty[$

* de meme f est continue sur $]-\infty,0[$

conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$

EX 2 :

• la fonction : $x\mapsto 1+\frac{1}{x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}/\{2\}$

(fonction rationnelle)

• la fonction : $x\mapsto x-2$ est continue sur $\mathbb{R}$

en particulier sur $\mathbb{R}/\{2\}$

d'où la fonction : $x\mapsto |x-2|$ est continue sur $\mathbb{R}/\{2\}$

par suite f est continue sur $\mathbb{R}/\{2\}$

* continuité en 2 : f(2)=1

pour x>2 on a : $f(x)=(1+\frac{1}{x-2})(x-2)$

$f(x)=x-1$

$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}(x-1)=1=f(2)$

pour x<2 : $f(x)=(1+\frac{1}{x-2})(-x+2)=-x+1$

$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}(-x+1)=-1\ne f(2)$

f n'est pas continue en 2

EX 3 :

$f(x)=\dfrac{-3x^2-x+10}{x^3+x^2-8x-12}$

$D_f=\mathbb{R}/\{-2,3\}$

on a : $-3x^2-x+10=(x+2)(-3x+5)$

$x^3+x^2-8x-12=(x-3)(x+2)^2$

d'où $f(x)=\dfrac{-3x+5}{(x-3)(x+2)}$

1) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{-3x+5}{(x-3)(x+2)}=-\infty$

(de la forme ${}^{-4}/_{0^+}$)

f n'admet pas une limite finie en 3

d'où f n'est pas prolongeable par continuité en 3

2) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty$ (de la forme $\dfrac{11}{0^-}$)

d'où f n'est pas prolongeable par continuité en (-2)

EX 4 :

$f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{|x^2+x-6|}}$

1) $x^2+x-6=0$

$\Delta=25$ $x'=-3$ et $x''=2$

d'où $D_f=\mathbb{R}/\{-3,2\}$

2)

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		+	0	-	0	+	

$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

• pour $x\in]-\infty,-3[$

$f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+x-6}}=\dfrac{(x+3).\sqrt{x^2+x-6}}{(x+3)(x-2)}$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}}{(x-2)}$

$\lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}}{(x-2)}=0$

• pour $x\in]-3,2[$

$f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{-x^2-x+6}}=\dfrac{-\sqrt{-x^2-x+6}}{(x-2)}$

$\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=0$

d'où $\lim\limits_{x\to(-3)} f(x)=0$

f est prolongeable par continuité en (-3)

son prolongement est la fonction g définie sur $\mathbb{R}/\{2\}$

par : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{\sqrt{|x^2+x-6|}} & \text{si } x\neq2 \ ;\ x\neq-3\\ g(-3)=0\end{cases}$

EX 5 :

1) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{-3}{x-1}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{-3}{x-1}\right)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{-3x}{x^2-1}\right)=-\infty$ (de la forme $\dfrac{-3}{0^+}$)

$\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{-3x}{x^2-1}\right)=+\infty$

3)

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	-	0	+	

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=-\infty$

4) * pour x>0

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

* pour x<0

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\sqrt{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}}{x}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$=\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$d'où\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$$

EX 6 :

soit $P(x)=x^3+3x^2-2x-4$

$P(-1)=0$

$P(x)=(x+1).(x^2+ax+b)$

$=x^3+(a+1)x^2+(a+b)x+b$

$$identification\ \begin{cases}a+1=3\\a+b=-2\\b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-4\end{cases}$$

$P(x)=(x+1).(x^2+2x-4)$

pour $x\neq-1$

$$f(x)=\frac{(x+1)(x^2+2x-4)}{x+1}=x^2+2x-4$$

$$\lim_{x\to(-1)}f(x)=\lim_{x\to(-1)}(x^2+2x-4)=-5$$

$$g(x)=\begin{cases}x^2+2x-4 & \text{si } x\neq-1\\-5 & \text{si } x=-1\end{cases}$$ est le

prolongement par continuité de f en (-1)

2) pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[/\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

$$f(x)=\frac{\cos x-\frac{\sqrt2}{2}}{\sin x-\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}$$

Rappelons que :

$$\cos a-\cos b=-2\sin(\frac{a-b}{2}).\sin(\frac{a+b}{2})$$

$$\sin a-\sin b=2\sin(\frac{a-b}{2}).\cos(\frac{a+b}{2})$$

$$\frac{\cos a-\cos b}{\sin a-\sin b}=-tg(\frac{a+b}{2})$$

$$d'où\ :\ f(x)=-tg(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2})$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=-tg\frac{\pi}{4}=-1$$

$$d'où\ :\ g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } x\neq\frac{\pi}{4}\\-1 & \text{si } x=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

3) pour $x\neq0$

$$f(x)=-16\left[\frac{1-\cos(4x)}{(4x)^2}\right]$$

on pose X=4x $x\to0$, $X\to0$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{X\to0}-16\left[\frac{1-\cos X}{X^2}\right]=-16\times\frac{1}{2}=-8$$

$$d'où\ \ g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } x\neq0\\-8 & \text{si } x=0\end{cases}$$

4) on pose : $U(x)=(x-1)^2$

$$V(x)=\frac{\sin(\pi x)}{x}$$

$f=V\circ U$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1}U(x)=\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0\\ \lim\limits_{x\to0}V(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\pi x)}{x}=\pi\end{cases}$$

$d'où\ \lim\limits_{x\to1}f(x)=\pi$

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } x\neq1\\ \pi & \text{si } x=1\end{cases}$$

EX 7 :

$\Delta: y=-x+2$

1)* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

* $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to2}f(x)=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x-2)=0$

2)

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
f'(x)	+	||	+	0	-	||	-	
f(x)	0 ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ 1		↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘ $-\infty$	

3)* $m\in]-\infty,0]\cup\{1\}$

l'équation : f(x)=m admet trois solutions

* $m\in]0,1[$

l'équation f(x)=m admet quatre solutions

* $m\in]1,+\infty[$

l'équation f(x)=m admet deux solutions

EX 8 :

1) On pose $U(x)=\dfrac{\pi x+1}{x}$ et $V(x)=\cos(x)$

f=VoU

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to-\infty}U(x)=\pi\\ \lim\limits_{x\to\pi}V(x)=-1\end{matrix}\right\rangle \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$$

2) $$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x}}=0\\ \lim\limits_{x\to0}\sin(x)=0\end{matrix}\right\rangle \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$$

3) $f(x)=\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x}$ *on pose* $X=\sqrt{x}$

$$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{X\to0^+}\frac{\sin(X)}{X^2}$$

$$=\lim\limits_{X\to0^+}\frac{\sin(X)}{X}.\frac{1}{X}=+\infty$$

4) $f(x)=\dfrac{\cos(x^2-1)-1}{(x^2-1)^2}$

$f=VoU\ \ avec\ U(x)=x^2-1\ et\ V(x)=\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to1}U(x)=0\\ \lim\limits_{x\to0}V(x)=-\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}f(x)=-\frac{1}{2}$$

EX 9 :

$x\in[0,+\infty[$

$f(x)=(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}).\sin x$

1) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\dfrac{(x+2)-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

d'où $f(x)=\dfrac{2.\sin x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

2) x>0

$|f(x)|=\dfrac{2.|\sin x|}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\geq\sqrt{x}\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$|\sin x|\leq1\Rightarrow2|\sin x|\leq2$

d'où $\dfrac{2.|\sin x|}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\leq\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}=0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

EX 10 :

$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2})-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0$

d'où y=0 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage (-∞)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0$

d'où Δ:y=2x est une asymptote à (ζ_f)

au voisinage (+∞)

EX 11 :

$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

1)* $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$ (de la forme $\frac{1}{0^+}$)

* $f(x)-(x+2)=\frac{x^3}{(x-1)^2}-(x+2)=\frac{3x-2}{(x-1)^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+2))=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$

Δ:y=x+2 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage (+∞)

2) • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{x^2-2x+1}$

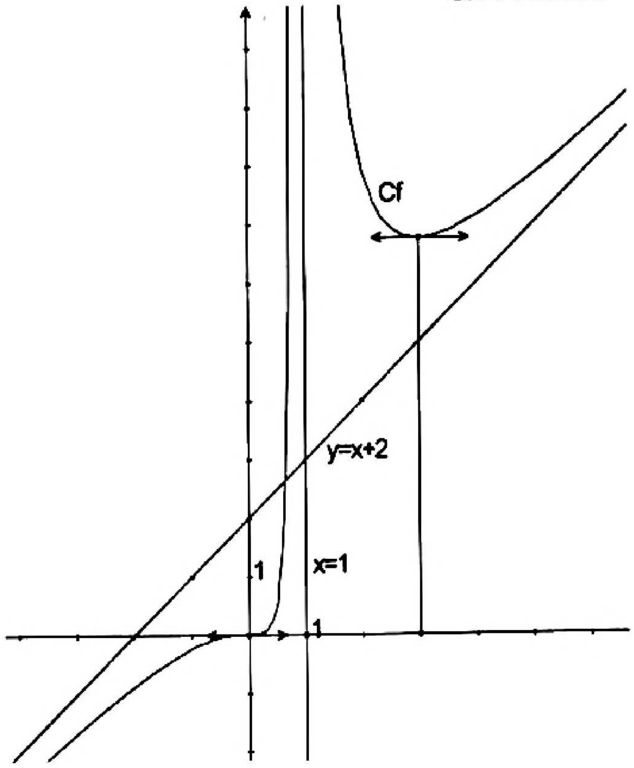
$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$

Δ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage (-∞)

• $f'(x)=\frac{x^2.(x-3)}{(x-1)^3}$

x	-∞		0		1		3		+∞
f'(x)		+	0	+	‖	-	0	-	
f(x)	-∞	↗		+∞	‖ +∞	↘	27/4	↗	+∞

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \quad et \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



EX 12 :

$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$

1) a) $x^2-x+1=0$

Δ=-3<0

d'où $x^2-x+1>0$; $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

b) $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

d'où $f(x)=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

2) a) $f(x)-(x-\frac{1}{2})=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-(x-\frac{1}{2})$

$=\frac{3/4}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+(x-\frac{1}{2})}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-\frac{1}{2})=$

⇒

D:y=x-$\frac{1}{2}$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage (+∞)

b) $f(x)-(x-\frac{1}{2})=\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+(x-\frac{1}{2})}$

$(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>(x-\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}>\left|x-\frac{1}{2}\right|$

$\Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}>(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-(x-\frac{1}{2})>0$

$\Rightarrow f(x)-(x-\frac{1}{2})>0$

(ζ_f) est au dessus de D

3) * $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2.(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|.\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-1$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}+x)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2-x+1)-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}$

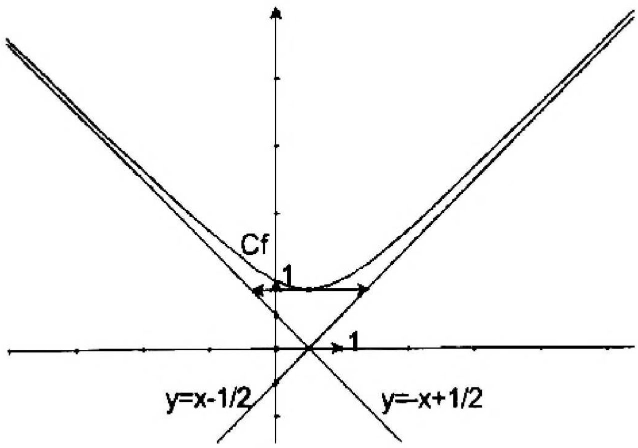
$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{|x|.\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x(1-\frac{1}{x})}{-x\left[\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right]}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}$

D':y=-x+$\frac{1}{2}$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

4) $f'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$



EX 13 :

1) $(\zeta_f)=(\zeta_3)$

$(\zeta_g)=(\zeta_1)$

$(\zeta_h)=(\zeta_2)$

2) * (ζ_1) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$

* (ζ_2) admet la droite Δ:y=x comme asymptote oblique

* (ζ_3) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

EX 14 :

1) $D_f=[1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-3\sqrt{x-1}=-\infty$

d'où : la droite Δ:y=2x est une direction asymptotique à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x+2}$

$D_f=[-2,+\infty[/\{0\}$

* $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}-\sqrt{x+2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$

la droite d'équation x=0 est une asymptote à (ζ_f)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\frac{\sqrt{x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{x+2}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=0$$

(ζ_f) admet une branche infinie de direction parabolique celle de $(O,\vec{i})$

3) $f(x)=x.\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x-1		-		-	0	+	
x+1		-	0	+		+	
$\frac{x-1}{x+1}$		+	0	-	0	+	

$D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x.\left[\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty} x.\left[\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right]=\lim_{x\to+\infty} x.\left[\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1)}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right)=-1$$

d'où Δ:y=x-1 est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=1$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\left(\dfrac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\right)=-1$

Δ:y=x-1 asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage $(-\infty)$

EX 15 :

1) $f(x)=x.\sin(\dfrac{2}{x})$

pour $x\neq 0$ $\quad |f(x)|=|x|.\left|\sin(\dfrac{2}{x})\right|$

on sait que : $\left|\sin(\dfrac{2}{x})\right|\le 1\Rightarrow |x|\left|\sin(\dfrac{2}{x})\right|\le|x|$

$\Rightarrow |f(x)|\le|x|$

$\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ d'où $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

2) $f(x)=1+x^2.\cos(\dfrac{1}{x})$

pour $x\neq 0$

$-1\le\cos(\dfrac{1}{x})\le 1\Rightarrow -x^2\le x^2.\cos(\dfrac{1}{x})\le x^2$

$\Rightarrow 1-x^2\le 1+x^2.\cos(\dfrac{1}{x})\le 1+x^2$

$\Rightarrow 1-x^2\le f(x)\le 1+x^2$

$\lim\limits_{x\to0}(1-x^2)=\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)=1$

d'où $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos(\dfrac{1}{x})$

* pour $x>0$: $\cos(\dfrac{1}{x})\ge -1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}+\cos(\dfrac{1}{x})\ge -1+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)\ge -1+\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^+}(-1+\dfrac{1}{x})=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

* pour $x<0$ $\cos(\dfrac{1}{x})\le 1\Rightarrow f(x)\le 1+\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to0}(1+\dfrac{1}{x})=-\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$

conclusion : f n'admet pas de limite en 0

EX 16 :

1) $f(x)=\dfrac{2+\cos x}{x}$

$-1\le \cos x\le 1 \Rightarrow 1\le 2+\cos x\le 3$

• pour x>0 : $\dfrac{1}{x}\le \dfrac{2+\cos x}{x}\le \dfrac{3}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

• pour x<0 : $\dfrac{3}{x}\le \dfrac{2+\cos x}{x}\le \dfrac{1}{x}\Rightarrow \dfrac{3}{x}\le f(x)\le \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

2) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{|x|}}$ $\quad x\ne 0$

$-1\le \cos x\le 1\Rightarrow 0\le 1+\cos x\le 2$

$\Rightarrow 0\le f(x)\le \dfrac{2}{\sqrt{|x|}}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{|x|}}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{\sqrt{|x|}}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

3) $f(x)=\dfrac{x.\sin x}{x^4+x^2+1}$

$|f(x)|=\dfrac{|x|.|\sin x|}{x^4+x^2+1}$

on a : $|\sin x|\le 1\Rightarrow |x|.|\sin x|\le |x|$

$\Rightarrow |f(x)|\le \dfrac{|x|}{x^4+x^2+1}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|}{x^4+x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^4+x^2+1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|}{x^4+x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^4+x^2+1}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x^3}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

4) $f(x)=\cos x - x$

$-1\le \cos x\le 1\Rightarrow -x-1\le f(x)\le 1-x$

$*\begin{cases} f(x)\le 1-x \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty\end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$*\begin{cases} f(x)\ge -1-x \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-1-x)=+\infty\end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

EX 17 :

1) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$ $\quad x\ge 1$

$*|f(x)|\le \dfrac{1+|\cos x|}{\sqrt{x}}\le \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ car $|\cos x|\le 1$

$*|g(x)|=\dfrac{x.\sin^4 x}{2x^3+1}$ $\quad$ *car* $x\ge 1$

$2x^3+1\ge 2x^3\Rightarrow \dfrac{1}{2x^3+1}\le \dfrac{1}{2x^3}$

$\Rightarrow |g(x)|\le \dfrac{\sin^4 x}{2x^2}\Rightarrow |g(x)|\le \dfrac{1}{2x^2}$ car $\sin^4 x\le 1$

$*\sin x\le 1\Rightarrow 3\sin x\le 3\Rightarrow -x^3+3\sin x\le -x^3+3$

$\Rightarrow h(x)\le -x^3+3$

2) pour $x\ge 1$

* $|f(x)|\le \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

* $|g(x)|\le \dfrac{1}{2x^2}$ pour $x\ge 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

* pour $x\ge 1$, $h(x)\le -x^3+3$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+3)=-\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$

EX 18 :

$f(x)=\dfrac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x}$; $x\in\mathbb{R}^*$

1) a) pour x>0

$\sin(\frac{1}{x})\le 1\Rightarrow -\sin(\frac{1}{x})\ge -1\Rightarrow 2-\sin(\frac{1}{x})\ge 1$

$\Rightarrow \dfrac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x}\ge \dfrac{1}{x}$ (car x>0) $\Rightarrow f(x)\ge \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) \geq \frac{1}{x}$ pour x>0 et $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}) = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

2) a) pour x<0

$$2\text{-}\sin(\frac{1}{x}) \geq 1 \Rightarrow \frac{2\text{-}\sin(\frac{1}{x})}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \text{(car } x<0)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x}$$

b) $f(x) \leq \frac{1}{x}$ pour x<0 et $\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{1}{x}) = -\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

Rq : f n'admet pas de limite en 0

EX 19 :

$$f(x) = \frac{2x.\sin x}{1+x^2}$$

1) a) $|x.f(x)| = \frac{2x^2.|\sin x|}{1+x^2}$

* *pour* $x = 0$ *le resultat est evident*

* *pour* $x \neq 0$ $1+x^2 \geq x^2 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow \frac{2x^2.|\sin x|}{1+x^2} \leq 2|\sin x| \Rightarrow |x.f(x)| \leq 2 \text{ (car } |\sin x| \leq 1)$$

b) pour $x \neq 0$

$$|x.f(x)| \leq 2 \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{2}{|x|}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{|x|} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

2) on pose $X = \frac{\pi}{2} - x$

$x \to -\infty$

$X \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(\pi-2x)\cos x}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{2X\cos(\frac{\pi}{2}-X)}{1+X^2}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{2X.\sin X}{1+X^2} = \lim_{X\to+\infty} f(X) = 0$$

EX 20 :

1) $-1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2\text{-}\cos x \leq 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$$

2) * $f(x) = \frac{x}{2\text{-}\cos x}$

pour x>0 : $\frac{1}{2\text{-}\cos x} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{3}x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

* $g(x) = \frac{x+\cos x}{2\text{-}\cos x}$

$\cos x \geq -1 \Rightarrow x + \cos x \geq x - 1$

pour x>1

$x+\cos x \geq x-1$; $\frac{1}{2\text{-}\cos x} \geq \frac{1}{3}$

d'où $g(x) \geq \frac{1}{3}(x-1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}(x-1) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

EX 21 :

1) $f(x) = \frac{\cos(3x-1)}{x}$

$-1 \leq \cos(3x-1) \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\cos(3x-1)}{x} \leq \frac{1}{x}$ pour x>0

$$\Rightarrow \frac{-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{-1}{x}) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}) = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) $f(x) = 4x^2 - 3\cos x$

$\cos x \leq 1 \Rightarrow -3\cos x \geq -3 \Rightarrow 4x^2 - 3\cos x \geq 4x^2 - 3$

$\Rightarrow f(x) \geq 4x^2 - 3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2 - 3 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{1\text{-}2x} \geq \frac{\sin x}{1-2x} \geq \frac{1}{1-2x}$ pour $x > \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1\text{-}2x} \leq f(x) \leq \frac{-1}{1-2x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1\text{-}2x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

4) $f(x)=2+\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

pour $x>0$ $-1\le \sin\sqrt{x}\le 1 \Rightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{x}}\le\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow 2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\le f(x)\le 2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; pour $x>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$

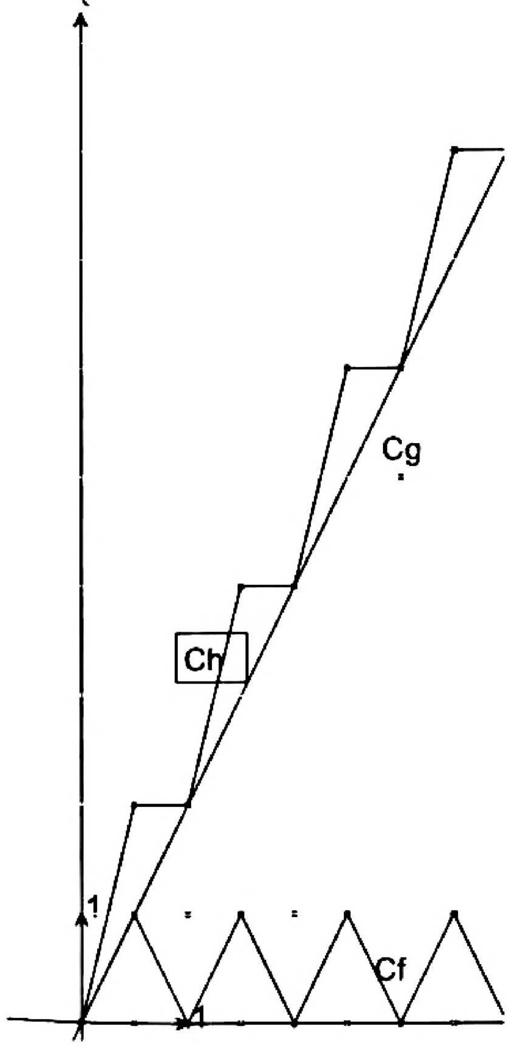
d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

EX 22 :

f est périodique de période 2

$f(x+2)=f(x)$

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ 2-2x & \text{si } x\in\left]\frac{1}{2},1\right[\\ f(x-1) & \text{si } x\in\left]1,2\right] \end{cases}$$



2) • pour $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

$0\le x\le\frac{1}{2}\Rightarrow 0\le 2x\le 1\Rightarrow 0\le f(x)\le 1$

• pour $x\in\left]\frac{1}{2},1\right[$:

$\frac{1}{2}<x\le 1\Rightarrow -1\le -2x\le -2$

$\Rightarrow 1\ge 2-2x\ge 0\Rightarrow 0\le f(x)\le 1$

d'où $0\le f(x)\le 1$; $\forall x\in[0,1]$

• pour $x\in]1,2]$

$(x-1)\in]0,1]\Rightarrow 0\le f(x-1)\le 1$

$\Rightarrow 0\le f(x)\le 1$; $\forall x\in]1,2]$

par suite $0\le f(x)\le 1$; $\forall x\in[0,2]$

2 est une période de f $\Rightarrow f(x+2k)=f(x)$; $k\in\mathbb{Z}$

d'où $0\le f(x)\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

3) (ζ_g) est la droite d'équation : $y=2x$

4) a) $h(x)=f(x)+g(x)$

b) $0\le f(x)\le 1\Rightarrow g(x)\le h(x)\le g(x)+1$

$\Rightarrow 2x\le h(x)\le 2x+1$

* $h(x)\ge 2x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

* $h(x)\le 2x+1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1=-\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$

EX 23 :

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$; $I=]2,+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{-3}{(x-2)^2}<0$

f est continue et strictement décroissante sur $]2,+\infty[$

d'où $f(]2,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f,\lim\limits_{x\to2^+} f\right[=]1,+\infty[$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$; $I=]-\infty,0]$

$f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}<0\quad \forall x\in I$

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0]$

$f(]-\infty,0])=\left[f(0),\lim\limits_{-\infty} f\right[=[0,+\infty[$

3) $f(x)=tg(\pi x)$; $I=\left]-\dfrac{1}{2},0\right]$

$f'(x)=\pi.(1+tg^2(\pi x))>0$

f est continue et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{1}{2},0\right]$

d'où $f\left(\left]-\dfrac{1}{2},0\right]\right)=\left]\lim\limits_{\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f,f(0)\right]=]-\infty,0]$

(car $\lim\limits_{\left(-\frac{1}{2}\right)^+} tg(\pi x)=-\infty$)

EX 24 :

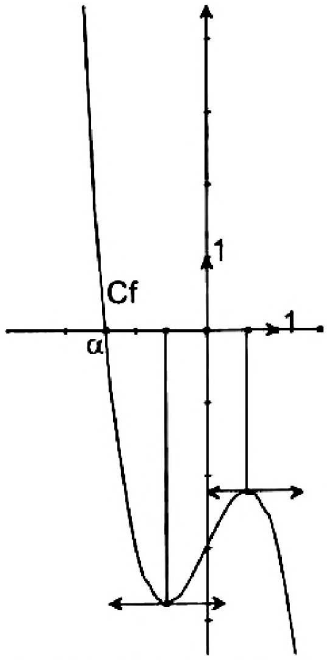
$f(x)=-2x^3+2x-3$

1) $f'(x)=-6x^2+2$

x	$-\infty$		$\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	0	-	
f(x)	$+\infty$	↘	$\dfrac{-4}{3\sqrt{3}}-3$	↗	$\dfrac{4}{3\sqrt{3}}-3$	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}-2x^2=-\infty$

(ζ_f) admet deux branches paraboliques de direction celle de $(O,\vec{j})$



2) l'équation : f(x)=0 admet une uniquz solution α

3) f est continue sur $[-2,-1]$

$f(-2)\times f(-1)=-27<0 \Rightarrow -2<\alpha<-1$ (calculatrice)

EX 25 :

$D_f=[-6,4]/\{2\}$

1)

x	-6		-2		2		4
f(x)	6	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

2) $f([-6,2[)=[1,+\infty[$

$f(]2,4])=[2,+\infty[$

3) $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

a) $D_h=[-6,4]/\{2\}$ car f ne s'annule pas

b) les variations de f et $\dfrac{1}{f}$ sont contraires sur un intervalle I sur lesquelles elles sont définies

D'où

x	-6		-2		2
h(x)	1/6	↗	1	↘	0 ‖

$h(-6)=\frac{1}{6}$

$h(1)=1$

$\lim_{x\to 2} h(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{f(x)}=0$

$h([-6,2[)=]0,1]$

x	2	4
h(x)	0 ↗	1/2

$h(]2,4])=\left]0,\frac{1}{2}\right]$

c) $\lim_{x\to 2} h(x)=0$

h est prolongeable par continuité en 2

EX 26 :

$f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3$

$D_f=]0,5]$

1) f est continue sur $]0,5]$ comme étant somme de fonctions continues

2) • f est décroissante sur $]0,1]$

• f est croissante sur $[1,5]$

3) · $f(]0,1])=\left[f(0),\lim_{x\to 0^+} f\right[=[0,+\infty[$

· $f([1,5])=[f(1),f(5)]=\left[0,2\sqrt{5}-\frac{14}{5}\right]$

4) a) $2\sqrt{x}+\frac{1}{x}=4 \Leftrightarrow f(x)=1$

l'équation admet deux solutions

b) $\varphi(x)=f(x)-1$ (calculatrice)

* $\varphi(0,3).\varphi(0,4)<0 \Rightarrow 0,3<x'<0,4$

* $\varphi(3,5).\varphi(3,6)<0 \Rightarrow 3,5<x''<3,6$

EX 27 :

$f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x-1}$

$D_f=[0,+\infty[/\{1\}$

1) $x\in]0,+\infty[/\{1\}$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{(x-1)^2}>0$

f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1,+\infty[$

2) f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$

$d'où$ $f([0,1[)=\left[f(0),\lim_{x\to 1^-} f\right[=[1,+\infty[$

• f est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$

$d'où$ $f(]1,+\infty[)=\left]\lim_{x\to 1^+} f,\lim_{+\infty} f\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

3) a) dans $\left[\frac{3}{2},2\right]$

$(x-1)\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x}-\frac{1}{x-1}=0$

$\Leftrightarrow f(x)=0$

• f est continue sur $\left[\frac{3}{2},2\right]$

$f(\frac{3}{2})\times f(2)=(\sqrt{\frac{3}{2}}-2)(\sqrt{2}-1)<0$

d'où l'équation : f(x)=0 admet une solution α dans $\left[\frac{3}{2},2\right]$

comme f est strictement croissante alors α est unique par suite : l'équation : $(x-1)\sqrt{x}=0$ admet α comme unique solution dans $\left[\frac{3}{2},2\right]$

b) f(1,7).f(1,8)<0 donc 1,7< α <1,8

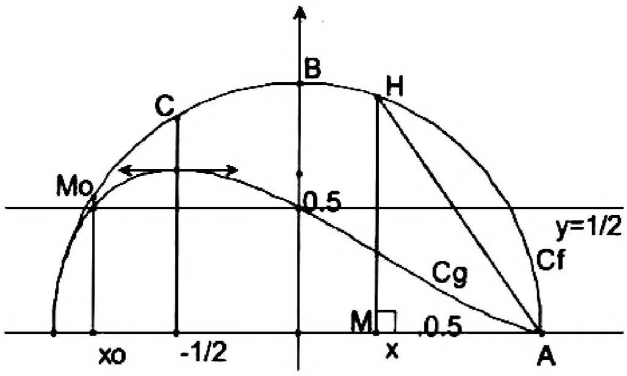
une valeur approchée de α à 10^{-1} prés est 1,7

EX 28 :

$x \in [-1,1]$

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$g(x)=\frac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}$



1) $A(x)=\frac{AH.HM}{2}$

$A(x)=\frac{1}{2}(1-x).f(x)$

$A(x)=g(x)$

2) a) $A(x)=g(x)$ est maximale lorsque

$x=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ lorsque M=C (voir figure)

b) $I=\{A(x)\ ;\ x\in[-1,1[\}$

$I=\{g(x)\ ;\ x\in[-1,1[\}=g([-1,1[)=\left[0,g(-\frac{1}{2})\right]$

$I=\left[0,\frac{3\sqrt{3}}{8}\right]$

c) soit a = l'aire du triangle OAB

$a=\frac{1}{2}$

$A(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{2}$

la droite d'équation : $y=\frac{1}{2}$ coupe (ζ_g)

en deux points

d'où léquation : $g(x)=\frac{1}{2}$ admet deux solutions

l'une de ces solutions est 0

$x=0 \rightarrow M=B$

l'autre $x_0 \rightarrow M=M_0$ (voir figure)

• soit $\varphi(x)=g(x)-\frac{1}{2}$

φ est continue sur $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

$\varphi(-1).\varphi(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})(\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{2})<0$

$\Rightarrow -1<x_0<-0,5$

$\varphi(-0,9)\times\varphi(-0,8)<0 \Rightarrow -0,9<x_0<-0,8$

EX 29 :

$a<b$

$f([a,b])\subset[a,b]$

1) montrons que l'équation $f(x)=x$

admet une solution α dans $[a,b]$

* $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0 \Leftrightarrow h(x)=0$

(avec $h(x)=f(x)-x$)

* $h(a)=f(a)-a\geq 0$ car $f(a)\in[a,b]$

$h(b)=f(b)-b\leq 0$ car $f(b)\in[a,b]$

* h est continue sur $[a,b]$ h(a) et h(b) sont de signes contraires

0 est compris entre h(a) et h(b)

d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires :

il existe $\alpha\in[a,b]$ tel que: $h(\alpha)=0$

$h(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$

2) la droite $\Delta: y=x$ coupe (ζ_f) en un point A de coordonnées (α,α)

(*Rq* : α n'est pas nécéssairement unique)

QCM

1. $U_n = \dfrac{n^2+2}{n}$; $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad U_n \geq n$
2. $U_n = \dfrac{n+\cos(n)}{n+1}$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$
3. $U_n = n.\sin(\dfrac{1}{n})$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

VRAI-FAUX

1. FAUX contre exemple : $U_n = (-1)^n$
2. FAUX contre exemple : $U_n = -n$ et $V_n = \sqrt{1+n^2}$ $\quad U_n + V_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{1+n^2}}$

   U_n+V_n converge vers 0 mais U_n et V_n ne sont pas convergentes

3. FAUX contre exemple : $U_n = (-1)^n \to (U_n)^2 = 1$
   $(U_n)^2$ converge vers 1 mais U_n ne converge pas

4. FAUX voir définition

5. FAUX contre exemple : $U_n = (-1)^n$
   U_{2n} converge vers 1 ; U_{2n+1} converge vers -1 mais U_n n'est pas Convergente

Ex 1 :

1. *

$$\frac{1}{5}\in]-1,1[\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 2+\left(\frac{1}{5}\right)^n=2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n=2$$

* $\lim_{n\to+\infty} 4+\frac{1}{n}=4 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n}}=\sqrt{4}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n=2$$

2.

$$|U_n-2|\leq 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{1}{5^n}\leq\frac{1}{10^6}$$

$$\Leftrightarrow 5^n\geq 10^6 \Leftrightarrow n\geq 9$$

$pour\ n\geq n_0=9 \quad |U_n-2|\leq 10^{-6}$

3.

$$|V_n-2|=\frac{1}{n(2+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}$$

$|V_n-2|\leq 10^{-6} \quad pour \quad n\geq n_1=?$

EX 2 :

$a_n=\dfrac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^{n+1}} \quad ;n\geq 0$

1. $a_{2n}=\dfrac{n+1}{2n-1}$; $a_{2n+1}=\dfrac{n-1}{2n+1}$

2.

Lim a_{2n} =Lim $\dfrac{n+1}{2n-1}$ =Lim $\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$

Lim a_{2n+1} =Lim $\dfrac{n-1}{2n+1}$ =Lim $\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$

Lim a_{2n} = Lima_{2n+1}=$\dfrac{1}{2}\Rightarrow \lim a_n=\dfrac{1}{2}$

EX 3 :

$$U_n=\frac{2^{(-1)^n.n}}{(-5)^{n+1}} \quad ; \quad (n\in\mathbb{N})$$

$$*U_{2n}=\frac{2^{(-1)^{2n}.2n}}{(-5)^{2n+1}}=\frac{2^{2n}}{(-5).(-5)^{2n}}$$

$$U_{2n}=\frac{-1}{5}.\frac{2^{2n}}{5^{2n}}=\frac{-1}{5}.\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\frac{2}{5}\in]-1,1[\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$$

$$\Rightarrow \lim U_{2n}=0$$

$$*U_{2n+1}=\frac{2^{(-1)^{2n+1}.(2n+1)}}{(-5)^{2n+2}}$$

$$=\frac{2^{-(2n+1)}}{5^{2n+2}}=\frac{1}{5}.\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \lim U_{2n+1}=0 \quad car\ \frac{1}{10}\in]-1,1[$$

Lim U_{2n} =Lim U_{2n+1} =0 d'où

Lim U_n =0

EX4 :

$$U_n=1+\frac{\sqrt{n}}{2n+(-1)^n}$$

$$*U_{2n}=1+\frac{\sqrt{2n}}{4n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_{2n}=\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}.\left[2\sqrt{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right]}$$

$$=\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2\sqrt{2n}+\frac{1}{\sqrt{2n}}}=1$$

$$*U_{2n+1}=1+\frac{\sqrt{2n+1}}{4n+2-1}=1+\frac{\sqrt{2n+1}}{4n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_{2n+1}=1+\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}{4\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} U_{2n}=\lim_{n\to+\infty} U_{2n+1}=1\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n=1$$

EX 5 :

$U_n = (1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3}).....(1+\frac{1}{n})$

$U_n = \frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times....\times\frac{n+1}{n}$

En simplifions on aura :

$U_n = \frac{n+1}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

EX 6 : $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) $x_n = 0,\underbrace{33...3}_{n fois}$

Démontrons par récurrence

* pour n=1 $x_1=0.3=3(10^{-1})$ (vrai)
* supposons que : $x_n=3[10^{-1}+...+10^{-n}]$
* montrons que : $x_{n+1}=3.[10^{-1}+...+10^{-n}+10^{-(n+1)}]$

$x_{n+1} = 0,\underbrace{33...3}_{(n+1) fois} = 0,\underbrace{33..3}_{n fois} + 0,\underbrace{00..0}_{n fois}3$

$x_{n+1} = x_n + 3.10^{-(n+1)} = 3\left[10^{-1}+..+10^{-n}\right]+3.10^{-(n+1)}$

$x_{n+1} = 3\times\left[10^{-1}+...+10^{-(n+1)}\right]$

Conclusion : $x_n = 3\times\left[10^{-1}+...+10^{-n}\right]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

b) $10^{-1}+...+10^{-n} = 10^{-1}(\frac{1-(10^{-1})^n}{1-10^{-1}})$

somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 10^{-1}, d'où

$10^{-1}+10^{-2}+...+10^{-n} = \frac{1}{9}\left[1-(\frac{1}{10})^n\right]$

$\Rightarrow x_n = \frac{1}{3}\left[1-(\frac{1}{10})^n\right]$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{3}$, car $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{10})^n = 0$

2) a) $y_1=0,35$

$y_n = 0,\underbrace{353535...35}_{n fois 35}$

$y_n = 3\times\left[10^{-1}+10^{-3}+..+10^{-(2n-1)}\right]+$
$5\times\left[10^{-2}+10^{-4}+..+10^{-2n}\right]$

$10^{-1}+10^{-3}+..+10^{-(2n-1)} = 10^{-1}.\left[\frac{1-(10^{-2})^n}{1-10^{-2}}\right]$

$= \frac{10}{99}\left[1-(\frac{1}{100})^n\right]$

$10^{-2}+10^{-4}+..+10^{-2n} = 10^{-2}.\left[\frac{1-(10^{-2})^n}{1-10^{-2}}\right]$

$= \frac{1}{99}\left[1-(\frac{1}{100})^n\right]$

d'où

$y_n = (\frac{30}{99}+\frac{5}{99})\left[1-(\frac{1}{100})^n\right] = \frac{35}{99}\left[1-(\frac{1}{100})^n\right]$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{35}{99}$

b) $z_1=0,35$; $z_2=0,3355$

$z_n = 0,\underbrace{33...3}_{n fois}\underbrace{55..55}_{n fois}$

$z_n = x_n + 5\times\left[10^{-1(n+1)}+...+10^{-2n}\right]$

$z_n = x_n + 5\times\left[\frac{1}{10^{n+1}}(\frac{1-(10^{-1})^n}{1-10^{-1}})\right]$

$z_n = x_n + \frac{5}{9\times10^n}\left[1-(\frac{1}{10})^n\right]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{3}$

EX 7 :

1) on pose $V_n = n$; $n\in\mathbb{N}^*$

(V_n) est une suite arithmétique de raison r=1

$\sum\limits_{k=1}^{n} k = \sum\limits_{k=1}^{n} V_k = n\left[\frac{V_1+V_n}{2}\right] = \frac{n(1+n)}{2}$

2)

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2n+3 \end{cases}$

$U_{k+1} = U_k + 2k+3$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} U_{k+1} = \sum_{k=0}^{n}(U_k + 2k + 3)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} U_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n}(2k+3)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_0 = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 3$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - 1 = n(n+1) + 3(n+1)$$

$$\Rightarrow U_n + 2n + 2 = (n+3)(n+1)$$

$$\Rightarrow U_n = (n+3)(n+1) - 2(n+1) = (n+1)^2$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

EX 8 :

1) $U_n = (\frac{2}{n})^n \; ; \; n \in \mathbb{N}^*$

a) $n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{2}{n})^n \leq (\frac{1}{2})^n$

$$\Rightarrow U_n \leq (\frac{1}{2})^n$$

b) $0 \leq U_n \leq (\frac{1}{2})^n \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

2) $V_n = n^{2n} . \left[1 - \frac{(2n)^n}{n^{2n}}\right] = n^{2n} . \left[1 - (\frac{2n}{n^2})^n\right]$

$$V_n = n^{2n} . \left[1 - (\frac{2}{n})^n\right] = n^{2n} . [1 - U_n]$$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

$\lim_{n\to+\infty} n^{2n} = +\infty$

d'où $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

EX 9 :

1) $U_n = \dfrac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n} = \dfrac{(\frac{3}{4})^n - 1}{(\frac{3}{4})^n + 1}$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{3}{4})^n = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = -1$

2) a) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{U_k - 1}$

$$U_k - 1 = \frac{-2\times 4^k}{3^k + 4^k} \Rightarrow \frac{1}{U_k - 1} = -\frac{1}{2}\left[(\frac{3}{4})^k + 1\right]$$

d'où $S_n = \dfrac{-1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} (\frac{3}{4})^k + \sum_{k=0}^{n} 1\right]$

$$S_n = \frac{-1}{2}\left[\frac{1 - (\frac{3}{4})^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} + (n+1)\right]$$

$$S_n = \frac{-1}{2}\left[n + 1 + 4.(1 - (\frac{3}{4})^{n+1}\right]$$

$$S_n = \frac{-1}{2}\left[n + 5 - 3\times(\frac{3}{4})^n\right]$$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$ car $\lim_{n\to+\infty} (\frac{3}{4})^n = 0$

EX 10 :

$W_n = \dfrac{n!}{3^n}$, $(n \in \mathbb{N})$

1) $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} = \dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}} \times \dfrac{3^n}{n!} = \dfrac{n+1}{3}$

$$n \geq 3 \Rightarrow n+1 \geq 4 \Rightarrow \frac{n+1}{3} \geq \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{4}{3}$$

2) $\dfrac{W_4}{W_3} \geq \dfrac{4}{3}$

$\dfrac{W_5}{W_4} \geq \dfrac{4}{3}$

.

.

$\dfrac{W_n}{W_{n-1}} \geq \dfrac{4}{3}$

multiplions membre à membre et simplifions

on aura : $\dfrac{W_n}{W_3} \geq (\dfrac{4}{3})^{n-3}$

$W_n \geq (\frac{4}{3})^{n-3} \times W_3$ pour $n \geq 3$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{4}{3})^{n-3} \times W_3 = +\infty$ car $W_3 > 0$ *et* $\frac{4}{3} > 1$

d'où $\lim_{n\to+\infty} W_n = +\infty$

EX 11 :

$$U_n = \frac{n^2}{2^n} \;;\; (n \in \mathbb{N}^*)$$

1) a) $A_0(0,0)$; $A_1(1,\frac{1}{2})$; $A_2(2,1)$

$A_3(3,\frac{9}{8})$; $A_4(4,1)$; $A_5(5,\frac{25}{32})$

$A_6(6,\frac{9}{16})$ $A_7(7,\frac{49}{128})$

b) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$

$n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{9}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \leq \frac{7}{18}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \leq \frac{8}{9}$

$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{8}{9}$

c) $\frac{U_4}{U_3} \leq \frac{8}{9}$

$\frac{U_5}{U_4} \leq \frac{8}{9}$

.

.

$\frac{U_n}{U_{n-1}} \leq \frac{8}{9}$

multiplions membre à membre et simplifions on aura:

$\frac{U_n}{U_3} \leq (\frac{8}{9})^{n-3} \Rightarrow U_n \leq (\frac{8}{9})^{n-3} \times U_3$

$\Rightarrow U_n \leq (\frac{8}{9})^{n-4}$ or $U_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$

d'où $0 \leq U_n \leq (\frac{8}{9})^{n-4}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{8}{9})^{n-4} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

2) $S_n = \sum_{k=3}^{n} U_k$; $(n \geq 3)$

d'aprés 1) b) on a :

$U_{k+1} \leq \frac{8}{9} U_k$; $k \geq 3$

$\Rightarrow \sum_{k=3}^{n} U_{k+1} \leq \frac{8}{9} \sum_{k=3}^{n} U_k \Rightarrow \sum_{k=3}^{n} U_{k+1} \leq \frac{8}{9} S_n$

$\Rightarrow S_n + U_{n+1} - U_3 \leq \frac{8}{9} S_n$

$\Rightarrow \frac{1}{9} S_n \leq U_3 - U_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{9} S_n \leq U_3$ car $U_{n+1} \geq 0$

$\Rightarrow S_n \leq 9.U_3$

b) $S_{n+1} - S_n = U_{n+1} \geq 0$

d'où (S_n) est croissante et comme (S_n)

est majorée par $9U_3 = \frac{81}{8}$ alors (S_n) est convergente

EX 12 :

$V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$

1) $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

pour $1 \leq k \leq n$ on a : $\sqrt{k} \leq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow V_n \geq n.\frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow V_n \geq \sqrt{n}$

2) $V_n \geq \sqrt{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

EX 13 :

$f(x) = \frac{sinx}{x}$

1) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$

* pour x>0

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$; $\forall x>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) a) $U_n = f(\frac{1}{3^n})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{3})^n = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$

d'où $\lim U_n = 1$

b) $V_n = f(2^n)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$$

c) $W_n = f((-0,3)^n)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} (-0,3)^n = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 1$$

EX 14 :

1) $U_n = \dfrac{-3}{3^n - 1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

2) $U_n = \dfrac{1}{(0,8)+(0,2)^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (0,2)^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{5}{4}$

3) $U_n = \cos(4n) - 4^n$

$\cos(4n) \leq 1 \Rightarrow \cos(4n) - 4^n \leq 1 - 4^n$

$\Rightarrow U_n \leq 1 - 4^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (1-4^n) = -\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

4) $U_n = (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n . \cos n$

$-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow -(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n \leq U_n \leq (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

5) $U_n = \sin(\dfrac{1}{n}) - \dfrac{1}{n}$; $n \in \mathbb{N}^*$

$U_n = f(\dfrac{1}{n})$ avec f(x)=sinx-x

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, f est continue en 0

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = f(0) = 0$

6) $U_n = \dfrac{n^2 + \sin n}{n^3}$; $n \geq 1$

$-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow n^2 - 1 \leq n^2 + \sin n \leq n^2 + 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3} \leq U_n \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}) = 0$

d'où $\lim U_n = 0$

7) $U_n = \dfrac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{3n+2}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$U_{2n} = \frac{2n + \sqrt{2n}}{6n+2} = \frac{2 + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}{6 + \dfrac{2}{n}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} = \dfrac{1}{3}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$

$$U_{2n+1} = \frac{2 + \dfrac{1}{n} - \sqrt{\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}}{6 + \dfrac{5}{n}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \dfrac{1}{3}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{1}{3}$

8) $U_n = tg(-\dfrac{\pi n}{2n-1})$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\pi n}{2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\pi}{2 - \dfrac{1}{n}} = (-\dfrac{\pi}{2})^-$

$\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-} tgx = +\infty$

d'où $\lim U_n = +\infty$

EX 15 :

$\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$$\begin{cases} U_0 = 2\cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

1)* $U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2(1+\cos\theta)}$

$U_1 = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = 2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right| = 2\cos(\dfrac{\theta}{2})$ $\quad (\cos\dfrac{\theta}{2} \geq 0)$

* $U_2 = \sqrt{2+U_1} = \sqrt{2(1+\cos\dfrac{\theta}{2})} = 2\cos\dfrac{\theta}{4}$

2) par reccurence

* pour n=0 : $U_0 = 2\cos\theta = 2\cos(\frac{\theta}{2^0})$ (vrai)

* supposons que : $U_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$

* montrons que : $U_{n+1} = 2\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

$$U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} = \sqrt{2(1+\cos(\frac{\theta}{2^n}))} = \sqrt{4.\cos^2(\frac{\theta/2^n}{2})}$$

$$= 2\left|\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})\right| = 2\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}}) \quad \text{car} \quad \frac{\theta}{2^{n+1}} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

conclusion: $U_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$; $\forall$ n $\in \mathbb{N}$

3) $U_n=2\cos(\frac{\theta}{2^n})=f(\frac{\theta}{2^n})$ ($f(x)=2\cos x$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\theta}{2^n}=0$ f est continue en 0

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=f(0)=2$

EX 16 :

$$U_n = \frac{E(\pi)+E(2\pi)+...+E(n\pi)}{n^2}$$

1) en général : $x-1 \le E(x) \le x$

d'où $k\pi-1 \le E(k\pi) \le k\pi$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(k\pi-1) \le \sum_{k=1}^{n}E(k\pi) \le \sum_{k=1}^{n}k\pi$$

$$\Rightarrow \pi\sum_{k=1}^{n}k-n \le \sum_{k=1}^{n}E(k\pi) \le \pi\sum_{k=1}^{n}k$$

$\sum\limits_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$ (voir: ex7)

donc $\frac{n(n+1)\pi}{2}-n \le \sum\limits_{k=1}^{n}E(k\pi) \le \frac{n(n+1)\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{n^2\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}-n \le n^2 U_n \le \frac{n^2\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{n} \le U_n \le \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}$$

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{n} \le U_n \le \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{\pi}{2}$

EX 17 :

$$U_n = \sin(\frac{1}{n^2})+\sin(\frac{2}{n^2})+...+\sin(\frac{n}{n^2})$$

1) $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k = \frac{1}{n^2}(\frac{n(n+1)}{2})$

$$V_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}$$

2) pour : $1 \le k \le n$

on a : $k^3 \le n^3 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}k^3 \le \sum\limits_{k=1}^{n}n^3$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}k^3 \le n^3\times n = n^4$$

3) pour $x \in [0,+\infty[$

* on pose : $f(x)=\sin x - x$

$f'(x)=\cos x-1 \le 0$, f est décroissante sur $[0,+\infty[$

$x \ge 0 \Rightarrow f(x) \le f(0) \Rightarrow \sin x - x \le 0 \Rightarrow \sin x \le x \quad (1)$

* on pose : $g(x)=\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$

$g'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$

$g''(x) = x - \sin x \ge 0$ (d'aprés (1))

g' est croissante sur $[0,+\infty[$

$x \ge 0 \Rightarrow g'(x) \ge g'(0) \Rightarrow g'(x) \ge 0$

d'où g est croissante sur $[0,+\infty[$

$x \ge 0 \Rightarrow g(x) \ge g(0) \Rightarrow \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \ge 0$

$\Rightarrow \sin x \ge x - \dfrac{x^3}{6} \quad (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow x - \dfrac{x^3}{6} \le \sin x \le x \ ; \forall x \in \mathbb{R}_+$

4) $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

d'aprés 3) : $\dfrac{k}{n^2} - \dfrac{k^3}{6n^6} \le \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right) \le \dfrac{k}{n^2}$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{6n^6} \le U_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$

$\Rightarrow V_n - \dfrac{1}{6n^6} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 \le U_n \le V_n \quad (1)$

* d'aprés 2) on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 \le n^4 \Rightarrow -\frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^{n} k^3 \le -\frac{1}{6n^2}$

$\Rightarrow V_n - \dfrac{1}{6n^6} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 \ge V_n - \frac{1}{6n^2} \quad (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow V_n - \dfrac{1}{6n^2} \le U_n \le V_n$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(V_n - \dfrac{1}{6n^2}\right) = \dfrac{1}{2}$

d'où $\lim U_n = \dfrac{1}{2}$

EX 18 :

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$$

1) démonstartion par reccurence:

* pour n=1 , $U_1 = 1 \le 3$ (vrai)

* supposons que : $U_n \le 3$

montrons que : $U_{n+1} \le 3$

$U_n \le 3 \Rightarrow 3.U_n \le 9 \Rightarrow \sqrt{3.U_n} \le 3 \Rightarrow U_{n+1} \le 3$

conclusion : $U_n \le 3 \ ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) $U_{n+1} - U_n = \sqrt{3.U_n} - U_n = \dfrac{3U_n - U_n^2}{\sqrt{3.U_n} + U_n} = \dfrac{U_n(3-U_n)}{\sqrt{3.U_n} + U_n}$

on a : $U_n > 0$ et $3 - U_n \ge 0$ d'où $U_{n+1} - U_n \ge 0$

$\Rightarrow U_n \le U_{n+1}$

par suite : (U_n) est croissante

3) (U_n) est croissante et majorée par 3

elle est donc convergente

* soit ℓ : sa limite

(U_n) est croissante $\Rightarrow U_n \ge U_1 \Rightarrow U_n \ge 1$

$1 \le U_n \le 3 \Rightarrow 1 \le \ell \le 3$

* $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \sqrt{3x}$

f est continue sur $[1,3]$ d'où $\ell = f(\ell)$

$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \sqrt{3\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 3\ell \Leftrightarrow \ell(\ell-3) = 0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 3$, $0 \notin [1,3]$ d'où $\ell = 3$

conclusion : $\lim U_n = 3$

EX 19 :

$$\begin{cases} U_0 = a \quad ; \ a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ U_{n+1} = \sin(U_n) \end{cases}$$

1) $f(x) = \sin x - x$

$f'(x) = \cos x - 1 \le 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	0 -	
f(x)	0 $\searrow$	$1-\frac{\pi}{2}$

2) f est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\frac{\pi}{2} \geq x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow f(x) \leq 0$

$\Rightarrow \sin x - x \leq 0 \Rightarrow \sin x \leq x$

3) * pour n=0 , $U_0 = a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (vrai)

* supposons que : $U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

montrons que : $U_{n+1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq \sin U_n \leq U_n$ (d'aprés 2))

d'où $0 \leq U_{n+1} \leq U_n \Rightarrow U_{n+1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

4) $\sin U_n \leq U_n \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$

(U_n) est décroissante

5) * (U_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente

* soit $\ell = \lim U_n$

$U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \ell \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

la fonction sin est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ d'où $\ell = \sin \ell$

$\Rightarrow \ell = 0$ (d'aprés 1))

EX 20 :

$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

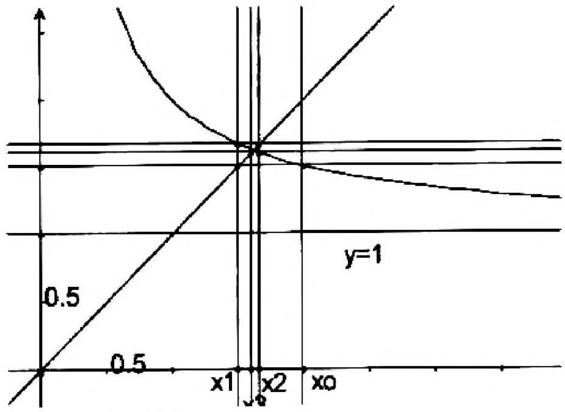
1) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$

x	0	$+\infty$
f'(x)	-	
f(x)	$+\infty$ $\searrow$	1

f est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ d'où

$f(]0,+\infty[) = \left]\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{0^+} f\right[=]1,+\infty[$

2)



3) $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$f(\varphi) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 1 + \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}$

$= 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$

4) $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

a) $x_1 = f(x_0) = f(2) = \frac{3}{2}$

$x_2 = f(x_1) = f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{3}$

$x_3 = \frac{8}{5}$; $x_4 = \frac{13}{8}$

b) par reccurence

* $U_0 = 2 \in \mathbb{Q}_+$ (vrai)

* supposons que $x_n \in \mathbb{Q}_+$,

montrons que $x_{n+1} \in \mathbb{Q}_+$

$x_{n+1} = f(x_n) = 1 + \frac{1}{x_n} \in \mathbb{Q}_+$

c) * montrons que : $x_n \in \left[\frac{3}{2},2\right]$;$\forall n \in \mathbb{N}$

* pour n=0 : $x_0=2 \in \left[\frac{3}{2},2\right]$

* supposons que : $x_n \in \left[\frac{3}{2},2\right]$

montrons que : $x_{n+1} \in \left[\frac{3}{2},2\right]$

$x_n \in \left[\frac{3}{2},2\right] \Rightarrow \frac{3}{2} \le x_n \le 2$

$\Rightarrow f(2) \le f(x_n) \le f(\frac{3}{2})$ (car f est décroissante)

$\Rightarrow \frac{3}{2} \le x_{n+1} \le \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} \le x_{n+1} \le 2$

conclusion: $x_n \in \left[\frac{3}{2},2\right]$;$\forall n \in \mathbb{N}$

* $|x_{n+1}-\varphi| = |f(x_n)-f(\varphi)| = \left|1+\frac{1}{x_n}-1-\frac{1}{\varphi}\right|$

$= \left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{\varphi}\right| = \frac{|x_n-\varphi|}{\varphi.x_n}$

comparons $\frac{1}{\varphi.x_n}$ et $\frac{4}{9}$

$x_n \ge \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{x_n} \le \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{\varphi.x_n} \le \frac{2}{3}\times\frac{1}{\varphi}$

$\Rightarrow \frac{1}{\varphi.x_n} \le \frac{\sqrt{5}-1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\varphi.x_n} \le \frac{3(\sqrt{5}-1)}{9} \Rightarrow \frac{1}{\varphi.x_n} \le \frac{4}{9}$

d'où $|x_{n+1}-\varphi| \le \frac{4}{9}|x_n-\varphi|$

d) $|x_1-\varphi| \le \frac{4}{9}|x_n-\varphi|$

$|x_2-\varphi| \le \frac{4}{9}|x_1-\varphi|$

$|x_3-\varphi| \le \frac{4}{9}|x_2-\varphi|$

.

.

$|x_n-\varphi| \le \frac{4}{9}|x_{n-1}-\varphi|$

multiplions membre à membre et simplifions on a :

$|x_n-\varphi| \le (\frac{4}{9})^n |2-\varphi|$

$\lim_{n\to+\infty}(\frac{4}{9})^n=0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(x_n-\varphi)=0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n=\varphi$

EX 21 :

$U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$; $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) $U_1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1$

$U_2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$

$U_3 = U_2+\frac{1}{3^2}=\frac{5}{4}+\frac{1}{9}=\frac{49}{36}$

b) $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{(n+1)^2} \ge 0$

d'où (U_n) est croissante

2) a) $k \ge 2$

$(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})-\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k^2(k-1)} \ge 0$

d'où $\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

b) $n \ge 2$

$k \ge 2$, on a :

$\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \le \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \le 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \le 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow U_n \le 2 - \frac{1}{n}$$

c) (U_n) est croissante et majorée par 2

elle est donc convergente

soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

(U_n) est croissante $\Rightarrow U_n \ge U_3$, pour $n \ge 3$

$$\Rightarrow \frac{49}{36} \le U_n \le 2 - \frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(2-\frac{1}{n})=2$ d'où $\frac{49}{36} \le \ell \le 2$

3) $p \ge 3$

$V_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$; $n \ge 1$

a) $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{(n+1)^p} \ge 0$ d'où (V_n) est croissante

b) pour $k \ge 1$ on a :

$$k^{p-2} \ge 1 \Rightarrow k^p \ge k^2 \Rightarrow \frac{1}{k^p} \le \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \Rightarrow V_n \le U_n$$

c) $V_n \le U_n$ et $U_n \le 2$ d'où $V_n \le 2$

(V_n) est croissante et majorée par 2

elle est donc convergente

soit ℓ' : sa limite

$V_n \le 2 \quad \Rightarrow \ell' \le 2$

d) p=3

$$V_1 = \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k^3} = 1$$

$$V_2 = \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k^3} = \frac{9}{8}$$

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{3^3} = \frac{9}{8} + \frac{1}{27} = \frac{61}{54}$$

pour $n \ge 3$

$$V_3 \le V_n \le 2 \Rightarrow \frac{61}{54} \le V_n \le 2$$

$$\Rightarrow \frac{61}{54} \le \ell' \le 2$$

EX 22 :

$n \in \mathbb{N}^*$

1) $U_n = \dfrac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}$

a) $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{2n+1}{2(n+1)} \le 1$ car $2n+1 \le 2n+2$

(U_n) est à termes positifs et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \le 1 \Rightarrow U_{n+1} \le U_n$

d'où (U_n) est décroissante

b) il est clair que : $U_n \ge 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(U_n) est décroissante et minorée par 0.

elle est donc convergente $U_n \ge 0 \to \ell \ge 0$

2) $V_n = \dfrac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{3\times5\times\ldots\times(2n+1)}$

a) $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{2(n+1)}{2n+3} \le 1$

$V_n > 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ d'où $V_{n+1} \le V_n$

(V_n) est décroissante

c) (V_n) décroissante et minorée par 0 ,

elle est donc convergente $V_n \ge 0 \to \ell' \ge 0$

3) $W_n = U_n.V_n$

a) (W_n) converge vers $\ell \times \ell'$

b) $W_n = \dfrac{1}{2n+1}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \ell \times \ell'$

$\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1} = 0$

d'où $\ell \times \ell' = 0$

4) a) démonstration par reccurence:

* pour n=1 : $U_1=\frac{1}{2}$ et $V_1=\frac{2}{3}$; $U_1<V_n$ (vrai)

* supposons que $U_n<V_n$

montrons que : $U_{n+1}<V_{n+1}$

d'aprés 1) a) et 2) a) , on a :

$$U_{n+1}=\frac{2n+1}{2(n+1)}.U_n$$

$$V_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2n+3}.V_n$$

$$\frac{2n+1}{2(n+1)}-\frac{2(n+1)}{2n+3}=\frac{-1}{2(n+1)(2n+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{2(n+1)}<\frac{2(n+1)}{2n+3}\Rightarrow \frac{2n+1}{2(n+1)}.U_n<\frac{2(n+1)}{2n+3}.V_n$$

$\Rightarrow U_{n+1}< V_{n+1}$

conclusion : $U_n<V_n$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

b) $0<U_n<V_n \Rightarrow 0\leq \ell\leq \ell'$ or $\ell\times\ell'=0$

$\Rightarrow 0\leq \ell^2\leq \ell\times\ell' \Rightarrow 0\leq \ell^2\leq 0 \Rightarrow \ell=0$

c) de la même maniére que 4) a)

d) $2U_{n+1}>V_n \Rightarrow 2\ell\geq \ell'\geq 0$

$\Rightarrow 0\leq \ell'^2\leq 2\ell\ell' \Rightarrow 0\leq \ell'^2\leq 0\Rightarrow \ell'=0$

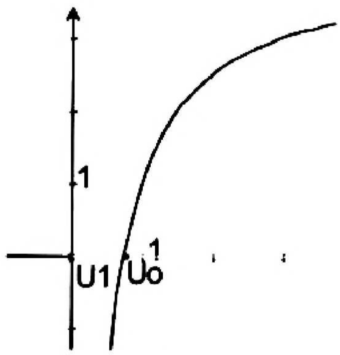
EX 23 :

$x\in\left]0,+\infty\right[$

1) $f(x)=4-\frac{3}{x}$

$f'(x)=\frac{3}{x^2}>0$

x	0	+∞
f'(x)	+	
f(x)	-∞ ↗	4



2) $\begin{cases} U_0=\frac{3}{4} \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$; $n\in\mathbb{N}$

a) $U_1=f(U_0)=f(\frac{3}{4})=0$

b) $U_2=f(U_1)=f(0)$ n'existe pas

d'où (U_n) n'est pas définie

3) $\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

a) $U_1=f(U_0)=3$; $U_2=3$; $U_3=3$

b) •pour n=0 on a $U_0=3$

• supposons que $U_n=3$

montrons que : $U_{n+1}=3$

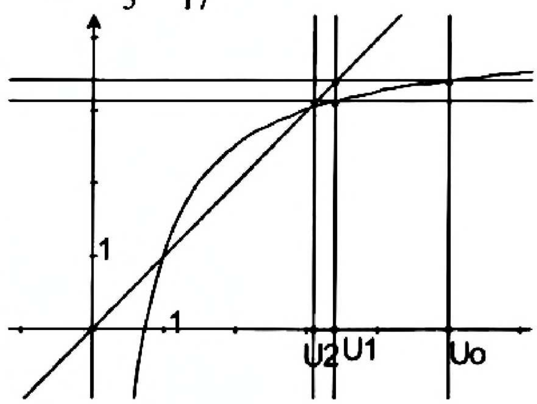
$U_{n+1}=f(U_n)=f(3)=3$

d'où : $U_n=3$; $\forall n\in\mathbb{N}$

4) $\begin{cases} U_0=5 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

a) $U_1=f(5)=17/5$

$U_2=f(\frac{17}{5})=\frac{53}{17}$



b) montrons que : $U_n \geq 3$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

• $U_1 = \frac{17}{5} > 3$ (vrai)

• supposons que : $U_n \geq 3$

montrons que $U_{n+1} \geq 3$

$U_n \geq 3 \Rightarrow f(U_n) \geq f(3)$ (car f est croissante)

$\Rightarrow U_{n+1} \geq 3$

conclusion : $U_n \geq 3$; $\forall n \in \mathbb{N}$

* $U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n - 3}{U_n} - U_n = \frac{-U_n^2 + 4U_n - 3}{U_n}$

$= \frac{-(U_n - 1).(U_n - 3)}{U_n}$

$U_{n+1} - U_n \leq 0$ car $U_n \geq 3$

d'où (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est décroissante et minorée par 3

donc elle est convergente

soit $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$U_n \geq 3 \Rightarrow \alpha \geq 3$

f est continue sur $[3, +\infty[$

d'où $\alpha = f(\alpha)$

$\alpha = f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 = 4\alpha - 3 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = 3$

or $\alpha \geq 3 \Rightarrow \alpha = 3$

d) $U_n - 3 \leq 10^{-5}$ (pour $n \geq ?$)

EX 24 :

1) $\begin{cases} U_n = \frac{2}{n} \\ V_n = \frac{-3}{n} \end{cases}$ $n \geq 2$

* $V_n < 0$ et $U_n > 0 \Rightarrow V_n \leq U_n$

* $V_{n+1} - V_n = \frac{-3}{n+1} + \frac{3}{n} = \frac{3}{n(n+1)} \geq 0$

$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{-2}{n(n+1)} \leq 0$ $\Rightarrow$

on a : (V_n) est croissante

(U_n) est décroissante

* $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$

d'où (U_n) et (V_n) sont adjacentes

2) $\begin{cases} U_n = \frac{n+2}{n-1} \\ V_n = \frac{2n+3}{2n+5} \end{cases}$ $(n \geq 4)$

* $U_n - V_n = \frac{8n+13}{(n-1)(2n+5)} \geq 0$

d'où $V_n \leq U_n$

• (V_n) est croissante

(U_n) est décroissante

• $\lim (U_n - V_n) = 0$

d'où (U_n) et (V_n) sont adjacentes

3) $\begin{cases} U_n = \sin(\frac{1}{n}) \\ V_n = \cos(\frac{1}{n}) - 1 \end{cases}$; $n \geq 2$

pour $n \geq 2$, on a : $\frac{1}{n} \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin\frac{1}{n} \geq 0 \Rightarrow U_n \geq 0$

* $\cos\frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow V_n \leq 0$

d'où $V_n \leq U_n$

* $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \sin\frac{1}{n+1} \leq \sin\frac{1}{n} \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$

(U_n) est croissante

d'où (U_n) et (V_n) ne sont pas adjacentes

4) $\begin{cases} U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \\ V_n = 2 + \frac{3}{n} \end{cases}$ $(n \geq 2)$

$U_n = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right] = 2-(\frac{1}{2})^n$

* on a : $U_n \leq V_n$ (1)

* $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^{n+1}} \geq 0$

$\begin{cases} (U_n) \text{ est croissante} \\ (V_n) \text{ est décroisante} \end{cases}$ (2)

* $\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} + (\frac{1}{2})^n = 0$ (3)

conclusion : (U_n) et (V_n) sont adjacentes

5) * $U_n \geq 0$ et $V_n \leq 0$ d'où $V_n \leq U_n$

* $U_{n+1} - U_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 0$

d'où (U_n) est décroissante

$V_n = -U_n \rightarrow (V_n)$ est croissante

* $\lim_{n\to+\infty} U_n - V_n = \lim_{n\to+\infty} 2U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$

conclusion : (U_n) et (V_n) sont adjacentes

EX 25 :

$\begin{cases} U_0 = 12 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$

1) * pour n=0 ,on a : $U_0 \geq V_0$

* supposons que : $U_n \geq V_n$

montrons que $U_{n+1} \geq V_{n+1}$

$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{U_n - V_n}{12} \geq 0$ d'où $U_{n+1} \geq V_{n+1}$

conclusion : $U_n \geq V_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

2) * $U_{n+1} - U_n = \frac{V_n - U_n}{3} \leq 0 \rightarrow (U_n)$ est décroissante

* $V_{n+1} - V_n = \frac{U_n - V_n}{4} \geq 0 \rightarrow (V_n)$ est croissante

* on pose : $W_n = U_n - V_n$

$W_{n+1} = \frac{1}{12} W_n$ (d'aprés 1))

(W_n) est gémometrique de raison $\frac{1}{12}$

d'où $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$

conclusion : * $V_n \leq U_n$

* (V_n) croissante et (U_n) décroissante

* $\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$

d'où (U_n) et (V_n) sont adjacentes

par suite (U_n) et (V_n) convergent vers la meme limite

3) $t_n = 3U_n + 8V_n$

a) $t_{n+1} = 3U_{n+1} + 8V_{n+1} = (U_n + 2V_n) + 2(U_n + 3V_n)$

$= 3U_n + 8V_n = t_n$

d'où (t_n) est constante

b) $t_0 = 3U_0 + 8V_0 = 44$ d'où $3U_n + 8V_n = 44$

$\xrightarrow{\text{passage aux limites}} 3\alpha + 8\alpha = 44 \Rightarrow \alpha = 4$

EX 26 :

a>0

$b_n = \frac{n}{(1+a)^n}$; $n \in \mathbb{N}$

1) $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k$

$\Rightarrow (1+a)^n \geq C_n^2 a^2 \Rightarrow (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)a^2}{2}$

2) pour $n \geq 2$

$$\frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{n(n-1)a^2} \Rightarrow \frac{n}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{(n-1)a^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq b_n \leq \frac{2}{(n-1)a^2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{(n-1)a^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \to +\infty} b_n = 0$$

3) (x_n) suite géometrique de premier terme x_0

de raison $q \in]-1,1[$

1^{er} *cas* : $q=0$ ou $x_0 = 0$

$|x_n| = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow n|x_n| = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n|x_n| = 0$$

2^{eme} *cas* : $q \neq 0$ et $x_0 \neq 0$

$$|x_n| = |x_0|.|q|^n$$

soit $a = \frac{1-|q|}{|q|} > 0 \Rightarrow q = \frac{1}{1+a}$

$$d'où \ |x_n| = \frac{|x_0|}{(1+a)^n} \Rightarrow n|x_n| = |x_0| b_n$$

$\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$ d'où : $\lim_{n \to +\infty} n|x_n| = 0$

par suite : $\lim_{n \to +\infty} (n.x_n) = 0$

4) la suite $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ est géometrique

de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1,1[$

d'où $\lim_{n \to +\infty} (n.x_n) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0$$

* $x_n = (\frac{-1}{3})^{n+2}$

(x_n) est géometrique de raison $q = \frac{-1}{3} \in]-1,1[$

d'où $\lim_{n \to +\infty} (n.x_n) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n.(\frac{-1}{3})^{n+2} = 0$$

* $(n+1)(\frac{-1}{\sqrt{2}})^n = n.(\frac{-1}{\sqrt{2}})^n + (\frac{-1}{\sqrt{2}})^n$

$$\lim_{n \to +\infty} (\frac{-1}{\sqrt{2}})^n = 0$$

$$x_n = (\frac{-1}{\sqrt{2}})^n$$

(x_n) est géometrique de raison $q = \frac{-1}{\sqrt{2}} \in]-1,1[$

d'où $\lim_{n \to +\infty} (n.x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n.(\frac{-1}{\sqrt{2}})^n = 0$

par suite : $\lim_{n \to +\infty} (n+1)(\frac{-1}{\sqrt{2}})^n = 0$

EX 27 :

$n > 1$; $x \in \mathbb{R}^*$

1) soit $W_n = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

(W_n) est géometrique de raison x de premier terme $W_0 = 1$

$$d'où \sum_{k=1}^{n} W_k = W_0(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

2) on pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k$

$$g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$f_n(x) = g_n(x) \Rightarrow f_n'(x) = g_n'(x)$$

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n$$

$$f_n'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + n.x^{n-1}$$

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k.x^{k-1}$$

$$g_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$g_n'(x) = \frac{n.x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

d'où le résultat

3) a) $U_n = \sum_{k=1}^{n+1} k.(5/3)^{k-1}$

$\frac{5}{3} \notin]-1,1[$

le résultat du 2) est vrai pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$

$$U_n=\frac{(n+1)(\frac{5}{3})^{n+2}-(n+2)(\frac{5}{3})^{n+1}+1}{(1-\frac{5}{3})^2}$$

$$U_n=\frac{-3}{2}.(\frac{5}{3})^{n+1}.\left[\frac{5(n+1)}{3}-(n+2)+(\frac{3}{5})^n\right]$$

$$U_n=\frac{9}{4}(\frac{5}{3})^{n+1}.\left[\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}+(\frac{3}{5})^n\right]$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{3}{5})^n=0$ car $\frac{3}{5}\in\left]-1,1\right[$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{5}{3})^{n+1}=+\infty$ car $\frac{5}{3}>1$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$

b) $V_n=2\sum\limits_{k=1}^{n+1}k(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{k-1}$

d'où :

$$V_n=2.\left(\frac{(n+1)(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n+2}-(n+2)(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n+1}+1}{(1+\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n+2}=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n+1}=0$

d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\frac{2}{(1+\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$

EX 28 :

$0<a<b$

$$\begin{cases}U_1=a+b\\ U_{n+1}=a+b-\frac{ab}{U_n}\end{cases}\quad n\geq 1$$

1) $U_2=a+b-\frac{ab}{U_1}=(a+b)-\frac{ab}{a+b}$

$$U_2=\frac{(a+b)^2-ab}{a+b}=\frac{a^2+b^2+ab}{a+b}$$

$$U_2=\frac{(b-a)(a^2+b^2+ab)}{(b+a)(b-a)}=\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}$$

2) • $U_1=a+b$

$$\frac{b^{0+2}-a^{0+2}}{b^{0+1}-a^{0+1}}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)}=b+a=U_1$$

• supposons que : $U_{n+1}=\frac{b^{n+2}-a^{n+2}}{b^{n+1}-a^{n+1}}$

montrons que : $U_{n+2}=\frac{b^{n+3}-a^{n+3}}{b^{n+2}-a^{n+2}}$

$$U_{n+2}=(a+b)-\frac{ab}{U_{n+1}}=(a+b)-\frac{ab}{\frac{b^{n+2}-a^{n+2}}{b^{n+1}-a^{n+1}}}$$

$$=(a+b)-\frac{ab(b^{n+1}-a^{n+1})}{b^{n+2}-a^{n+2}}$$

$$=\frac{(a+b)(b^{n+2}-a^{n+2})-ab(b^{n+1}-a^{n+1})}{b^{n+2}-a^{n+2}}$$

$$U_{n+2}=\frac{a.b^{n+2}-a^{n+3}+b^{n+3}-b.a^{n+2}-a.b^{n+2}+b.a^{n+2}}{b^{n+2}-a^{+2}}$$

$$=\frac{b^{n+3}-a^{n+3}}{b^{n+2}-a^{n+2}}$$

conclusion : $U_{n+1}=\frac{b^{n+2}-a^{n+2}}{b^{n+1}-a^{n+1}}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

3) pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$U_n=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b^n-a^n}=\frac{b-a.(\frac{a}{b})^n}{1-(\frac{a}{b})^n}$$

$\frac{a}{b}\in\left]-1,1\right[$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{a}{b})^n=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=b$

EX 29 :

$$\begin{cases}a_0 \text{ donné}\\ a_{n+1}=a_n^2+a_n\end{cases}$$

1) $a_{n+1}-a_n=a_n^2\geq 0$

d'où (a_n) est croissante

2) si $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

$a_{n+1}=a_n^2+a_n\Rightarrow\ell=\ell^2+\ell$

$\Rightarrow\ell^2=0\Rightarrow\ell=0$

3) lorsque $a_0 > 0$

(a_n) est croissante $\Rightarrow a_n \geq a_0$

supposons que (a_n) converge vers un réel ℓ

on aura : $\ell \geq a_0 \Rightarrow \ell > 0$

(contradiction avec le résultat du 2))

d'où (a_n) est divergente

4) $a_1 = a_0^2 + a_0 = a_0(a_0+1)$

$a_0 < -1 \Rightarrow a_0 + 1 < 0 \Rightarrow a_0(a_0+1) > 0$

$\Rightarrow a_1 > 0$

(a_n) est croissante

$\Rightarrow a_n \geq a_1$ pour $n \geq 1$

supposons que (a_n) converge vers ℓ

on aura : $\ell \geq a_1 \Rightarrow \ell > 0$

(contradiction avec le résultat du 2))

d'où (a_n) est divergente

5)

$-1 < a_0 < 0$

a) démonstration par reccurence :

* $-1 < a_0 < 0$ (vrai)
* supposons que : $-1 < a_n < 0$

montrons que : $-1 < a_{n+1} < 0$

* $a_{n+1} = a_n.(a_n+1) < 0$ car $-1 < a_n < 0$
* $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1 = (a_n+1)^2 - a_n > 0$ car $a_n < 0$

d'où $a_{n+1} > -1$

par suite : $-1 < a_{n+1} < 0$

conclusion : $-1 < a_{n+1} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) (a_n) est croissante et majorée par 0, elle est donc convergente

soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

$-1 < a_n < 0 \Rightarrow -1 \leq \ell \leq 0$

$a_{n+1} = f(a_n)$ avec $f(x) = x^2 + x$

f est continue sur $[-1,0]$ d'où $\ell = f(\ell)$

$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell^2 + \ell = \ell \Leftrightarrow \ell = 0$

(*Rq* : ou bien directement (a_n) converge vers 0 d'aprés 2))

6) a) $a_0 = 0$

$a_n = 0 \;;\; \forall n \in \mathbb{N}$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

b) $a_0 = -1$

$a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

EX 30 :

$$\begin{cases} U_0 = 0{,}1 \\ U_{n+1} = 1{,}6U_n.(1-U_n) \end{cases}$$

1) $f(x) = 1{,}6.x.(1-x)$

$f'(x) = 1{,}6.[1-2x]$

x	$-\infty$	½	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$ ↗	0,4	↘ $-\infty$

2) * pour n=0, on a : $0{,}1 \leq U_0 = 0{,}1 < \frac{3}{8}$

* supposons que : $0{,}1 \leq U_n \leq \frac{3}{8}$

montrons que : $0{,}1 \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{8}$

$0{,}1 \leq U_n \leq \frac{3}{8} \Rightarrow f(0{,}1) \leq f(U_n) \leq f(\frac{3}{8})$

(car f est croissante sur $\left[(0{,}1);\frac{3}{8}\right]$

$\Rightarrow 0{,}144 \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{8}$

$\Rightarrow 0{,}1 \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{8}$

conclusion : $0{,}1 \leq U_n \leq \frac{3}{8} \;;\; \forall n \in \mathbb{N}$

3) $U_{n-1}-U_n=U_n[1,6-1,6U_n-1]=U_n.[0,6-1,6U_n]$

$=\frac{U_n}{10}[6\text{-}16U_n]=\frac{8}{5}U_n.\left[\frac{3}{8}-U_n\right]$

$U_{n-1}-U_n\geq 0$ car $0,1\leq U_n\leq\frac{3}{8}$

d'où (U_n) est croissante

(U_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{8}$

elle est donc convergente

4) a) $1,6.(\frac{5}{8}-U_n)(\frac{3}{8}-U_n)=1,6.\left[\frac{15}{64}-U_n+U_n^2\right]$

$=\frac{16}{10}\times\frac{15}{64}-(1,6)(U_n-U_n^2)=\frac{3}{8}-(1,6)U_n(1-U_n)$

$=\frac{3}{8}-U_{n+1}$

b) $V_n=\frac{3}{8}-U_n$

* $V_n\geq 0$ car $U_n\leq 3/8$

* d'après 4) a) : $V_{n+1}=1,6(\frac{5}{8}-U_n).V_n$

$\frac{V_{n+1}}{V_n}=(1,6)(\frac{5}{8}-U_n)$

$U_n\geq 0,1\Rightarrow -U_n\leq\frac{-1}{10}\Rightarrow\frac{5}{8}-U_n\leq\frac{21}{40}$

$\Rightarrow(1,6)(\frac{5}{8}-U_n)\leq\frac{16}{10}\times\frac{21}{40}\Rightarrow\frac{V_{n+1}}{V_n}\leq\frac{4\times 21}{100}$

$\Rightarrow\frac{V_{n+1}}{V_n}\leq 0,84$

c) * $V_0=\frac{3}{8}-U_0=\frac{3}{8}-\frac{1}{10}$

$V_0=\frac{11}{40}$

$0\leq V_0\leq(0,84)^0=1$ (vrai)

* supposons que : $0\leq V_n\leq(0,84)^n$

montrons que : $0\leq V_{n+1}\leq(0,84)^{n+1}$

• $V_{n+1}\geq 0$ d'aprés 4) b)

• $\frac{V_{n+1}}{V_n}\leq 0,84\Rightarrow V_{n+1}\leq(0,84).V_n$

$\Rightarrow V_{n+1}\leq(0,84).(0,84)^n$

d'où $0\leq V_{n+1}\leq(0,84)^{n+1}$

conclusion : $0\leq V_n\leq(0,84)^n$

d) $0\leq V_n\leq(0,84)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(0,84)^n=0$ car $0,84\in]-1,1[$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$

$U_n=\frac{3}{8}\text{-}V_n$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\frac{3}{8}$

c) on a : $0\leq\frac{3}{8}-U_n\leq(0,84)^n$;$\forall n\in\mathbb{N}$

$(0,84)^n\leq 10^{-5}\Rightarrow(\mathit{calculatrice})$ $n_0\geq 67$

EX 31 :

$a>0$

$f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{a}{x})$

1) * $f'(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{a}{x^2})=\frac{1}{2}.\frac{x^2-a}{x^2}$

$=\frac{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}{2x^2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	||	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$-\sqrt{a}$	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$\sqrt{a}$	↗	$+\infty$

2) $\begin{cases} U_0 = E(\sqrt{a})+1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) montrons par reccurence que :

* pour n=0 , $U_0 = E(\sqrt{a})+1 > \sqrt{a}$

* supposons que : $U_n > \sqrt{a}$

montrons que : $U_{n+1} > \sqrt{a}$

$U_n > \sqrt{a} \Rightarrow f(U_n) > f(\sqrt{a})$

(car f est strictement croissante sur $\left[\sqrt{a};+\infty\right[$)

$\Rightarrow U_{n+1} > \sqrt{a}$

conclusion : $U_n > \sqrt{a}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

* $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n + \frac{a}{U_n}) - U_n$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{a}{U_n} - U_n\right] = \frac{1}{2}\frac{a-U_n^2}{U_n} = \frac{(\sqrt{a}-U_n)(\sqrt{a}+U_n)}{2.U_n}$

$U_{n+1} - U_n < 0$ car $U_n > \sqrt{a}$

d'où (U_n) est décroissante

$\Rightarrow U_{n+1} \le U_n \le U_0$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow \sqrt{a} < U_{n+1} < U_n \le U_0$

* (U_n) décroissante et minorée par $\sqrt{a}$

elle est donc convergente

b) $U_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{a}{U_n} - 2\sqrt{a})$

$= \frac{1}{2}(\frac{U_n^2 - 2\sqrt{a}U_n + a}{U_n}) = \frac{(U_n - \sqrt{a})^2}{2.U_n}$

$= \frac{1}{2}(\frac{U_n - \sqrt{a}}{U_n}).(U_n - \sqrt{a}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{a}}{U_n}).(U_n - \sqrt{a})$

$(U_{n+1} - \sqrt{a}) - \frac{1}{2}(U_n - \sqrt{a}) = \frac{1}{2}(U_n - \sqrt{a})\left[1 - \frac{\sqrt{a}}{U_n} - 1\right]$

$= \frac{1}{2}(U_n - \sqrt{a})(\frac{-\sqrt{a}}{U_n}) < 0$ d'après 2) a)

d'où $U_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(U_n - \sqrt{a})$

c)

* pour n=0 $0 < U_0 - \sqrt{a} < (\frac{1}{2})^0.(U_0 - \sqrt{a})$ (*vrai*)

* supposons que : $0 < U_n - \sqrt{a} < (\frac{1}{2})^n.(U_0 - \sqrt{a})$

montrons que : $0 < U_{n+1} - \sqrt{a} < (\frac{1}{2})^{n+1}.(U_0 - \sqrt{a})$

• $U_{n+1} - \sqrt{a} > 0$ d'aprés 2) a)

• $U_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(U_n - \sqrt{a})$ et $U_n - \sqrt{a} < (\frac{1}{2})^n.(U_0 - \sqrt{a})$

$\Rightarrow U_{n+1} - \sqrt{a} < (\frac{1}{2})^{n+1}.(U_0 - \sqrt{a})$

d'où $0 < U_{n+1} - \sqrt{a} < (\frac{1}{2})^{n+1}.(U_0 - \sqrt{a})$

conclusion : $0 < U_n - \sqrt{a} < (\frac{1}{2})^n.(U_0 - \sqrt{a})$

d) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n.(U_0 - \sqrt{a}) = 0$

d'où $\lim_{n\to+\infty}(U_n - \sqrt{a}) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{a}$

EX 32 :

$0<b<a$

1) a) $(\frac{a+b}{2})^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2ab)$

$(\sqrt{ab})^2 = a.b$

$(\frac{a+b}{2})^2 - (\sqrt{ab})^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab)$

$= \frac{1}{4}(a-b)^2 \ge 0$

d'où $(\frac{a+b}{2})^2 \ge (\sqrt{ab})^2$

par suite $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

b) $(a-b)^2 - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2 - 2ab - a^2 + b^2$

$= 2b^2 - 2ab = 2b.(b-a) \le 0$ (car $0<b<a$)

d'où $(a-b)^2 \le a^2 - b^2$

2) $\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$

a) * pour n=0

$b_0 = b \leq a_0 = a$

* supposons que : $b_n \leq a_n$

montrons que : $b_{n+1} \leq a_{n+1}$

$b_{n+1} \leq a_{n+1}$ d'après 1) a)

conclusion : $b_n \leq a_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

b)* $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 0$

d'où (a_n) est décroissante

* $b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}\left[\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right]$

$b_{n+1} - b_n \geq 0$ car $\sqrt{a_n} \geq \sqrt{b_n}$

d'où (b_n) est croissante

3) a) d'après 1) b) : $(a_{n+1} - b_{n+1})^2 \leq a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2$

$\Rightarrow (a_{n+1} - b_{n+1})^2 \leq \frac{(a_n + b_n)^2}{4} - a_n b_n$

$\Rightarrow (a_{n+1} - b_{n+1})^2 \leq \frac{a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n}{4} - a_n b_n$

$\Rightarrow (a_{n+1} - b_{n+1})^2 \leq \frac{a_n^2 + b_n^2 - 2a_n b_n}{4}$

$\Rightarrow (a_{n+1} - b_{n+1})^2 \leq (\frac{a_n - b_n}{2})^2$

b) * pour n=0

$a_0 - b_0 = a - b \leq \frac{a-b}{2^0}$ (vrai)

* supposons que : $a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$

montrons que : $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a-b}{2^{n+1}}$

on a : $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a_n - b_n}{2}$ or $a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$

d'où $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a-b}{2^{n+1}}$

conclusion : $a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

4) * $b_n \leq a_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

* (b_n) est croissante et (a_n) décroissante

* $0 \leq a_n - b_n \leq (\frac{1}{2})^n.(a-b)$

$\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n.(a-b) = 0$ d'où $\lim_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0$

d'où (a_n) et (b_n) sont adjacentes

par suite, elles convergent vers la meme limite α

5) (a_n) est décroissante

$\Rightarrow a_n \leq a_0 \Rightarrow a_n \leq a$;$\forall n \in \mathbb{N}$

on a : $b_n \leq a_n$ d'où $b_n \leq a$

$\left.\begin{array}{l}(b_n) \text{ est croissante et majorée par a} \\ \text{et } (b_n) \text{ converge vers } \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow$

alors $b_n \leq \alpha$;$\forall n \in \mathbb{N}$

de meme : $a_n \geq \alpha$; $\forall n \in \mathbb{N}$

d'où $b_n \leq \alpha \leq a_n$;$\forall n \in \mathbb{N}$

$a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n} \Rightarrow 0 \leq a_n - \alpha \leq \frac{a-b}{2^n}$

pour a=2 et b=1

$0 \leq a_n - \alpha \leq \frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-10} \Leftrightarrow 2^n \geq 10^{10}$

on a : $2^{40} \geq 10^{10} \leftarrow$ (*calculatrice*)

d'où $\alpha \simeq a_{40}$ (à calculer)

QCM :

1. $f(x)=\sin(\pi x^2) \Rightarrow f'(x)=2\pi x.\cos(\pi x^2)$
2. a/ $f(-2)<f(-1)$
   b/ $y=-\frac{1}{2}x$
3. $f([1,+\infty[=[-1,+\infty[$
4. $x = 2$
5. (ζ_f) admet deux tangentes horizontales

VRAI – FAUX :

1. (VRAI) f est continue sur $[-1,2]$ et dérivable sur $]-1,2[$ alors d'après le théorème des accroissement fini il existe au moins un réel $c \in]-1,2[$ tel que $f(2)-f(-1)=f'(c)(2-(-1)) \Leftrightarrow f'(c)=-1$
2. (FAUX)
   Contre exemple : $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x$
   $h(x)=(f.g)(x)=x\sqrt{x}$ h est dérivable en 0 mais f n'est pas dérivable à droite en 0
3. (VRAI)
   $f'(x)=3x^2-6x+2$ $\Delta'=3>0$ alors l'équation $f'(x)=0$ admet deux solutions distinctes (Rq :on pourra utiliser le th acc fini)
4. (vrai) f est dérivable sur $[2,5]$ et $|f'(t)|\le 2\ \forall t\in[2,5]$ alors d'après le th des inégalités des Accroissement finis :
   $$|f(5)-f(2)|\le 2\times(5-2) \Rightarrow$$
   $$|f(5)-f(2)|\le 6$$

EX 1 :

1. $f(x)=(x-1)^2.(x-3)$
   $f'(x)=2.(x-1).(x-3)+(x-1)^2$
   $f'(2)=-1$ et $f(2)=-1$
   $T : y=-1.(x-2)+(-1)$
   $T : y=-x+1$
2. $f(x)=\frac{2x^4}{(x+2)^2}$ $f'(x)=\frac{4x^4+16x^3}{(x+2)^3}$
   $f(-1)=2$ et $f'(-1)=-12$
   $T : y=-12(x+1)+2$
   $T : y=-12x-10$
3. $f(x)=x.(2\sqrt{x}-3) \Rightarrow$
   $f'(x)=2\sqrt{x}-3+\sqrt{x}=3\sqrt{x}-3$
   $f(4)=4$ et $f'(4)=3$
   $T : y=3x-8$
4. $f(x)=\cos^3(x)+\sin(x)$
   $f'(x)=-3\sin(x)\cos^2(x)+\cos(x)$
   $f'(\frac{\pi}{6})=\frac{4\sqrt{3}-9}{8}$ et $f(\frac{\pi}{6})=\frac{4+3\sqrt{3}}{8}$
   $T: y=\left(\frac{4\sqrt{3}-9}{8}\right).(x-\frac{\pi}{6})+\frac{4+3\sqrt{3}}{8}$

EX 2: Soit $f(x)=\frac{1}{x^2} \to f'(x)=\frac{-2}{x^3}$

f est dérivable en 1et $f'(1)=-2$

$f(1)+f'(1).h$ est une approximation de $f(1+h)$ Donc

$1-2h$ est une approximation de $\frac{1}{(1+h)^2}$

*$1-2.(2.10^{-10})=0,0000000006$ est une approximation de

$$\frac{1}{(1,0000000002)^2}=\frac{1}{(1+2.10^{-10})}$$

* même travail pour $h=-2.10^{-10}$ donne $1,0000000004$ est une approximation de

$$\frac{1}{0,9999999996}$$

EX 3 :

1. $f(x)= 3x^{10}-\frac{5}{4}x^8+3x-10$ f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur IR et $f'(x)=30x^9-10x^7+3$
2. $f(x)=(1-x-3x^3)(x^2+2x)^3$ f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur IR et
$f'(x)= (-1-9x^2)(x^2+2x)^3+ 3(2x+2)(x^2+2x)^2(1-x-3x^3)$
(à simplifier …)
3. $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$ Comme étant fonction rationnel f est dérivable sur D_f =IR\{1} et en particulier sur]1,+∞[
$f'(x)=\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$
4. $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2}$ Comme étant fonction rationnel f est dérivable sur D_f =IR* et en particulier sur [1,+∞[
$f'(x) = 1-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}=\frac{x^3-3x-2}{x^3}$
5. les fonctions $x\mapsto\cos(3x)$ *et* $x\mapsto\sin(2x)$ sont dérivables sur IR d'où f est dérivable sur IR et
$f'(x)= -3\sin(3x)-2\cos(2x)$
6. $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ La fonction $x\mapsto 1-\cos x$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]0,\pi[$ donc f est dérivable sur $]0,\pi[$ comme étant le quotient de deux fonctions dérivables
$f'(x) = \frac{-1}{1-\cos x}$
7. $f(x)= (1+\sin(2x))^3$ f est dérivable sur IR comme étant la puissance d'une fonction dérivable
$f'(x)= 6\cos(2x).[1+\sin(2x)]^2$
8. $f(x)=\tan^2(\frac{\pi}{2}x)$
la fonction u: $x\mapsto\frac{\pi}{2}x$ est dérivable sur [0,1[et $u([0,1[)= [0,\frac{\pi}{2}[$ et comme la fonction tangente est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}$
Alors f est dérivable sur [0,1[comme étant la composé de deux fonctions dérivables et
$f'(x)=2.tg(\frac{\pi}{2}x).[\frac{\pi}{2}.(1+\tan^2(\frac{\pi}{2}x))]$
$= \pi.tg(\frac{\pi}{2}x).[1+\tan^2(\frac{\pi}{2}x)]$
9. $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
la fonction $x\mapsto\frac{x-1}{x+1}$ est dérivable et strictement positive sur]1,+∞[donc f est dérivable sur]1,+∞[comme étant la composé de deux fonctions dérivables et
$f'(x)= \frac{1}{(x+1).\sqrt{x^2-1}}$
10. $x\mapsto\sqrt{x}-2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
$x\mapsto\sqrt{x}+2$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme étant le quotient de deux fonctions dérivables et

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+2)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}.(\sqrt{x}+2)^2}$$

EX 4 :

1. $f(x)= x^5-2x^3 +4$
   $f'(x)= 5x^4 -6x^2$
   $f''(x)=20x^3 -12x$
   $f^{(3)}(x) =60x^2-12$
   $f^{(4)}(x) = 120 x$
   $f^{(5)}(x)=120$
   $f^{(n)}(x)=0$ pour $n>5$
2. $f(x) = \cos x$
   $f'(x)=-\sin x$
   $f''(x) = - \cos x$
   $f^{(3)}(x) = \sin x$

   $f^{(2n)}(x)=(-1)^n.\cos x$
   $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} .\sin x$
   (on peut faire une démonstration par récurrence)
3. $f(x)= \sin (2x)$

   $f^{(2n)} (x)= (-1)^n.2^{2n} .\sin (2x)$
   $f^{(2n+1)} (x)= (-1)^n.2^{2n+1} .\cos (2x)$

EX 5 : $f(x) = a.x^3 +b.x^2+c.x + d$

$f'(x) = 3a .x^2 +2b.x +c$
$f''(x) = 6a.x +2b$
$f'''(x) =6a$

$f(1)=f'(1)=f''(1)=f'''(1)=1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 3a+2b+c=1 \\ 6a+2b=1 \\ 6a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=0 \\ c=\frac{1}{2} \\ d=\frac{1}{3} \end{cases}$$

D'où $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

EX 6

1. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $g(x) = \frac{1}{x+1}$
   $f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}$ $g^{(3)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$
2. a/ $h(x)=\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1})$
   $(a=b=\frac{1}{2})$

   b/
   $$h^{(3)}(x) = \frac{1}{2}\left[g^{(3)}(x) + f^{(3)}(x)\right]$$
   $$= -3\left[\frac{1}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x+1)^4}\right]$$

EX 7: $f(2)=0$; $f'(2)=3$

1. Soit $h(x)= f(\sqrt{2+x})$ h est dérivable sur $]-2,+\infty[$ comme étant composée de fonctions dérivables et

$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}.f'(\sqrt{2+x})$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(\sqrt{2+x})}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{h(x)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} \quad car\ h(2)=0$$
$$= h'(2) = \frac{1}{4} f'(2) = \frac{3}{4}$$

2. Soit les fonctions $U(x)=2\sin(\frac{\pi x}{4})$ et

$t(x)=f(U(x))$ t est dérivable sur IR comme étant composée de fonctions dérivables et

$t'(x)=U'(x).f'(U(x))=\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x}{4}).f'(U(x))$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(2\sin(\frac{\pi x}{4}))}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{t(x)-t(2)}{x-2} = t'(2)$$
$$= \frac{\pi}{2}.\cos\frac{\pi}{2}\ .f'(2) = 0$$

3. Soit la fonction g(x)= sin(f(x))
g est dérivable sur IR comme étant composée de fonctions dérivables et g'(x)= f'(x).cos (f(x))

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(f(x))}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\quad car\ g(2)=0$$
$$=g'(2)=f'(2).\cos(f(2))$$
$$=3.\cos(0)=3$$

4. Soit la fonction $k(x)=f(x^2+x+2)$
k est dérivable sur IR comme étant composée de fonctions dérivables et
$k'(x)=(2x+1).f'(x^2+x+2)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2+x+2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{k(x)-k(0)}{x-0}\quad car\ k(0)=0$$
$$=k'(0)=f'(2)=3$$

EX 8 :

1. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$; $I=]0,+\infty[$
la fonction $x\mapsto x+\sqrt{x}$ est dérivable et strictement positive sur I d'où f est dérivable sur I

$$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$
$$=\frac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}.\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

2. La fonction : $x\mapsto \sin x$ est dérivable et strictement positive sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ d'où f est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et $f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

3. La fonction : $x\mapsto\frac{\pi}{x}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et comme la fonction sinus est dérivable sur IR Alors f est dérivable sur $[1,+\infty[$
et $f'(x)=\frac{-\pi}{x^2}.\cos(\frac{\pi}{x})$

4. f(x)= tg(sin(x))
La fonction sinus est dérivable sur IR et $\forall x\in IR;\ \sin(x)\in[-1,1]$; comme la fonction tangente est dérivable sur [-1,1]
Alors f est dérivable sur IR et
$f'(x)=\cos(x).[1+tg^2(\sin(x))]$

EX 9 : $f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$

1. $f'(x)=1+2x+3x^2+4x^3$
$f''(x)=2+6x+12x^2\geq 0\ \forall x\in\left[0,\frac{1}{10}\right]$
d'où f' est croissante sur $[0,\frac{1}{10}]$ Alors
$$0\leq x\leq\frac{1}{10}\Rightarrow f'(0)\leq f'(x)\leq f'(\frac{1}{10})$$
$$\Rightarrow 1\leq f'(x)\leq 1,234$$
$$\Rightarrow 0\leq f'(x)\leq 1,234$$

2. Soit $x\in[0,\frac{1}{10}]$, f est dérivable sur $[0,x]$ et $0\leq f'(t)\leq 1,234\ \ \forall t\in[0,x]$
Alors d'après th.Ineg.Acc.fini
$$0\leq f(x)-f(0)\leq 1,234.(x-0)$$
$$\Rightarrow\ 1\leq f(x)\leq 1+1,234.x$$
$$1\leq f(0,0000000011)\leq 1+1,234.11.10^{-10}$$

3. $1\leq f(0,0000000011)\leq 1+13,57.10^{-10}$
$$\Rightarrow 1\leq f(0,0000000011)\leq 1,000000001$$

EX 10 : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$; $I=[0,1]$

1. la fonction : $x\to 1+x$ est dérivable et strictement positive sur [0,1] d'où f est dérivable sur [0,1]

$$f'(x)=\frac{-1}{2(1+X)\sqrt{1+X}}=\frac{-1}{2(\sqrt{1+x})^3}$$
$$0\leq x\leq 1\Rightarrow 1\leq 1+x\leq 2$$
$$\Rightarrow 1\leq\sqrt{1+x}\leq\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow 2\leq 2.(\sqrt{1+x})^3\leq 4\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{4\sqrt{2}}\leq\frac{1}{2(\sqrt{1+X})^3}\leq\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$$

2. $x \in [0,1]$

f est dérivable sur $[0,1]$

$|f'(t)| \leq \frac{1}{2}$; $\forall\, t \in [0,1]$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis

$$|f(x) - f(0)| \leq \frac{1}{2}|x-0|$$

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x \leq f(x) - 1 \leq \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{2}x$$

$$d'où\ 1 - \frac{1}{2}x \leq f(x) \quad (1)$$

$$x \geq 0 \Rightarrow 1 + x \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 1 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 1 \ pour\ x \in [O,1]$$

3.

$$\alpha = 0,0000000002 = 2.10^{-10}$$

$$1 - \frac{1}{2}\alpha \leq f(\alpha) \leq 1$$

$$1 - 10^{-10} \leq f(\alpha) \leq 1$$

$$0,999999999 \leq f(\alpha) \leq 1$$

<u>Ex 11</u> :

Soit f(t)= cos(t) f est dérivable sur IR

f'(t) = -sin(t) $\Rightarrow |f'(t)| \leq 1\ \forall t \in IR$

Alors d'après th.In.Ac .finis

Pour tous réels x et y on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq 1.|x-y| \Rightarrow |\cos x - \cos y| \leq |x-y|$$

<u>EX 12</u> :

1. Soit f(t)=sin (t) f est dérivable sur IR et f'(t)= cos (t)

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] On\ a\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(t) = f'(t) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Alors d'après th.Inég.Acc.finis :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.(y-x)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}.(y-x) \leq \sin(y) - \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.(y-x)$$

2. pour x = $\frac{\pi}{6}$ *et* $y = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) \leq \sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{6}) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}.\pi}{24} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{3}.\pi}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$$

EX 13 :

1. *La fonction tg est dérivable et ne s'annule pas sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ d'où

la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{tg(x)}$ est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

*

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{(x-\frac{\pi}{2})tg(x)}$$

$$= \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\cot g(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = (\cot g)'(\frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{-1}{\sin^2(\frac{\pi}{2})} = -1 = f_g'(\frac{\pi}{2})$$

Donc f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$

Conclusion : f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

2.

$* -2 \le f_g'(\frac{\pi}{2}) = -1 \le -1$

$*$ *pour* $x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ $\quad f'(x) = \frac{-(1+tg^2(x))}{tg^2(x)}$

$$f'(x) = -(1+\frac{1}{tg^2(x)})$$

pour $x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ $\quad tg(x) \ge 1 \Rightarrow tg^2(x) \ge 1$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{tg^2(x)} \le 1 \Rightarrow 1 \le 1+\frac{1}{tg^2(x)} \le 2$$

$$\Rightarrow -2 \le -(1+\frac{1}{tg^2(x)}) \le -1$$

$$\Rightarrow -2 \le f'(x) \le -1$$

Conclusion :

$$-2 \le f'(x) \le -1 \quad \textit{pour tout } x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

3. $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ *f est dérivable sur* $\left[\frac{\pi}{4},x\right]$

et $-2 \le f'(t) \le -1 \quad \forall t \in \left[\frac{\pi}{4},x\right]$

Alors d'après th des acc finis :

$$-2(x-\frac{\pi}{4}) \le f(x)-f(\frac{\pi}{4}) \le -(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}-2x \le \frac{1-tg(x)}{tg(x)} \le \frac{\pi}{4}-x$$

EX 14 :

1. a/ $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et h(x)=tg(x)

h est dérivable sur[0,x] et

$h'(x)=1+tg^2x \ge 1$ d'où

$h(x)-h(0) \ge 1.(x-0) \Rightarrow tg(x) \ge x$

b/ $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$; $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x) = \frac{x.\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$$

$$= \frac{\cos(x)}{x^2}(x-tg(x)) \le 0 \textit{ car } x \le tg\, x \textit{ et } \cos x \ge$$

d'où f est décroissante sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

2. a/ h(t)=tg(t) , $h'(t)=\frac{1}{\cos^2(t)}$

pour $t \in [x,y]$ $\cos y \le \cos t \le \cos x$ car la fonction cos est décroissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow \cos^2 y \le \cos^2 t \le \cos^2 x$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \le h'(t) \le \frac{1}{\cos^2 y}$ Alors d'après le th.Inega.Acc.Finis :

$$\frac{1}{\cos^2 x}(y-x) \le h(y)-h(x) \le \frac{1}{\cos^2 y}(y-x)$$

$$\Rightarrow \frac{y-x}{\cos^2 x} \le tg(y)-tg(x) \le \frac{y-x}{\cos^2 y}$$

b/ d'après la question précédente :

pou $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\frac{x-0}{\cos^2 0} \leq tg(x) - tg(0) \leq \frac{x-0}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow x \leq tg(x) \leq \frac{x}{\cos^2 x}$$

c/

$$x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \leq \frac{x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow x.\cos(x) \leq \sin(x) \leq \frac{x}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

3. pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos(x) \leq g(x) \leq \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow$$

$$\cos(x) - 1 \leq g(x) - g(0) \leq \frac{1}{\cos(x)} - 1 \Rightarrow$$

$$-\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) \leq \frac{g(x)-g(0)}{x} \leq \left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$$

$$Or \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) = 0 \quad et \quad \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) \cdot \frac{1}{\cos(x)} = 0$$

$$d'où \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$$

par suite g est dérivable à droite en 0 et $g_d'(0)=0$ donc C_g admet une demi-tangente horizontale à droite au point d'abscisse 0 et comme g est une fonction paire alors g admet aussi une demi-tangente horizontale à gauche au point d'abscisse 0 donc g est dérivable aussi à gauche en 0 et $g_g'(0)=0$

par suite g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$

EX 15 :

1) * f est dérivable sur $]0,1] \Rightarrow$ f est continue sur $]0,1]$ d'où : $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$

* continuité à droite en 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f_d'(0) = 0 = g(0)$$

g est continue à droite en 0 .

Par suite g est continue sur $[0,1]$

2) a) g est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$; $g(0)=g(1)=0$

D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]0,1[$ tq : $g'(c)=0$

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow c.f'(c) - f(c) = 0$$

b) la tangente à (ζ) au point d'abscisse c a pour équation :

T : $y=f'(c).(x-c)+f(c)$

T : $y=f'(c).x+f(c)-f'(c).c$

T : $y=f'(c).x$

$O(0,0) \in T$

EX 16 :

$(P) : y = x^2 + ax + b$

soit $f(x)=x^2+ax+b$

$(\zeta_f)=(P)$

$f'(x)=2x+a$

la tangente (T) à (P) au point d'abscisse $\frac{x_A + x_B}{2}$ a pour coefficient directeur $f'\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) = x_A + x_B + a$

la droite (AB) a pour coeffiscient directeur :

$$\frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = x_A + x_B + a$$

(T) et (AB) ont le meme coefficient directeur

par suite $(T) \parallel (AB)$

EX 17 :

1) $(\zeta_f)\cap(Ox)=\{A,B\}$

Désignons x_1 et x_2 les abscisses respectifs de A et B avec $x_1<_2$.

$f(x_1)=0$; $f(x_2)=0$

f est continue sur$[x_1,x_2]$ dérivable sur $]x_1,x_2[$ et $f(x_1)=f(x_2)=0$

d'après le théorème de Rolle il existe au moins un réel $c\in\,]x_1,x_2[$ tel que : $f'(c)=0$

(ζ_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse c

2) $(\zeta_f)\cap(Ox)=\{A_1,A_2,....,A_n\}$

designons par $x_1,x_2,....,x_n$ les abscisses respectifs de $A_1,A_2,....,A_n$

avec $x_1<x_2<....<x_n$

f est dérivable sur $[x_i,x_{i+1}]$

$f(x_i)=f(x_{i+1})=0$

d'où il existe au moins un réel $c_i\in\,]x_i,x_{i+1}[$

tq $f'(c_i)=0$

par suite l'équation f '(x)=0 admet au moins (n-1) solutions

(ζ) admet au moins (n-1) tangentes horizontales

EX 18 :

f dérivable sur [-2,-1]

f(-2)=f(-1)=0

d'après le théorème de Rolle il existe au moins un réel $c_1\in]-2,-1[$ tq : $f'(c_1)=0$

de même : il existe au moins un réel $x_2\in]-1,1[$ tq $f'(c_2)=0$

et un réel $c_3\in]1,2[$ tq $f'(c_3)=0$

par suite l'équation f'(x)=0 admet au moins trois solutions

EX 19 :

Soit k un entier avec $1\le k\le n$

$f^{(k)}$: la dérivée $k^{ième}$ de f.

montrons par récurrence sur k que :

$f^{(k)}$ s'annule pour (n+1-k) valeurs distincts de [a,b]

* pour k=1 :

f s'annule (n+1) fois d'après l'exercice n°

f' : s'annule n fois

$f^{(1)}$: s'annule pour (n+1-1) valeurs distincts de [a,b] (vrai)

* supposons que $f^{(k)}$ s'annule (n+1-k) fois

* montrons que : $f^{(k+1)}$ s'annule (n-k) fois

D'après l'ex 17 : $f^{(k+1)}=(f^{(k)})'$ s'annule ((n+1-k)-1) fois

$\Rightarrow f^{(k+1)}$ s'annule (n-k) fois

Conclusion : $f^{(k)}$ s'annule au moins pour (n+1-k) valeurs distincts de [a,b]

$\forall k\in\{1,2,...,n\}$

* pour k=n , $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur [a,b]

EX 20 :

1. la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est continue sur IR^*

la fonction sinus est continue sur IR

d'où la fonction $x\mapsto\sin(\frac{1}{x})$ est continue sur IR^*

par suite f est continue sur IR^* comme étant produit des fonctions continues.

*Etude de continuité de f en 0

$$pour\ x\neq0\ on\ a\ \ -1\le\sin(\frac{1}{x})\le1$$

$$\Rightarrow\ -x^2\le f(x)\le x^2$$

$$Or\quad \lim_{x\to0}x^2=\lim_{x\to0}(-x^2)=0$$

$$d'où\ \lim_{x\to0}f(x)=0$$

D'où f est continue en 0

Conclusion : f est continue sur IR

2. a/

$$pour\ \ x\neq0\ \left|\sin(\frac{1}{x})\right|\le1$$

$$\Rightarrow\left|x\sin(\frac{1}{x})\right|\le|x|\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|x|$$

b/ pour $x \neq 0$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |x|$$

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

D'où f est dérivable en 0 ett f'(0)=0

3) a) la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

La fonction : $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur IR

D'où $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est dérivable sur IR*

Par suite f est dérivable sur IR*

Or f est dérivable en 0 ,

d'où f est dérivable sur IR

$$f'(x) = 2x.\sin(\frac{1}{x}) + x^2.\left[\frac{-1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})\right]$$

$$f'(x) = 2x.\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$

b) $n \neq 0$

$$f'(\frac{1}{n\pi}) = \frac{2}{n\pi}.\sin(n\pi) - \cos(n\pi) = -\cos(n\pi) = -(-1)^n$$

$$\left|f'(\frac{1}{n\pi})\right| = 1$$

c) f '(0)=0

Supposons que f ' est continue en 0

Soit la suite $V_n = \left|f'(\frac{1}{n\pi})\right|$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n\pi} = 0$, f ' continue en 0

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = f'(0) = 0$

Or $V_n=1$ daprés b) (absurde)

f ' n'est pas continue en 0

EX 21 :

1)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'(x)		+	||	-	0	+	
f(x)	0	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

2) $$\lim_{x \to (-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to (-2)^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -3$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x - 4) = 0$$

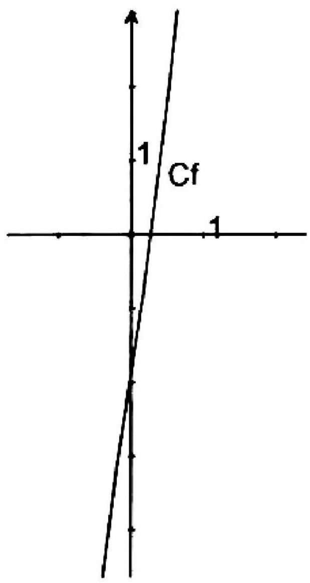
EX 22 : $f(x)=4x^3+6x-2$

f est dérivable sur IR et $f'(x)=12x^2+6>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{4x^3}{x} = \lim_{|x| \to +\infty} 4x^2 = +\infty$$

La courbe de f admet deux branches infinies paraboliques de direction celle de $(O, \vec{j})$



EX 23 :

$f(x)=\dfrac{x^3+2x+2}{2x}$

D_f=IR* , f est dérivable sur IR*

$f'(x)=x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^3-1}{x^2}$

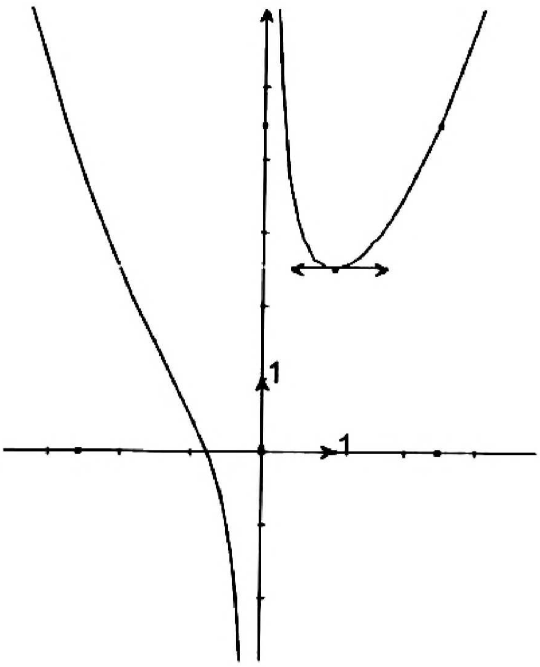
x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f'(x)	-	‖	-	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5/2	↗ $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2}=-\infty$

(ζ_f) admet deux branches paraboliques de direction celle de $(O,\vec{j})$

x=0 est une asymptote à (ζ_f)



EX 24 :

$f(x)=x.(\dfrac{x+1}{x-1})^2$

D_f=IR/{1}

f est dérivable sur IR/{1} (fonction rationnelle)

$f'(x)=\dfrac{(x+1).(x^2-2x-1)}{(x-1)^3}$

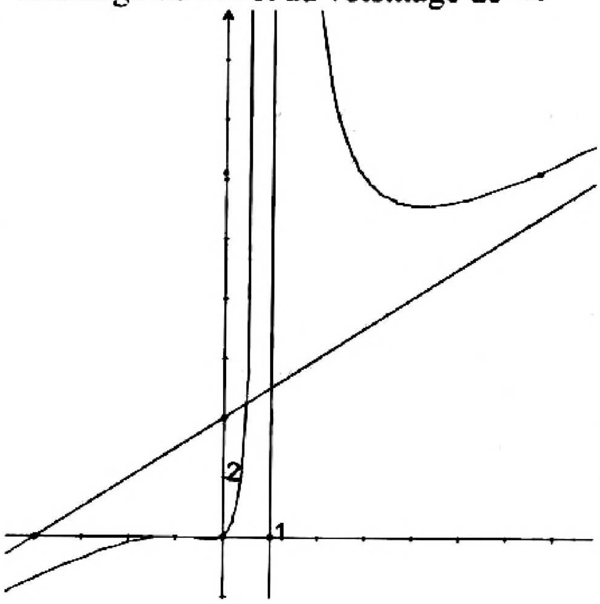
x	$-\infty$	-1		$1-\sqrt{2}$	1		$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	0 +	‖	-	0	+
f(x)	$-\infty$ ↗	0	↘	$7-5\sqrt{2}$ ↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$7+5\sqrt{2}$	↗ $+\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\dfrac{x+1}{x-1})=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x.\left[\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}-1\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x.\left[\dfrac{4}{(x-\right.$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^2}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^2}{x^2}=4$

Δ :y=x+4 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$



EX 25 :

$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$

$x^2+2x+3=0$

$\Delta'=-2<0 \Rightarrow x^2+2x+3>0 \quad \forall x\in IR$

$D_f=\mathbb{R}$

f est dérivable sur tout IR car $x^2+2x+3>0$

$f'(x)=\dfrac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+3}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+2x+3}{x^2}}=1$

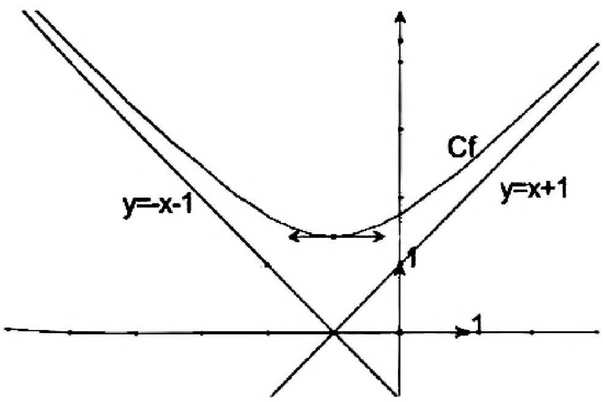
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt{x^2+2x+3}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+3/x}{1+\sqrt{1+2/x+3/x^2}}=1$

Δ_1 : y=x+1 est une asymptote à (ζ) au voisinage $(+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=-1$

(ζ) admet la droite D_2 :y=-x-1 comme asymptote au voisinage de $(-\infty)$



EX 26 :

$f(x)=5x+3\sqrt{x^2-1}$

$D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

- f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{5(x-1)+3\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}5+\dfrac{3(x+1)}{\sqrt{(x^2-1)}}=+\infty$

f non dérivable à droite en 1, de même f non dérivable à gauche en (-1)

* pour $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$f'(x)=5+3(\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}})=5+\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$

- pour $x\in]1,+\infty[$; f '(x)>0
- pour $x\in]-\infty,-1[$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}=-5 \Leftrightarrow \dfrac{9x^2}{x^2-1}=25$

$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{25}{16}\Leftrightarrow x=\dfrac{-5}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	||	////	||	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-4	↘	-5	///	5	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3\sqrt{x^2-1}+5x)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9(x^2-1)-25x^2}{3\sqrt{x^2-1}-5x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{16x^2+9}{5x-3\sqrt{x^2-1}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{16x+\frac{9}{x}}{5+3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 5x + 3\sqrt{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 5 + 3\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = 8$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-8x) = \lim_{x\to+\infty} 3(\sqrt{x^2-1}-x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

Δ_1 : y=8x est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

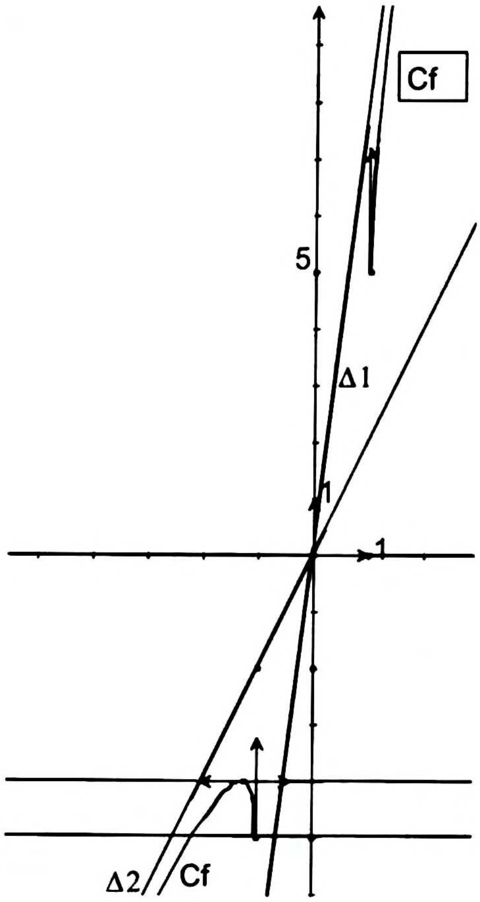
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 5 + 3\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 5 + \frac{3|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 5 - 3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to-\infty} 3.\left[\sqrt{x^2-1}+x\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0$$

Δ_2 : y=2x est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$



EX 27 :

$f(x)= x+\sqrt{4-x^2}$ $D_f=[-2,2]$

- la fonction : $x \mapsto 4-x^2$ est dérivable et Strictement positive sur $]-2,2[$ d'où f est dérivable sur $]-2,2[$.

- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2+\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2} 1+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} 1+\frac{(2-x).(2+x)}{(x-2).\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} 1-\frac{(2+x)}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2
La courbe de f admet au point d'abscisse 2 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

- de même on montre que f n'est pas Dérivable à droite en -2

- pour $x\in]-2,2[$ $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

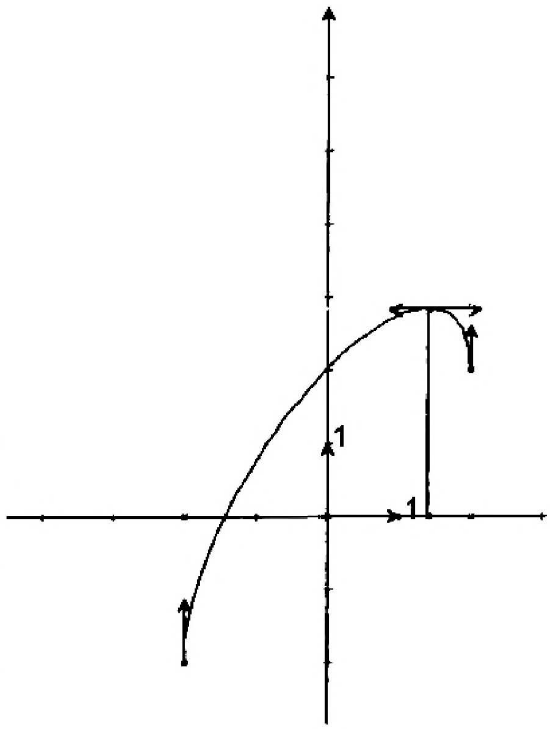
  - pour $x\in]-2,0[$ $f'(x)>0$
  - pour $x\in]0,2[$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1>\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \Leftrightarrow x<\sqrt{4-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2<4-x^2 \Leftrightarrow x^2<2$$

$$\Leftrightarrow x<\sqrt{2}$$

X	-2		$\sqrt{2}$		2
f'(x)	‖	+	0	-	‖
f(x)	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2



EX 28 : $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

- $D_f=]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$
- f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{x-1}\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1

- pour $x\in\ ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$$f'(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+x.\left(\frac{\dfrac{2}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}\right)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{x}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}\cdot\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{x}{(x+1)^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}\cdot\left[\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}\right]$$

le signe de f'(x) est celui de (x^2+x-1)

$\Delta=5$ $\quad x'=\dfrac{-1-\sqrt5}{2}\in D_f$ $\quad x''=\dfrac{-1+\sqrt5}{2}\notin D_f$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt5}{2}$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	////	////		+	
f(x)	$-\infty$	↗	f(x')	↘	$-\infty$	/////	0	↗	$+\infty$

f(x')= $f(\frac{-1-\sqrt5}{2})\approx-3$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=1$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}x.\left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x.\left[\frac{\dfrac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+1}\right]$$

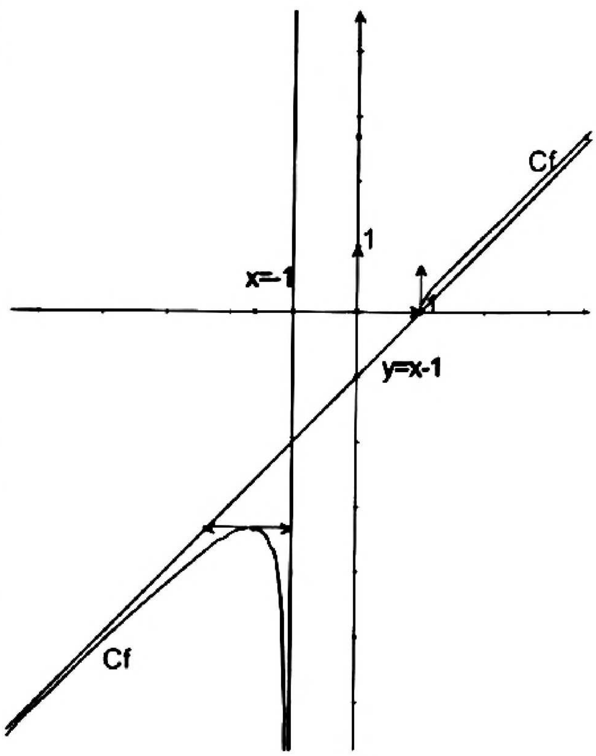
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}=-1$$

Δ_1 : y=x-1 est une asymptote à C_f au voisinage de $(+\infty)$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=-1$

Δ_1 : y=x-1 est une asymptote à C_f au voisinage de $(-\infty)$



EX 29 : $f(x)=\sin^2(x)+\cos(x)$

1) a/ $f(x+2\pi)=\sin^2(x+2\pi)+\cos(x+2\pi)$
$=\sin^2(x)+\cos(x)=f(x)$

Donc 2π est une période de f.

b/ *pour $x\in\mathbb{R}$ on a $(-x)\in\mathbb{R}$
* $f(-x)=\sin^2(-x)+\cos(-x)=[\sin(-x)]^2+\cos(x)$
$=\sin^2(x)+\cos(x)=f(x)$

donc f est une fonction paire
donc la droite des ordonnées est un axe de symétrie de C_f

2) a/ Domaine d'étude $D_E=[0,\pi]$

$f'(x)=2\cos(x).\sin(x)-\sin(x)$
$=2\sin(x).\left[\cos(x)-\frac{1}{2}\right]$

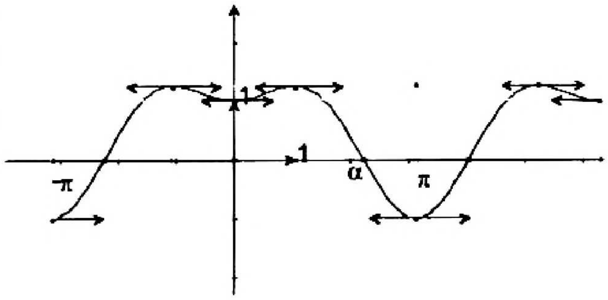
x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	0	+	0	-	0
f(x)	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	-1

b/ f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ sur $f\left(\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\right)=\left[1,\frac{5}{4}\right]$ et comme $0\notin\left[1,\frac{5}{4}\right]$ alors l'équation f(x)=0 n'a pas de solution dans $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

/ f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ sur $f\left(\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]\right)=\left[-1,\frac{5}{4}\right]$ et comme $0\in\left[-1,\frac{5}{4}\right]$ alors l'équation f(x)=0 admet une seule solution α dans $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

Conclusion : l'équation f(x)=0 admet α comme unique solution dans $[0,\pi]$

$f(2,2).f(2,3)<0\Rightarrow 2,2<\alpha<2,3$



EX 30 :

I. $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ $D_f=IR\setminus\{1\}$

f est dérivable sur $IR\setminus\{1\}$

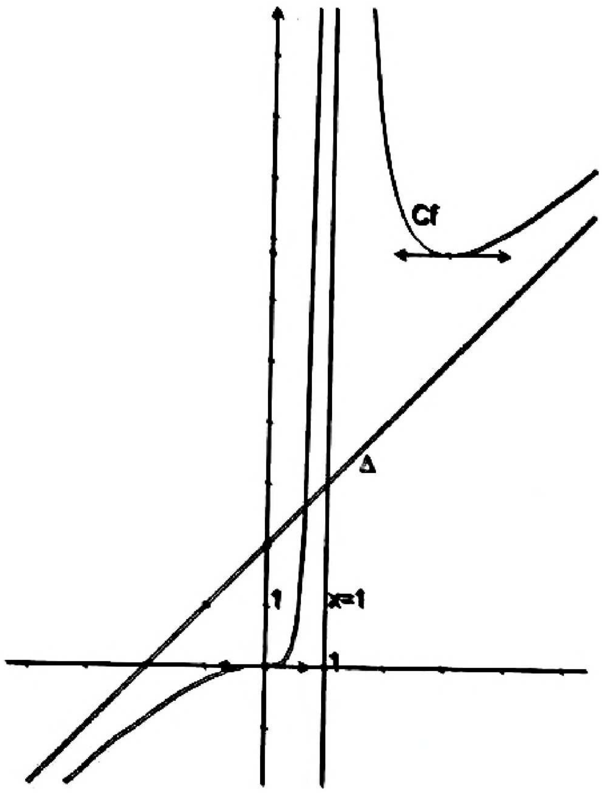
$f'(x)=\frac{x^2.(x-3)}{(x-1)^3}$ le signe de f'(x) est celui de (x-1).(x-3)

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗		$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{27}{8}$	↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=2$

Δ : y=x+2 est une asymptote à C_f au voisinage de $(-\infty)$ et au voisinage de $(+\infty)$



II. $h(x)=\dfrac{\sin^3(x)}{(\sin(x)-1)^2}=f(\sin(x))$

1) a/ $\sin(x)-1=0 \Leftrightarrow \sin(x)=1$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$$

$D_h = IR\backslash\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \ ,k\in\mathbb{Z}\}$

b/ $h(x+2\pi)=f(\sin(x+2\pi))=f(\sin(x))=h(x)$
donc 2π est une période de h.

c/ • $x\in D_h \Rightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+2k\pi\ \ ,k\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow -x\neq -\frac{\pi}{2}-2k\pi\ \ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \pi-x\neq \frac{\pi}{2}-2k\pi\ \ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2.\frac{\pi}{2}-x\in D_h$$

• $h(\pi-x)= f(\sin(\pi-x))=f(\sin(x))=h(x)$

Conclusion: Δ: $x=\pi/2$ est un axe de symétrie pour C_h

2) a/ $h(x)= f(\sin(x))$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\sin(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty\end{array}\right\rangle \Rightarrow \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}h(x)=+\infty$$

b/ $h'(x)= \cos(x).f'(\sin(x))$

pour $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$\left.\begin{array}{r}\cos(x)\geq 0\\ et\ \sin(x)\in[-1,1[\Rightarrow f'(\sin(x))\geq 0\end{array}\right\rangle\Rightarrow$$

$$h'(x)\geq 0\ ;\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow$$

$$h\ est\ croissante\ sur\ \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

c/

$h'(x)=0 \Leftrightarrow \cos(x)=0 \quad ou\ \ f'(\sin(x))=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad ou \quad \sin(x)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad ou\ \ x=k\pi\ \ k\in\mathbb{Z}$$

$$S_{D_h}=\left\{\frac{-\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{k\pi;k\in\mathbb{Z}$$

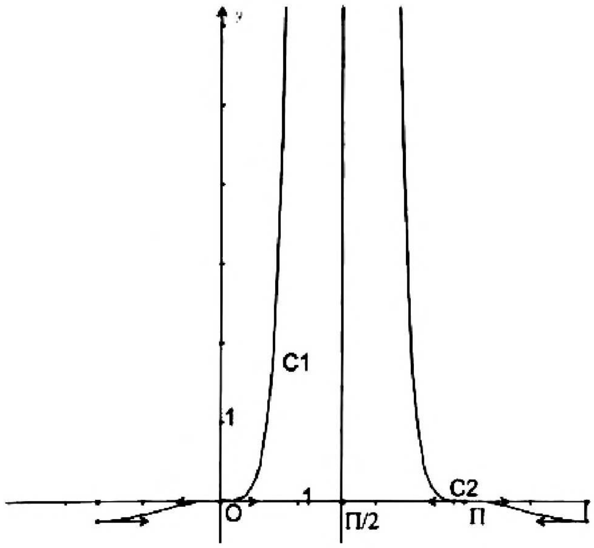
d/ h' s'annule et ne change pas de signe en 0 donc le point de coordonnées (0,h(0)) est un point d'inflexion pour C_h
Conclusion : l'origine du repère est un point d'inflexion pour C_h

3) Soit C_1 la courbe de la restriction de h sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et Δ :$x=\pi/2$

$C_2=S_\Delta(C_1)$:la courbe de la restriction de h sur $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

$$C_h=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} t_{2k\pi\vec{i}}(C_1\cup C_2)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	0	+	0	+	
f(x)	$-\frac{1}{4}$	↗			$+\infty$



EX 31 :

1) $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x-2}$

$D_f=\mathbb{R}/\{2\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}/\{2\}$

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

$x^2-4x-2=0$ $\qquad x'=2-\sqrt{6}$

$\qquad x''=2+\sqrt{6}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		2		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	||	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	f(x')	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	f(x'')	↗	$+\infty$

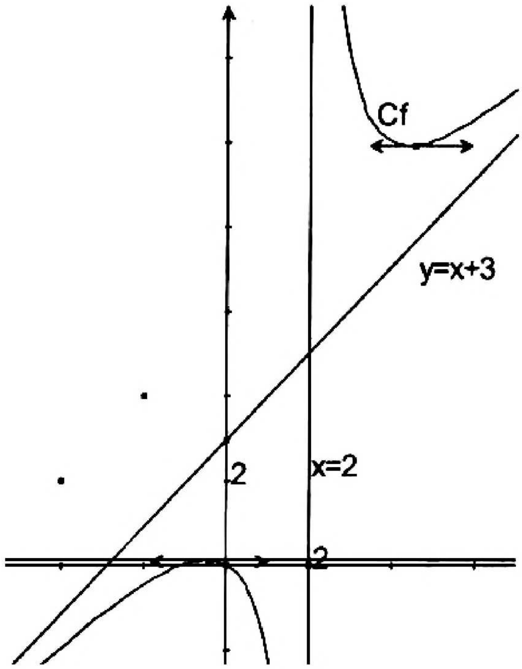
* $f(x)=x+3+\dfrac{6}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x-2}=0$

$\Delta : y=x+3$ est une asymptote à (ζ_f)

$f(2-\sqrt{6})=5-2\sqrt{6}$

$f(2+\sqrt{6})=5+2\sqrt{6}$



2) dans $\mathbb{R}/\{2\}$

$x^2+(1-m)x+2m=0 \Leftrightarrow x^2+x=m.(x-2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x+1)}{x-2}=m \Leftrightarrow f(x)=m$

1^{er} *cas* : $m\in\left]-\infty,5-2\sqrt{6}\right[\cup\left]5+2\sqrt{6},+\infty\right[$

l'équation admet deux solutions

2^{eme} *cas* : $m=5-2\sqrt{6}$ ou $m=5+2\sqrt{6}$

l'équation admet une unique solution

3^{eme} cas : $m\in\left]5-2\sqrt{6},5+2\sqrt{6}\right[$

l'équation n'a pas de solution

3) (E) $\Leftrightarrow$ f(cosx)=m $\quad$ cosx $\in[-1,1]$

$f([-1,1])=[-2;5-2\sqrt{6}]$

h(x)=f(cosx) est périodique de période 2π

1^{er} cas : $m \notin [-2;5-2\sqrt{6}]$ l'équation n'a pas de solution

2^{eme} cas : $m \in [-2;5-2\sqrt{6}]$ l'équation admet une infinité de solutions

EX 32 :

$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin(2x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

f(-x)=-f(x) : f est impaire

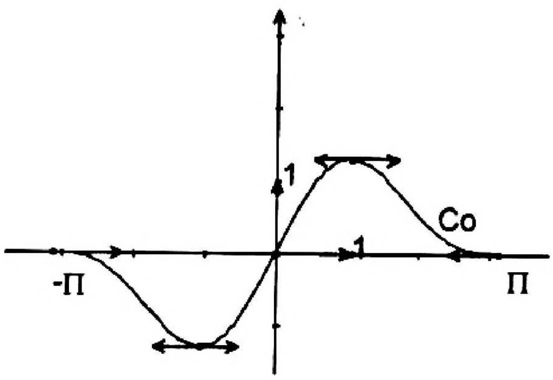
$f(x+2\pi)=f(x)$: 2π est une période de f

il suffir d'étudier f sur $[0,\pi]$

$f'(x)=\cos x+\cos 2x=\cos x+2\cos^2 x-1$

$=2\cos^2 x+\cos x-1=2(\cos x+1)(\cos x-\frac{1}{2})$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	2	+	0	-	0
f(x)	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0



$(\zeta_f)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} t_{2k\pi\vec{i}}(\zeta_0)$

EX 33 :

$f(x)=\frac{\cos x}{2\cos x-1}$

$2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left\{ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ ;k\in\mathbb{Z} \quad ou \quad x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ ;k\right.$

$D_f=\mathbb{R}/\left\{\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\};k\in\mathbb{Z}\right\}$

f est dérivable sur D_f

$f'(x)=\frac{-\sin x(2\cos x-1)+2\sin x\cos x}{(2\cos x-1)^2}$

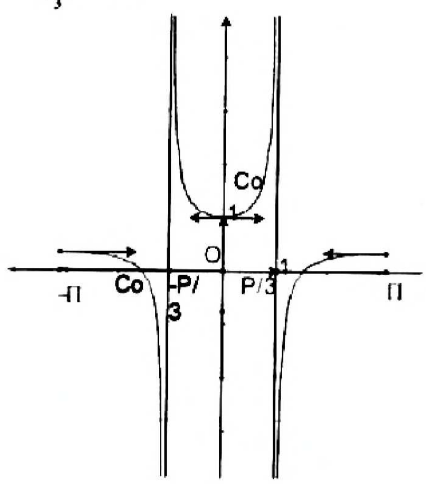
$=\frac{\sin x}{(2\cos x-1)^2}$

- 2π est une période de f
- f(-x)=f(x) : f est paire

$D_E=[0,\pi]/\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)	0	+	||	+	0
f(x)	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^-} \frac{\cos x}{2\cos x-1}=+\infty$



$(\zeta_f)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} t_{2k\pi\vec{i}}(\zeta_0)$

EX 34 :

$$\begin{cases} f(x)=|x^2+x| & \text{si } x<0 \\ f(x)=x\sqrt{x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

1) la fonction : $x\mapsto x^2+x$ est continue sur $]-\infty,0[$

d'où f est continue sur $]-\infty,0[$

• f est continue sur $]0,+\infty[$ (produit de 2 fonctions continues)

• continuité en 0 : $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}|x^2+x|=0=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sqrt{x}=0=f(0)$

f est continue en 0 d'où f est continue sur $\mathbb{R}$

2)

x	$-\infty$	-1		0
x^2+x	+	0	-	‖

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-(x^2+x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}-(x+1)=-1=f'_g(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0=f'_d(0)$

f n'est pas dérivable en 0

* $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{-(x^2+x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}-x=1=f'_g(-1)$

$\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2+x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x)=-1=f'_d(-1)$

f n'est pas dérivable en (-1)

3) * pour $x\in]0,+\infty[$

$f(x)=x\sqrt{x}$

$f'(x)=\sqrt{x}+x.(\dfrac{1}{2\sqrt{x}})=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}>0$

* pour $x\in]-1,0[$

$f(x)=-(x^2+x)$

$f'(x)=-(2x+1)$

* pour $x\in]-\infty,-1[$

$f(x)=x^2+x$

$f'(x)=2x+1<0 \qquad \forall x\in]-\infty,-1[$

x	$-\infty$		-1		-1/2		0		$+\infty$
f'(x)		-	‖	+	0	-	‖	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	¼	↘	0	↗	$+\infty$

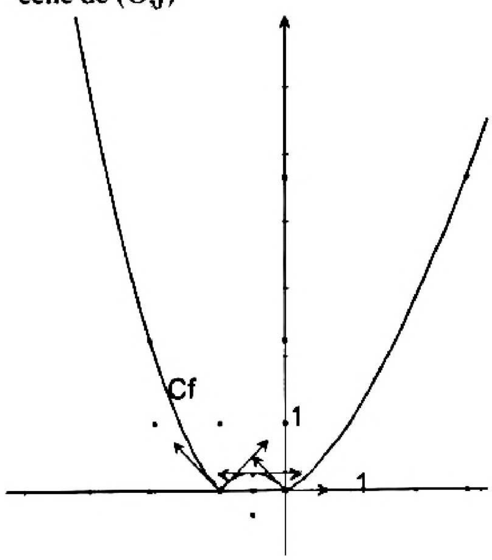
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$

(ζ_f) admet 2 branches paraboliques de direction celle de $(O,\vec{j})$



EX 35 :

1) $g(x)=2x^3+3x^2+1$

a) $g'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

b) dans l'intervalle $[-1,+\infty[$, g admet 1 comme minimum absolu

$\Rightarrow g(x)\geq 1$; $\forall x\in[-1,+\infty[$

d'où l'équation g(x)=0 n'a pas de solutions dans l'intervalle $[-1,+\infty[$

* dans l'intervalle $]-\infty,-1]$

g est continue sur $[-2,-1]$

$g(-2)\times g(-1)=(-3)(2)<0$

d'où il existe un réel $\alpha\in]-2,-1[$ tq: $g(\alpha)=0$

comme g est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ alors α est l'unique solution de l'équation : g(x)=0 dans $]-\infty,-1]$

conclusion : l'équation g(x)=0 admet α comme unique solution dans $\mathbb{R}$

$\alpha\in]-2,-1[$

$$\left.\begin{aligned} g(-1,7)&=-0,156\\ g(-1,6)&=0,488\end{aligned}\right\rangle \Rightarrow g(-1,7).g(-1,6)<0$$

$$\Rightarrow -1,7<\alpha<-1,6$$

Une valeur approchée à 10^{-1} prés de α est -1,7

c)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g(x)		-	0	+	

2) $f(x)=\dfrac{x+x^3}{1-x^3}$

a) $D_f=\mathbb{R}/\{1\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}/\{1\}$

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1-x^3)^2}$

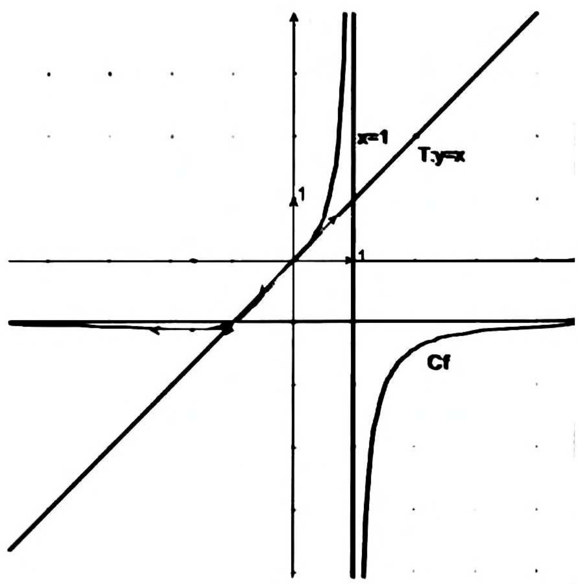
x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	||	+	
g(x)	-1	↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	-1

b) T:y=f '(0).(x-0)+f(0)

T:y=x

c) $f(x)-x=\dfrac{x^3(1+x)}{1-x^3}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f(x)-x		+	0	-	0	+	||	-	
Position relative		C/T		T/C		C/T	||	T/C	



EX 36 :

1) $g(x)=2x^3+x-2$

$a)$ g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x)=6x^2+1>0$

x	$-\infty$	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b)

g est continue sur $[0,1]$

$g(0)\times g(1)=-2<0$

d'où il existe un réel $\alpha\in]0,1[$ tq: $g(\alpha)=0$

comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

alors α est unique

c) $g(0,8).g(0,9)<0$

$g(0,83).g(0,84)<0$ donc 0,83 est une valeur approchée à 10^{-2} prés

d)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
g(x)	-	0	+

$x>\alpha\Rightarrow g(x)>g(\alpha)$ car g est strictement croissante

$\Rightarrow g(x)>0$

2) $f(x)=\sqrt{x^4+(x-2)^2}$

$D_f=\mathbb{R}$

a) la fonction $x\mapsto x^4+(x-2)^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$

d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{4x^3+2(x-2)}{2\sqrt{x^4+(x-2)^2}}=\frac{g(x)}{\sqrt{x^4+(x-2)^2}}$$

b)

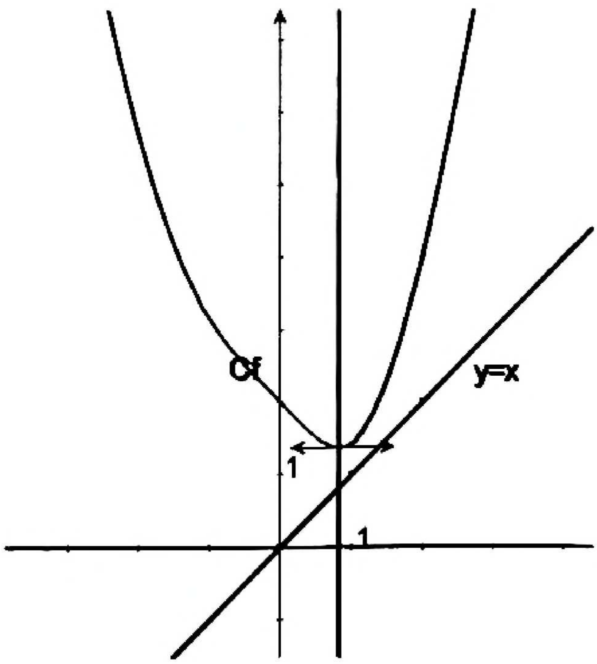
x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^4+(x-2)^2}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+(x-2)^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

d'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$



EX 37 :

$U_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3}$

1) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0$

d'où (U_n) est croissante

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $x \in]0,+\infty[$

a) $k \geq 1$, $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

$k \leq x \leq k+1 \Rightarrow k^3 \leq x^3 \leq (k+1)^3$

$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{k^3} \Rightarrow \frac{-2}{k^3} \leq f'(x) \leq \frac{-2}{(k+1)^3}$

f est dérivable sur $[k,k+1]$ et $\frac{-2}{k^3} \leq f'(x) \leq \frac{-2}{(k+1)^3}$

d'aprés le théorème des inégalités des accroissements finis:

$\frac{-2}{k^3} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{-2}{(k+1)^3}$

$\Rightarrow \frac{2}{(k+1)^3} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{2}{k^3}$

b) pour $1 \leq k \leq n$

* $f(k)-f(k+1) \leq \frac{2}{k^3}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}[f(k)-f(k+1)] \leq 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3}$

$\Rightarrow f(1) - f(n) \leq 2\left[U_n - \frac{1}{n^3}\right]$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} \leq 2U_n - \frac{2}{n^3} \Rightarrow U_n \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^3}$

$\Rightarrow U_n \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$ (1)

* $\frac{2}{(k+1)^3} \leq f(k) - f(k+1)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{(k+1)^3} \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - f(k+1)$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k^3} \leq f(1) - f(n) \Rightarrow 2[U_n - 1] \leq 1 - \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow U_n - 1 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \Rightarrow U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) $U_n \leq \frac{3}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

d) (U_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$

elle est donc convergente

soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} U_n$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} (\frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}) = \frac{3}{2}$

d'où $\frac{1}{2} \leq \ell \leq \frac{3}{2}$

EX 38 :

$f(x) = tgx$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

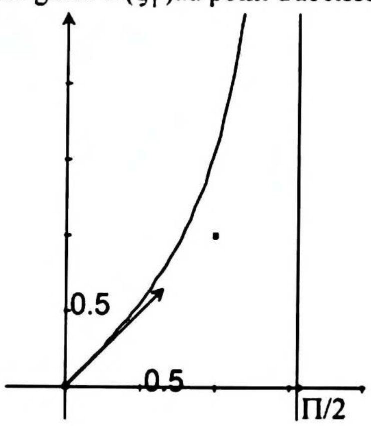
1) a) f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$f'(x) = 1 + tg^2x > 0$

x	0 $\frac{\pi}{2}$
f'(x)	+
f(x)	$0 \nearrow +\infty$

$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} tgx = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$

$f'_d(0) = 1$: le coefficient directeur de la tangente à (ζ_f) au point d'abcisse 0



b) soit $\varphi(x)=tgx-x \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$\varphi'(x)=tg^2x\geq 0$

φ est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$x\geq 0\Rightarrow \varphi(x)\geq 0\Rightarrow tgx-x\geq 0\Rightarrow tgx\geq x$

2) a) on pose $h(x)=tgx-2x \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h'(x)=tg^2x-1$

x	0		π/4		π/2
h'(x)		-	0	+	
h(x)	0	↘	1-π/2	↗	+∞

* h est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ d'où $h(\left[0,\frac{\pi}{4}\right[)=\left]1-\frac{\pi}{2},0\right]$

$0\in\left]1-\frac{\pi}{2},0\right]$ d'où il existe un unique réel $\beta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ tel que : $h(\beta)=0$

or $h(0)=0 \Rightarrow \beta=0$

* $h(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[)=\left[1-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$

$0\in\left[1-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$

d'où il existe un réel $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ tq : $h(\alpha)=0$

comme h est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

alors α est unique

conclusion : l'équation : $h(x)=0\Leftrightarrow tg(x)=2x$

admet 0 et α comme seules solutions dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

* $h(\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[)=\left]\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3},+\infty\right[$

$0\in\left]\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3},+\infty\right[\Rightarrow\alpha\in\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow\alpha\geq\frac{\pi}{3}$

b) $h(x)=tgx-2x$

x	-∞		α		π/2
h(x)	0	-	0	+	‖

3) $\begin{cases} U_0=\frac{\pi}{3} \\ U_{n+1}=\varphi(U_n)\end{cases}$

a) * pour n=0 $\quad 0\leq U_0=\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{3}$

* supposons que : $0\leq U_n\leq\frac{\pi}{3}$

montrons que : $0\leq U_{n+1}\leq\frac{\pi}{3}$

$0\leq U_n\leq\frac{\pi}{3}\Rightarrow\varphi(0)\leq\varphi(U_n)\leq\varphi(\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow 0\leq U_{n+1}\leq\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\Rightarrow\ 0\leq U_{n+1}\leq\frac{\pi}{3}$

conclusion : $0\leq U_n\leq\frac{\pi}{3} \quad ;\forall n\in\mathbb{N}$

b) d'aprés 2) b)

$U_n\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow h(U_n)\leq 0\Rightarrow tgU_n-2U_n\leq 0$

$\Rightarrow tgU_n-U_n\leq U_n\Rightarrow U_{n+1}\leq U_n$

d'où (U_n) est décroissante

c) (U_n) décroissante et minorée par 0

elle est donc convergente ; soit ℓ sa limite

$\ell=\varphi(\ell)\ \Leftrightarrow\ tg\ell=2\ell\ \Leftrightarrow\ \ell=0 \quad$ car $\ell\leq\frac{\pi}{3}$

EX 39 :

$n \in \mathbb{N}^*$ $\qquad (E_n) : x^2 + x^3 = n$

1) on pose : $f_n(x) = x^2 + x^3 - n$

$f_n'(x) = 2x + 3x^2$

x	$-\infty$		$-2/3$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		+	0	-	0	+	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{4}{27} - n$	↘	$-n$	↗	$+\infty$

* dans l'intervalle $]-\infty, 0]$ f_n admet le réel

$(\frac{4}{27} - n)$ comme maximum absolu

$\Rightarrow f_n(x) \le \frac{4}{27} - n < 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0]$

d'où l'équation $f_n(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $]-\infty, 0]$

* f_n est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

$\Rightarrow f_n([0, +\infty[) = [-n, +\infty[$

comme $0 \in [-n, +\infty[$

alors l'équation : $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans $[0, +\infty[$

conclusion : l'équation (E_n) admet a_n comme unique solution

2) a) Remarquons que : $a_n \ge 0 \quad ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

a_n est solution de (E_n)

a_{n+1} est solution de (E_{n+1})

d'où $a_{n+1}^2 + a_{n+1}^3 = n + 1$

$a_n^2 + a_n^3 = n$

$\Rightarrow (a_{n+1}^2 - a_n^2) + (a_{n+1}^3 - a_n^3) = 1$

$\Rightarrow (a_{n+1} - a_n)\left[a_{n+1} + a_n + a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2\right] = 1$

or a_n et a_{n+1} sont positifs d'où $a_{n+1} - a_n \ge 0$

$\Rightarrow a_{n+1} \ge a_n$ d'où (a_n) est croissante

b) supposons que (a_n) est majorée

comme (a_n) est croissante

alors (a_n) converge vers un réel ℓ

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n^2 + a_n^3 = \ell^2 + \ell^3$

or $a_n^2 + a_n^3 = n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} n = \ell^2 + \ell^3$ (absurde)

d'où (a_n) n'est pas majorée

c) (a_n) est croissante et non majorée

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

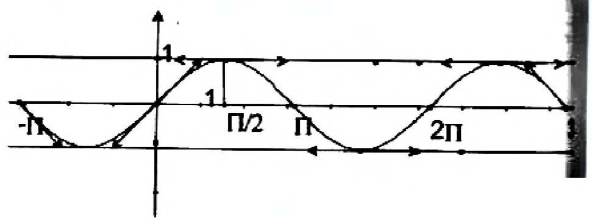
EX 40 :

I / $\quad f(x) = \sin x \qquad$ f: impaire de période 2π

1) a) $f'(x) = \cos x$

$D_E = [0, \pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x)	2	+	0	-	0
f(x)	0	↗	1	↘	0



b) $A(a, f(a)) \quad B(b, f(b))$

supposons que : $a < b$

le coeficient directeur de (AB) est $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

d'après le théorème des accroissements finis :

il existe un réel $c \in]a, b[$ tq: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

or $f'(c) = \cos c \Rightarrow -1 \le f'(c) \le 1$

$\Rightarrow -1 \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le 1$

II / g(x)=sin(sinx)

1) a) $\forall x \in D_g = \mathbb{R}$

on a : $(x+2\pi) \in D_g$

$g(x+2\pi) = \sin(\sin(x+2\pi)) = \sin(\sin x) = g(x)$

d'où 2π est une période de g

b) $\forall x \in D_g = \mathbb{R}$ on a : $(-x) \in D_g$

$g(-x) = \sin(-\sin x) = -\sin(\sin x) = -g(x)$

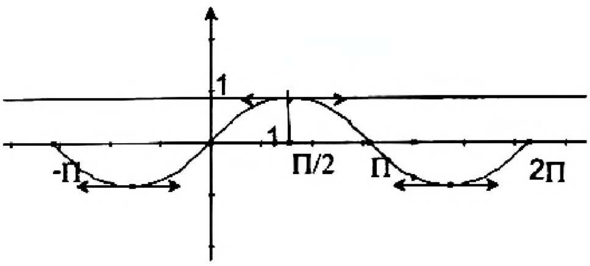
d'où g est impaire

c) g'(x)=cosx.cos(sinx) $x \in [0,\pi]$

$\sin x \in [0,1] \Rightarrow \cos(\sin x) > 0$

le signe de g'(x) est celui de : cosx

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x)	2	+	0	-	0
f(x)	0	↗	Sin(1)	↘	0



EX 41 :

$D_f = \mathbb{R}$

I / $f(x) = x.\sqrt{|x^2 - x|}$

1)

x	-∞		0		1		+∞
x^2-x		+	0	-	0	+	

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x.\sqrt{x^2-x} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x} = +\infty$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x.\sqrt{x^2-x} = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x} = +\infty$

(ζ_f) admet deux branches paraboliques

de direction celle de $(O,\vec{j})$

2) a) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \sqrt{|x^2-x|} = 0$

d'où f est dérivable en 0 et f '(0)=0

b) $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x.\sqrt{x(x-1)}}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x.\sqrt{x(1-x)}}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = -\infty$

f non dérivable en 1

(ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 1

3) a) * pour $x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$f(x) = x.\sqrt{x^2-x}$

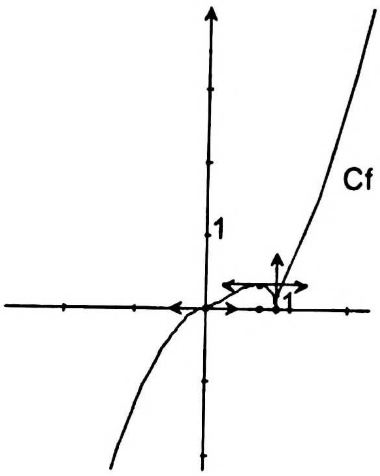
$f'(x) = \sqrt{x^2-x} + \frac{(2x-1).x}{2.\sqrt{x^2-x}} = \frac{x.(4x-3)}{2\sqrt{x^2-x}}$

* pour $x \in]0,1[$; $f(x) = x.\sqrt{x-x^2}$

$f'(x) = \sqrt{x-x^2} + \frac{(1-2x).x}{2.\sqrt{x-x^2}} = \frac{x.(3-4x)}{2\sqrt{x-x^2}}$

x	$-\infty$		0		3/4		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	0	-	||	+	
f(x)	$-\infty$	↗		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↘	0	↗	$+\infty$

b)



4)* g admet 0 comme minimum absolu

* g admet $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ comme maximum absolu

II / $g_n(x) = x^n\sqrt{x(1-x)}$

1) $n \geq 2$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^{n-1} \leq 1 \Rightarrow x^n \leq x$

$\Rightarrow x^n\sqrt{x(1-x)} \leq x\sqrt{x(1-x)} \Rightarrow g_n(x) \leq g_1(x)$

d'où (ζ_n) est au dessous de (ζ_1)

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g_n(x)-g_n(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{n-1}\sqrt{x(1-x)} = 0$

d'où g_n est dérivable à droite en 0 et $g_n'(0)=0$

* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{g_n(x)-g_n(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^n\sqrt{x(1-x)}}{-(1-x)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{-x^n\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = -\infty$

g n'est pas dérivable à gauche en 1

b) la fonction : $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ est dérivable sur $]0,1[$

g_n est dérivable sur $]0,1[$ comme étant produit de deux fonctions dérivables

$g_n'(x) = n.x^{n-1}.\sqrt{x(1-x)} + x^n\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}\right)$

$= \frac{2x(1-x).n.x^{n-1} + x^n(1-2x)}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{x^n.[2n(1-x)+}{2\sqrt{x(1-}}$

$= \frac{x^n.[2n+1-2(n+1)x]}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{x^n.\left[n+\frac{1}{2}-(n+1)x\right.}{\sqrt{x(1-x)}}$

c)

x	0		$\frac{2n+1}{2(n+1)}$	
g_n'(x)		+	0	-
g_n(x)	0	↗	$g\left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)$	↘

g_n admet $g_n\left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)$ comme maximum local

en $\alpha_n = \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1 - \frac{1}{2(n+1)}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$

3) a)

$g_n(\alpha_n) = \left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^n . \sqrt{\frac{1}{2(n+1)}\left(1-\frac{1}{2(n+1)}\right.}$

$g_n(\alpha_n) = \left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^n . \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$

$U_n = \left[\frac{2n+1}{2(n+1)}\right] . \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$

* $U_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

* $U_n = g_n(\alpha_n) \leq g_1(\alpha_n) \Rightarrow U_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$ d'aprés

d'où $0 \leq U_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$

b) $U_n \geq 0$ d'aprés a)

* d'aprés II/ 1)

$U_n = g_n(\alpha_n) \leq g_1(\alpha_n)$

d'où $0 \leq U_n \leq g_1(\alpha_n)$

c) $g_1(\alpha_n) = \alpha_n . \sqrt{\alpha_n(1-\alpha_n)}$

$$g_1(\alpha_n) = \frac{2n+1}{2(n+1)} . \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2(n+1)} . \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} g_1(\alpha_n) = 0$

$0 \leq U_n \leq g_1(\alpha_n)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} g_1(\alpha_n) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

EX 42 :

1) (E): $x^3 - 10x^2 - 1 = 0$

on pose $h(x) = x^3 - 10x^2 - 1$

$h(10) = -1$; $h(11) = 120$

h est continue sur $[10,11]$

$h(10) \times h(11) < 0$

d'où il existe un réel $a \in]10,11[$ tq $h(a)=0$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$

$h'(x) = 3x^2 - 20x$

x	$-\infty$	0		20/3		$+\infty$
h'(x)	+	0	−	0	+	
h(x)	$-\infty$ ↗	-1	↘	$\frac{-4027}{27}$	↗	$+\infty$

h est strictement croissante sur $\left[\frac{20}{3},+\infty\right[$

d'où a est la seule solution de l'équation : h(x)=0

dans $\left[\frac{20}{3},+\infty\right[$

* dans l'intervalle $\left]-\infty,\frac{20}{3}\right[$

h admet (-1) comme maximum absolu

$\Rightarrow h(x) \leq -1$; $\forall x \in \left]-\infty,\frac{20}{3}\right[$

d'où l'équation h(x)=0 n'a pas de solutions dans $\left]-\infty,\frac{20}{3}\right[$

conclusion : a est la seule solution de (E)

2) 0 n'est pas une solution de (E)

dans $\mathbb{R}^*$: (E) $\Leftrightarrow x^3 = 10x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 10 + \frac{1}{x^2}$

3) $f(x) = 10 + \frac{1}{x^2}$; $x \in [10,+\infty[$

a) $f'(x) = \frac{-2}{x^3} < 0$ $\forall x \in [10,+\infty[$

f est continue et strictement décroissante sur $[10,+\infty[$

$f([10,+\infty[) = \left]\lim\limits_{+\infty} f, f(10)\right] =]10 ; 10{,}01]$

b) $\begin{cases} U_0 = 10 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

Remarquons que : $U_n \geq 10$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$|f'(x)| = \frac{2}{x^3}$

pour $x \geq 10 \Rightarrow x^3 \geq 1000 \Rightarrow \frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{500}$

f est dérivable sur $[10,+\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{500}$

a et $U_n \in [10,+\infty[$

d'aprés le théorème des inégalités des accroissements finis:

$$|f(U_n) - f(a)| \le \frac{1}{500}|U_n - a|$$

or $f(U_n)=U_{n+1}$ et $f(a)=a$ (d'aprés 2))

d'où $|U_{n+1} - a| \le \frac{1}{500}|U_n - a| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$|U_1 - a| \le \frac{1}{500}|U_0 - a|$$

$$|U_2 - a| \le \frac{1}{500}|U_1 - a|$$

.

.

$$|U_n - a| \le \frac{1}{500}|U_{n-1} - a|$$

multiplions membre à membre et simplifions on aura :

$$|U_n - a| \le (\frac{1}{500})^n \times |U_0 - a|$$

$$|U_n - a| \le (\frac{1}{500})^n \times |a - 10|$$

$a \in]10,11[$

d'où $|a-10| \le 1$

par suite : $|U_n - a| \le (\frac{1}{500})^n$

$$\Rightarrow U_n - (\frac{1}{500})^n \le a \le U_n + (\frac{1}{500})^n$$

$U_3 = 10,00998007$

$(\frac{1}{500})^n = 8 \times 10^{-9}$

$10,009980062 \le a \le 10,009980078$

d'où $a=10,009980...$

QCM :

1) $I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2) $(f^{-1})'(\frac{1}{2})=\frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

3) f réalise une bijection de $[1,4]$ sur $[1,4]$

4) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

VRAI-FAUX :

1) (faux)

Contre exemple : $f(x)=3-\frac{4x}{x^2+3}$

* f(1)=2
* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$
* f est dérivable sur $[1,+\infty[$
* $f'(x)=\frac{4(x^2-3)}{(x^2+1)^2}$

x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)	2	↘	$3-\frac{2}{\sqrt{3}}$	↗	3

$f([1,+\infty[)=\left[3-\frac{2}{\sqrt{3}},3\right[$

2) (vrai)

* f(x)=ax+b ; $a\neq 0$

f '(x)=a

* si a>0 ; f continue et strictement croissante

f est une bijection de ℝ sur ℝ

* si a<0 ; f est continue et strictement décroissante

f : bijection de ℝ sur ℝ

3) (faux)

$\sqrt[3]{16}>2$ car $16>2^3$

$\sqrt[4]{16}=2$

$\sqrt[4]{16}<\sqrt[3]{16}$

4) (vrai) pour $n\geq 2$

$f(x)=\sqrt[n]{x} \rightarrow f^{-1}(x)=x^n$

$(f^{-1})'(0)=0$

5) (faux)

contre exemple :

$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ I=ℝ

$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

f est dérivable sur ℝ

f est strictement croissante sur ℝ

$\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0$

$f(I)=]0,+\infty[$

f est une bijection de ℝ sur f(ℝ)= $]0,+\infty[$

$y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow y+\sqrt{1+y^2}=x$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+y^2}=x-y\Leftrightarrow 1+y^2=x^2+y^2-2xy$

$\Leftrightarrow y=\frac{x^2-1}{2x}$

$f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2x}$

f^{-1} ne garde pas un signe constant sur $]0,+\infty[$

EX 1 :

1) $f(x)=1-4x \quad I=\left]-\infty,1\right] \quad f'(x)=-4<0$

f est continue et strictement décroissante sur I

elle réalise donc une bijection de I sur J=f(I)

$J=\left[f(1),\lim_{x\to-\infty} f(x)\right[=\left[-3,+\infty\right[$

soit $y=f^{-1}(x) \quad x\in J \ , \ y\in I$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow 1-4y=x \Leftrightarrow y=\dfrac{1-x}{4}$

d'où $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4}(1-x)$

2) $f(x)=x^2-4x+1 \quad I=\left[2,+\infty\right[$

$f'(x)=2x-4=2(x-2)\geq 0 \ \forall\ x\in I$

f est continue et strictement croissante sur $I=\left[2,+\infty\right[$

elle réalise donc une bijection de I sur J=f(I)

$J=\left[f(2),\lim_{+\infty} f\right[=\left[-3,+\infty\right[$

soit $y=f^{-1}(x) \quad x\in J \ , y\in I$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow y^2-4y+1=x \Leftrightarrow y^2-4y+(1-x)=0$

$\Delta'=4-(1-x)=3+x\geq 0$

$y_1=2-\sqrt{3+x}$ et $y_2=2+\sqrt{3+x}$

or $y\in\left[2,+\infty\right[\ \rightarrow\ y\geq 2$

d'où $f^{-1}(x)=2+\sqrt{3+x}$

3) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1} \quad I=\left]-1,+\infty\right[$

$f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$

f est continue et strictement croissante sur $I=\left]-1,+\infty\right[$

d'où f est une bijection de I sur J=f(I)

$J=\left]\lim_{(-1)^+} f,\lim_{+\infty} f\right[=\left]-\infty,2\right[$

soit $y=f^{-1}(x) \quad x\in J, \ y\in I$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \dfrac{2y-1}{y+1}=x \Leftrightarrow 2y-1=xy+x \Leftrightarrow y=\dfrac{1+x}{2-x}$

$f^{-1}(x)=\dfrac{1+x}{2-x}$

4) $f(x)=\sqrt{x-3}+x \quad I=\left[3,+\infty\right[$

f est dérivable sur $\left]3,+\infty\right[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}+1>0$

f est continue et strictement croissante sur $I=\left[3,+\infty\right[$

elle réalise donc une bijection de I sur J=f(I)

$J=\left[f(3),\lim_{+\infty} f\right[=\left[3,+\infty\right[$

soit $y=f^{-1}(x) \quad x\in J \ , y\in I$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{y-3}+y=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y-3}=x-y \Leftrightarrow y-3=x^2-2xy+y^2$

$\Leftrightarrow y^2-(2x+1)y+(x^2+3)=0$

$\Delta=(2x+1)^2-4(x^2+3)$

$\Delta=4x-11\geq 0$

$y'=\dfrac{2x+1-\sqrt{4x-11}}{2}$

$y''=\dfrac{2x+1+\sqrt{4x-11}}{2}$

$f(3)=3 \Rightarrow f^{-1}(3)=3$

pour $x=3 \xrightarrow[\text{à rejeter}]{} y''=4$

d'où $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1-\sqrt{4x-11}}{2}$

EX 2 :

$g(x)=ax+b \ ; a\neq 0$

1) * 1er cas: $a>0 \quad g'(x)=a>0$

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

d'où g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$f(\mathbb{R})=\left]\lim_{-\infty} f,\lim_{+\infty} f\right[=\mathbb{R}$

* 2éme cas: $a<0 \quad g'(x)=a<0$

g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

d'où g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$g(\mathbb{R})=\left]\lim_{+\infty} g,\lim_{-\infty} g\right[=\mathbb{R}$

2) $y=g^{-1}(x)\Leftrightarrow g(y)=x\Leftrightarrow ay+b=x$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$ *Donc* $g^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$

$g^{-1}(x) = g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = a \\ \frac{-b}{a} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} a = -1 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

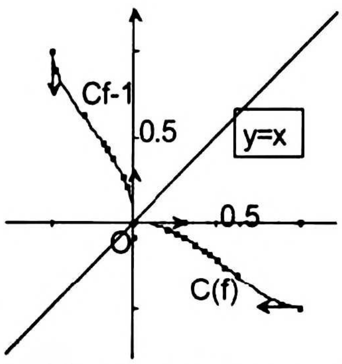
EX 3 :

$f(x)=\frac{1}{2}x^4 - x^2 \quad ; \quad x \in [0,1]$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=2x^3-2x=2x(x^2-1)$

x	0		1
f '(x)	0	-	0
f(x)	0	↘	$\frac{-1}{2}$



2) a) f est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$

elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur J

$J=f([0,1])=[f(1),f(0)]=\left[\frac{-1}{2},0\right]$

b) $(\zeta_{f^{-1}}) = S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ:y=x

c) on pose : $y=f^{-1}(x)$ $x \in \left[\frac{-1}{2},0\right]$, $y \in [0,1]$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^4 - y^2 = x \Leftrightarrow y^4 - 2y^2 = 2x$

$\Leftrightarrow y^4 - 2y^2 + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow (y^2 - 1)^2 = 2x + 1$

$\Leftrightarrow |y^2 - 1| = \sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow 1 - y^2 = \sqrt{2x+1}$ car $y \in [0,1]$

$\Leftrightarrow y^2 = 1 - \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow y = \sqrt{1-\sqrt{2x+1}}$ car $y \geq 0$

d'où $f^{-1}(x) = \sqrt{1-\sqrt{2x+1}}$

EX 4 :

$f(x) = \cos(\pi.x) \quad : x \in [0,1]$

1) $f'(x)=-\pi.\sin(\pi x)$

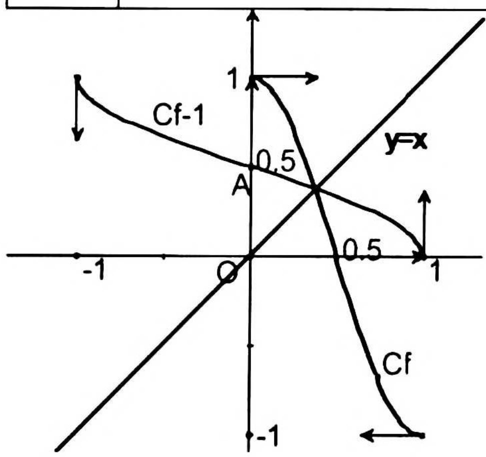
$x \in [0,1] \rightarrow \pi x \in [0,\pi]$

$\Rightarrow f'(x) \leq 0$

f est continue et strictement décroissante sur [0,1]
d'où f réalise une bijection de [0,1] sur
J=[f(1),f(0)]=[-1,1]

2)

x	0		1
f '(x)	0	-	0
f(x)	1	↘	-1



3) on pose : $\varphi(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)$

- f est continue sur $[0,1]$

d'où f^{-1} est continue sur $[-1,1]$

par suite φ est continue sur $[-1,1]$

- f est dérivable sur $]0,1[$

et $f'(x)=-\pi\sin(\pi x)\neq 0$; $\forall x\in]0,1[$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f(]0,1[)=]-1,1[$

φ est dérivable sur $]-1,1[$

calculons $(f^{-1})'(x)$ pour $x\in]-1,1[$

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\dfrac{1}{f'(y)}$ avec $y=f^{-1}(x), f(y)=x$

$=\dfrac{-1}{\pi\sin(\pi y)}=\dfrac{-1}{\pi\sqrt{1-\cos^2(\pi y)}}$ car $\sin\pi y\ \geq 0$

$=\dfrac{-1}{\pi\sqrt{1-f^2(y)}}$

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{-1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

$\varphi'(x)=(f^{-1})'(x)-(f^{-1})'(-x)$

$=\dfrac{-1}{\pi\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-(-x)^2}}=0$

$\varphi(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)$

$\varphi'(x)=0$; $\forall\ x\in]-1,1[$

d'où φ est constante sur $[-1,1]$

$f(0)=1\ \rightarrow f^{-1}(1)=0$

$f(1)=-1\ \rightarrow f^{-1}(-1)=1$

$\varphi(1)=f^{-1}(1)+f^{-1}(-1)$

$\varphi(1)=1$

d'où $\varphi(x)=1$; $\forall\ x\in[-1,1]$

$\Rightarrow f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=1\quad \forall x\in[-1,1]$

<u>interprétation graphique :</u>

$f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=1$

$\Rightarrow f^{-1}(-x)=1-f^{-1}(x)$

$\Rightarrow f^{-1}(2\times 0-x)=2\times\dfrac{1}{2}-f^{-1}(x)$

A(0,½) est un centre de symétrie pour $(\zeta_{f^{-1}})$

EX 5 :

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4+x}$; $D_f=\mathbb{R}_+$

1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x}+\dfrac{(4+x)-4}{x\left[\sqrt{4+x}+2\right]}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{4+x}+2}=+\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

2) a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4+x}}>0$

f est continue et strictement croissante sur $[0,$

elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $J=f([0,$

$J=[2,+\infty[$

* f est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4+x}}\neq 0$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f(]0,+\infty[)=]2,+\infty[$

* $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f^{-1}(x)}{x-2}$

(on pose $y=f^{-1}(x), x=f(y)$; $x\to2^+, y\to0^+$)

$=\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{y}{f(y)-2}=\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{1}{\dfrac{f(y)-f(0)}{y}}=0$

d'où f^{-1} est dérivable à droite en 2 et $(f^{-1})'_d(2)=$

(Rq: on pourra résoudre le probléme graphiquem

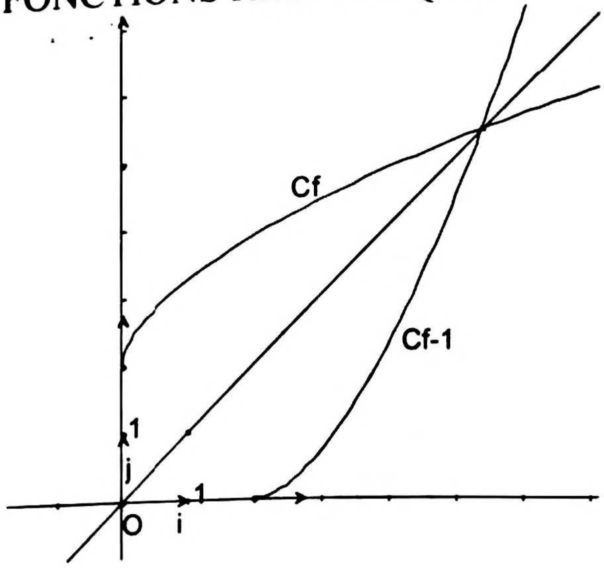
conclusion : f^{-1} est dérivable sur $J=[2,+\infty[$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4+x}}>0$

x	0	+∞
f '(x)	ǀ +	
f(x)	2 ↗	+∞

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{4+x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x}}=0$

(ζ_f) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$



EX 6 :

) * f(0)=-1 ⇒ g(-1)=0

(ζ_f) admet une tangente horizontal au point d'abscisse 0 d'où (ζ_g) admet une tangente verticale au point d'abscisse f(0)=-1

par suite g n'est pa dérivable en (-1)

* f(-2)=1 ⇒ g(1)=-2

(ζ_f) admet une tangente verticale au point d'abscisse (-2) d'où (ζ_g) admet une tangente horizontale au point d'abscisse f(-2)=1 par suite : g est dérivable en 1 et g'(1)=0

2) * f est décroissante sur $\mathbb{R}$ d'où g est décroissante sur f($\mathbb{R}$)= $\mathbb{R}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f '(x)		-	||	-	
f(x)	$+\infty$	↘			$-\infty$

3) $(\zeta_g)=S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ : y=x

EX 7 :

1) * f(1)= -1 ⇒ g(-1)=1

f est dérivable en 1 et f '(1)= -1 ≠0 d'où g est dérivable en (-1) et g'(-1)= $\dfrac{1}{f'(1)}=-1$

* f(2)= -4 ⇒ g(-4)=2

f n'est pas dérivable à gauche en 2

(ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 2 d'où (ζ_g) admet une demi tangente horizontal au point d'abscisse (-4)

g est dérivable à droite en (-4) et $g'_d(-4)=0$

2)

x	-4		$+\infty$
g(x)	2	↘	-1

3) $(\zeta_g)=S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ : y=x

EX 8 :

A/ $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$

$g(x)=\sin(2x)-x$

1) g est dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$

$g'(x)=2\cos(2x)-1=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\dfrac{1}{2}$

$or\;\; (2x)\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2x=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$

x	$-\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{\pi}{4}$
g'(x)		+	0	-	
g(x)	$\dfrac{\pi}{4}-1$	↗	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$	↘	$1-\dfrac{\pi}{4}$

2) sin(2x)=x ⇔ g(x)=0

* g est continue et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$ d'où

$g\left(\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]\right)=\left[g(\dfrac{\pi}{4}),g(\dfrac{\pi}{6})\right]=\left[1-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right]$

$0 \notin \left[1-\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right]$

d'où l'équation : g(x)=0 n'a pas de solutions dans $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$

* g est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right]$ d'où g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right]$ sur $\left[\frac{\pi}{4}-1,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right]$

comme $0 \in \left[\frac{\pi}{4}-1,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right]$ alors il existe un unique réel $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right]$ tel que : g(α)=0

conclusion : l'équation : g(x)=0 admet α comme unique solution dans $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

$g(-\frac{\pi}{4}) \neq 0$ et $g(\frac{\pi}{4}) \neq 0 \Rightarrow \alpha \in \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$

B/ $f(x) = \sin(2x)$; $x \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

1) a) f'(x)=2 cos (2x)
f'(0)=2 ; f(0)=0 T :y=2x
b) f''(x)= -4 sin(2x)

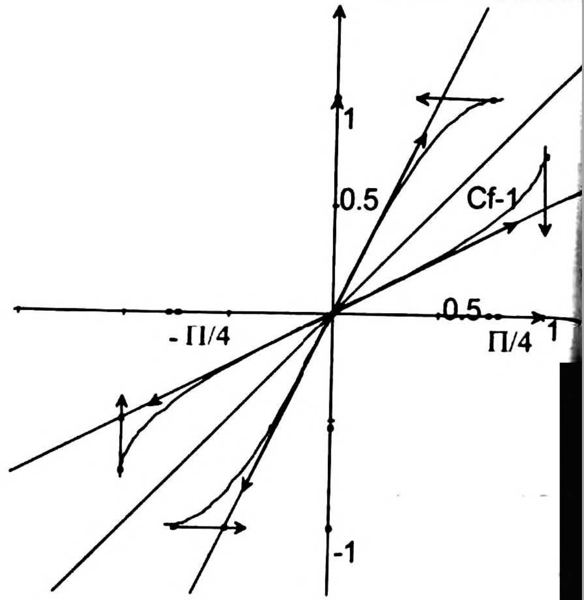
x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
f''(x)	+	0	-

f'' s'annule en 0 en changeant de signe d'où le point de coordonnées (0,f(0)) est un point d'inflexion pour (ζ_f)

f(0)=0 d'où l'origine du repère est un point d'inflexion pour (ζ_f)

2) f '(x)=2cos(2x)

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$
f '(x)	0	+	0
f(x)	-1	↗	1



3) a) f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ elle réalise donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ sur

$f(\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]) = \left[f(-\frac{\pi}{4}), f(\frac{\pi}{4})\right] = [-1,1]$

b) $(\zeta_{f^{-1}}) = S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ : y=x

4) f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ et

f '(x)=2cos(2x)≠0 d'où f^{-1} est dérivable sur

$f(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[)=]-1,1[$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ (avec $y=f^{-1}(x)$, f(y)=x)

$= \frac{1}{2\cos(2y)} = \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2(2y)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-f^2(y)}}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

EX 9 :

$f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$; $x\in[0,1[$

1) a) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{1}{x^2}(\frac{x}{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{1}{x}(\frac{1}{1-x^2})}=+\infty$

f n'est pas dérivable a droite en 0

(ζ_f) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 0

b) f est dérivable sur]0,1[

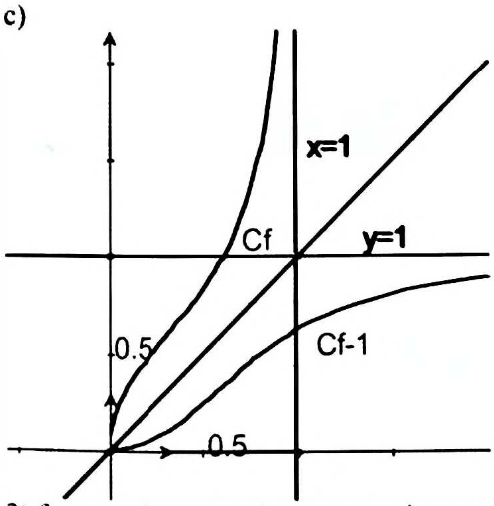
$$f'(x)=\frac{(\frac{x}{1-x^2})'}{2\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}=\frac{\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}$$

$$=\frac{1+x^2}{2\sqrt{x}(1-x^2).\sqrt{1-x^2}}>0$$

x	0		1
f '(x)	|	+	||
f(x)	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}=+\infty$

c)



2) f est continue et strictement croissante sur [0,1[elle réalise donc une bijection de [0,1[sur I=[0,+∞[

3) a) (ζ_f) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 0 d'où la courbe de f^{-1} admet une demi-tgte horizontal à droite au point d'abscisse 0

$\Rightarrow$ f^{-1} est dérivable à droite en 0

et $(f^{-1})'_d(0)=0$

b) * $(f^{-1})'_d(0)=0$

* f est dérivable sur]0,1[

et $f'(x)=\frac{1+x^2}{2\sqrt{x}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\neq0\ \ \forall x\in]0,1[$

d'où f^{-1} est dérivable sur f(]0,1[)=]0,+∞[

* on pose $y=f^{-1}(x)$ $x\in]0,+\infty[$, $y\in]0,1[$

$f(y)=x\Leftrightarrow\sqrt{\frac{y}{1-y^2}}=x\Leftrightarrow\frac{y}{1-y^2}=x^2$

$\Leftrightarrow y=x^2-x^2y^2\Leftrightarrow x^2y^2+y-x^2=0$

$\Delta=1+4x^4>0y$

$y'=\frac{-1-\sqrt{1+4x^4}}{2x^2}<0$

$y''=\frac{-1+\sqrt{1+4x^4}}{2x^2}$

d'où $f^{-1}(x)=\frac{-1+\sqrt{1+4x^4}}{2x^2}$ pour $x\in]0,+\infty[$

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{x^3}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+4x^4}}\right]$ pour $x\in]0,+\infty[$

c) $(\zeta_{f^{-1}})=S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ :y=x(voir figure)

EX 10 :

$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; $x\in[-1,1[$

1) a)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
1+x		-	0	+		+	
1-x		+		+	0	-	
$\frac{1+x}{1-x}$		-	0	+	||	-	

la fonction : $x\mapsto\frac{1+x}{1-x}$ est dérivable et strictement positive sur]-1,1[d'où f est dérivable sur]-1,1[

$$\text{et } f'(x)=\frac{(\frac{1+x}{1-x})'}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}=\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

b)

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$$

(ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse (-1)

c) $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=+\infty$

la droite d'équation : x=1 est une asymptote à (ζ_f)

d) $f'(x)=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}>0 \quad \forall x\in]-1,1[$

x	-1	1
f '(x)	+	
f(x)	0 ↗ +∞	

2) a) A(0,1)

(T) : y=f'(0).(x-0)+f(0)

(T) : y=x+1

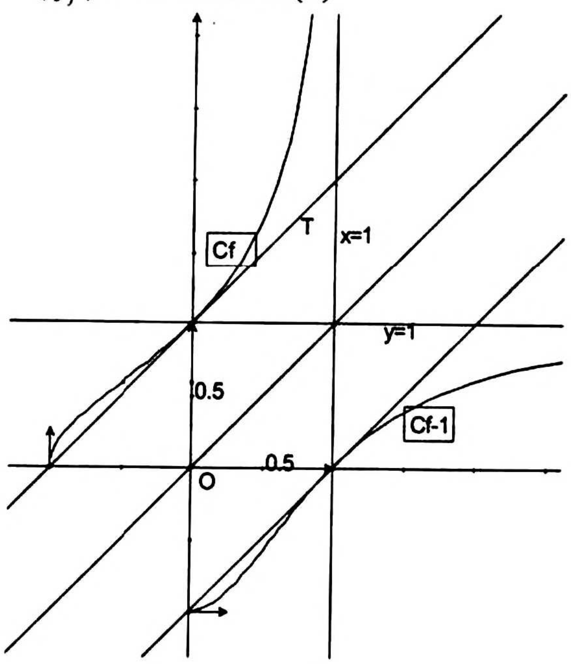
b)

$$f(x)-(x+1)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-(1+x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.\left[1-\sqrt{1-x^2}\right]$$

$1-x^2\le1\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\le1$

$\Rightarrow f(x)-(x+1)\ge0$

(ζ_f) est au dessus de (T)



3) a) f est continue et strictement croissante sur [-1,1[elle réalise donc une bijection de [-1,1[sur J=f([-1,1[) $J=\left[f(-1),\lim_{1^-}f(x)\right[=[0,+\infty[$

b) $(\zeta_{f^{-1}})=S_\Delta(\zeta_f)$ Δ : y=x (figure)

EX 11 :

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

1) f est dérivable sur ℝ

$$f'(x)=\frac{1}{(x^2+2x+2).\sqrt{x^2+2x+2}}>0$$

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}}$

- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|.\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=-1$$

x	-∞	+∞
f '(x)	+	
f(x)	-1 ↗ 1	

2) a) * pour $x \in D_f=\mathbb{R}$, $(-2-x) \in D_f$

* $f(-2-x)=\dfrac{(-2-x)+1}{\sqrt{(-2-x)^2+2(-2-x)+2}}$

$=\dfrac{-(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}=-f(x)$

d'où $I(-1,0)$ est un centre de symétrie pour (ζ_f)

b) $f'(x)=\dfrac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$

$f''(x)=\dfrac{-3(x+1)}{(x^2+2x+2)^2.\sqrt{x^2+2x+2}}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''(x)		+	0	-	

f''s'annule en changeant de signe en -1 d'où $I(-1,f(-1))$ est un point d'inflexion : $I(-1,0)$

3) a) $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$

on pose $h(x)=f(x)-x$

$$h'(x)=\frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}-1$$

$x^2+2x+2=1+(1+x)^2>1$

$\Rightarrow h'(x)<0$, h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

h est continue sur $[0,1]$

$h(0)\times h(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times(\dfrac{2}{\sqrt{5}}-1)<0$

d'où l'équation $h(x)=0$ admet une solution $\alpha \in]0,1[$

comme h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, alors

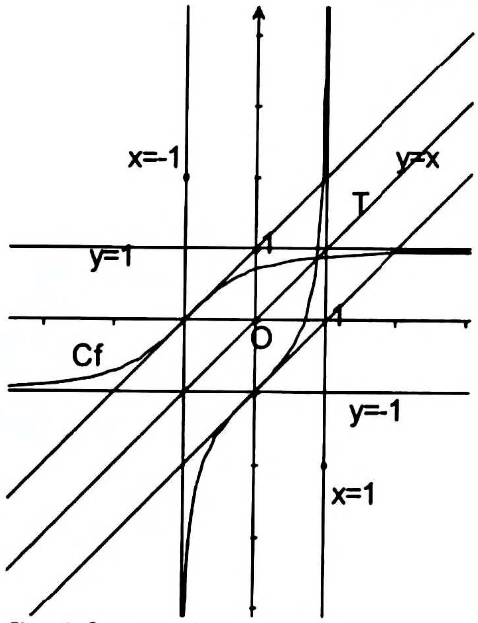
α est unique $\quad (\zeta_f)\cap\Delta=\{A(\alpha,\alpha)\}$

b)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
h(x)		+	0	-	
Position relative	$(\zeta_f)/_{\Delta}$		$A(\alpha,\alpha)$		$\Delta/(\zeta_f)$

4) T :$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

T : $y=x+1$



5) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J=f(\mathbb{R})=]-1,1[$

b) $(\zeta_{f^{-1}})=S_\Delta(\zeta_f) \qquad \Delta$: y=x

EX 12 :

$g(x)=tg(\pi x) \quad ; \quad x\in\left]\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$

1) g est dérivable sur $\left]\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$

$g'(x)=\pi.(1+tg^2(\pi x))>0$

x	$-\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{1}{2}$
g '(x)		+	
g(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-}(\pi x)=(\frac{\pi}{2})^- \\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} tgx=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{(\frac{1}{2})^-} g=+\infty$

2) g est continue et strictement croissante sur $]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}[$

elle réalise donc une bijection de $]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}[$ sur

$g(I)=\left]\lim\limits_{(-\frac{1}{2})^+} g,\lim\limits_{(-\frac{1}{2})^-} g\right[=\mathbb{R}$

3) g est dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

et $g'(x)=\pi.(1+tg^2(\pi x))\neq 0$ d'où g^{-1} est dérivable sur $g(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)=\mathbb{R}$

en particulier g est dérivable sur $]-\infty,0[$

4) $x\in]-\infty,0[$

$G(x)=g^{-1}(x)+g^{-1}(\frac{1}{x})$

a) g^{-1} est dérivable sur $]-\infty,0[$

la fonction U : $x\mapsto\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$

et $U(]-\infty,0[)=]-\infty,0[$

g^{-1} est dérivable sur $]-\infty,0[$

d'où la fonction : $x\mapsto g^{-1}(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $]-\infty,0[$

par suite G est dérivable sur $]-\infty,0[$

$G'(x)=(g^{-1})'(x)+(\frac{1}{x})'.(g^{-1})'(\frac{1}{x})$

$G'(x)=(g^{-1})'(x)-\frac{1}{x^2}.(g^{-1})'(\frac{1}{x})$

calculons $(g^{-1})'(x)$ pour $x\in]-\infty,0[$

on pose $y=g^{-1}(x)$ $x\in]-\infty,0[$, $y\in]-\frac{1}{2},0[$

$g(y)=x \rightarrow tg(\pi y)=x$

$(g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{\pi.(1+tg^2(\pi y))}=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

d'où $G'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}-\frac{1}{x^2}.\frac{1}{\pi(1+\frac{1}{x^2})}=0$ $\forall x\in]-\infty,0[$

b) $G'(x)=0$; $\forall x\in]-\infty,0[$

d'où G est une fonction constante sur $]-\infty,0[$.

$G(-1)=g^{-1}(-1)+g^{-1}(-1)=2g^{-1}(-1)=\frac{-1}{2}$

car $g(\frac{-1}{4})=-1$, $g^{-1}(-1)=\frac{-1}{4}$

$\Rightarrow g^{-1}(x)+g^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{-1}{2}$

$\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{-1}{2}-g^{-1}(\frac{1}{x})$; $\forall x\in]-\infty,0[$

EX 13 :

$h(x)=\cot g(\frac{x}{2})$; $x\in]0,\pi]$

1) $h'(x)=-\frac{1}{2}(1+cotg^2\frac{x}{2})<0$

h est continue et strictement décroissante sur]

elle réalise donc une bijection de $]0,\pi]$

sur $h(]0,\pi])=[h(\pi),\lim_{0^+}h[=[0,+\infty[=\mathbb{R}_+$

2) $\varphi=h^{-1}$

f est dérivable sur $]0,\pi]$

et $h'(x)=\frac{-1}{2}(1+cotg^2(\frac{x}{2}))\neq 0$

d'où φ est dérivable sur $h(]0,\pi])=\mathbb{R}_+$

$\varphi'(x)=\frac{1}{h'(\varphi(x))}$ $(y=\varphi(x)$; $h(y)=x)$

$=\frac{1}{-\frac{1}{2}(1+\cot g^2(\frac{y}{2}))}=\frac{-2}{1+(h(y))^2}$

$\varphi'(x)=\frac{-2}{1+x^2}$

b) $\psi'(x)=\varphi(\frac{1}{x})$; $x\in]0,+\infty[$

$\psi'(x)=-\frac{1}{x^2}.\varphi'(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x^2}(\frac{-2}{1+\frac{1}{x^2}})$

$\psi'(x)=\frac{2}{1+x^2}$

c) $h(\frac{\pi}{2})=1 \Rightarrow \varphi(1)=\frac{\pi}{2}$

on pose : $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$

f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$f'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x)=0$

f est constante sur $]0,+\infty[$

$f(1)=\varphi(1)+\psi(1)=\pi$

d'où $f(x)=\pi$; $\forall x\in]0,+\infty[$

$\Rightarrow$ $\varphi(x)+\psi(x)=\pi$ pour $x>0$

EX 14 :

$f(x)=x.\sqrt{1-x^2}$; $x\in[0,1[$

1) f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1]$

$f'(x)=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x\in]0,1[$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
g'(x)		+	0	-	
g(x)	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

2) $g(x)=f(x)$; $x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

a) g est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ elle réalise donc une bijection de $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ sur $I=g(\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right])=\left[0,\frac{1}{2}\right]$

b) • g^{-1} est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

• g^{-1} est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$

on pose $y=g^{-1}(x)$ avec $x\in[0,\frac{1}{2}]$, $y\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\Leftrightarrow g(y)=x\Leftrightarrow y\sqrt{1-y^2}=x\Leftrightarrow y^2(1-y^2)=x^2$

$\Leftrightarrow y^4-y^2+x^2=0\Leftrightarrow(y^2-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}-x^2$

$\Leftrightarrow\left|y^2-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}-y^2=\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$ car $y^2\le\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x^2})$

$y=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x^2})}$ car $y\ge0$

$g^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2}}$

3) $\begin{cases}U_0=\frac{1}{2}\\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a) * pour n=0 , on a $0\le U_0=\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$ (vrai)

* supposons que : $0\le U_n\le\frac{1}{2}$

et montrons que : $0\le U_{n+1}\le\frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l}0\le U_n\le\frac{1}{2}\\ \text{f est croissantesur }\left[0,\frac{1}{2}\right]\end{array}\right\}\Rightarrow$

$f(0)\le f(U_n)\le f(\frac{1}{2})$

$\Rightarrow0\le U_{n+1}\le\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow0\le U_{n+1}\le\frac{1}{2}$

conclusion : $0\le U_n\le\frac{1}{2}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

3) b) $U_{n+1}-U_n=U_n\sqrt{1-U_n^2}-U_n=U_n.\left[\sqrt{1-U_n^2}-1\right]$

$=U_n.\dfrac{-U_n^2}{\sqrt{1-U_n^2}+1}=\dfrac{-U_n^3}{\sqrt{1-U_n^2}+1}\le0$ car $U_n\ge0$

d'où (U_n) est décroissante

c) * (U_n) est décroissante et minorée par 0 elle est donc convergente

* soit ℓ sa limite

$0\le U_n\le\frac{1}{2}\Rightarrow0\le\ell\le\frac{1}{2}$

$U_{n+1}=f(U_n)$

f est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ d'où $\ell=f(\ell)$

$\ell=f(\ell)\Leftrightarrow\ell\sqrt{1-\ell^2}=\ell\Leftrightarrow\ell^2.(1-\ell^2)=\ell^2\Leftrightarrow-\ell^4=0\Leftrightarrow\ell=0$

d'où $\lim_{x\to+\infty}U_n=0$

EX 15 : $n\geq 2$

$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1$

1) $f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + ... + 2x + 1$

$f_n'(x) > 0 \quad ; \quad \forall x \in [0,1]$

f_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$

elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur $f_n([0,1])$

$f_n([0,1]) = [f_n(0), f_n(1)] = [-1, n-1]$

2) a) f_n est une bijection de $[0,1]$ sur $[-1,n-1]$

comme $0 \in [-1,n-1]$, alors il existe un unique

réel $\alpha_n \in [0,1]$ tel que: $f_n(\alpha_n)=0$

$f_n(0)\times f_n(1)=1-n<0 \Rightarrow 0<\alpha_n<1$

b) pour $x \neq 1$

$x^n+x^{n-1}+...+x = x.(\frac{1-x^n}{1-x})$ comme étant somme de

n termes consécutifsd'une suite géometrique de raison x

$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n(\frac{1-\alpha_n^n}{1-\alpha_n}) - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_n(1-\alpha_n^n) = 1-\alpha_n$

$\Leftrightarrow \alpha_n - \alpha_n^{n+1} = 1 - \alpha_n \Leftrightarrow \alpha_n^{n+1} = 2\alpha_n - 1$

3) a) on a : $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1}$

$f_n(\alpha_n) = 0$

$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 = f_n(\alpha_n)$

$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1}^{n+1} = f_n(\alpha_n)$

$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \leq f_n(\alpha_n)$ car $\alpha_{n+1} \geq 0$

$\Rightarrow \alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ car f_n *est* strictement croissante

par suite (α_n) est décroissante

b) * (α_n) est décroissante et minorée par 0
elle est donc convergente

* $\alpha_n \geq 0$

$\Rightarrow (\alpha_n)^{n+1} \geq 0$

$\Rightarrow 2\alpha_n - 1 \geq 0 \qquad (1)$

déterminons α_2 ?

$f_2(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$ avec $x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(α_n) est décroissante d'où pour $n \geq 2 \Rightarrow \alpha_n \leq \alpha_2$

$\Rightarrow \alpha_n \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow (\alpha_n)^{n+1} \leq (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}$

$\Rightarrow 2\alpha_n - 1 \leq (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1} \qquad (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow 0 \leq 2\alpha_n - 1 \leq (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1} = 0$ car $-1 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$

d'où $\lim_{n\to+\infty} (2\alpha_n - 1) = 0$

$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$

EX 16 :

A/

$f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$

1) a)

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+8} - x) = +\infty$

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+8} - x)$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x^2+8}+x} = 0$

* $\lim_{x\to-\infty} (f(x)+2x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+8}+x)$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{\sqrt{x^2+8}-x} = 0$

b) * $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(ζ_f) admet la droite d'équation : $y=0$

comme asymptote au voisinage de $(+\infty)$

* $\lim_{x\to-\infty} (f(x)+2x) = 0$

$\Delta : y = -2x$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage (

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=-1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}=\frac{x-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$x^2+8>x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+8}>|x| \Rightarrow \sqrt{x^2+8}>x$$

$\Rightarrow x-\sqrt{x^2+8}<0$ d'où $f'(x)<0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	-	
f(x)	$+\infty$ ↘	0

3) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J=f(\mathbb{R})=]0,+\infty[$

4) a) $f(x)=x \Leftrightarrow -x+\sqrt{x^2+8}=x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+8}=2x$

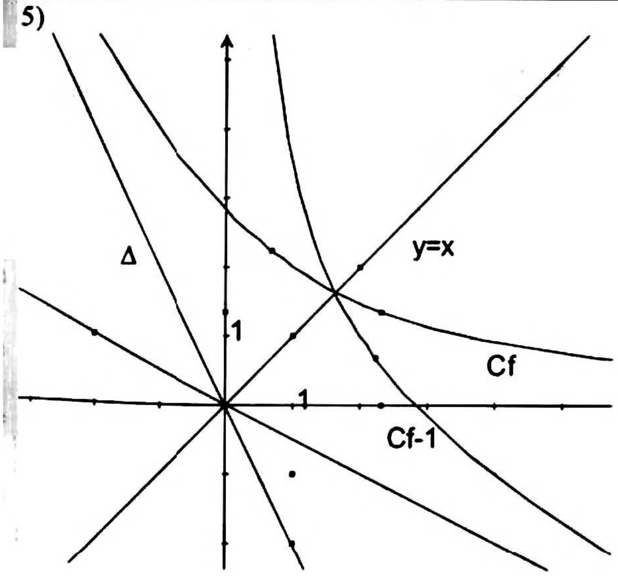
* l'équation f(x)=x n'a pas de solutions dans $]-\infty,0[$
* dans $[0,+\infty[$

$$f(x)=x \Leftrightarrow x^2+8=4x^2 \Leftrightarrow x^2={}^8\!/_3 \Leftrightarrow x=\sqrt{{}^8\!/_3}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{2}{3}\sqrt{6}\right\}$$

b) $(\zeta_f)\cap(\zeta_{f^{-1}})=\left\{A(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3})\right\}$

5)



B/

1) f est continue et strictement décroissante sur $[1,2]$ d'où $f([1,2])=[f(1),f(2)]=[2\sqrt{3}-2\,,2]$

$f([1,2])\subset[1,2]$ car $2\sqrt{3}-2>1$

2) $f'(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

$|f'(x)|=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

$1\le x\le 2 \Rightarrow 1\le x^2\le 4$

$\Rightarrow 9\le x^2+8\le 12 \Rightarrow 3\le\sqrt{x^2+8}\le 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\le\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}}\le\dfrac{1}{3}$

d'où $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\le\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}\le\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}\ge\dfrac{1}{3} \Rightarrow -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}\ge-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow 1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}\le\dfrac{2}{3}$

d'où pour $x\in[1,2]$ $|f'(x)|\le\dfrac{2}{3}$

3) $\begin{cases}U_0=1\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a) * pour n=0 $1\le U_0\le 2$ (vrai)

* supposons que $1\le U_n\le 2$
* montrons que $1\le U_{n+1}\le 2$

$1\le U_n\le 2 \Rightarrow U_n\in[1,2] \Rightarrow f(U_n)\in f([1,2])$

$\Rightarrow U_{n+1}\in[1,2]$ car $f([1,2])\subset[1,2]$

conclusion : $1\le U_n\le 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) d'après 4) a)

$f(\sqrt{{}^8\!/_3})=\sqrt{{}^8\!/_3}$

f est dérivable sur $[1,2]$ et $|f'(x)|\le{}^2\!/_3$

U_n et $\sqrt{8/3} \in [1,2]$

d'aprés le théoréme des inégalités des accroissements finis :

$|f(U_n) - f(\sqrt{8/3})| \leq \frac{2}{3}|U_n - \sqrt{8/3}|$

$\Rightarrow |U_{n+1} - \sqrt{8/3}| \leq \frac{2}{3}|U_n - \sqrt{8/3}|$

c) $|U_1 - \sqrt{8/3}| \leq \frac{2}{3}|U_0 - \sqrt{8/3}|$

$|U_2 - \sqrt{8/3}| \leq \frac{2}{3}|U_1 - \sqrt{8/3}|$

$|U_n - \sqrt{8/3}| \leq \frac{2}{3}|U_{n-1} - \sqrt{8/3}|$

multiplions membre à membre et simplifions :

$|U_n - \sqrt{8/3}| \leq (\frac{2}{3})^n.|1 - \sqrt{8/3}|$

$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{3})^n.|1 - \sqrt{8/3}| = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to\infty}(U_n - \sqrt{8/3}) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} U_n = \sqrt{8/3}$

EX 17 :

1) * $x=\dfrac{\sqrt[3]{3}\sqrt{27}\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}} = \dfrac{\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^4}}$

$= \dfrac{\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt{3}\times 2}{3\sqrt[3]{3}} = 2\sqrt{3}$

* $y=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{32}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{2}$

* $t=\sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

2) $A=\dfrac{\sqrt[3]{2^{10}}\times\sqrt{\sqrt{8^2}}\times\sqrt[5]{3^5\times 2^5}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt[3]{2^8}}} = \dfrac{2^3\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt{8}\times 3\sqrt[5]{2^5}}{3\sqrt{2}.\sqrt{2^2}\times\sqrt[3]{2^2}}$

$= \dfrac{8.\sqrt[3]{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\times 2}{3\sqrt{2}.2\sqrt[6]{4}} = \dfrac{8\sqrt[3]{2}\times 2}{\sqrt[6]{4}} = \dfrac{16\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\sqrt{4}}} = \dfrac{16\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 16$

3) a) $(2+\sqrt{5})^3 = 2^3 + 3\times 2^2\sqrt{5} + 3\times 2\times(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3$

$= 8 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5} = 38 + 17\sqrt{5}$

b) $B=\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} - \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}} \leftarrow$ *n'a* pas de sens

car $38-17\sqrt{5} < 0$

EX 18 :

1) $\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x=(\sqrt[4]{2})^3 \Leftrightarrow x=\sqrt[4]{8}$

$S_{\mathbb{R}} = \{\sqrt[4]{8}\}$

2) $\sqrt[5]{x^2} = \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt[3]{3})^5 \Leftrightarrow x=\sqrt[6]{3^5}$ ou $x=-\sqrt[6]{3^5}$

$S_{\mathbb{R}} = \{\sqrt[6]{3^5}, -\sqrt[6]{3^5}\}$

3) $\sqrt[3]{x^2} - 3.\sqrt[3]{x} + 2 = 0$

dans $\mathbb{R}_+$:

$(E) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^2 - 3.\sqrt[3]{x} + 2 = 0$

on pose $t=\sqrt[3]{x}$

l'équation devient : $t^2 - 3t + 2 = 0$

$t' = 1$ et $t''=2$

$t=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$t=2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8$

$S_{\mathbb{R}} = \{1,8\}$

4) $(1-\sqrt[4]{x})^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x} - 1)^3 = 8$

$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} - 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81$

$S_{\mathbb{R}} = \{81\}$

EX 19 :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x^2 - x + 1)} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$

d'où $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x}{\sin x}} = \sqrt[3]{1} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \sqrt[3]{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}.\left[\sqrt[3]{x^2} - 1\right] = +\infty$

d) on pose $f(x)=\sqrt[3]{x}$

f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

e) on pose $f(x)=\sqrt[3]{\cos x}$

f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{3.\sqrt[3]{\cos^2 x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x}=0$$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$

$$\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3}}=\sqrt[12]{x^3}$$

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^4}}=\sqrt[12]{x^4}$$

$$\sqrt{x}=\sqrt{\sqrt[6]{x^6}}=\sqrt[12]{x^6}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^4}-\sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^4}}{\sqrt[12]{x^3}}-\frac{\sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}-\sqrt[12]{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}.(1-\sqrt[12]{x^2})=-\infty$$

EX 20 :

$f(x)=x^2+\sqrt[4]{x}$; $x\in\mathbb{R}_+$

1) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=2x+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}>0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x+\frac{1}{(\sqrt[4]{x})^3}=+\infty$$

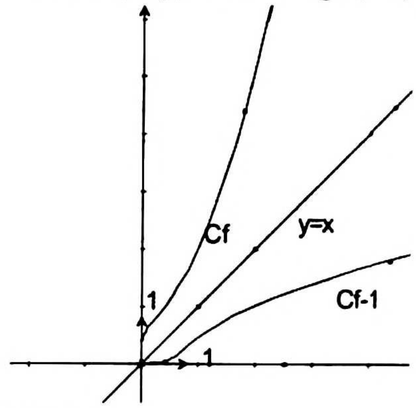
f non dérivable à droite en 0

x	0	+∞
f '(x)	| +	
f(x)	0 ↗	+∞

2) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
d'où f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur
$f(\mathbb{R}_+)=\left[f(0),\lim\limits_{+\infty}f\right[=\mathbb{R}_+=J$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\frac{1}{(\sqrt[4]{x})^3}=+\infty$

(ζ_f) admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage $(+\infty)$



EX 21 :

$f(x)=x.\sqrt[3]{x}$; $x\in\mathbb{R}_+$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}=0$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$

2) comme étant produit de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\sqrt[3]{x}+x\left(\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}\right)=\frac{3\sqrt[3]{x}.(\sqrt[3]{x})^2+x}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$=\frac{4x}{3(\sqrt[3]{x})^2}=\frac{4(\sqrt[3]{x})^3}{3(\sqrt[3]{x})^2}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

$$Rq:\left(\begin{array}{l} f(x)=x^{4/3} \\ f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\end{array}\right)$$

3) $f'(x)>0$; $\forall x\in]0,+\infty[$

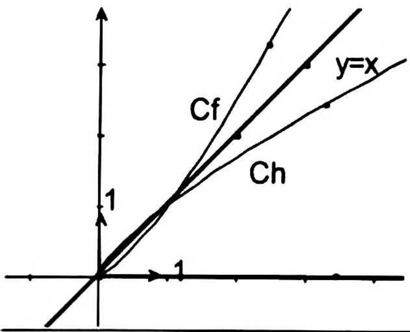
x	0	+∞
f '(x)	+	
f(x)	0 ↗	+∞

4) T : y=f '(1).(x-1)+f(1)

$T : y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$

(ζ) admet une B.P de direction celle de $(O,\vec{j})$



5) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+)=[f(0),\lim_{+\infty} f[=\mathbb{R}_+$

b) $h=f^{-1}$

$h(1)=1$ car $f(1)=1$

f est dérivable en 1 et $f'(1)=\frac{4}{3}\neq 0$

d'où h est dérivable en f(1)=1

et $h'(1)=\frac{1}{f'(h(1))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{3}{4}$

c) $f(x)=x \Leftrightarrow x.\sqrt[3]{x}=x \Leftrightarrow x(\sqrt[3]{x}-1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $\sqrt[3]{x}=1 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

$(\zeta)\cap\Delta=\{O(0,0);A(1,1)\}$

d) $(\zeta_h)=S_\Delta(\zeta)$

EX 22 :

$f(x)=\sqrt[4]{x^2-1}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	-	0	+	

$D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

1) * $x\in D_f \Rightarrow x\leq -1$ ou $x\geq 1 \Rightarrow -x\geq 1$ ou $-x\leq -1$

$\Rightarrow -x\in D_f$

* $f(-x)=\sqrt[4]{(-x)^2-1}=\sqrt[4]{x^2-1}=f(x)$

d'où f est paire

2) pour $x\geq 1$

$f(x)=\sqrt[4]{x^2(1-\frac{1}{x^2})}=\sqrt[4]{x^2}.\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x}.\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}$

b) * $\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^2-1}=+\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}.\sqrt[4]{1-1/x^2}}{x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt[4]{1-1/x^2}=0$

3) a) $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt[4]{x^2-1})^3}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{(\sqrt[4]{x^2-1})^3}=+\infty$

d'où f n'est pas dérivable à droite en 1

b) la fonction : $x\mapsto x^2-1$ est dérivable et strictement positive sur $]1,+\infty[$ d'où

f est dérivable sur $]1,+\infty[$

$f'(x)=\frac{2x}{4.(\sqrt[4]{x^2-1})^3}$

c) $f'(x)>0$; $\forall x\in]1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
f '(x)	| +	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

4) a) Δ: y=x

pour $x \geq 1$ on a :

$x^2-1 \leq x^2 \Rightarrow x^2-1 \leq x^4 \Rightarrow \sqrt[4]{x^2-1} \leq \sqrt[4]{x^4}$

$\Rightarrow f(x) \leq x$

d'où (ζ_f) est au dessous de Δ pour $x \geq 1$

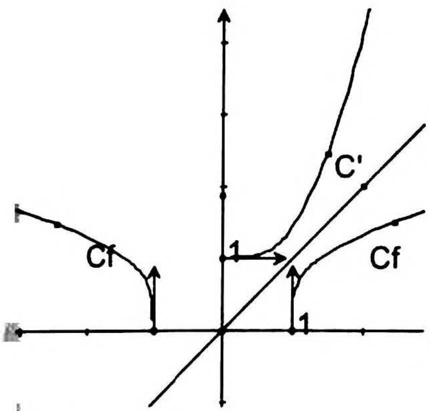
b) f est paire

(ζ_1) : la courbe de la restriction de f sur $[1,+\infty[$

$(\zeta_2) = S_{(Oy)}(\zeta_1)$

$(\zeta_f) = (\zeta_1) \cup (\zeta_2)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (ζ_f) admet un B.P de direction $(O,\vec{i})$



5) a/ f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$

elle réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ sur

$f([1,+\infty[)=\left[f(1), \lim\limits_{+\infty} f\right[= [0,+\infty[= \mathbb{R}_+$

b) * f est dérivable sur $]1,+\infty[$

et $f'(x)=\dfrac{2x}{4(\sqrt[4]{x^2-1})^3} \neq 0$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f(]1,+\infty[)=\mathbb{R}_+^*$

* f n'est pas dérivable à droite en 1

d'où (ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse $1 \Rightarrow (\zeta_{f^{-1}})$ admet une demi tangente horizontale au point d'abscisse f(1)=0

d'où f^{-1} est dérivable à droite en 0 et $(f^{-1})'_d(0)=0$

conclusion: f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

c) $(\zeta')=S_\Delta(\zeta_1)$

EX 23 :

$D_f = \mathbb{R}_+$ $\quad f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3} + 3$

1) a) pour x>0

$\sqrt[3]{x} = \dfrac{x.\sqrt[3]{x}}{x} = \dfrac{x\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^3} = \dfrac{x}{(\sqrt[3]{x})^2} = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

d'où $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{x}{3} + 3 = x.\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3}\right] + 3$

b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x.\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3}\right] + 3 = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{x} = -\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + \frac{1}{3}x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} + 3 = +\infty$

(ζ_f) admet une branche parabolique de direction

celle de la droite D: $y=\frac{-1}{3}x$ au voisinage $(+\infty)$

2) a) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 + \dfrac{3}{x} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

b) • la fonction : $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

• la fonction : $x \mapsto \frac{-x}{3} + 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3}$

c) $f'(x)=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right]$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$; $(x \in \mathbb{R}_+^*) \Leftrightarrow x=1$

• $x>1 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}>1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}<1 \Rightarrow f'(x)<0$

x	0		1		$+\infty$
g'(x)	|	+	0	-	
g(x)	3	↗	$\frac{11}{3}$	↘	$-\infty$

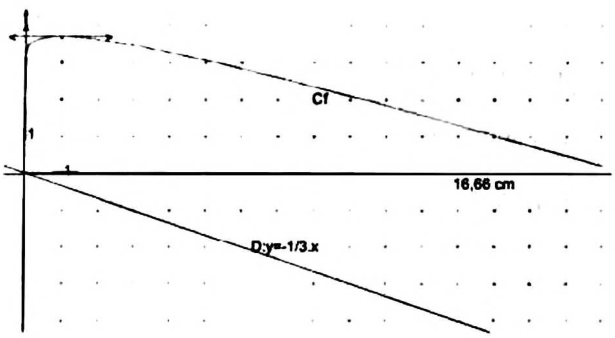
d) * f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$ $f([0,1[)=[3,\frac{11}{3}[$, $0\notin[3,\frac{11}{3}[$ d'où l'équation : $f(x)=0$ n'a pas de solutions dans $[0,1[$

* f est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[)=]-\infty,\frac{11}{3}]$

comme $0\in]-\infty,\frac{11}{3}]$, alors il existe un unique réel $\alpha \in[1,+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$

conclusion : α est l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ dans $\mathbb{R}_+^*$

$f(16,6).f(16,7)<0 \Rightarrow 16,6<\alpha<16,7$ (calculatrice)



EX 24 :

A/ $n\in\mathbb{N}^*$

$f_n(x)=x^{2n+1}+3x-2$

1) a) $f'_n(x)=(2n+1).x^{2n}+3>0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) * pour $x\in D_{f_n}=\mathbb{R}$ on a $(-x)\in D_{f_n}$

* $f_n(-x)=(-x)^{2n+1}+3(-x)-2=-x^{2n+1}-3x-2$
$=-4-(x^{2n+1}+3x-2)=-4-f_n(x)$

conclusion : I(0,-2) est un centre de symétrie pour (ζ_n)

c) $f''_n(x)=2n(2n+1)x^{2n-1}$

f''_n s'annule en 0 en changeant de signe

d'où I(0,-2) est un point d'inflexion de (ζ_n)

2) a) $f_{n+1}(x)-f_n(x)=x^{2n+3}-x^{2n+1}=x^{2n+1}.(x^2-1)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
Position relative		C_n/C_{n+1}	B(-1,-6)	C_{n+1}/C_n	I(0,-2)	C_n/C_{n+1}	A(1,2)	C_{n+1}/C_n	

b) $(\zeta_n)\cap(\zeta_{n+1})=\{I(0,-2);A(1,2);B(-1,-6)\}$

3) a) f_n *est* continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$f_n(\mathbb{R})=]\lim_{-\infty} f_n,\lim_{+\infty} f_n[=\mathbb{R}$

b) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(2n+1)x^{2n}+3\neq 0$ d'où f_n^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$(f_n^{-1})'(-6)=\frac{1}{f'_n(f^{-1}(-6))}=\frac{1}{f'_n(-1)}=\frac{1}{2(n+2)}$$

$$(f_n^{-1})'(2)=\frac{1}{f'_n(1)}=\frac{1}{2(n+2)}$$

$$(f'_n)'(-2)=\frac{1}{f'_n(0)}=\frac{1}{3}$$

4) f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

comme $0\in f_n(\mathbb{R})$ alors il existe un réel x_n tq $f_n(x_n)=0$

$f_n(0)\times f_n(2/3)=(-2)(2/3)^{2n+1}<0$

$\Rightarrow 0<x_n<2/3$

b) $f_n(x_n)=0 \Leftrightarrow x_n^{2n+1}+3x_n-2=0$

$\Leftrightarrow 3x_n=2-x_n^{2n+1} \Leftrightarrow x_n=\frac{2-x_n^{2n+1}}{3}$

c) $0\le x_n\le\frac{2}{3} \Rightarrow 0\le x_n^{2n+1}\le(\frac{2}{3})^{2n+1}$

d) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^{2n+1}=0$ d'où $\lim_{n\to+\infty}x_n^{2n+1}=0$

$$x_n=\frac{2-x_n^{2n+1}}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2-x_n^{2n+1}}{3}=\frac{2}{3}$$

B/ n=1

$f(x)=f_1(x)=x^3+3x-2$

$\alpha = x_1$

1) $\varphi(x)=-\dfrac{f(x)}{f'(x)}+x \qquad x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$

a) $\varphi(x)=x-\dfrac{x^3+3x-2}{3x^2+3}=\dfrac{2x^3+2}{3(x^2+1)}=\dfrac{2}{3}.(\dfrac{x^3+1}{x^2+1})$

pour $x\in\left[0,\frac{2}{3}\right] \Rightarrow 0\le x\le 1$

$\Rightarrow 0\le x^3\le x^2 \Rightarrow 0<1+x^3\le 1+x^2 \Rightarrow 0\le \dfrac{1+x^3}{1+x^2}\le 1$

$\Rightarrow 0\le \dfrac{2}{3}(\dfrac{1+x^3}{1+x^2})\le \dfrac{2}{3} \Rightarrow 0\le \varphi(x)\le \dfrac{2}{3}$

φ est continue sur $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ d'où $\varphi(\left[0,\frac{2}{3}\right])\subset\left[0,\frac{2}{3}\right]$

b) $\varphi(x)-\alpha \overset{?}{=} (x-\alpha)^2\dfrac{(2x+\alpha)}{3(x^2+1)}$. *on* a : $f(\alpha)=0$

$\varphi(x)-\alpha = x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}-\alpha+\dfrac{f(\alpha)}{f'(x)}=(x-\alpha)-\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{f'(x)}$

$=(x-\alpha)-\dfrac{(x^3-\alpha^3)+3(x-\alpha)}{3(1+x^2)}$

$=(x-\alpha)-\dfrac{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2+3)}{3(1+x^2)}$

$=(x-\alpha).\left[1-\dfrac{(x^2+\alpha x+\alpha^2+3)}{3(1+x^2)}\right]$

$=(x-\alpha).\dfrac{2x^2-\alpha x-\alpha^2}{3(1+x^2)}$

$=(x-\alpha).\dfrac{2x^2+\alpha x-(2\alpha x+\alpha^2)}{3(1+x^2)}$

$=\dfrac{(x-\alpha)}{3(1+x^2)}.[x(2x+\alpha)-\alpha(2x+\alpha)]$

$=\dfrac{(x-\alpha)(x-\alpha)(2x+\alpha)}{3(1+x^2)}=\dfrac{(x-\alpha)^2(2x+\alpha)}{3(1+x^2)}$

c) $0\le x\le \frac{2}{3}$ et $0\le\alpha\le\frac{2}{3}$

$\Rightarrow |x-\alpha|\le \frac{2}{3}$

$0\le 2x\le \frac{4}{3} \Rightarrow 0\le 2x+\alpha\le 2$

$\Rightarrow (2x+\alpha)|x-\alpha|\le \frac{4}{3}$

$1+x^2\ge 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2}\le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{3(1+x^2)}\le \frac{1}{3}$

d'où $\dfrac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(1+x^2)}\le\dfrac{4}{9}\le\dfrac{2}{3}$

d) $|\varphi(x)-\alpha|=\dfrac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(1+x^2)}.|x-\alpha|$

or $\dfrac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(1+x^2)}\le\dfrac{2}{3}$

d'où $|\varphi(x)-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|x-\alpha|$

2) $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\varphi(U_n) \end{cases}$

a) * pour n=0 , $0\le U_0\le\dfrac{2}{3}$ (vrai)

* supposons que : $0\le U_n\le\dfrac{2}{3}$

* montrons que : $0\le U_{n+1}\le\dfrac{2}{3}$

$U_n\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\Rightarrow\varphi(U_n)\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$ d'aprés B/1)a)

$\Rightarrow U_{n+1}\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$

conclusion : $0\le U_n\le\dfrac{2}{3}$; $\forall\, n\in\mathbb{N}$

b) d'aprés 1) d) $|\varphi(U_n)-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$

$\Rightarrow |U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$

c) $|U_1-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_0-\alpha|$

$|U_2-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_1-\alpha|$

....

....

$|U_n-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_{n-1}-\alpha|$

multiplions membre par membre et simplifions on aura:

$|U_n - \alpha| \le (\frac{2}{3})^n |0 - \alpha|$

$|U_n - \alpha| \le (\frac{2}{3})^n \alpha$

$\lim_{x\to+\infty} (\frac{2}{3})^n.\alpha = 0$ d'où $\lim_{x\to+\infty} (U_n - \alpha) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} U_n = \alpha$

vérifier que : $f(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}) = 0$

EX 25 :

partie A :

$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$; $\forall x \in [0,1[$

1) a) $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = 0$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$

b) f est dérivable sur $]0,1[$

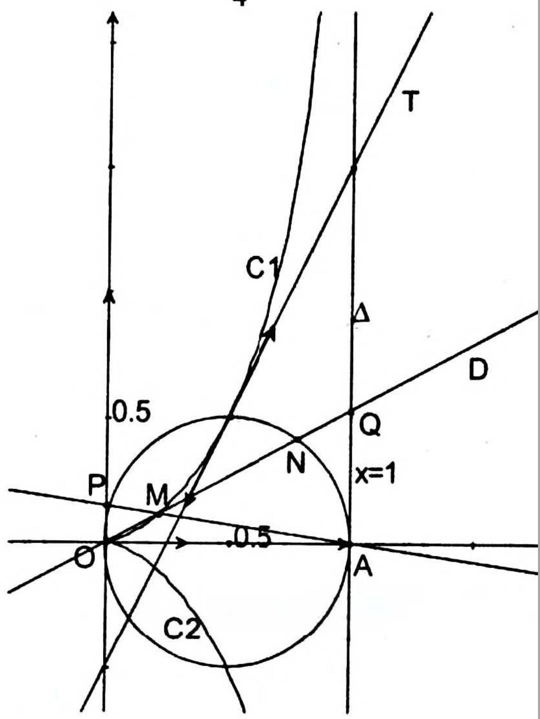
$$f'(x) = \frac{(\frac{x^3}{1-x})'}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}} = \frac{\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}} = \frac{3x-2x^2}{2(1-x)\sqrt{x-x^2}}$$

x	0	1
f '(x)	+	||
f(x)	0 ↗	$+\infty$

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1^-} \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = +\infty$

c) T: $y = f'(\frac{1}{2}).(x-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$

$T : y = 2x + \frac{1}{4}$



2) $C_2 = S_{(Ox)}(C_1)$

3) $C = C_1 \cup C_2$

$M(x,y) \in C \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{x^3}{1-x} \Leftrightarrow x^3 = y^2 - xy^2$

$\Leftrightarrow x.(x^2+y^2) - y^2 = 0$

Partie B : A(1,0)

1) $\Delta: x=1$

$(\zeta):(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$

2) D:y=m.x

3) a) $N(x,y)\in D\cap\zeta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=m.x \\ (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=m.x & (1) \\ (x-\frac{1}{2})^2+m^2.x^2=\frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow x^2-x+m^2x^2=0 \Leftrightarrow x\left[(1+m^2)x-1\right]=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{1}{1+m^2}$

or $N\neq O$

d'où $x=\frac{1}{1+m^2}$ et $y=\frac{m}{1+m^2}$

$N(\frac{1}{1+m^2},\frac{m}{1+m^2})$

b) on a : Q(1,m)

$\overline{OM}=\overline{NQ}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M=x_Q-x_N \\ y_M=y_Q-y_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=\frac{m^2}{1+m^2} \\ y_M=\frac{m^3}{1+m^2} \end{cases}$$

c) $x_M.(x_M^2+y_M^2)-y_M^2=0$

d'où $M\in C$

4) $M(x,y)\in C \Leftrightarrow x(x^2+y^2)-y^2=0$

a) pour x=0 on aura y=0 ; M=O $\in(\Gamma)$

b) $x\neq 0$; $m=\frac{y}{x}\to y=mx$

$x.(x^2+y^2)-y^2=0$ d'où $x(x^2+m^2x^2)-m^2x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2.\left[(1+m^2)x-m^2\right]=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{m^2}{1+m^2}$ (car $x\neq 0$) et $y=\frac{m^3}{1+m^2}$

$M\in(\Gamma)$ d'aprés 3) b)

c) $\left.\begin{array}{l} M\in(\Gamma)\Rightarrow M\in C \\ M\in C\Rightarrow M\in(\Gamma) \end{array}\right\rangle$ d'où $(\Gamma)=C$

partie C :

$t>0$. $D_t: y=t.x$

d'aprés B/ on a : $M(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{t^3}{1+t^2})$

A(1,0) $P(0,y_p)$

$\overline{AP}\begin{pmatrix}-1\\ y_p\end{pmatrix}$ $\overline{AM}\begin{pmatrix}\frac{-1}{1+t^2}\\ \frac{t^3}{1+t^2}\end{pmatrix}$

$\det(\overline{AP},\overline{AM})=0 \Leftrightarrow \frac{-t^3}{1+t^2}+\frac{y_p}{1+t^2}=0 \Leftrightarrow y_p=t^3$

d'où $P(0,t^3)$

b) A(1,0) ; Q(1,t)

$AQ=\sqrt{0^2+t^2}=|t|=t$

2) $OP=t^3$ et $AQ=t$

$AQ^3=OP$

$AQ=\sqrt[3]{OP}$

prenons OP=t on aura $AQ=\sqrt[3]{t}$

EX 26 :

partie A :

$f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x)$; $x\in[0,1]$

1) a) f est dérivable sur $[0,1]$

$f'(x)=\frac{\pi}{2}.\cos(\frac{\pi}{2}x)$

$0\leq x\leq 1 \Rightarrow 0\leq\frac{\pi}{2}x\leq\frac{\pi}{2} \Rightarrow f'(x)\geq 0$

x	0		1
f '(x)		+	0
f(x)	0	↗	1

f est continue et strictement croissante sur [0,1] elle réalise donc une bijection de [0,1] sur f([0,1])=[f(0),f(1)]=[0,1]

b) $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$

2) a) f est dérivable sur $[0,1[$

et $f'(x)=\frac{\pi}{2}.\cos(\frac{\pi}{2}x) \neq 0 \forall x \in [0,1[$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f([0,1[)=[0,1[$

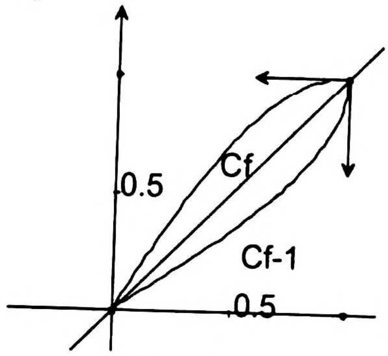
b) $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{1}{2}))} = \frac{1}{f'(\frac{1}{3})} = \frac{4}{\pi.\sqrt{3}}$

c) $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)}$ (avec $y=f^{-1}(x)$; $f(y)=x$)

$= \frac{2}{\pi\cos(\frac{\pi}{2}y)} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-\sin^2(\frac{\pi}{2}y)}}$ (car $\cos(\frac{\pi}{2}y) > 0$)

$= \frac{2}{\pi.\sqrt{1-f^2(y)}} = \frac{2}{\pi.\sqrt{1-x^2}}$

3)



4) $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$

a) pour $1 \leq k \leq n$

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f(\frac{1}{n^2}) \leq f(\frac{k}{n^2}) \leq f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n^2}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n^2}) \leq V_n \times n \leq \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow n.f(\frac{1}{n^2}) \leq n.V_n \leq n.f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow f(\frac{1}{n^2}) \leq V_n \leq f(\frac{1}{n})$

b) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$ f est continue en 0 à droit

d'où $\lim_{n \to +\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0) = 0$

de meme : $\lim_{n \to +\infty} f(\frac{1}{n^2}) = 0$

d'où $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$

5) on pose $\varphi(x)=\frac{1}{f(x)} - \frac{\pi}{2}.x$

φ est dérivable sur $]0,1[$

$\varphi'(x) = -\left[\frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{\pi}{2}\right] < 0$

φ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$

elle réalise donc une bijection de $]0,1[$

sur $\varphi(]0,1[) =]\lim_{1}\varphi, \lim_{0}\varphi[=]1-\frac{\pi}{2},+\infty[$

comme $0 \in]1-\frac{\pi}{2},+\infty[$, *alors* il existe un unique ré

α tq $\varphi(\alpha)=0$

par suite l'équation : $\frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2}x$ admet α comme unique solution dans $]0,1[$

$\varphi(\frac{1}{2}) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$

$\varphi(]\frac{1}{2},1[) =]1-\frac{\pi}{2},\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}[$

comme $0 \in \varphi(]\frac{1}{2},1[)$ alors $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$

partie B :

1) $g(x)=f^{-1}(\sin x)+f^{-1}(\cos x)$

a) la fonction : $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

et $\sin\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0,1[$

comme f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$ alors:

la fonction : $x \mapsto f^{-1}(\sin x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

• de meme la fonction : $x \mapsto f^{-1}(\cos x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

par suite g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$g'(x)=\cos x.(f^{-1})'(\cos x)-\sin x.(f^{-1})'(\cos x)$

$$=\frac{2\cos x}{\pi.\sqrt{1-\sin^2 x}}-\frac{2\sin x}{\pi\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}=0$$

b) $g'(x)=0 \quad ; \ \forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

d'où g est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

d'où $g(x)=1 \quad ; \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow f^{-1}(\sin x)+f^{-1}(\cos x)=1$

2) $h(x)=2x.\sqrt{1-x^2} \quad ; x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$

a) $h'(x)=2\sqrt{1-x^2}+2x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$=\frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

x	0		½
h '(x)		+	
h(x)	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) h est continue et strictement croissante sur [0,½]

$\Rightarrow h([0,½])=[h(0),h(½)]=\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

3) $k(x)=f^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

$k(x)=f^{-1}\circ h(x)$

h est dérivable sur [0,½] et $h([0,½])=\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

comme f^{-1} est dérivable sur $\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

alors $k=f^{-1}\circ h$ est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

$$k'(x)=h'(x).(f^{-1})'(h(x))=\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{2}{\pi\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}$$

$$=\frac{2(2-4x^2)}{\pi.\sqrt{1-x^2}.\sqrt{(1-2x^2)^2}}=\frac{4.(1-2x^2)}{\pi(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{4}{\pi.\sqrt{1-x^2}}$$

$k'(x)=2(f^{-1})'(x)$

$k(x)=2f^{-1}(x)+c \quad ; \ \forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$

$k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2.f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+c \Rightarrow 1=1+c \Rightarrow c=0$

d'où $f^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})=2.f^{-1}(x)$

EX 27 :

partie A :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) pour x>0

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+x^2-1}{x(1+\sqrt{1+x^2})}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}=0=f(0)$$

$\Rightarrow f$ est continue à droite en 0

b) pour x>0

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

$$=\frac{(1+x^2)-1}{x^2\left[1+\sqrt{1+x^2}\right]}=\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}=f_d'(0)$$

c) $T:y=\frac{1}{2}x\quad;\ x\geq 0$

pour x>0

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}-\frac{1}{2}x=\frac{2\sqrt{1+x^2}-(2+x^2)}{2x}$$

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{2(1+x^2)-(2+x^2)^2}{2x\left[2\sqrt{1+x^2}+(2+x^2)\right]}$$

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{-x^3}{2\left[2\sqrt{1+x^2}+(2+x^2)\right]}\leq 0$$

(ζ_f) est au dessous de (T)

d) pour x>0

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}x-(-1+\sqrt{1+x^2})}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-\sqrt{1+x^2}(-1+\sqrt{1+x^2})}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

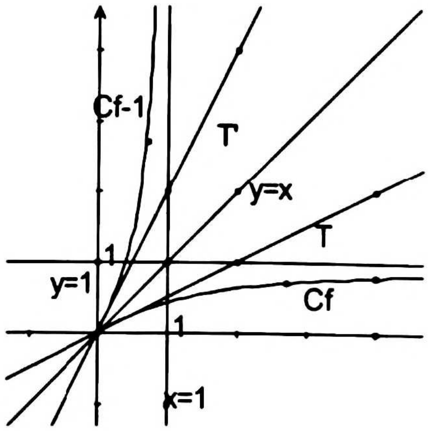
$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}>0\qquad \text{car } 1+x^2>1$$

x	0	+∞
f '(x)	+	
f(x)	0 ↗	1

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=1$$

e) y=1 est une asymptote à (ζ_f)

au voisinage $(+\infty)$



2) a) f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur J

$J=f(\mathbb{R}_+)=[0,1[$

b) on pose : $y=f^{-1}(x)\quad x\in]0,1[\ ,\ y\in\mathbb{R}_+^*$

$$\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1+y^2}-1}{y}=x\Leftrightarrow\sqrt{1+y^2}=xy+1$$

$$\Leftrightarrow 1+y^2=x^2y^2+2xy+1\Leftrightarrow y\left[(1-x^2)y-2x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)y=2x\ \text{ car } y\neq 0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{2x}{1-x^2}\qquad \text{pour } x=0\ \to\ y=0$$

d'où $f^{-1}(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}\quad;\ \forall x\in[0,1[$

c) $(\zeta_{f^{-1}})=S_\Delta(\zeta_f)\qquad$ avec $\Delta:y=x$

partie B :

$g(x)=f(x)\quad$ pour $x\in[0,1]$

$$\begin{cases}U_0=1\\U_{n+1}=g(U_n)\end{cases}$$

1) a) * pour n=0 ,on a : $0\leq U_0\leq 1$ (vrai)

* supposons que : $0\leq U_n\leq 1$

* montrons que : $0\leq U_{n+1}\leq 1$

$0\leq U_n\leq 1\Rightarrow g(0)<g(U_n)\leq g(1)$

car g est strictement croissante sur $[0,1]$

d'où $0<U_{n+1}\leq\sqrt{2}-1\leq 1$

conclusion : $0\leq U_n\leq 1\quad;\forall\ n\in\mathbb{N}$

) pour $x \in]0;1]$

$$x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{(1+x^2)-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

$(x) \leq \frac{1}{2}x$ d'aprés 1) c)

$g(x)=\frac{1}{2}x$ d'où $g(U_n) \leq \frac{1}{2}U_n$

$U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

) * pour n=0 $U_0 = 1 \leq \frac{1}{2^0} = 1$ (vrai)

* supposons que $U_n \leq (\frac{1}{2})^n$

* montrons que : $U_{n+1} \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$

a : $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$ et $U_n \leq (\frac{1}{2})^n \Rightarrow U_{n+1} \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$

nclusion : $U_n \leq \frac{1}{2^n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$) \leq U_n \leq (\frac{1}{2})^n$

$(\frac{1}{2})^n = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = 0$

a) $U_{n+1} = f(U_n) \Rightarrow U_n = f^{-1}(U_{n+1})$

$$= \frac{2U_{n+1}}{1-(U_{n+1})^2}$$

b) * pour n=0 , $U_0 = 1 = tg(\frac{\pi}{2^{0+2}})$ (vrai)

* supposons que : $U_n = tg(\frac{\pi}{2^{n+2}})$

* montrons que : $U_{n+1} = tg(\frac{\pi}{2^{n+3}})$

$$U_{n+1} = g(U_n) = \frac{U_n}{1+\sqrt{1+U_n^2}}$$

$$= \frac{U_n}{1+\sqrt{1+tg^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})}} \qquad (1+tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x})$$

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{1+\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})}} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})tg(\frac{\pi}{2^{n+2}})}{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{2^{n+2}})}{2\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})} = \frac{2\sin(\frac{\pi}{2^{n+3}})\cos(\frac{\pi}{2^{n+3}}).}{2\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+3}})}$$

car : $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$; $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

d'où $U_n = tg(\frac{\pi}{2^{n+3}})$

conclusion : $U_n = tg(\frac{\pi}{2^{n+2}})$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $V_n = 2^n.U_n = 2.tg(\frac{\pi}{2^{n+2}}) = 2^n tg(\frac{1}{2^n}.\frac{\pi}{4})$

$$V_n = \frac{tg(\frac{1}{2^n}.\frac{\pi}{4})}{1/2^n} = h(\frac{1}{2^n}) \quad \text{avec } h(x)=\frac{tg(\frac{\pi}{4}x)}{x}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{tg(\frac{\pi}{4}x)}{x} = \frac{\pi}{4}$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = \frac{\pi}{4}$

EX 28 :

partie A :

$f(x)=\sqrt{1+tgx}$; $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

1) a) * pour $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, tgx>-1 $\Rightarrow$ 1+tgx>0

* la fonction : $x\mapsto 1+tgx$ est dérivable et strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

d'où f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

* $f'(x)=\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{1+tgx}}$

b) $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

$$\frac{f(x)-f(-\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{1+tgx}}{x+\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{1+tgx}{x+\frac{\pi}{4}}\right).\frac{1}{\sqrt{1+tgx}}$$

* $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\frac{1}{\sqrt{1+tgx}}=+\infty$

* on pose : $\varphi(x)=1+tgx$; φ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

et $\varphi'(x)=1+tg^2x$

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\frac{1+tgx}{x+\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(-\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}=\varphi'(-\frac{\pi}{4})=2$$

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\frac{f(x)-f(-\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\left(\frac{1+tgx}{x+\frac{\pi}{4}}\right).\frac{1}{\sqrt{1+tgx}}=+\infty$$

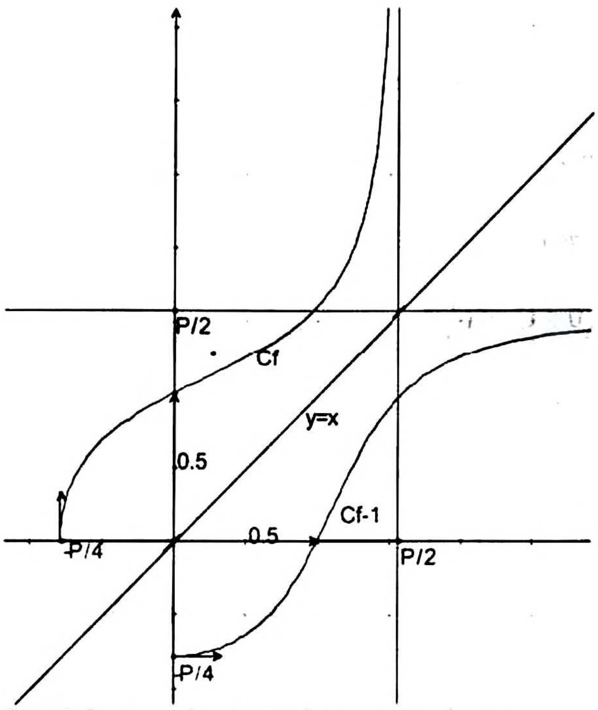
f n'est pas dérivable en $(-\frac{\pi}{4})$ à droite

* (ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse $(-\frac{\pi}{4})$

c) pour $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x)=\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{1+tgx}}>0$$

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f '(x)	|	+	
f(x)	0	↗	+∞



2) a) f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ elle réalise donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ sur J =[0,+∞[

b) $g=f^{-1}$

$f(-\frac{\pi}{4})=0\rightarrow g(0)=-\frac{\pi}{4}$

$f(0)=1\rightarrow g(1)=0$

$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\rightarrow g(\sqrt{2})=\frac{\pi}{4}$

c) $(\zeta_g)=S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ : y=x(voir figure)

3) (ζ_g) admet une demi tangente horizontale au point d'abscisse 0

$\Rightarrow$ g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$

* f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

et $f'(x)=\dfrac{1+tg^2x}{2\sqrt{1+tgx}}\neq 0$

d'où g est dérivable sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]0,+\infty\right[$

conclusion : g est dérivable sur $J=\left[0,+\infty\right[$

pour $x\in\left]0,+\infty\right[$

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

soit $y=g(x)$, $f(y)=x$; $\sqrt{1+tgy}=x, tgy=x^2-1$

$$g'(x)=\frac{2\sqrt{1+tgy}}{1+tg^2y}=\frac{2\sqrt{1+x^2-1}}{1+(x^2-1)^2}=\frac{2|x|}{x^4-2x^2+2}$$

$$g'(x)=\frac{2x}{x^4-2x^2+2}\quad car\ x>0$$

* $g'_d(0)=0=\dfrac{2\times 0}{0^4-2\times 0^2+2}$

d'où $g'(x)=\dfrac{2x}{x^4-2x^2+2}$; $\forall x\in\mathbb{R}_+$

4) $U_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}g(k)$; $(n\in\mathbb{N})$

a) f est strictement croissane sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

d'où g est strictement croissante sur $\left[0,+\infty\right[$

$n\le k\le 2n\Rightarrow g(n)\le g(k)\le g(2n)$

$\Rightarrow \sum_{k=n}^{2n}g(n)\le\sum_{k=n}^{2n}g(k)\le\sum_{k=n}^{2n}g(2n)$

$\Rightarrow (n+1).g(n)\le(n+1).U_n\le(n+1).g(2n)$

$\Rightarrow g(n)\le U_n\le g(2n)$

b) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}g(n)=\lim_{n\to+\infty}(2n)=\dfrac{\pi}{2}$

d'où $\lim_{x\to+\infty}U_n=\dfrac{\pi}{2}$

partie B :

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x>0\\ \frac{\pi}{4} & \text{si } x=0\end{cases}$$

1) a) * h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

comme étant composée de 2 fonctions continues

* continuité en 0: $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\dfrac{\pi}{2}$

d'où $\lim_{x\to 0^+}h(x)=\dfrac{\pi}{4}=h(0)$

h est continue à droite en 0

conclusion : h est continue sur $\mathbb{R}_+$

b) la fonction : $x\mapsto 1+\dfrac{1}{x}$ est dérivable

et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où la fonction U: $x\mapsto\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$U(\mathbb{R}_+^*)=\left]1,+\infty\right[$

comme g est dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$

alors h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$h'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)'.g'\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right].g'\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$g'\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^4-2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2+2}=\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

d'où $h'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\dfrac{-1}{2(x^2+1)}$

2) a) x>0

h est continue sur [0,x] et dérivable sur]0,x[.

d'a^prés le théorème des accroissements finis il existe c $\in$]0,x[

tq : $h(x)-h(0)=(x-0)h'(c)\Leftrightarrow h(x)-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{-x}{2(1+c^2)}$

b) pour x>0

$$\frac{h(x)-h(0)}{x}=\frac{-1}{2(1+c^2)}$$

lorsque $x\to 0^+$

$c\to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{c\to 0^+}\frac{-1}{2(1+c^2)}=-\frac{1}{2}$$

d'où h est dérivable à droite en 0 et $h'_d(0)=-\frac{1}{2}$

c) $h'(x)=\frac{-1}{2(1+x^2)}<0$

x	0	$+\infty$
h '(x)	-	
h(x)	$\frac{\pi}{4}$ ↘	0

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1$$

d'où $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\frac{1}{2}g(1)=0$

3) $h(x)=x \Leftrightarrow h(x)-x=0$

pour $x\in\mathbb{R}_+$ on pose $\psi(x)=h(x)-x$

$$\psi'(x)=\frac{-1}{2(1+x^2)}-1<0$$

$$\psi(0)=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\psi(x)=\lim_{x\to+\infty}h(x)-x=-\infty$$

ψ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$,

elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur

$$\psi(\mathbb{R}_+)=\left]-\infty,\frac{\pi}{4}\right]$$

comme $0\in\psi(\mathbb{R}_+)$

alors il existe un unique réel $\alpha\in\mathbb{R}_+$

tq $\psi(\alpha)=0$

$$\psi(0)=\frac{\pi}{4}$$

$$\psi(1)=\frac{1}{2}g(\sqrt{2})-1=\frac{\pi}{8}-1$$

$\psi(0)\times\psi(1)<0\Rightarrow 0<\alpha<1$

b) $|h'(x)|=\frac{1}{2(1+x^2)}$

$$x^2\geq 0\Rightarrow 1+x^2\geq 1\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}\leq 1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2(1+x^2)}\leq\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow|h'(x)|\leq\frac{1}{2}$$

4) $\begin{cases}V_0\in\mathbb{R}_+/\{\alpha\}\\ V_{n+1}=h(V_n)\end{cases}$

a) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $|h'(x)|\leq\frac{1}{2}$

α et $V_n\in\mathbb{R}_+$

d'aprés le théorème des inégalités des accroissements finis :

$$|h(V_n)-h(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|V_n-\alpha|$$

$$\Rightarrow|V_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|V_n-\alpha|$$

b) $|V_1-\alpha|\leq\frac{1}{2}|V_0-\alpha|$

$|V_2-\alpha|\leq\frac{1}{2}|V_1-\alpha|$

$|V_3-\alpha|\leq\frac{1}{2}|V_2-\alpha|$

....

....

$|V_n-\alpha|\leq\frac{1}{2}|V_{n-1}-\alpha|$

multiplions membre à membre et simplifions on aura:

$$|V_n-\alpha|\leq(\frac{1}{2})^n|V_0-\alpha|$$

$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n|V_0-\alpha|=0$ d'où $\lim_{n\to+\infty}(V_n-\alpha)=0$

$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}V_n=\alpha$

Q.C.M :

1. $x \to 1 + tg^2 x$
2. $x \to 1 - Cos\, x$
3. impaire
4. $x \to \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2}$
5. $x \to x \sin x + Cos\, x$

Vrai - Faux :

1. (Vrai)

En effet : cette primitive est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où elle est continue sur $\mathbb{R}$

2. (VRAI)

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \sin x \succ 0 \\ 0 & \sin x = 0 \end{cases}$$

F *et dérivable sur* $]0,+\infty[$

$$F'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2(\frac{-1}{x^2} Cos\frac{1}{x})$$

$$F'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - Cos(\frac{1}{x})$$

$F'(x) = f(x)$ *pour* $x \succ 0$

Montrons que F *est dérivable à droite en* 0 *et*

$F_d'(0) = f(0) = 0$

pour $x \succ 0$

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = x \sin(\frac{1}{x})$$

$$-1 \le \sin(\frac{1}{x}) \le 1 \Rightarrow$$

$$-x \le x \sin(\frac{1}{x}) \le x$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-x) = \lim_{x\to 0^+}(x) = 0$$

d'ou

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = 0 = f(0)$$

Conclusion : F est une primitive de f

3. (FAUX)

Contre exemple :

$f(x) = 1 \to F(x) = x$

$g(x) = x \to G(x) = \frac{1}{2}x^2$

$(F.G)(x) = \frac{1}{2}x^3$

$(F.G)'(x) = \frac{3}{2}x^2 \ne (f.g)(x)$

4. (FAUX)

$F(2x) \xrightarrow{dérivée} 2.f(2x)$

5. (VRAI)

Thérèse du cours :

Il existe une unique primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donnée.

EX 1 :

1. $f(x)=-5x^4+2x-3$

$I=\mathbb{R}$

$F(x)=-x^5+x^2-3+k\ ;(k\in\mathbb{R})$

2. $f(x)=(x+2)-\frac{3}{x^2}\ ; I=\left]-\infty,0\right[$

$f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2+\frac{3}{x}+k\ (k\in\mathbb{R})$

3. $f(x)=\frac{3x}{(3x^2+2)^2}\ ; I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{3x^2+2}\right)+k\ ;(k\in\mathbb{R})$

4. $f(x)=(-x+3)^6\quad I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{-1}{7}(-x+3)^7+k\quad(k\in\mathbb{R})$

5. $f(x)=(x-1).(x^2-2x+7)^4\ I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{10}(x^2-2x+7)^5+k$

6. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{-4x+3}}$

$I=\left]-\infty,\frac{3}{4}\right[$

$F(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{-4x+3}+k$

7. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}.Cos(\sqrt{x})\ ; I=\left]0,+\infty\right[$

$F(x)=2\sin(\sqrt{x})+k$

8. $f(x)=\frac{x^2+1}{(x^3+3x)^5}$

$F(x)=\frac{-1}{12(x^3+3x)^4}+k$

9. $f(x)=\sin(2x+1).Cos^4(2x+1)$

$F(x)=\frac{-1}{10}Cos^5(2x+1)+k$

10. $f(x)=x^2.\sin(x^3+1)$

$F(x)=-\frac{1}{3}Cos(x^3+1)+k$

11. $f(x)=\frac{\sin x}{(1+Cos\ x)^3}$

$F(x)=+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+Cos\ x)^2}\right)+k$

12. $f(x)=\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^4}$

$F(x)=\frac{-3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{3x^3}+k$

$F(x)=\frac{2-6x-9x^2}{3x^3}+k$

13. $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$

$F(x)=2\sqrt{x^2-x}+k$

14. $f(x)=(1+tg^2x)-1$

$F(x)=tgx-x+k\quad(k\in\mathbb{R})$

Ex 2 :

1. *soit F une primitive de f sur* $[-2,2]$

$F'(x)=f(x$

pour $x\in[-2,-1)\to f(x)\le 0$

$x\in[-1,0]\to f(x)\ge 0$

$x\in[0,1]\to f(x)\le 0$

$x\in[1,2]\to f(x)\ge 0$

par exemple :

F est croissante sur $[-1,0]$

or graphiquement :

h est decroissante sur $[-1,0]$

d'ou h n'est pas une primitive de f

par suit : g est primitive de f

2. *soit H : une primitive de h*

$H'(x)=h(x);\ \forall x\in[-2,2]$

graphiquement : $h(0)\neq 0$

$\Rightarrow H'(0)\neq 0$

$\Rightarrow(\varsigma_H)$ *n'admet pas une tgte horizentale au point d'assisse 0*

$\Rightarrow(\varsigma_H)\neq(\varsigma_g)$

d'ou f est une primitive de h sur $[-2,2]$

EX 3 :

1. $f(x)=\sqrt{x+1}$

$F(x)=\frac{2}{3}(x+1).\sqrt{x+1}$

2. $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$

$F(x)=\frac{1}{3}(1+x^2).\sqrt{1+x^2}$

3. $f(x)=(x-3).\sqrt{x^2-6x}$

$F(x)=\frac{1}{3}(x^2-6x).\sqrt{x^2-6x}$

4. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\frac{(x-1)+2}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{2}{\sqrt{x-1}}$

d'où:

$F(x)=\frac{2}{3}(x-1).\sqrt{x-1}+4\sqrt{x-1}$

$F(x)=(\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}).\sqrt{x-1}$

5. $f(x)=(x+\frac{1}{2}).(x^2+x)^7$

$F(x)=\frac{1}{16}(x^2+x)^8$

6. $f(x)=\frac{1}{x^2}.\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}}$

$(\frac{3}{2x}+\frac{1}{2})'=\frac{-3}{2x^2}$

$f(x)=\frac{-2}{3}\left[\frac{-3}{2x^2}\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}}\right]$

$F(x)=\frac{-2}{3}.(\frac{2}{3})(\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}).\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}}$

$F(x)=\frac{-4}{9}(\frac{3+x}{2x})\sqrt{\frac{3+x}{2x}}$

$F(x)=\frac{-2(3+x)}{9x}\sqrt{\frac{3+x}{2x}}$

7. $f(x)=(x+1)^{2009}-(x+1)^{2008}$

$F(x)=\frac{1}{2010}(x+1)^{2010}-\frac{1}{2009}(x+1)^{2009}$

Ex 4 :

1. f(x)=tg x+tg^3 x

f est continue sur I= $[0,\frac{\pi}{2}[$ d'où f admet des primitives sur I

$f(x)=(1+tg^2x).tg\ x$

(de la forme U'.U)

D'où

$F(x)=\frac{1}{2}tg^2x+k$

$F(\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow\frac{1}{2}+k=1$

$\Rightarrow k=\frac{1}{2}$

$F(x)=\frac{1}{2}(1+tg^2\ x)$

2. f(x)=Cos(x)-Cos^3 (x)

f est continue sur I= IR

f admet donc des primitives sur I

f (x)=Cos x (1-Cos^2 x)

f (x)=Cos x . sin^2 (x)

d'où

$F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x+k$

$F(\frac{\pi}{2})=-1\Rightarrow-\frac{1}{3}+k=-1$

$\Rightarrow k=-\frac{2}{3}$

$F(x)=\frac{1}{3}(-2+\sin^3 x)$

3. f est continue sur I= $\mathbb{R}$ d'où f admet des primitives sur I

$f(x) = \sin x(1-\sin^2 x)$

$f(x) = \sin x . Cos^2 x$

$F(x) = \frac{-1}{3} Cos^3 x + k$

$f(\frac{-\pi}{4}) = 2 \Rightarrow \frac{-1}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2})^3 + k = 2$

$\Rightarrow k = 2 + \frac{\sqrt{2}}{12}$

$F(x) = \frac{-1}{3} Cos^3 x + 2 + \frac{\sqrt{2}}{12}$

4. f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

$f(x) = \frac{1}{Cos^2 x}(1 + tg\ x)$

(de la forme U'.U)

$F(x) = \frac{1}{2}(1+tg\ x)^2 + k$

$F(\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow k = -2$

$F(x) = \frac{1}{2}(1+tg\ x)^2 - 2$

EX 5 :

1. $f(x) = Cos(x).Cos(3x)$

$g(x) = \sin x . \sin(3x)$

$a)$

$*(f+g)(x) = Cos\ x . Cos\ 3x + \sin x \sin 3x$

$= Cos(3x - x)$

$= Cos\ 2x$

$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ *est une primitive de* $(f+g)$ *sur IR*

$*(f-g)(x) = Cos\ 4x$

$\psi(x) = \frac{1}{4}\sin 4x$

est une primitive de (f-g) sur IR

b).

$(\varphi + \psi)'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x)$

$= (f+g)(x) + (f-g)(x)$

$= 2f(x)$

$F(x) = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)(x)$ est une primitive de f sur IR

$F(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\sin(4x) + k \quad k \in IR$

$(\varphi - \psi)'(x) = (f(x) + g(x)) - (f(x) - g(x))$

$= 2g(x)$

$G(x) = \frac{1}{2}(\varphi - \psi)(x)$

G est une primitive de g sur IR

$G(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{8}\sin(4x) + k \quad k \in IR$

2.

$h(x) = \sin 4x + Cos x . \sin 4x$

$h(x) = \sin 4x + 2Cos x . \sin 2x\ Cos 2x$

$= \sin 4x + 4\sin x . Cos^2 x\,(Cos\ 2x)$

$= \sin 4x + 4\sin x . Cos^2 x\,(2Cos^2 x - 1)$

$= \sin 4x + 8\sin x . Cos^4 x - 4\sin x\ Cos^2 x$

$H(x) = \frac{-1}{4} Cos\ 4x - \frac{8}{5} Cos^5 x + \frac{4}{3} Cos^3 + k$

$H(\pi) = 0 \Rightarrow \frac{8}{5} - \frac{4}{3} + k = 0$

$k = \frac{-4}{15}$

$H(x) = \frac{1}{4} Cos\ 4x - \frac{8}{5} Cos^5 x + \frac{4}{3} Cos^3 x - \frac{4}{15}$

EX 6 :

$f(x) = x . \sin x$

1. *f est dérivable sur* $\mathbb{R}$

(produit de 2 fonction dérivables)

$f'(x) = \sin x + x\ Cos\ x$

f' *est dérivable sur* $\mathbb{R}$

$f''(x) = Cos\ x + Cos\ x - x \sin x$

$f''(x) = 2\ Cos\ x - f(x)$

$\Rightarrow f(x) = 2\ Cos\ x - f''(x)$

2. $F(x) = +2\sin x - f'(x) + k$

$F(x) = 2\sin - \sin x - x\ Cos\ x + k$

$F(x) = \sin x - x\ Cos\ x + k$

$F(\pi) = 0 \Rightarrow k = -\pi$

d'où :

$F(x) = \sin x - x\ Cos\ x - \pi$

EX 7 :

$f(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^4}$

$f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}+\dfrac{d}{(x+1)^4}$

1. a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4.f(x)=$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+2)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1).f(x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^4}=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{x^2}{x^4}$

$=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

b) $(x+1)^4.f(x)=$

$a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^2f(x)=d$

or $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4f(x)=1$ d'où $d=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}+\dfrac{d}{(x+1)^3})=a$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)=0$

d'où $a=0$

$f(x)=\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}+\dfrac{1}{(x+1)^4}$

2. a) $\dfrac{x+2}{(x+1)^4}=\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}+\dfrac{1}{(x+1)^4}$

$\Rightarrow\dfrac{x+2}{(x+1)^4}-\dfrac{1}{(x+1)^4}=\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{(x+1)^3}=\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow\dfrac{1-c}{(x+1)^3}=\dfrac{b}{(x+1)^2}$

b) $\dfrac{1-c}{(x+1)^3}=\dfrac{bx+b}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow\begin{cases}b=0\\b=1-c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\c=1\end{cases}$

d'où

$f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}+\dfrac{1}{(x+1)^4}$

3. $F(x)=\dfrac{-1}{2(x+1)^2}-\dfrac{1}{3(x+1)^3}+k$

$F(0)=2\Rightarrow-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+k=0\Rightarrow k=\dfrac{5}{6}$

d'où

$F(x)=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}-\dfrac{1}{3(x+1)^3}$

EX 8 :

$f(x)=\dfrac{2x+1}{(x-2)^3}\quad ,x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

1. $f(x)=\dfrac{2(x-2)+5}{(x-2)^3}$

$f(x)=\dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{5}{(x-2)^3}$

2. $F(x)=\dfrac{-2}{x-2}-\dfrac{5}{2(x-2)^2}$

$F(x)=\dfrac{-4x+3}{2(x-2)^2}$

EX 9 :

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;x\in]-1,1[$

F est dérivable sur $]-1,1[$

$\begin{cases}F'(x)=f(x)\\F(0)=0\end{cases}$

$g(x)=F(\sin x)$

1. *la fonction* : $x \to \sin x$

est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]-1,1\right[$

F est dérivable sur $\left]-1,1\right[$ *d'où g est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= Cos\, x.F'(\sin x) \\ &= Cos\, x.f(\sin x) \\ &= \frac{Cos\, x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{Cos\, x}{\sqrt{Cos^2 x}} \\ &= \frac{Cos\, x}{|Cos\, x|}=1 \ car\ \frac{Cos\, x \succ 0}{x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} \end{aligned}$$

$g'(x)=1\,;\forall x\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2. $g'(x)=1$

d'où $g(x)=x+k\ ,\ k\in\mathbb{R}$

$g(0)=F(0)=0$

$\Rightarrow 0+k=0$

$\Rightarrow k=0$

d'ou $g(x)=x\ \ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

3. $F(\frac{\sqrt{2}}{2})=F\left(\sin(\frac{\pi}{4})\right)=g(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$

$F(\frac{1}{2})=F\left(\sin(\frac{\pi}{6})\right)=g(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}$

$F(-\frac{\sqrt{3}}{2})=F\left(\sin(-\frac{\pi}{3})\right)=g(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\pi}{3}$

EX 10 :

$f(x)=\sqrt{1-x^2}\ \ ;x\in[0,1]$

F dérivable sur $[0,1]$

$\begin{cases} F'(x)=f(x) \\ F(0)=0 \end{cases}$

$g=F(Cos\, x)\,;x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

1. *g est dérivable sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *comme était composée de deux fonction dérivable. (voir ex 9)*

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-\sin x).F'(Cos\, x) \\ &= (-\sin x).f(Cos\, x) \\ &= -\sin x\sqrt{1-Cos^2 x} \\ &= -\sin x|\sin x| \\ &= -\sin^2 x \qquad car\ \sin x\geq 0 \end{aligned}$$

2. $g'(x)=-\sin^2 x=-\frac{1}{2}(1-Cos\, 2x)$

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+k$

$g(\frac{\pi}{2})=F(0)=0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-0)+k=0$

$\Rightarrow k=\frac{\pi}{4}$

d'où

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\pi}{4}$

3. $F(1)=F(Cos0)=g(0)=\frac{\pi}{4}$

$F(\frac{1}{\sqrt{2}})=F(Cos\frac{\pi}{4})=g(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

EX 11 :

1. $f''(x)=0\Rightarrow f'(x)=a\,;a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=a\,x+b \qquad (a,b)\in\mathbb{R}^2$

2. $f''(x)=\sin x$

$\Rightarrow f'(x)=-Cos\, x+a;\ \ a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=-\sin x+a\,x+b$

$(a,b)\in\mathbb{R}^2$

EX 12 :

1. $f(x)=|x| \quad x\in\mathbb{R}$

a) f *est continue sur* $\mathbb{R}$

b) $\begin{cases} f(x)=x & \sin x\in[0,+\infty[\\ f(x)=-x & \sin x\in]-\infty,0[\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2+a & pour\ x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2+b & pour\ x<0 \end{cases}$

F est dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ *continue en* 0

$\Rightarrow a=b$

$d'où \begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2+a & pour\ x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2+a & pour\ x<0 \end{cases}$

$F(4)=0 \Rightarrow 8+a=0 \Rightarrow a=-8$

$\begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2-8 & pour\ x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2-8 & pour\ x<0 \end{cases}$

2. $g(x)=|x|+|x-1|$

a) *g est continue sur IR*

x	-∞	0	1 +∞
|x|	-x	x	x
|x-1|	-x+1	-x+1	x-1
g(x)	-2x+1	1	2x-1

$\begin{cases} g(x)=-2x+1 & pour\ x\leq 0 \\ g(x)=1 & pour\ \ 0<x\leq 1 \\ g(x)=2x-1 & pour\ \ x>1 \end{cases}$

d'où

$G(x)=\begin{cases} -x^2+x+a & pour\ x\leq 0 \\ x+b & pour\ 0<x\leq 1 \\ x^2-x+c & pour\ x>1 \end{cases}$

G est continueen 0

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} G(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) \Rightarrow a=b$

G continue en $1 \Rightarrow$

$1+b=c \Rightarrow c=a+1$

d'où

$G(x)=\begin{cases} -x^2+x+a & pour\ x\leq 0 \\ x+a & pour\ 0<x\leq 1 \\ x^2-x+a+1 & pour\ x\geq 1 \end{cases}$

$(a\in\mathbb{R})$

EX 13 :

$f(x)=\sin^3 x+\sin^5 x$

$=\sin x.(1-Cos^2 x)+\sin x.(1-Cos^2 x)^2$

$=\sin x-\sin x\, Cos^2 x+\sin x.(1+Cos^4 x-2Cos^2 x)$

$f(x)=2\sin x-3\sin x.Cos^2 x$

$\quad +\sin x.Cos^4 x$

$F(x)=-2Cos\, x+Cos^3 x-\frac{1}{5}Cos^5 x$

(on pourra aussi linéariser f(x))

EX 14 :

$a(t)=1-\frac{1}{(t+1)^2} \quad ;t\in[0,10]$

1. $\begin{cases} v'(t)=a(t) \\ v(0)=0 \end{cases}$

$v(t)=t+\frac{1}{t+1}+k$

$v(0)=0 \Rightarrow 1+k=0 \Rightarrow k=-1$

$v(t)=t-1+\frac{1}{t+1}$

2. $v(10)=\frac{100}{11}m/s$

EX 15 :

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$; $x\in[-2,2]$

1.a) *la fonction* : $x \to 4-x^2$ *est continue et positive sur* $[-2,2]$ *d'où* f *est continue sur* $[-2,2]$

par suit f *admet au moins une primitive sur* $[-2,2]$

b)

$$\begin{cases} F'(x)=f(x) \\ F(0)=0 \end{cases}$$

$\forall x\in D_F=[-2,2]$; $(-x)\in D_F$

$f(x)=f(-x) \Rightarrow$

$F(x)=-F(-x)+k$

$F(0)=0 \Rightarrow k=0$

d'où $F(-x)=-F(x)$

F est impaire.

2. $G(x)=F(2Cos\ x)$; $x\in[0,\pi]$

$\Rightarrow -\pi \le -x \le 0$

$\Rightarrow 0 \le \pi - x \le \pi$

$\Rightarrow (\pi - x)\in D_G$

$$\begin{aligned} G(\pi-x) &= F(2Cos(\pi-x)) \\ &= F(-2Cos\ x) \\ &= -F(2Cos\ x) \\ &= -G(x) \end{aligned}$$

conclusion : $I(\frac{\pi}{2},0)$ *est un centre de symétrie pour la courbe de* f

b)

$$\begin{aligned} G'(x) &= -2\sin x . F'(2Cos\ x) \\ &= -2\sin x\ f(2Cos\ x) \\ &= -2\sin x\ \sqrt{4(1-Cos^2 x)} \\ &= -2\sin x \sqrt{4\sin^2 x} \\ &= -4\sin x . |\sin x| \end{aligned}$$

$G'(x)=-4\sin^2 x$ (*car* $\sin x \ge 0$)

$G'(x)=-2(1-Cos\ 2x)$

d'où $G(x)=-2(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+k$

$G(\frac{\pi}{2})=F(0)=0$

$\Rightarrow -2(\frac{\pi}{2}-0)+k=0$

$\Rightarrow k=\pi$

d'où

$G(x)=-2x+\sin 2x+\pi$

$\forall x\in[0,\pi]$

c) $F(1)=F(2cos\left(\frac{\pi}{3}\right))$

$=G(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$F(2)=F(2cos(0))$

$=G(0)=\pi$

$F(\sqrt{2})=F(2Cos\frac{\pi}{4})$

$=G(\frac{\pi}{4})=1+\frac{\pi}{2}$

EX 16 :

$u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

1. $u'(x)=1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$u'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$u'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$

d'où

$\sqrt{1+x^2}=\dfrac{u(x)}{u'(x)}$

2. $f(x)=\dfrac{1}{u(x).\sqrt{1+x^2}}$

$f(x)=\dfrac{u^1(x)}{u^2(x)}$

d'où

$F(x)=\dfrac{-1}{u(x)}$

$F(x)=\dfrac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$g(x)=\dfrac{u^2(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

$g(x)=u^2(x).\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$g(x)=u^2(x)\ \dfrac{u^1(x)}{u(x)}$

$g(x)=u^1(x).u(x)$

d'où

$G(x)=\dfrac{1}{2}u^2(x)$

$G(x)=\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{1+x^2})^2$

EX 17 :

$f(x)=x.Cos\ x$

$g(x)=x.\sin x$

1. $f'(x)+g(x)=Cosx-x\sin x+x\sin x$

$=Cos\ x$

d'où $g(x)=Cos\ x-f'(x)$

$G(x)=\sin x-(f(x))$

$G(x)=\sin x-x\ Cos\ x$

2. $g'(x)-f(x)=\sin x+x\ Cos\ x-f(x)$

$=\sin x$

d'où $f(x)=g'(x)-\sin x$

$F(x)=g(x)-Cos\ x$

$F(x)=x\sin x-Cos\ x$

EX 18 :

$n \geq 2$

$p_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$

1. $F_n(x) = x + x^2 + ... + x^n + k \quad k \in \mathbb{R}$

$F_n(0) = 1 \Rightarrow k = 1$

d'où

$F_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$

2. *pour* $x \neq 1$

$$F_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(somme de (n+1) termes d'une suite géométrique de raison x)

$$F'_n(x) = \frac{-(n+1).x^n.(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$F'_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1).x^n + 1}{(1-x)^2}$$

$$d'où \begin{cases} p_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1).x^n + 1}{(1-x)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ p_n(1) = \dfrac{(n+1)}{2} \end{cases}$$

EX 19 : $x \in [0, \pi]$

1. $g(x) = x.\sin x + Cos\ x - 1$

a) $g'(x) = \sin x + x\ Cos\ x - \sin x$

$g'(x) = x.Cos\ x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
g'(x)	0	+	0	-	
g(x)	0	↗	$\frac{\pi}{2} - 1$	↘	-2

b) *g est continue sur* $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$

$$g(\frac{2\pi}{3}).g(\pi) = -2(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}) < 0$$

d'où l'équation g(x)=0 admet une solution $\alpha \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$

x	0		α		π
g(x)	0	+	0	-	

2. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - Cos\ x}{x} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - Cos\ x}{x} = 0 = f(0)$

f est continue en droite en 0

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - Cos\ x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

f est dérivable à droite en 0 *et* $f'_d(0) = \frac{1}{2}$

b) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

x	0		α		π
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$\frac{2}{\pi}$

c) $f(\alpha)=\dfrac{1-Cos\ x}{\alpha}$

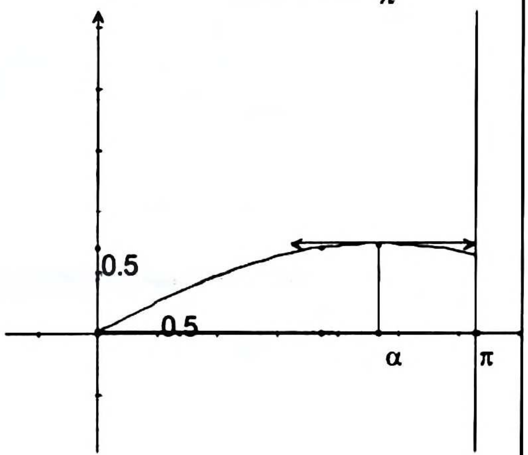
$g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha.\sin\alpha+Cos\,\alpha-1=0$

$\Rightarrow Cos\ \alpha=1-\alpha.\sin\alpha$

d'où

$f(\alpha)=\dfrac{\alpha\sin\alpha}{\alpha}=\sin\alpha$

3. $\alpha\simeq 2{,}34$; $f(\alpha)\simeq 0{,}72$; $\dfrac{2}{\pi}\simeq 0{,}61$



4. $k(x)=f(x)$ pour $x\in[\alpha,\pi]$

k est continue et strictemen décroissant sur $[\alpha,\pi]\Rightarrow$ *k est une bijéction de* $[\alpha,\pi]$ *sur* $\left[\dfrac{2}{\pi},f(\alpha)\right]=I$

5. $h(x)=g(x)-2\,Cos\ x \quad x\in[0,\pi]$

h est continue sur $[0,\pi]$ *d'où h admet des primitives sur* $[0,\pi]$

$h(x)=x.\sin x-Cos\ x-1$

$H(x)=-x.Cos\ x-x+k$

$H(0)=1\Rightarrow k=1$

d'où $\quad H(x)=1-x-x.Cos\ x$

EX 20 :

$\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$\begin{cases} G'(x)=\varphi(x)\\ G(0)=0\end{cases}$

1. $G'(-x)=\varphi(-x)=\varphi(x)$

$\qquad =G'(x)$

$G'(x)=G'(-x)$

$\Rightarrow G(x)=-G(-x)+k \quad k\in\mathbb{R}$

$G(0)=0\rightarrow k=0$

d'où $\ G(-x)=-G(x)$

G est impaire

2.a) $x\in\mathbb{R}^*$

$\psi(x)=G(x)+G(\frac{1}{x})$

ψ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$

$\psi'(x)=G'(x)-\dfrac{1}{x^2}G'(\dfrac{1}{x})$

$\qquad =\varphi(x)-\dfrac{1}{x^2}.\varphi(\dfrac{1}{x})$

$\qquad =\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2+1}$

$\qquad =0$

$\psi'(x)=0$

D'où ψ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ *et* $]0,+\infty[$

$\psi(1) = G(1) + G(1) = 2G(1)$

d'où

$\psi(x) = 2G(1)$; $\forall x \in]0, +\infty[$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = 2G(1)$

b) $u(t) = G(tg\, t)$; $\in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$u'(t) = (1 + tg^2 t).G'(tg\, t)$

$= (1 + tg^2 t)\ \varphi(tg\, t)$

$= (1 + tg^2 t).\dfrac{1}{1 + tg^2 t}$

$u'(t) = 1$

$u(t) = t + k$; $(k \in \mathbb{R})$

$u(0) = G(tg\, 0) = G(0) = 0$

$\Rightarrow k = 0$

$u(t) = t$; $\forall t \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$G(1) = G(tg\, \frac{\pi}{4}) = u(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = 2G(1) = \frac{\pi}{2}$

$G(x) = \psi(x) - G\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} G(\frac{1}{x}) = G(0) = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \frac{\pi}{2}$

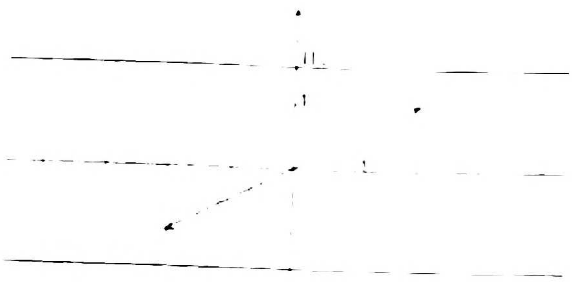
4. $G'(x) = \varphi(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} > 0$

x	0	$+\infty$
G'(x)	+	
G(x)	0 $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

G est impaire.

$G'(0) = \dfrac{1}{2}$

O : *centre de symétrie.*



EX 21 :

$f(x) = \sqrt{1 + Cos\, x}$; $x \in [0, \pi]$

1.a) f *Est dérivable sur* $[0, \pi[$

$f'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{1 + Cos\, x}} \le 0$

f est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ *elle réalise donc une bijection de* $[0, \pi]$ *sur*

$g([0, \pi]) = [g(\pi), g(0)] = [0, \sqrt{2}]$

b) f *est dérivable sur* $]0, \pi[$

et $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{1 + Cos\, x}} \neq 0$

d'où f^{-1} *est dérivable sur*

$f(]0, \pi[) =]0, \sqrt{2}[$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{on pose} : y=f^{-1}(x)$$

$$f(y)=x$$

$$=\frac{-2\sqrt{1+Cos\ y}}{\sin\ y}$$

$f(y)=\sqrt{1+Cos\ y}=x$

$\Rightarrow 1+Cos\ y=x^2$

$\Rightarrow Cos\ y=x^2-1$

$\Rightarrow Cos^2 y=(x^2-1)^2$

$\Rightarrow -Cos^2 y=-1-x^4+2x^2$

$\Rightarrow 1-Cos^2 y=2x^2-x^4$

$\Rightarrow \sin^2 y=2x^2-x^4$

$\Rightarrow \sin y=\sqrt{2x^2-x^4}$

d'où

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$$

$\forall x\in \left]0,\sqrt{2}\right[$

2. $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$

$x\in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$

$$\begin{cases} G'(x)=g(x) \\ G(0)=0 \end{cases}$$

a) $\varphi(x)=G(x)+G(-x)$

$\varphi'(x)=G'(x)-G'(-x)$

$\quad =g(x)-g(-x)$

$\quad =0$

φ est constante sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$

$\varphi(0)=0$

$\varphi(x)=0,\ \forall x\in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$

$\Rightarrow G(x)+G(-x)=0$

$\Rightarrow G(-x)=-G(x)$

G est impaire.

b) *on a* :

$g(x)=-\left(f^{-1}\right)'(x)$

$\Rightarrow G(x)=-f^{-1}(x)+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$

$G(0)=-f^{-1}(0)+k$

$\Rightarrow 0=-\pi+k$

$\Rightarrow k=\pi$

d'où

$G(x)=\pi-f^{-1}(x)$

$G(1)=\pi-f^{-1}(1)$

$G(1)=\pi-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

EX 22 :

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \\ f'(x)=\dfrac{-2}{\pi.\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

1. $f'(x)<0\ ;\ \forall x\in \left]0,1\right[$

f est continue sur $[0,1]$ *et strictement décroissante*

$\Rightarrow$ *f réalise une bijective de* $[0,1]$ *sur*

$f([0,1])=[f(1),f(0)]=[0,1]$

2.a) *soit* $g(x)=f(Cos\ x)$

$g'(x)=-\sin x.f'(Cos\ x)$

$$=\frac{+2\sin x}{\pi\sqrt{1-Cos^2 x}}$$

$$=\frac{+2\sin x}{\pi.|\sin x|}$$

$$=\frac{2}{\pi} \quad car \quad \sin x>0$$

g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

$g'(x)=\frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{2}{\pi}x+k \;\; ; \; k\in\mathbb{R}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)=1$

$\Rightarrow 1=1+k \Rightarrow k=0$

$d'où \;\; g(x)=\frac{2}{\pi}x$

$\Rightarrow f(Cos\; x)=\frac{2}{\pi}x$

b) $f(Cos\; x)=\frac{2}{\pi}x$

$\Rightarrow f^{-1}(\frac{2}{\pi}x)=Cos\; x$

$soit \;\; t=\frac{2}{\pi}x$

$x=\frac{\pi}{2}t$

$d'où \;\; f^{-1}(t)=Cos\;(\frac{\pi}{2}t)$

conclusion :

$f^{-1}(x)=Cos\;(\frac{\pi}{2}x) \;\; ; \;\; \forall x\in[0,1]$

3. $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$h(x)=f(Cos\; x)+f(\sin x)$

a) *comme était composée et somme de fonctions dérivables*

h est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h(x)=f(Cos\; x)+f(Cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$=\frac{2}{\pi}x+\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)$

$h(x)=1$

$h'(x)=-\sin x\; f'(Cos\; x)+Cos\; x\; f'(\sin x)$

$h'(x)=\frac{2\sin x}{\pi\sqrt{1-Cos^2 x}}-\frac{2\sin x}{\pi\sqrt{1-\sin^2 x}}$

$h'(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}=0$

b) *h continue sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h'(x)=0 \;\; ; \;\; \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

d'où h est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$h(0)=f(1)+f(0)=1$

d'où

$h(x)=1 \;\; ; \;\; \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

4. $n\in\mathbb{N}^*$

$\varphi_n(x)=Cos(\frac{\pi}{2}x)-x^n$

$x\in[0,1]$

a) $\varphi_n'(x)=\frac{-\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)-n\,x^{n-1}$

$\varphi_n'(x)\le 0 \;\; ; \;\; \forall x\in[0,1]$

φ_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur

$\varphi_n([0,1])=[-1,1]$ et comme $0\in[-1,1]$

alors il existe un uniqueréel

$a_n\in[0,1]\; tq:\varphi_n(a_n)=0$

$\varphi_n(0).\varphi_n(1)<0\Rightarrow a_n\in]0,1[$

b) $n - p > 0$ *alors*

$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^{n-p} < 1$

$\Rightarrow 0 < (x^{n-p}).x^p < x^p$

$\Rightarrow x^n < x^p$

$\Rightarrow -x^n > -x^p$

$\Rightarrow Cos(\frac{\pi}{2}x) - x^n > Cos(\frac{\pi}{2}x) - x^p$

$\Rightarrow \varphi_n(x) > \varphi_p(x)$

c) a_n *et* $a_{n+1} \in]0,1[$

d'après *b)* $n+1 > n$

d'où $\varphi_{n+1}(a_{n+1}) > \varphi_n(a_{n+1})$

$\Rightarrow 0 > \varphi_n(a_{n+1})$

$\Rightarrow \varphi_n(a_n) > \varphi_n(a_{n+1})$

$\Rightarrow a_n < a_{n+1}$

car φ_n *est strictement décroissante sur* $[0,1]$

d'où (a_n)*est strictement décroissante*

et comme on a $a_n > 0$

(a_n) *est décroissante et minorée par* 0

elle est donc convergente.

QCM :

1) a) $|z-z'| = MM'$

b) O, M et M' alignés

2) $(AB) \perp (AC)$

3) les solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$ sont

$z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$

Vrai-Faux :

1) (faux)

Par exemple les solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$
sont 1-i et 1+i qui ne sont pas opposées.

2) (faux)

$$z^4 = a^4 \Leftrightarrow z^4 - a^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^2 - a^2).(z^2 + a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-a)^2.(z+a)^2.(z-ia).(z+ia) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = a \text{ ou } z = -a \text{ ou } z = ia \text{ ou } z = -ia$$

3) (faux) en effet :

$Z = z_1 + iz_2$

$\Rightarrow \overline{Z} = \overline{z_1} - i\overline{z_2}$

4) (faux)

Contre exemple : z=2i
z'=3i

$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') = 0$

$Arg(z) \equiv Arg(z')(2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ *alors que* $z \neq z'$

5) (faux)

Contre exemple : $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z^3 = -1$

$z^3 \in IR$ *mais* $z \notin IR$

6) (faux)

Contre exemple : z=1 et z'=i

$|z| = |z'|$ mais $z \neq z'$

et $z \neq -z'$

EX1 :

a)

$$\frac{z-i}{z+i}=2i \Leftrightarrow z-i=2i(z+i) \Leftrightarrow z-i=2iz-2 \Leftrightarrow (1-2i)z=-2+i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2+i}{1-2i} \Leftrightarrow z=\frac{(-2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-4-3i}{5}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-4}{5}-\frac{3}{5}i$$

b)

$$\frac{z+i}{2z}=1-i \Leftrightarrow z+i=2(1-i)z \Leftrightarrow (1-2i)z=i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{i}{1-2i}=\frac{i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2+i}{5} \Leftrightarrow z=\frac{-2}{5}+\frac{1}{5}i$$

c)

$$\frac{2z+i}{iz}=\frac{2iz}{1-z} \Leftrightarrow (2z+i)(1-z)=iz(2iz) \Leftrightarrow -2z^2+(2-i)z+i=-2z^2$$

$$\Leftrightarrow (2-i)z=-i \Leftrightarrow z=\frac{-i}{2-i}=\frac{-i(2+i)}{5}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

EX 2 :

a)

- $z_A=3(\cos\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4})$

$OA=3$ et $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}})\equiv\frac{\pi}{4}(2\pi)$

- $z_B=(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=i$
- $z_S=z_A+z_B \Rightarrow \overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow OASB$ est un #

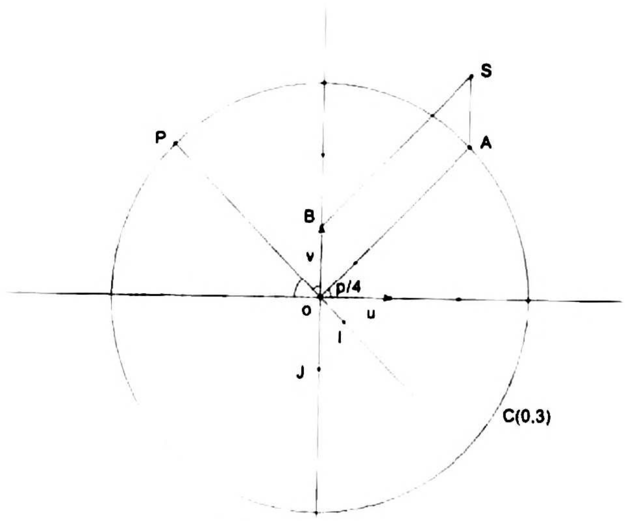
• $z_P = z_A.z_B = 3(\cos(\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}))$

$OP = 3$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OP}) \equiv \frac{3\pi}{4}(2\pi)$

•$z_I = \frac{1}{z_A} = \frac{1}{3}(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4}))$

$OI = \frac{1}{3}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) \equiv \frac{-\pi}{4}(2\pi)$

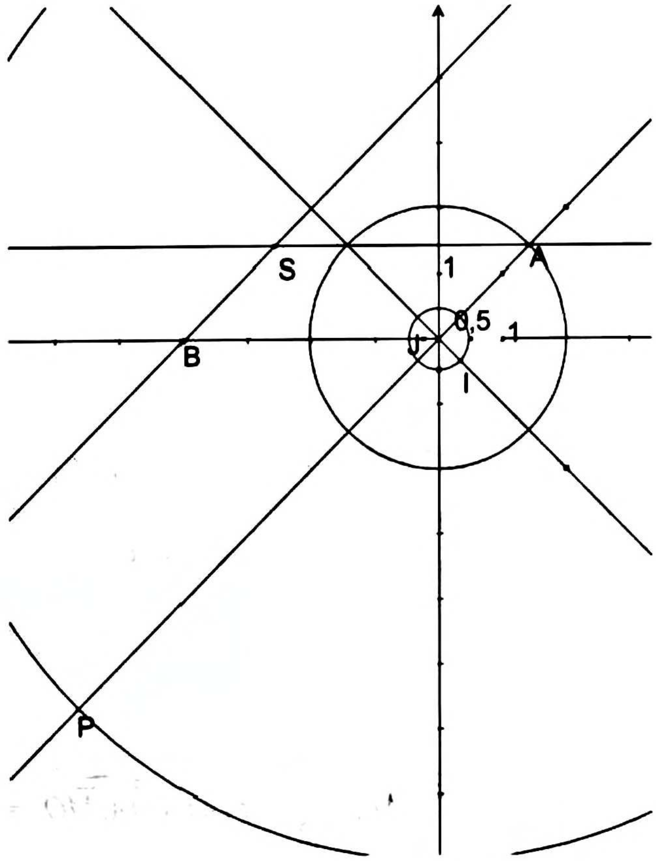
• $z_J = \frac{1}{z_B} = \frac{1}{i} = -i$



b) $z_A = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

OA=2 $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OA}}) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi)$

* $z_B = -4$
* $z_S = z_A + z_B$ OASB parallélogramme
* $z_P = z_A.z_B = 8.(\cos 5\frac{\pi}{4} + i\sin 5\frac{\pi}{4})$
* $z_I = \frac{1}{z_A} = \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$
* $z_J = \frac{1}{z_B} = \frac{-1}{4}$



EX 3 :

méthode analytique :

on pose z=x+i y

$$Z=\frac{x+iy-i}{x+iy+i}=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}=\frac{[x+i(y-1)].[x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}=\frac{(x^2+y^2-1)-2ix}{x^2+(y+1)^2}$$

1) Z est un réel $\Leftrightarrow$ x=0

$z\neq -i \Rightarrow M\neq A(0,-1)$

soit Δ : la droite d'équation : x=0 ; $A\in\Delta$

d'où (ξ_1) est la droite Δ privée de A

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

(ζ) : le cercle de centre O de rayon 1

$A\in\zeta$ D'où (ξ_2) : le cercle (ζ) privé de A

Méthode géometrique :

Soit A(-i) et B(i)

1) Z est un réel $\Leftrightarrow \frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ colinéaires $\Leftrightarrow M\in(AB)$

or $M\neq A$ *donc* $(\xi_1)=(AB)/\{A\}$

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow M\in(\zeta)$: cercle de diamètre [AB] or $M\neq A$

$\xi_2=(\zeta)/\{A\}$

EX 4 : (voir ex 3)

EX 5 :

1)

$$E=\left\{M(z)/\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1\right\}$$

$$\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-1|=|z-i|$$

Soit A(1) et B (i)

$M\in(E)\Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B|\Leftrightarrow MA=MB\Leftrightarrow M\in\Delta=med[AB]$ Donc $E=med[AB]$

2) $M\in F\Leftrightarrow\left|\frac{2(\bar{z}-1)}{z-i}\right|=2\Leftrightarrow\frac{2(\bar{z}-1)}{z-i}=2\Leftrightarrow\frac{(\overline{z-1})}{z-i}=1\Leftrightarrow\frac{|z-1|}{|z-i|}=1\Leftrightarrow M\in E$ Donc F=E

EX 6 :

z≠0 → M≠O z≠1 → M≠A(1)

$Arg\ z$- Arg (z-1) $\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\Leftrightarrow Arg\left(\frac{z}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\Leftrightarrow(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{OM}})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\Leftrightarrow(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$

$\Leftrightarrow M\in(\zeta)/\{A,O\}$ avec : (ζ) : demi cercle de diamètre [OA] contenu dans le demi plan y>0

EX 7 :

$$a=2e^{3i\frac{\pi}{2}}=2(\cos3\frac{\pi}{2}+i\sin3\frac{\pi}{2})=2(0-i)=-2i$$

$$b=-e^{3i\frac{\pi}{4}}=-(\cos3\frac{\pi}{4}+i\sin3\frac{\pi}{4})=-(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c=3e^{-2i\frac{\pi}{3}}=3(\cos2\frac{\pi}{3}+i\sin2\frac{\pi}{3})=3(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{-3}{2}+3i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

EX 8 :

a) $\bullet\ (3e^{-i\frac{\pi}{5}})^3=27.e^{-3i\frac{\pi}{5}}$ $\bullet\ \frac{2e^{i\frac{\pi}{5}}}{3e^{i\pi}}=\frac{2}{3}e^{i(\frac{\pi}{5}-\pi)}=\frac{2}{3}e^{-4i\frac{\pi}{5}}$

$\bullet\ (e^{3i\frac{\pi}{8}})^4=e^{3i\frac{\pi}{2}}$ $\bullet\ (e^{-i\pi})^3=e^{-3i\pi}=e^{i\pi}$

D'où : $(e^{3i\frac{\pi}{8}})^4.(e^{-i\pi})^3=e^{3i\frac{\pi}{2}}.e^{i\pi}=e^{5i\frac{\pi}{2}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) * z= -3+3i

$|z| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \rightarrow z = 3\sqrt{2}.(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) = 3\sqrt{2}.(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 3\sqrt{2}.(\cos(3\frac{\pi}{4}) + i\sin(3\frac{\pi}{4})) = 3\sqrt{2}.e^{3i\frac{\pi}{4}}$

* Z=2$\sqrt{3}$-2i

$|Z| = 4 \rightarrow Z = 4.(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = 4.(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) = 4.e^{-i\frac{\pi}{6}}$

* $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ D'où $(1-i)^5 = (\sqrt{2})^5.e^{-5i\frac{\pi}{4}}$

$$(1-i)^5 = 4\sqrt{2}.e^{-5i\frac{\pi}{4}}$$

* $\frac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i} = \frac{\left[(1+\sqrt{2})-i\right]^2}{(1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 - 1 - 2i(1+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}} = \frac{(2+2\sqrt{2}) - 2i(1+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})} = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

EX 9 :

1)

$$a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a^2 = 2\sqrt{3} + 2i \rightarrow |a^2| = 4$$

$$a^2 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

D'où $a = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $a = -2e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow a = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $a = 2e^{13i\frac{\pi}{12}}$

$\mathrm{Re}(a) > 0$ or $\cos\frac{13\pi}{12} < 0$ D'où $a = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$

2)

$a = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

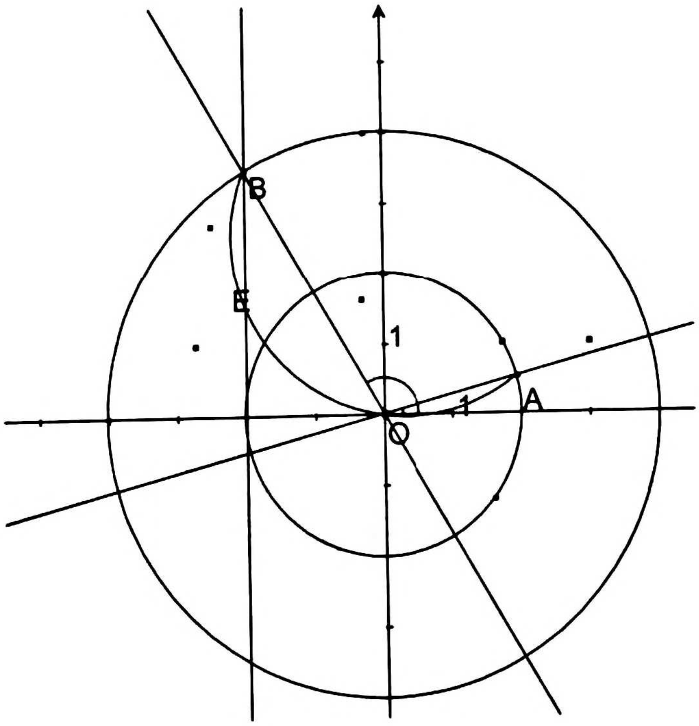
et $a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ D'où $\begin{cases} 2\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

3)

a)

$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow OA = 2 \quad et \quad (\widehat{\vec{u}, \vec{OA}}) \equiv \frac{\pi}{12}(2\pi)$$

$$z_B = 4ie^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})} \Rightarrow OB = 4 \quad et \quad (\widehat{\vec{u}, \vec{OB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$$



b)

$$Arg\left(\frac{iz+a^2}{z-a}\right)\equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi) \Leftrightarrow Arg\left(i\frac{(z-ia^2)}{z-a}\right)\equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi)\Leftrightarrow Argi + Arg\left(\frac{z-ia^2}{z-a}\right)\equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+Arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)\equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi)\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}})\equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi)\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})\equiv -\frac{17\pi}{12}(2\pi)$$

$\Leftrightarrow(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})\equiv\frac{7\pi}{12}(2\pi)$ $\quad M\in$ Arc du cercle (E)

• $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{OA},\vec u})+(\widehat{\vec u,\overrightarrow{OB}})(2\pi)\equiv(\widehat{\vec u,\overrightarrow{OB}})-(\widehat{\vec u,\overrightarrow{OA}})(2\pi)\equiv\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{12}(2\pi)\equiv\frac{7\pi}{12}(2\pi)\Rightarrow O\in E$

• $iz_1=e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})}=e^{2i\frac{\pi}{3}}$ • $\frac{z_2}{1+i}=\frac{2e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt2 e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt2 e^{i(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\sqrt2 e^{-\frac{11i\pi}{12}}$

• $\frac{z_1}{z_2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-2i\frac{\pi}{3}}}=\frac12 e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})}=\frac12 e^{5i\frac{\pi}{6}}$ • $z_1.z_2.z_3=2\sqrt2 e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=2\sqrt2 e^{-3i\frac{\pi}{4}}$

EX 10 :

• $z_3^4=(\sqrt2)^4.e^{4(-i\frac{\pi}{4})}=4e^{-i\pi}=4e^{i\pi}$ • $\frac{z_2^3}{z_1^6}=\frac{8e^{-2i\pi}}{e^{i\pi}}=8.e^{i\pi}$

• $\frac{\overline{z_2}}{z_3}=\frac{2e^{2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt2 e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt2 e^{i(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}=\sqrt2 e^{11i\frac{\pi}{12}}$

EX 11 :

$a = 4\sqrt{2}(1+i) = 4\sqrt{2}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$

Les racines cubiques de a sont : $z_k = \sqrt[3]{8}e^{i(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3})}$ $avec \;\; k \in \{0, 1, 2\}$

$\Rightarrow z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$; $z_1 = 2e^{3i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = 2e^{17i\frac{\pi}{12}}$

EX 12 :

$a = 8\sqrt{2}(-1-i) = 8\sqrt{2}(\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}) = 16e^{3i\frac{\pi}{4}}$

Les racines quatrièmes de a sont : $z_k = \sqrt[4]{16}.e^{i(\frac{-3\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4})}$ $avec \;\; k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$\Rightarrow z_0 = 2e^{-3i\frac{\pi}{16}}$; $z_1 = 2e^{5i\frac{\pi}{16}}$; $z_2 = 2e^{13i\frac{\pi}{16}}$; $z_3 = 2e^{21i\frac{\pi}{16}}$

EX 13 :

$a = 32i = 32e^{i\frac{\pi}{2}}$

Les racines cinquièmes de a sont :

$$z_k = \sqrt[5]{32e}^{i(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5})} = 2e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})} \qquad avec \; k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

EX 14 :

$a = 32(-\sqrt{3}+i) = 32(2e^{5i\frac{\pi}{6}}) = 64e^{5i\frac{\pi}{6}}$

Les solutions sont : $z_k = 2e^{i(\frac{5\pi}{36}+\frac{2k\pi}{6})}$ $avec \; k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

EX 15 :

a)

$z^2 + 18z + 1681 = 0$

$\Delta' = -1600$ $\quad \delta' = 40i$ $\quad z' = -9-40i$ et $z'' = -9+40i$

$S_{\mathbb{C}} = \{-9-40i \; ; -9+40i\}$

b)

$z^2-(5-i)z+8-i=0 \qquad \Delta=-8-6i$

$$soit\ \delta=x+iy\ /\ \delta^2=-8-6i \Rightarrow \begin{cases}(1)x^2-y^2=-8 & (Réel(\Delta))\\(2)x^2+y^2=10 & (|\Delta|)\\(3)2xy=-6 & (\mathrm{Im}(\Delta))\end{cases}$$

$(1)+(2)\Rightarrow 2x^2=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

$pour\ x=1 \xrightarrow{(3)} 2y=-6 \Rightarrow y=-3 \qquad \Rightarrow \delta=1-3i$

$$z'=\frac{(5-i)-(1-3i)}{2}=2+i \quad et \quad z''=\frac{(5-i)+(1-3i)}{2}=3-2i$$

$S_{\mathbb{C}}=\{2+i\ ;3-2i\}$

c)

$z^2+4(i-1)z+2(4-i)=0 \qquad \Delta'=[2(i-1)]^2-2(4-i)=-8-6i \quad \Rightarrow \quad \delta'=1-3i$

Les solutions sont :

$z'=-2(i-1)-(1-3i)=1+i$

$z''=-2(i-1)+(1-3i)=3-5i \qquad \Rightarrow S_{\mathbb{C}}=\{1+i\ ;\ 3-5i\ \}$

d)

$z^2+(1-3i)z-2(1+i)=0 \qquad \Delta=2i=(1+i)^2 \qquad \delta=1+i$

Les solutions sont :

$$z'=\frac{-(1-3i)-(1+i)}{2}=-1+i$$

$$z''=\frac{-(1-3i)+(1+i)}{2}=2i \qquad \Rightarrow S_{\mathbb{C}}=\{-1+i\ ;\ 2i\ \}$$

EX 16 :

a) $z^4+6z^2+25=0$ on pose : $t=z^2$

l'équation devient : $t^2+6t+25=0$

$\Delta'=-16\rightarrow \delta'=4i \qquad t'=-3+4i \quad et \quad t''=-3-4i$

$$\bullet\ t=-3+4i \Leftrightarrow z^2=-3+4i \Leftrightarrow \begin{cases}(1)x^2-y^2=-3\\(2)x^2+y^2=5\\(3)2xy=4\end{cases} \qquad \text{(en posant } z=x+iy)$$

$(1)+(2)\Rightarrow 2x^2=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

Pour $x=1$ l'éq (3) donne $y=2\Rightarrow z_1=1+2i$

Pour $x=-1$ l'éq (3) donne $y=-2\Rightarrow z_1=-1-2i$

• $t=-3-4i \Leftrightarrow z^2=-3-4i \Leftrightarrow z^2=(1-2i)^2 \Leftrightarrow z=1-2i$ ou $z=-1+2i$

$$S_C=\{1+2i;-1-2i;1-2i;-1+2i\}$$

b)

$z^4+4z^2-77=0$ On pose : $t=z^2$ On aura : $t^2+4t-77=0$

$\Delta'=81 \to \delta'=9$

$t'=-11$ et $t''=7$

• $t=7 \Leftrightarrow z^2=7 \Leftrightarrow z=-\sqrt{7}$ ou $z=\sqrt{7}$

• $t=-11 \Leftrightarrow z^2=-11 \Leftrightarrow z=i\sqrt{11}$ ou $z=-i\sqrt{11}$

$$S_C=\left\{-\sqrt{7};\sqrt{7};-i\sqrt{11};i\sqrt{11}\right\}$$

c)

$(E): z^5=\bar{z}$

• 0 est une solution de (E).

• Déterminons les solutions non nulles de (E).

On pose $z=re^{i\theta}$; $r>0$

$(E) \Leftrightarrow (re^{i\theta})^5=\overline{re^{i\theta}}$

$\Leftrightarrow r^5e^{5i\theta}=re^{-i\theta}$

$\Leftrightarrow r^4e^{6i\theta}=1e^{i.0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4=1 \\ 6\theta=2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Les solutions sont :

$z_0=1$; $z_1=1.e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2=1.e^{i2\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_3=1.e^{i\pi}=-1$

$z_4=1.e^{4i\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_5=1.e^{5i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$S_C=\left\{0,-1,1,-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

EX 17 :

Soit :

$$P(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 32$$

$$(E) \Leftrightarrow P(z) = 0$$

1) $p(4) = 0$ d'où $z_0 = 4$ est une solution de (E).

2) • Factorisons P(z).

$$p(z) = (z-4)(z^2 + bz + c)$$

$$p(z) = z^3 + (b-4)z^2 + (c-4b)z - 4c$$

Identifions

On aura : $\begin{cases} b-4=-8 \\ c-4b=24 \\ -4c=-32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4 \\ c=8 \end{cases}$

D'où $P(z) = (z-4)(z^2-4z+8)$

• $P(z) = 0 \Leftrightarrow z-4=0 \; ou \; z^2-4z+8=0$

$\Leftrightarrow z = 4 \; ou \; \Delta' = -4 \rightarrow \delta' = 2i$

$$z_1 = 2+2i$$

$$z_2 = 2-2i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{4; 2+2i; 2-2i\}$$

$$z_1 = 2(1+i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

EX 18 :

Soit :

$$P(z) = z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12$$

$$(E) \Leftrightarrow P(z) = 0$$

1) On pose $z = \alpha, \alpha \in IR$

$$P(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^3-(3+4i)\alpha^2-4(1-3i)\alpha+12=0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^3-3\alpha^2-4\alpha+12)+i(-4\alpha^2+12\alpha)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3-3\alpha^2-4\alpha+12=0 & (1) \\ -4\alpha^2+12\alpha=0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow \alpha(-4\alpha+12)=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ou } \alpha=3$

Vérifions dans (1) pour $\alpha=3$.

$(3)^3-3(3)^2-4.3+12=27-27-12+12=0$

D'où 3 est une solution réelle de E.

2) 3 est une solution de E$\Rightarrow$

$$P(z)=(z-3)\left[z^2+b.z+c\right]$$

$$P(z)=z^3+(b-3)z^2+(c-3b)z-3c$$

Identifions

On aura : $\begin{cases} b-3=-(3+4i) \\ c-3b=-4(1-3i) \\ -3c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4i \\ c=-4 \end{cases}$

D'où : $P(z)=(z-3)\left[z^2-4iz-4\right]$

$(E) \Leftrightarrow (z-3)(z^2-4iz-4)=0 \Leftrightarrow z=3 \text{ ou } z^4-4iz-4=0 \Leftrightarrow z=3 \text{ ou } (z-2i)^2=0 \Leftrightarrow z=3 \text{ ou } z=2i$

$$S_{\mathbb{C}}=\{3;2i\}.$$

EX 19 :

$$(E): z^3=2+11i$$

1) $(2+i)^3=2^3+3.2^2i+3.2(i)^2+i^3=8+12i-6-i=2+11i$

D'où $z_0=2+i$ est solution de (E)

2)

$(E) \Leftrightarrow z^3-(2+11i)=0$

Soit $f(z)=z^3-(2+11i)$

On a : $f(2+i)=0$ D'où $\begin{array}{l} f(z)=\left[z-(2+i)\right].\left[z^2+bz+c\right] \\ f(z)=z^3+(b-2-i)z^2+\left[c-b(2+i)\right]z-c(2+i) \end{array}$

Identifions

On aura : $\begin{cases} b-2-i=0 \\ c-b(2+i)=0 \\ -c(2+i)=-(2+11i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2+i \\ c=3+4i \end{cases}$

D'où : $f(z)=\left[z-(2+i)\right].\left[z^2+(2+i)z+3+4i\right]$

$(E) \Leftrightarrow z=2+i$ ou $z^2+(2+i)z+3+4i=0$

$\Delta=-3(3+4i) \Rightarrow \delta=i\sqrt{3}(2+i) \quad z'=\dfrac{\left(\sqrt{3}-2\right)-i\left(1+2\sqrt{3}\right)}{2}$ et $z''=\dfrac{-\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(2\sqrt{3}-\right.}{2}$

$S_{\mathbb{C}}=\{z_0;z';z''\}$

EX 20 :

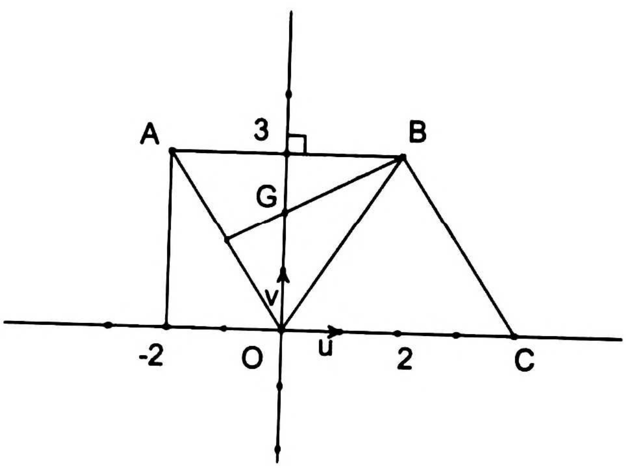
1) $z\bar{z}+3(z-\bar{z})=13+18i$

On pose $z=x+iy \rightarrow \bar{z}=x-iy$ *et* $z\bar{z}=x^2+y^2$ *et* $z-\bar{z}=2iy$

L'équation dévient $x^2+y^2+3(2iy)=13+18i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ 6y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

Les solutions sont : $z_1=-2+3i$
$z_2=2+3i$

2)



3)
$\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{GO})+aff(\overrightarrow{GA})+aff(\overrightarrow{GB})=0$

$\Leftrightarrow -z_G+(z_A-z_G)+(z_B-z_G)=0 \Leftrightarrow 3z_G=z_A+z_B \quad \Leftrightarrow z_G=\dfrac{z_A+z_B}{3}=2i$

4) OABC est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{OC})=aff(\overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow z_C=z_B-z_A \Leftrightarrow z_C=4$

EX 21 :

1) soit :
$f(z)=z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4$
$(E) \Leftrightarrow f(z)=0$
a) soit : $z=x; x\in IR$
$f(z)=0 \Leftrightarrow (x^3-4x^2+7x-4)+i(-x^2+x)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+7x-4=0 & (1) \\ -x^4+x=0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow x=0 \; ou \; x=1$
x = 1 vérifie l'équation (1), d'où 1 est une solution de (E).
b) factorisons f(z)
$f(z)=(z-1)(z^2+bz+c)$
$\quad =z^3+(b-1)z^2+(c-b)z-c$
Identifions :

$$\begin{cases} b-1=-(4+i) \\ c-b=7+i \\ -c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-(3+i) \\ c=4 \end{cases}$$

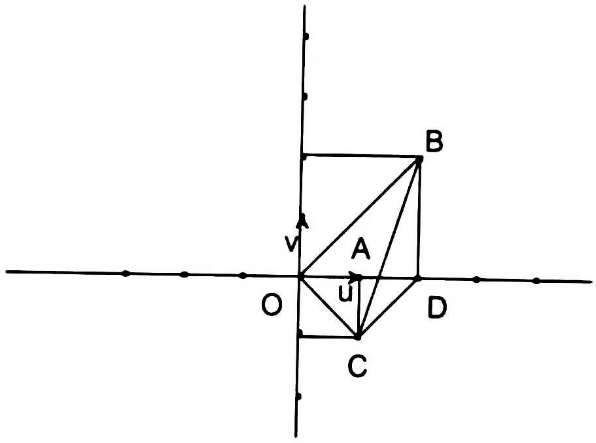
D'où
$f(z)=(z-1)\left[z^2-(3+i)z+4\right]$
$f(z)=0 \Leftrightarrow z=1 \; ou \; z^2-(3+i)z+4=0$

$\Delta=-8+6i \Rightarrow \delta=1+3i$

$z_1=\dfrac{3+i+1+3i}{2}=2+2i \quad et \quad z_2=\dfrac{3+i-1-3i}{2}=1-i$

$S_C=\{1; 1-i; 2+2i\}$

2) a /



b/

$$\frac{2+2i}{1-i}=\frac{2(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2.2i}{2}=2i \Rightarrow \left|\frac{2+2i}{1-i}\right|=2 \quad et \qquad Arg\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$$

$\dfrac{aff(\overrightarrow{OB})}{aff(\overrightarrow{OC})}=\dfrac{z_B}{z_C}=\dfrac{2+2i}{1-i}=2i \Rightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OC}}}$ est imaginaire d'où $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$ Par suite OBC est rectangle en O

c)

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right) &\equiv Arg\frac{z_B}{z_A}+Arg\frac{z_C}{z_A}[2\pi]\\ &\equiv Arg(2+2i)+Arg(1-i)(2\pi)\\ &\equiv\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}(2\pi)\\ &\equiv 0(2\pi)\end{aligned}$$

$\Rightarrow [OA)$: Bissectrice de $\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]$

d)

$$\left.\begin{array}{l}(OB)\perp(OC)\\(CD)\perp(OC)\end{array}\right\}\Rightarrow(OB)//(CD)$$

$$B\hat{O}C=\frac{\pi}{2}=O\hat{C}D$$

$$OB=|z_B|=2\sqrt{2}\neq CD=OC=|z|=\sqrt{2}$$

OCDB est un trapèze.

EX 22 :

1) $z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1.e^{i0}$

Les solutions sont :

$$z_k = \sqrt[4]{1}e^{i\left(\frac{2k\pi}{4}\right)} \quad avec\ k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$z_0 = 1 \quad ; z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad ; z_2 = e^{i\pi} = -1 \quad ; z_3 = e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$$

2) $(E) : \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$

On pose $t = \dfrac{z-i}{z+i}$

L'équation devient : $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$

(-1) est une solution d'où :

$t^3 + t^2 + t + 1 = (t+1)(t^2 + bt + c) = t^3 + (b+1)t^2 + (c+b)t + c$

En identifions on aura : $\begin{cases} b+1 = 1 \\ c+b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$

D'où

$t^3 + t^2 + t + 1 = (t+1)(t^2+1)$

$t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2+1) = 0 \Leftrightarrow t+1 = 0\ ou\ t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1\ ou\ t^2 = -1 \Leftrightarrow t = -1\ ou\ t = -i\ ou\ t = i$

• $t = \dfrac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow tz + ti = z - i \Leftrightarrow (1-t)z = i(1+t) \Leftrightarrow z = i\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right).$

$pour\ t = -1 \rightarrow z = 0$

$pour\ t = i \rightarrow z = i\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right) = -1$

$pour\ t = -i \rightarrow z = i\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right) = 1$

Les solutions de (E) sont : 0 ; -1 et 1. $\quad S_{\mathbb{C}} = \{-1; 0; 1\}$

EX 23 :

a)

$(E) : 1 + z + z^2 + ... + z^6 = 0$

On a : pour $z \neq 1 \qquad 1 + z + z^2 + ... + z^6 = \dfrac{1-z^7}{1-z}$

1 n'est pas une solution de (E) d'où : $(E) \Leftrightarrow 1 - z^7 = 0\ et\ z \neq 1$

$\Leftrightarrow z^7 = 1\ et\ z \neq 1$

Les solutions sont : $z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{7})}$; $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

b) $e^{2i\frac{\pi}{7}}$ est une solution de (E)

$$\Rightarrow 1 + e^{2i\frac{\pi}{7}} + e^{4i\frac{\pi}{7}} + e^{6i\frac{\pi}{7}} + e^{8i\frac{\pi}{7}} + e^{10i\frac{\pi}{7}} + e^{12i\frac{\pi}{7}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(1 + e^{2i\frac{\pi}{7}} + + e^{4i\frac{\pi}{7}} + e^{6i\frac{\pi}{7}} + e^{8i\frac{\pi}{7}} + e^{10i\frac{\pi}{7}} + e^{12i\frac{\pi}{7}}) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos(2\pi - \frac{6\pi}{7}) + \cos(2\pi - \frac{4\pi}{7}) + \cos(2\pi - \frac{2\pi}{7}) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

EX 24 :

1) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b).\sum_{k=0}^{n} a^k.b^{n-k}$

D'où $\quad 1 - z^{n+1} = (1-z)\sum_{k=0}^{n} 1^k.z^{n-k} = (1-z)\left[z^n + z^{n-1} + ... + z + 1\right]$

2)

$1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{i\frac{\theta}{2}} = -e^{i\frac{\theta}{2}}\left[e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right] = -e^{i\frac{\theta}{2}}\left[2i\sin\frac{\theta}{2}\right]$ D'après les Formules d'Euler.

D'où $\quad 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}$

3) $n \geq 1; \theta \neq 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$S = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos n\theta$ et $S' = 1 + \sin\theta + \sin 2\theta + ... + \sin n\theta$

a)

$$S+iS'=1+(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta+i\sin 2\theta)+......+\cos n\theta+i\sin n\theta$$

$$S+iS'=1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+......+e^{ni\theta}$$

D'après 1)

$$1-e^{i(n+1)\theta}=(1-e^{i\theta})\left[1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+.....+e^{in\theta}\right]$$

$comme\ e^{i\theta}\neq 1\ car\ \theta\neq 0(2\pi)$

Alors

$$1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+.....+e^{in\theta}=\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}$$

Par suite :

$$S+iS'=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

b) $S\in IR\ et\ S'\in IR$ d'où $S=\mathrm{Re}\left[\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right]$

d'après 2)

$$1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$1-e^{i(n+1)\theta}=-2i\sin\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right]e^{i\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}$$

D'où

$$\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}.e^{i\left(\frac{n\theta}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\cos\frac{n}{2}\theta+i\sin\frac{n}{2}\theta\right]$$

$$S=\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)\quad et\quad S'=\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$

EX 25 :

$z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$ $\quad f : M(z) \to M'(z')$ tq : $z' = z^2 - 4z$

1) a)

$A' = f(A) \Leftrightarrow z_{A'} = z_A^2 - z_A \Rightarrow z_{A'} = (1-i)^2 - 4(1-i) \Rightarrow \boxed{z_{A'} = -4 + 2i}$

$B' = f(B) \Leftrightarrow z_{B'} = z_B^2 - 4z_B \Leftrightarrow z_{B'} = (3+i)^2 - 4(3+i) \Rightarrow \boxed{z_{B'} = -4 + 2i}$ (Rque : $A' = B'$)

b) Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$

$f(M_1) = f(M_2) \Leftrightarrow z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2 \Leftrightarrow (z_1^2 - z_2^2) - 4(z_1 - z_2) = 0$

$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) - 4(z_1 - z_2) = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow z_1 - z_2 = 0$ ou $z_1 + z_2 = 4 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ ou $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = 2$

Soit « L » le point d'affixe 2.

$f(M_1) = f(M_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2$ ou $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = z_L$

$\Leftrightarrow M_1 = M_2$ ou $L = M_1 * M_2$

$\Leftrightarrow M_1 = M_2$ ou $M_2 = S_L(M_1)$

2) $z_I = -3$

a) OMIM' est un parallélogramme ssi

$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow z' = -3 - z \Leftrightarrow z^2 - 4z = -3 - z \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0$

b) $z^2 - 3z + 3 = 0$

$\Delta = 9 - 12 = -3 \rightarrow \delta = i\sqrt{3}$

Les solutions sont : $z' = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z'' = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}$

3)

a) $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2 \Rightarrow |z'+4| = |z-2|^2$ et $Arg(z'+4) \equiv 2Arg(z-2)(2\pi)$

$z_J = 2;\ z_K = -4$

b) $M \in C(J,2) \Rightarrow JM = 2 \Rightarrow |z-2| = 2 \Rightarrow |z'+4| = 4 \Rightarrow KM' = 4 \Rightarrow M' \in C(K,4)$

c) $z_E = -4 - 3i \Rightarrow z_E + 4 = -3i \Rightarrow (z_E + 4) = 3(\cos(-\dfrac{\pi}{2}) + i.\sin(-\dfrac{\pi}{2}))$

$$f(M)=E \Leftrightarrow z'=-4-3i \Leftrightarrow z'+4=-3i \Leftrightarrow \begin{cases} |z'+4|=3 \\ Arg(z'+4)\equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-2|^2=3 \\ 2Arg(z-2)\equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-2|=\sqrt{3} \\ Arg(z-2)\equiv -\frac{\pi}{4}(\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z-2=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z-2=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \Leftrightarrow \quad z=2+\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z=2+\sqrt{3}e^{3i\frac{\pi}{4}}$$

L'image des points C et D d'affixe $2+\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ *et* $2+\sqrt{3}e^{3i\frac{\pi}{4}}$ par f est le point E.

$$z_C=2+\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}=2+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$z_D=2+\sqrt{3}e^{3i\frac{\pi}{4}}=2+\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

EX 26 :

$$z_A=2i;\ z_B=-1;\ z_C=i \qquad f: M(z)\to M'(z') \quad tq \quad z'=\frac{z+1}{z-2i}\ ,\ z\neq 2i$$

1)a)

$$z_{C'}=\frac{z_C+1}{z_C-2i}=\frac{i+1}{i-2i}=\frac{1+i}{-i}=-1+i \quad , \quad \boxed{z_{C'}=-1+i}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ aff\left(\overrightarrow{CA}\right)=z_A-z_C=i \\ aff\left(\overrightarrow{BC'}\right)=z_{C'}-z_B=i \end{array}\right\rangle \Rightarrow \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC'} \Rightarrow ACBC' \text{ est un parallelogramme}$$

b) $f(C'')=C \Leftrightarrow \dfrac{z_{C''}+1}{z_{C''}-2i}=i \Leftrightarrow z_{C''}+1=iz_{C''}+2 \Leftrightarrow z_{C''}=\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{2}$

$$\bullet\ \frac{aff\left(\overrightarrow{CC''}\right)}{aff\left(\overrightarrow{CB}\right)}=\frac{\frac{1+i}{2}-i}{-1-i}=\frac{i-\frac{1+i}{2}}{1+i}=\frac{-1+i}{2(1+i)}=\frac{(-1+i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)}=\frac{2i}{4}=\frac{1}{2}i$$

$\dfrac{aff\left(\overrightarrow{CC''}\right)}{aff\left(\overrightarrow{CB}\right)}$ est imaginaire d'où $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{CC''}$ Par suite le triangle BCC'' est rectangle en C.

2)

$$|z'| = \left|\frac{z+1}{z-2i}\right| = \frac{BM}{AM} \qquad Arg(z') \equiv Arg\left(\frac{z+1}{z-2i}\right)(2\pi)$$
$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}}\right)(2\pi)$$
$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)(2\pi)$$

3)

a) z' est un réel strictement négatif si seulement si : $Arg\ z' \equiv \pi(2\pi) \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \pi(2\pi)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}$ *et* $\overrightarrow{MB}$ colinéaire est de sens contraires.

L'ensemble E=[AB]\{A,B}.

b) z' est imaginaire non nul $\Leftrightarrow Arg\ z' \equiv \frac{\pi}{2}(\pi) \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(\pi)$

F est le cercle de diamètre [AB] privé de A et B.

c) $M' \in C(0,1) \Leftrightarrow |z'| = 1 \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM$

G est la médiatrice du segment [AB].

<u>EX 27 :</u> $z = e^{i\theta} - i; \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

1) $z_M = z = e^{i\theta} - i$ *et* $z_{M'} = \bar{z} = e^{-i\theta} + i$

OMNM' est un parallélogramme ssi

$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow aff\left(\overrightarrow{ON}\right) = aff\left(\overrightarrow{OM}\right) + aff\left(\overrightarrow{OM'}\right) \Leftrightarrow z_N = z + \bar{z} \Leftrightarrow z_N = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \Rightarrow \boxed{z_N = 2.\cos\theta}$

Dans ce cas : $OM = OM' = |z|$ d'où OMNM' est losange.

2)

a)

$$z = e^{i\theta} - i = e^{i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{2}\right)} . \left[e^{i\left(\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2}\right)}\right] = e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} . \left[2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$ D'après

formules d'Euler

d'où $$z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right).e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

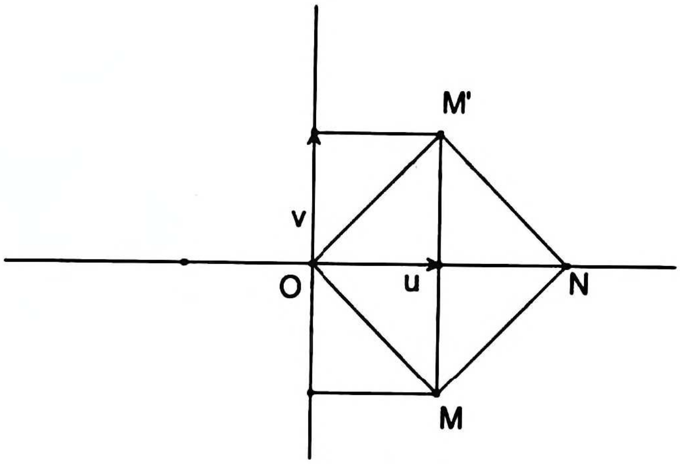
b) $\bar{z} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{-\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow \frac{z}{\bar{z}} = e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow$ $\boxed{\frac{z}{\bar{z}} = e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}$

c) OMNM' est un carré si seulement si $\frac{z}{\bar{z}}$ est imaginaire pure

$\Leftrightarrow Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(\pi) \Leftrightarrow \theta-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}+k\pi \;,\; k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = (k+1)\pi \;,\; k\in\mathbb{Z}$

$or\ \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\qquad d'ou\ \boxed{\theta = 0}$

d) $z_M = e^{i0} - i = 1-i \quad ; \quad z_N = 2\cos 0 = 2 \quad ; \quad z_{M'} = e^{-i0}+i = 1+i$



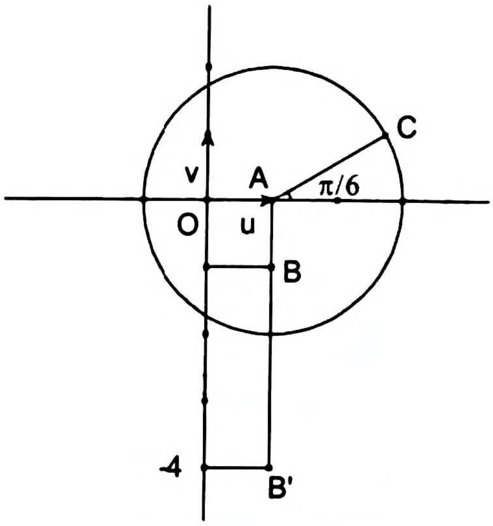
EX 28 :

$z_A = 1 \qquad z' = \frac{\bar{z}+3}{\bar{z}-1}$

1) $z_B = 1-i$

a) $z_{B'} = \frac{\overline{z_B}+3}{\overline{z_B}-1} = \frac{1+i+3}{1+i-1} = \frac{4+i}{i} \Rightarrow \boxed{z_{B'} = 1-4i}$

b)



2) $z_c = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

a) $AC = |z_C - z_A| = \left|2e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 2$

b) $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv Arg(z_C - z_A)(2\pi) \equiv Arg(2e^{i\frac{\pi}{6}})(2\pi) \equiv \frac{\pi}{6}(2\pi)$

c) $C \in \zeta(A,2)$ et $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv +\frac{\pi}{6}(2\pi)$

d) $z_{f(C)} = \frac{\overline{z_C} + 3}{\overline{z_C} - 1} = \frac{1 + 2e^{-i\frac{\pi}{2}} + 3}{1 + 2e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1} = \frac{4 + 2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\left(4 + 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(2 + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} + 1 = z_C$

D'où $f(C) = C$

3)a) $(\bar{z} - 1)(z' - 1) = (\bar{z} - 1)\left(\frac{\bar{z} + 3}{\bar{z} - 1} - 1\right) = (\bar{z} + 3) - (\bar{z} - 1) = 4$

b) $AM.AM' = |z - 1||z' - 1| = |\overline{z - 1}||z' - 1| = |\bar{z} - 1||z' - 1| = |(\bar{z} - 1)(z' - 1)| = |4| = 4$

c) $M \in \zeta(A,2) \Leftrightarrow AM = 2 \Leftrightarrow 2.AM' = 4 \Leftrightarrow AM' = 2 \Leftrightarrow M' \in \zeta(A,2)$

D'où l'image de (ζ) par f est lui-même.

EX 29 : $a=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ $\quad z_0=6+6i \quad A_0(z_0) \quad z_n=a^n.z_0 \quad A_n(z_n)$

1) $z_1=a.z_0=6(1+i)\left[\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right]=3+3i\sqrt{3}\Rightarrow \boxed{z_1=3+3i\sqrt{3}}$

$$a^2=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2+2i\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{16}=\frac{(4+2\sqrt{3})-(4-2\sqrt{3})+4i}{16}\Rightarrow \boxed{a^2=\frac{\sqrt{3}-i}{4}}$$

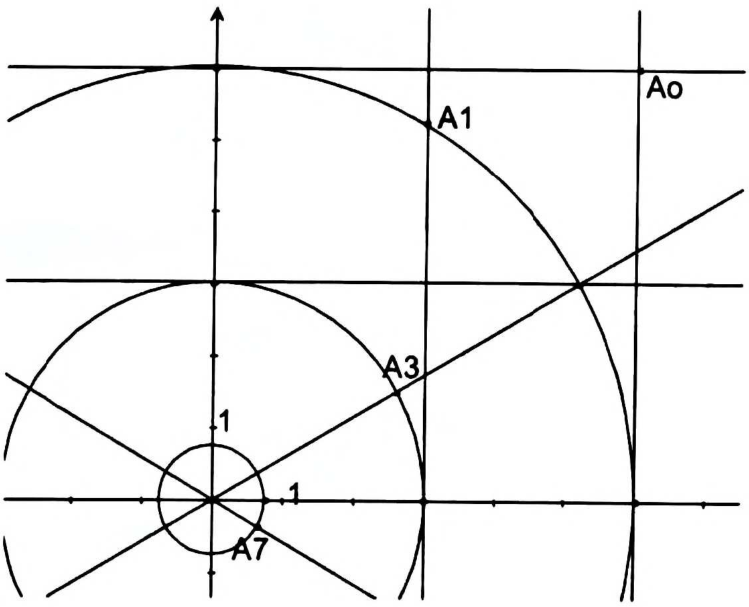
$\bullet z_1=6\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=6e^{i\frac{\pi}{3}}$ *et* $a^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$z_3=a^3.z_0=a^2.(a.z_0)\Rightarrow \boxed{z_3=a^2.z_1}\Rightarrow z_3=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.6.e^{i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow \boxed{z_3=3e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

2) et 3)

$$z_7=a^7.z_0=\boxed{(a^2)^3.z_1}\Rightarrow z_7=\left(\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^3.6e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{6}{8}e^{-i\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow \boxed{z_7=\frac{3}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

4) $z_{A_0}=z_0=6+6i \qquad z_{A_1}=z_1=6e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_{A_3}=3e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad z_{A_7}=\frac{3}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}$



EX 30 : $f: M(z) \to M'(z')\ tq: z' = \frac{1}{\bar{z}}$; $z \neq 0$

1)

M *est invariant par* $f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow M \in \varsigma(O,1)$

L'ensemble des points invariants par f est le cercle $\zeta(0,1)$

2) $\frac{z'}{z} = \frac{1}{z.\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} \in IR$ D'où O, M et M' sont alignés.

$OM.OM' = |z|.|z'| = |z|.\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = |z|.\frac{1}{|\bar{z}|} = |z|.\frac{1}{|z|} = 1$

3)a) $z_A = 4; z_B = 2+2i; z_C = 2-2i; z_I = 2$

$$IA = |z_A - z_I| = |2| = 2 \Rightarrow A \in \varsigma(I,2)$$
$$IB = |z_B - z_I| = |2i| = 2 \Rightarrow B \in \varsigma(I,2)$$
$$IC = |z_C - z_I| = |-2i| = 2 \Rightarrow C \in \varsigma(I,2)$$

b)

$z_{A'} = \frac{1}{\bar{z}_A} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ $\quad z_{B'} = \frac{1}{\bar{z}_B} = \frac{1}{2-2i} = \frac{1+i}{4}$ $\quad z_{C'} = \frac{1}{\bar{z}_C} = \frac{1}{2+2i} = \frac{1-i}{4}$

$\frac{aff\left(\overrightarrow{A'B'}\right)}{aff\left(\overrightarrow{A'C'}\right)} = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_{C'} - z_{A'}} = \frac{\frac{i}{4}}{-\frac{i}{4}} = -1 \in IR \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}$ *et* $\overrightarrow{A'C'}$ *sont colinéaires*

Par suite A', B' et C'appartiennent a une même droite Δ.

$x_{A'} = x_{B'} = x_{C'} = \frac{1}{4}$ D'où $\boxed{\Delta : x = \frac{1}{4}}$

4)a) $\left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'| \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\bar{z}-2}{2\bar{z}}\right| = \frac{1}{|\bar{z}|} \Leftrightarrow \frac{|\bar{z}-2|}{2|\bar{z}|} = \frac{1}{|\bar{z}|} \Leftrightarrow |\overline{z-2}| = 2 \Leftrightarrow |z-2| = 2$

b) $M \in (\zeta) \Leftrightarrow |z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|z' - \frac{1}{2}\right| = |z'| \Leftrightarrow JM' = OM'$ *avec* $J\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow M' \in med[OJ]$.

Donc l'image par f du cercle ς est la droite médiatrice de [OJ]

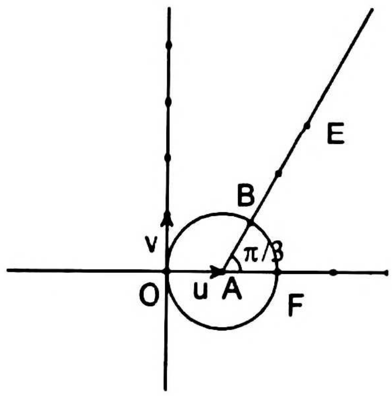
EX 31

$z_A = 1\ ;\ \zeta = \zeta(A,1)$

I) $z_F = 2 \qquad z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_E = 1 + z_B^2$

1) a) $AB = |z_B - z_A| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ D'où $B \in (\zeta)$

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv Arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_F - z_A}\right)(2\pi) \equiv Arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(2\pi) \equiv \dfrac{\pi}{3}(2\pi)$



2)

a) $z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_E - z_A = z_B^2$ Or $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}}.\left[e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right] = 2\cos\dfrac{\pi}{6}.e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \boxed{z_E - z_A = z_B^2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}}$

b) $\dfrac{z_{\overrightarrow{AE}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{z_E - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 3 \in IR$ D'où $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires par suite A,B et E sont alignés

3) $\dfrac{z_{\overrightarrow{AE}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = 3 \Rightarrow z_{\overrightarrow{AE}} = 3.z_{\overrightarrow{AB}} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = 3.\overrightarrow{AB}$ (Voir figure.)

II) $M(z)\ ;\ z \neq 1 \qquad M'(z')\ avec\ z' = 1 + z^2$

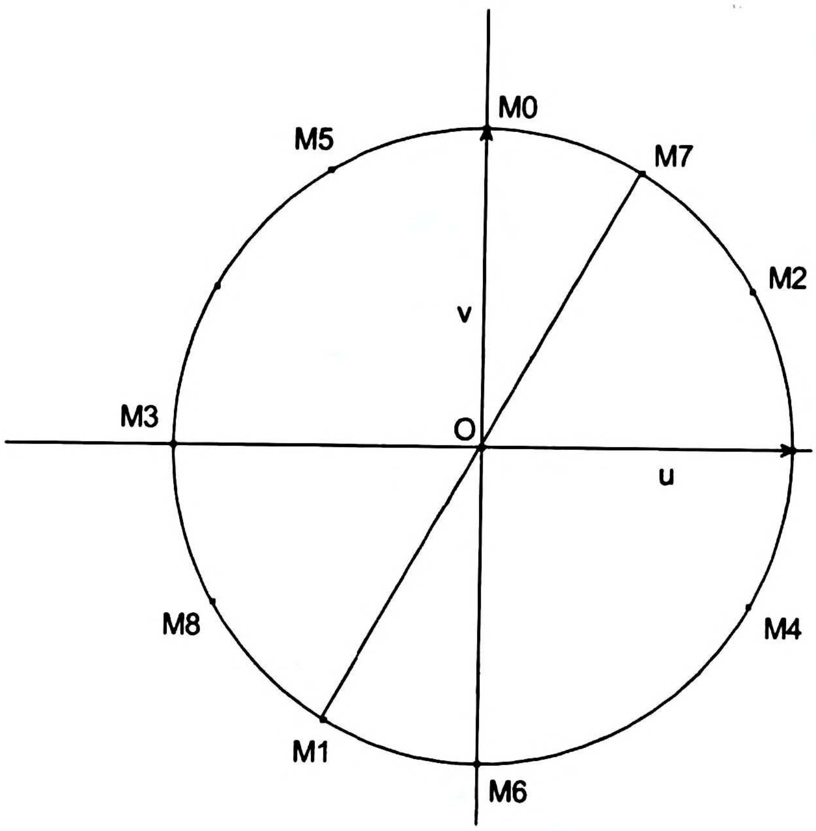
1) $Arg\left(\dfrac{z'-1}{z-1}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}\right)(2\pi)$

2)A, M et M' alignées si seulement si $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \dfrac{z'-z_A}{z-z_A}$ est un réel $\Leftrightarrow \dfrac{1+z^2-1}{z-1}$ est un réel $\Leftrightarrow \dfrac{z^2}{z-1}$ est un réel

EX 32 : $\begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$

1) $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}$ $\quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{3}$ $\quad \alpha_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}$ $\quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + n\left(\frac{5\pi}{6}\right)$



2)

$$\begin{cases} OM_n = 1 \\ \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} + n\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_n| = 1 \\ Arg\ z_n \equiv \dfrac{\pi}{2} + n\left(5\dfrac{\pi}{6}\right)(2\pi) \end{cases} \Rightarrow Z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$$

3) $z_{n+6} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+(n+6)\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}+5\pi\right)} = e^{i5\pi}.e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)} = -e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)} = -z_n \Rightarrow M_{n+6} = S_O(M_n)$

Et comme $M_n \in (\zeta)$ Alors M_{n+6} et M_n sont diamétralement opposées.

4) $z_{n+12} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+(n+12)\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}+10\pi\right)} = e^{i10\pi}.e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)} = z_n \Rightarrow M_{n+12} = M_n$

5) $z_{n+4} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+(n+4)\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}+10\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i10\frac{\pi}{3}}.e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}+4\pi\right)}.z_n = e^{-2i\frac{\pi}{3}}.z_n$

$$\left.\begin{array}{l} z_{n+4}=e^{-2i\frac{\pi}{3}}.z_n \\ z_{n+8}=e^{-2i\frac{\pi}{3}}.z_{n+4} \end{array}\right\rangle \Rightarrow z_{n+8}=e^{-4i\frac{\pi}{3}}.z_n$$

$$\left(\overrightarrow{OM_n},\overrightarrow{OM_{n+4}}\right)\equiv Arg\left(\frac{z_{n+4}}{z_n}\right)(2\pi)\equiv Arg\left(e^{-2i\frac{\pi}{3}}\right)(2\pi)\equiv -\frac{2\pi}{3}(2\pi)$$

$$\left(\overrightarrow{OM_{n+4}},\overrightarrow{OM_{n+8}}\right)\equiv Arg\left(\frac{z_{n+8}}{z_{n+4}}\right)(2\pi)\equiv Arg\left(e^{-2i\frac{\pi}{3}}\right)(2\pi)\equiv -\frac{2\pi}{3}(2\pi)$$

$$\left(\overrightarrow{OM_{n+8}},\overrightarrow{OM_n}\right)\equiv Arg\left(\frac{z_n}{z_{n+8}}\right)(2\pi)\equiv Arg\left(e^{4i\frac{\pi}{3}}\right)(2\pi)\equiv -\frac{2\pi}{3}(2\pi)$$

Et comme M_n, M_{n+4} *et* M_{n+8} appartient à (ζ) alors le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

EX 33 :

1) $z^4=-1 \Leftrightarrow z^4=e^{i\pi}$ Les solutions sont : $z_k=e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)}$ Avec $k\in\{0,1,2,3\}$

$z_0=e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_1=e^{3i\frac{\pi}{4}}$; $z_2=e^{5i\frac{\pi}{4}}=e^{-3i\frac{\pi}{4}}$; $z_3=e^{7i\frac{\pi}{4}}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) $\theta\neq k\pi\,;\,k\in\mathbb{Z}$

$$\frac{z+i}{z-i}=e^{i\theta}\Leftrightarrow z+i=ze^{i\theta}-ie^{i\theta}\Leftrightarrow\left(e^{i\theta}-1\right)z=i\left(e^{i\theta}+1\right)\Leftrightarrow z=\frac{\left(e^{i\theta}+1\right)i}{e^{i\theta}-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} Or\ \ e^{i\theta}+1=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}\ \ Euler \\ et\ \ e^{i\theta}-1=e^{i\frac{\theta}{2}}.\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=\left(2i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \end{array}\right\rangle\Rightarrow\frac{\left(e^{i\theta}+1\right)i}{e^{i\theta}-1}=\frac{1}{tg(\frac{\theta}{2})}$$

$$\Rightarrow\frac{z+i}{z-i}=e^{i\theta}\Leftrightarrow z=\frac{1}{tg(\frac{\theta}{2})}$$

3) i n'est pas une solution de (E)

$$(z+i)^4=-(z-i)^4\Leftrightarrow\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4=-1\Leftrightarrow\frac{z+i}{z-i}=e^{i\frac{\pi}{4}}\ ou\ \frac{z+i}{z-i}=e^{3i\frac{\pi}{4}}\ ou\ \frac{z+i}{z-i}=e^{-3i\frac{\pi}{4}}\ ou\ \frac{z+i}{z-i}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Les solutions sont :

$z_1=\dfrac{1}{tg\frac{\pi}{8}}$; $z_2=\dfrac{1}{tg\frac{3\pi}{8}}$; $z_3=-\dfrac{1}{tg\frac{3\pi}{8}}$; $z_4=-\dfrac{1}{tg\frac{\pi}{8}}$

EX 34 : $z_A = -i$ $\qquad z' = \dfrac{i\bar{z}}{i-\bar{z}}$

1)

$f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \dfrac{i\bar{z}}{i-\bar{z}} = z \Leftrightarrow i\bar{z} = iz - z\bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z} = i(z-\bar{z})$ *en posant* $z = x+iy$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = i(2iy) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -2y \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1$

Donc L'ensemble des points invariants par f est le cercle (ζ) de centre A de rayon 1.

2) a) $(z'+i)(\bar{z}-i) = \left(\dfrac{i\bar{z}}{i-\bar{z}} + i\right)(\bar{z}-i) = -i\bar{z} + i\bar{z} + 1 = 1$

b)

$AM'.AM = |z'-z_A|.|z-z_A| = |z'+i|.|z+i| = |z'+i|.|\overline{z-i}|$

$= |z'+i|.|\bar{z}-i| = |(z'+i)(\bar{z}-i)| = |1| = 1$

• $(z'+i)(\bar{z}-i) = 1 \Rightarrow z'+i = \dfrac{1}{\bar{z}-i} \Rightarrow Arg(z'+i) \equiv -Arg(\bar{z}-i)(2\pi)$

$\Rightarrow Arg(z'+i) \equiv -Arg(\overline{z+i})(2\pi) \Rightarrow Arg(z'+i) \equiv Arg(z+i)(2\pi)$

$\Rightarrow \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM'}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}\right)(2\pi) \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM'}}\right) \equiv 0(2\pi)$

$\Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}\right) \equiv 0(2\pi)$

D'où $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires et de même sens par suite : $M' \in [AM)$

3) a)

$$\left.\begin{array}{l} z' = e^{i\theta} \Leftrightarrow \dfrac{i.\bar{z}}{i-\bar{z}} = e^{i\theta} \Leftrightarrow i.\bar{z} = ie^{i\theta} - e^{i\theta}.\bar{z} \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{ie^{i\theta}}{i+e^{i\theta}} \\ Or\ i + e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\theta} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}.\left[e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})} + e^{-i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}\right] = 2.\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right).e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} \end{array}\right\rangle \Rightarrow$$

$$z' = e^{i\theta} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{ie^{i\theta}}{2.\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right).e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{i}{2}.\left[\frac{e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right] = \frac{i}{2}\left[1 + i.tg\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = -\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) - i\right]$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + i\right]$$

b) $z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 = e^{i0}$ *les solutions sont* $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ $\quad k \in \{0,1,2\} \Rightarrow S_{\mathbb{C}} = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$

c)

$$i.z^3=(-i-z)^3 \Leftrightarrow -i.(\bar{z})^3=(i-\bar{z})^3 \Leftrightarrow \left(\frac{i.\bar{z}}{i-\bar{z}}\right)^3=1 \Leftrightarrow (z')^3=1 \Leftrightarrow z'=1 \text{ ou } z'=e^{i\frac{\acute{e}\pi}{3}} \text{ ou } z'=e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\bullet z'=1 \Leftrightarrow z'=e^{i.0} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\left[tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\right]=-\frac{1}{2}(-1+i)=\frac{1}{2}(1-i)$$

$$\bullet z'=e^{i\frac{\acute{e}\pi}{3}} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\right]=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\right]$$

$$\bullet z'=e^{i\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\right]=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\right]$$

Conclusion : les solutions sont : $z_1=\frac{1}{2}(1-i)$ $\quad z_2=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\right]$ *et* $z_3=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\right]$

EX 35 : $a\in IR$; $\qquad (E): z^2+a(1-i)z-ia^2=0$

1)

$\Delta=a^2(1-i)^2+4ia^2=-2ia^2+4ia^2=2ia^2 \Rightarrow \quad \delta=(1+i)a$

Les solutions sont : $z_1=\dfrac{-a(1-i)-(1+i)a}{2}=-a$ *et* $z_2=\dfrac{-a(1-i)+(a+i)a}{2}=ia$

2)

a) $z_A=2+z_1=2-a \qquad et \qquad z_B=z_2=ia$

ACBD carré de sens direct d'où :

$$\begin{cases} CA=CB \\ \left(\widehat{\overline{CB},\overline{CA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|z_A-z_C|=|z_B-z_C| \\ \left(\widehat{\overline{CB},\overline{CA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=1 \\ Arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$$

$$\Leftrightarrow z_A-z_C=iz_B-iz_C \Leftrightarrow (1-i)z_C=z_A-iz_B \Leftrightarrow (1-i)z_C=2-a+a \Leftrightarrow (1-i)z_C=2 \Leftrightarrow z_C=\frac{2}{1-i}$$

$\Leftrightarrow \boxed{z_C=1+i}$ Donc C est un point fixe.

b) Soit L l'ensemble des points D lorsque a varie dans IR

ACBD est un carré $\Rightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB} \Rightarrow z_D-z_C=z_A-z_C+z_B-z_C$

$\Rightarrow z_D=z_A+z_B-z_C \Rightarrow z_D=(1-a)(1-i)$

Soit $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $1-i$; $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad aff\left(\overrightarrow{OD}\right)=(1-a).aff\,\vec{w} \Rightarrow \overrightarrow{OD}=(1-a)\vec{w}$

D appartient à la droite Δ passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$ (Δ :y=-x)

Donc $L\subset\Delta$ (1)

Réciproquement soit D un point de $\Delta \Rightarrow D(x,-x) \Rightarrow Z_D = x.(1-i)$
Montrons qu'il existe un réel a tel que ACBD soit carrée direct (avec $z_A = 2-a$ et $z_B = ia$)

$$ACBD \text{ carré direct} \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AD \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} BC = BD \\ \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_A} = i \quad et \quad \frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = -i$$

$$\Leftrightarrow Z_A = x - 1 \quad et \quad Z_B = i(1-x) \quad en\ posant\ a = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow Z_A = 2 - a \quad et \quad Z_B = ia$$

Donc $\Delta \subset L$ (2) (1) et (2) $\Rightarrow$ $L = \Delta$

Conclusion : l'ensemble des points D lorsque a varie dans IR la droite Δ :y=-x

EX 36 :

1)

a) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \qquad \Delta' = -1 \qquad \delta' = i$

Les solutions sont : $z' = \sqrt{3} + i \ et \ z'' = \sqrt{3} - i$

b) $|z'| = |\sqrt{3} + i| = 2 \rightarrow z' = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $\boxed{z'' = \overline{z'} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.}$

2) $U = \frac{1}{2}\left[(1-i) + \sqrt{3}(1+i)\right]$

a) $U^2 = \sqrt{3} + i$

b)

$$\left.\begin{array}{l} U^2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow U = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \ ou \ U = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \\ \operatorname{Re}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} > 0 \quad et \quad \operatorname{Re}\left(-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right) < 0 \\ Or \quad U = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)\right] \rightarrow \operatorname{Re}(U) > 0 \end{array}\right\rangle U = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

D'où $\quad U = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \qquad U = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

c) $U = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ et $U = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)\right]$

D'où :

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

3) $P(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i).z^2+4(1+i\sqrt{3}).z-8i$

a)

Soit $\alpha\in IR$

$i\alpha$ *solution de l'éq* $P(z)=0\Leftrightarrow P(i\alpha)=0$

$$\Leftrightarrow -i\alpha^3-2\alpha^2\left(\sqrt{3}+i\right)+4\left(1+i\sqrt{3}\right)i\alpha-8i=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2\alpha^2\sqrt{3}-4\alpha\sqrt{3}\right)+i\left(-\alpha^3+2\alpha^2+4\alpha-8\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha^2\sqrt{3}-4\alpha\sqrt{3}=0 & (1)\\ et\\ -\alpha^3+2\alpha^2+4\alpha-8=0 & (2)\end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\alpha(\alpha-2)=0\Leftrightarrow\boxed{\alpha=0}$ *ou* $\boxed{\alpha=2}$ *Or* $\alpha=0$ *ne verifie pas* (2)

et $\alpha=2$ *verifie bien* (2)

d'où 2i est une solution imaginaire de l'équation P(z)=0.

b)

$2i$ *est une solution de* $P(z)=0\Rightarrow P(z)=(z-2i)\left(z^2+bz+c\right)=z^3+(b-2i)z^2+(c-2ib)z-2ic$

Identifions : on aura : $\begin{cases}b-2i=-2\left(\sqrt{3}+i\right)\\ c-2ib=4\left(1+i\sqrt{3}\right)\\ -2ic=-8i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\sqrt{3}\\ c=4\end{cases}$

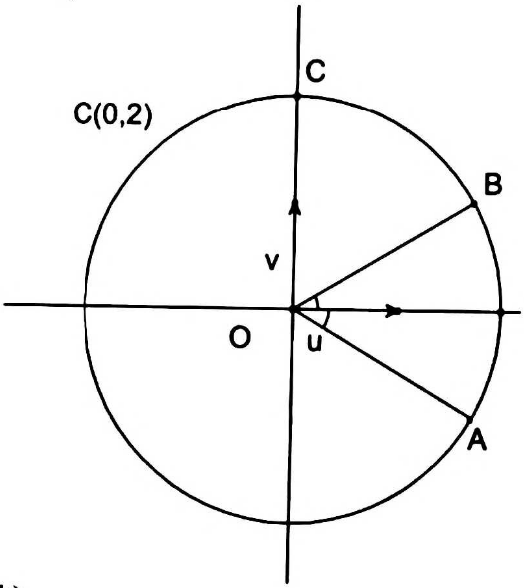
D'où $P(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$

$P(z)=0\Leftrightarrow z-2i=0$ *ou* $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

D'après 1) $\Leftrightarrow\begin{cases}z=2i\\ ou\\ z=\sqrt{3}+i\\ ou\\ z=\sqrt{3}-i\end{cases}$ $S_{\mathbb{C}}=\left\{2i;\sqrt{3}+i;\sqrt{3}-i\right\}$

4) $z_A = \sqrt{3} - i \qquad z_B = \sqrt{3} + i \qquad z_C = 2i$

a)



b)

* $aff\left(\overrightarrow{OC}\right) = z_C = 2i$ *et* $aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_C = 2i$

D'où $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ OABC est un parallélogramme (1)

* $OA = |z_A| = 2 \quad OC = |z_C| = 2 \quad \Rightarrow \boxed{OA = OC}$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow$ OABC est un losange.

EX 37 :

I) $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

1) $\left(e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha}\right)^2 - \left(e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha}\right)^2 = 8e^{3i\alpha}$

2) $z^2 - \left(e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha}\right)z + 2e^{3i\alpha} = 0$

$\Delta = \left(e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha}\right)^2 - 8e^{3i\alpha} = \left(e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha}\right)^2 \rightarrow \delta = e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha}$

Les solutions sont :

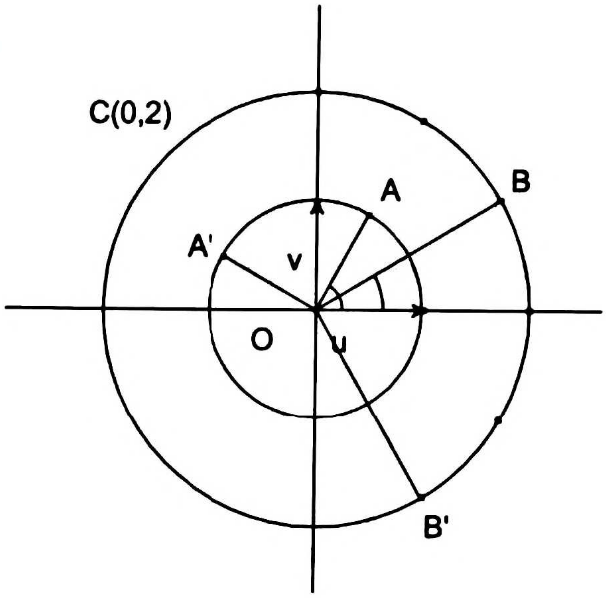
$z' = \dfrac{\left(e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha}\right) - \left(e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha}\right)}{2} = 2e^{i\alpha}$ *et* $z'' = \dfrac{\left(e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha}\right) + \left(e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha}\right)}{2} = e^{2i\alpha}$

II) $z_A = e^{2i\alpha} \;;\; z_B = 2e^{i\alpha} \;;\; z_{A'} = ie^{2i\alpha} \;;\; z_{B'} = -2ie^{i\alpha}$

1)

a) $z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{2i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\alpha)}$ *et* $z_{B'} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha} = 2e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}$

b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ $\quad z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $\quad z_{A'} = e^{5i\frac{\pi}{6}}$; $z_{B'} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$



2) $I = A' * B'$

a) $z_I = \frac{z_{A'} + z_{B'}}{2} = \frac{i(z_A - z_B)}{2} \Rightarrow \frac{z_I}{z_B - z_A} = \frac{i(z_A - z_B)}{2(z_B - z_A)} = -\frac{i}{2}$

b) $\frac{z_I}{z_B - z_A} = \frac{aff\left(\overrightarrow{OI}\right)}{aff\left(\overrightarrow{AB}\right)}$ est imaginaire pure d'où $(OI) \perp (AB)$

D'où (OI) est une hauteur issue de O au triangle OAB.

* $\frac{OI}{AB} = \frac{|z_I|}{|z_B - z_A|} = \left|-\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ $\qquad$ D'où $OI = \frac{1}{2}AB$.

EX 38 :

I) $\alpha \in [O, \pi]$

1) $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2e^{2i\alpha} = 0$ $\qquad \Delta' = e^{2i\alpha} - 2e^{2i\alpha} = -e^{2i\alpha} \rightarrow \delta' = ie^{i\alpha}$

Les solutions sont : $z' = e^{i\alpha} + ie^{i\alpha} = (1+i)e^{i\alpha}$ $\quad$ *et* $\quad z'' = (1-i)e^{i\alpha}$

2) $z' = (1+i)e^{i\alpha} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\alpha} \Rightarrow \boxed{z' = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}}$ *et* $z'' = (1-i)e^{i\alpha} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}.e^{i\alpha} \Rightarrow \boxed{z'' = \sqrt{2}e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}}$

II) $z_A = (1-i)e^{i\alpha}$ $\quad$ *et* $\quad z_B = (1+i)e^{i\alpha}$

1) a) $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{(1+i)e^{i\alpha}}{(1-i)e^{i\alpha}} = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i}{2} = i$

b) $\dfrac{aff\left(\overrightarrow{OB}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OA}\right)} = \dfrac{z_2}{z_1} = i$ est imaginaire d'où $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ (1)

$\left|\dfrac{z_B}{z_A}\right| = |i| \Leftrightarrow \dfrac{|z_B|}{|z_A|} = 1 \Leftrightarrow |z_B| = |z_A| \Leftrightarrow OA = OB$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow$ OAB est rectangle et isocèle en O.

2)

a) $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv Arg\left(z_2 - z_1\right)(2\pi) \equiv Arg(2ie^{i\alpha})(2\pi) \equiv Arg(2i) + Arg(e^{i\alpha})(2\pi) \equiv \dfrac{\pi}{2} + \alpha(2\pi)$

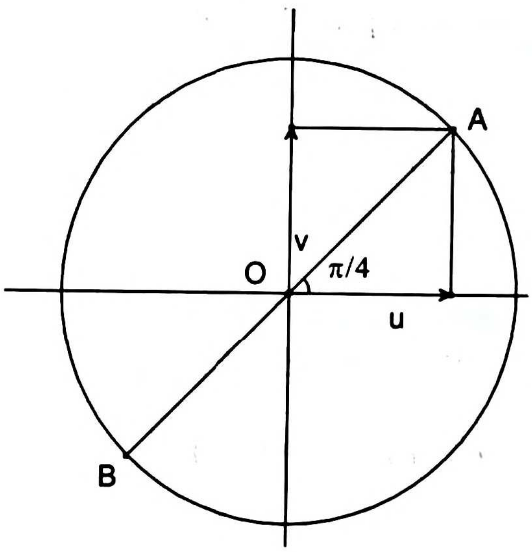
b) Soit $\Delta : y = x$

$(AB) // \Delta \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}(\pi) \Leftrightarrow \alpha + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \in \mathbb{Z}$

Comme $\alpha \in [0, \pi]$ d'où $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$

<u>Conclusion</u> : $(AB) // \Delta$ si seulement si $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$

c) Pour $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ $z_A = (1-i)e^{3i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{5i\frac{\pi}{4}}$



EX 39 :

$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ $\qquad (E) : iz^2 + 6\sin\theta . z - 9i = 0$

1)

$\Delta' = 9\sin^2\theta + 9i^2 = -9 + 9.\sin^2\theta = -9(1-\sin^2\theta) = -9\cos^2\theta \to \delta' = 3i\cos\theta$

a) $z' = \dfrac{-3\sin\theta + 3i\cos\theta}{i} = 3(\cos\theta + i\sin\theta)$ *et* $z'' = \dfrac{-3\sin\theta - 3i\cos\theta}{i} = 3(-\cos\theta + i\sin\theta)$

b) $z' = 3e^{i\theta}$ *et* $z'' = 3\left[\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)\right] = 3e^{i(\pi-\theta)}$

2) $z_A = 3i$; $z_{M1} = 3(\cos\theta + i\sin\theta)$; $z_{M2} = 3(-\cos\theta + i\sin\theta)$

a) $|z_A| = |z_{M1}| = |z_{M2}| = 3 \Rightarrow OA = OM_1 = OM_2 = 3$ D'où $A, M_1, M_2 \in \zeta_{(0,3)}$

b) On a $OM_1 = OM_2$ donc OM_1AM_2 est un losange ssi :

$\overline{OM_1} = \overline{M_2A} \Leftrightarrow z_1 = z_A - z_2 \Leftrightarrow 3(\cos\theta + i\sin\theta) = 3i - 3(-\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Leftrightarrow \cos\theta + i\sin\theta = i + \cos\theta - i\sin\theta \Leftrightarrow 2\sin\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$ *avec* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

3) $i.z^4 + 3\sqrt{3}.z^2 - 9i = 0$ On pose $t = z^2$ l'équation devient :

$i.t^2 + 3\sqrt{3}.t - 9i = 0 \to \Delta = -9 \to \delta = 3i$

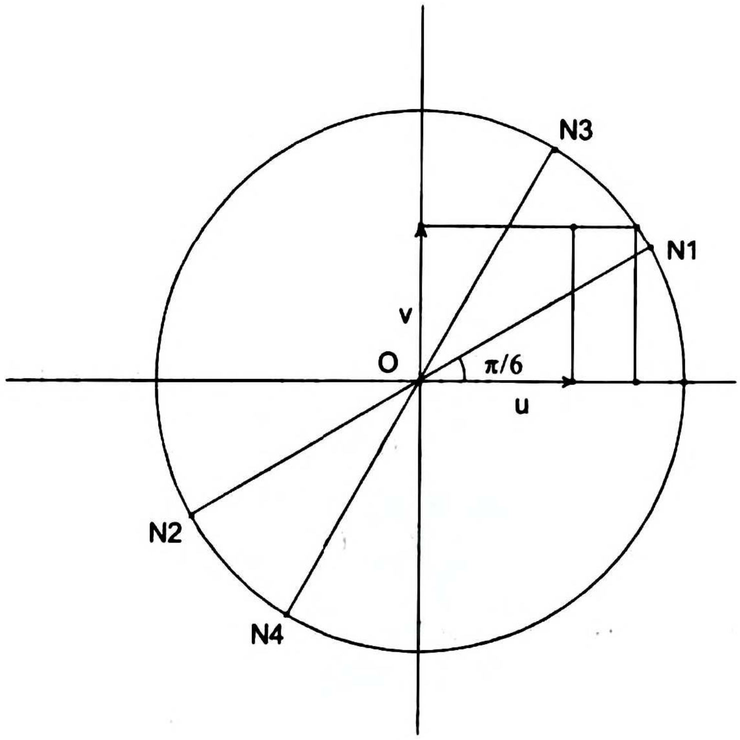
$t' = \dfrac{-3\sqrt{3} + 3i}{2i} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ *et* $t'' = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\bullet\ t = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Leftrightarrow z^2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ *ou* $z = \sqrt{3}e^{7i\frac{\pi}{6}}$

$\bullet\ t = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Leftrightarrow z^2 = 3e^{2i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ *ou* $z = \sqrt{3}e^{4i\frac{\pi}{3}}$

$S_C = \left\{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} ; \sqrt{3}e^{7i\frac{\pi}{6}} ; \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} ; \sqrt{3}e^{4i\frac{\pi}{3}}\right\}$

$N_1\left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$; $N_2\left(\sqrt{3}e^{7i\frac{\pi}{6}}\right)$ $N_3\left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$; $N_4\left(\sqrt{3}e^{4i\frac{\pi}{3}}\right)$


N3
N1
v
O
π/6
u
N2
N4

QCM

1) $V_{(A,\frac{\pi}{2})} = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

2) $S_{(AB)} \circ S_{(AC)} = id\rho$

3) $f = S_{(AB)}$

4) $f(0) = 0$

5) $f \circ f \circ f = id\rho$

Vrai Faux

1) (Faux)
En effet : une symétrie orthogonale d'axes Δ fixe tout point de Δ

2) (Faux)
Une translation de vecteur non nul est une isométrie sans point fixe

3) (Faux)
Une symétrie glissante laisse globalement invariant son axe.

4) (Vrai)
$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est une translation si $\Delta // \Delta'$,
$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est une rotation de centre I si $\Delta \cap \Delta' = \{I\}$

5) (Vrai)
En effet : f fixe le point A d'où f est soit l'identité, soit une symétrie orthogonale d'axe passant par A, soit une rotation de centre A.
Comme $f(B) \neq B \rightarrow f \neq id$
D'ou f est une rotation de centre A ou symétrie orthogonale.
$f(B) = C \Rightarrow f = r_{(A,\frac{\pi}{2})}$ Ou $f = S_{\Delta}$ avec $\Delta = \mathrm{med}[BC]$

EX 1 :

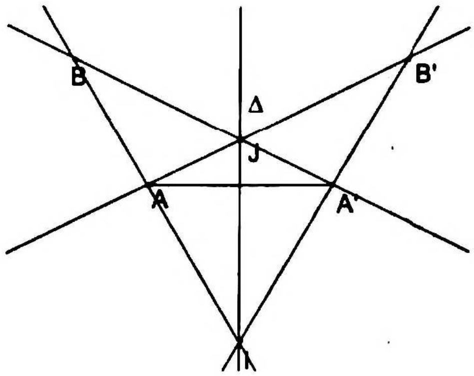
1.On marque le point I intersection de (AB) et Δ

2.On trace la droite (IA') qui représente l'image de (AB) par S_Δ

3.On marque le point j intersection de (A'B) et Δ

4.On trace la droite (JA) qui représente l'image de (A'B) par S_Δ

5. (AB) et (A'B) se coupent en B alors leurs images (IA') et (AJ) se coupent $B' = S_\Delta(B)$



EX 2 :

Soit I le point de [Oy) tel que : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{MN}$

$$P = A * M \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$Q = B * N \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{ON}}{2}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$$

$$= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}}{2}$$

$$= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN}}{2}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OI}\right)$$

EX 3 :

$$f(G) = G$$

On a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

D'où : $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC'}$$

$$= \underbrace{\left(\overrightarrow{GA'} - \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{GC'}\right)}_{\vec{0}} - \underbrace{\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)}_{\vec{0}}$$

$$= \vec{0}$$

EX 4 :

1) $f = s_1 \circ s_2 \qquad f^{-1} = s_2 \circ s_1$

* $\Delta_1 = \Delta_2 \to f = id \to f^{-1} = id$

* $\Delta_1 // \Delta_2 et \Delta_1 \neq \Delta_2$

$\to f$ est une translation

$\to f^{-1}$ est une translation

* $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{I\}$

$\to f$ est une rotation de centre I

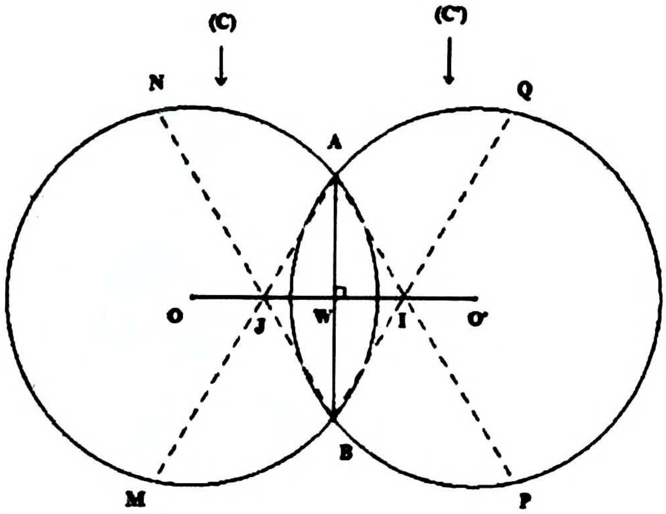
$\to f^{-1}$ est une rotation de centre I

2)

*$\Delta_1 = \Delta_2 \to f = f^{-1}$

*$\Delta_1 \perp \Delta_2 \to f = f^{-1}$

EX 5 :



Désignons par « O » et « O' » les centres respectifs de (C) et (C')
W : le centre du losange IAJB alors W= A*B = I*J = O*O'

⇒ L'image de la droite (AJ) par la symétrie S_w est la droite (BI)

et ⇒ L'image du cercle (C) par la symétrie S_w est le cercle (C')

D'où $S_W(M) = Q$

De même $S_W(N) = P$. Par suite W= P*N = Q*N

⇒PQNM est un parallélogramme.(1)

*

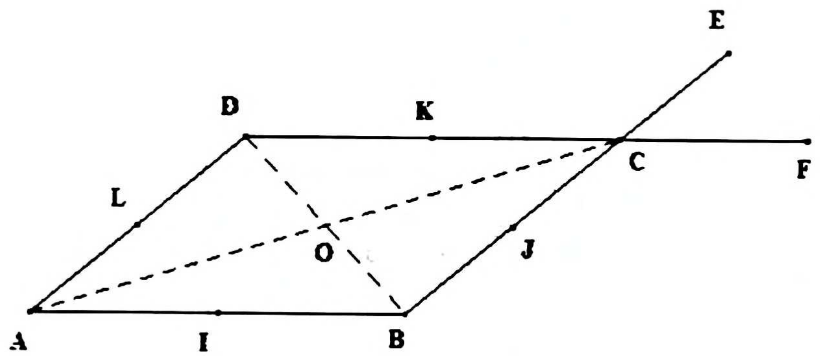
$$\left.\begin{array}{l} S_{(OO')}(A) = B \\ S_{(OO')}(I) = I \end{array}\right\rangle \Rightarrow S_{(OO')}(AI) = (BI) \quad \text{Or} \quad S_{(OO')}(C) = (C')$$

D'où $S_{(OO')}(P) = Q$. De même on montre que : $S_{(OO')}(N) = M$

Ce qui permet de conclure que PN = QM (2)

(1)+(2) => PQNM est un rectangle.

EX 6 :



1)

$S_1(A) = C$

$S_1(I) = K$

$S_1(L) = J$

2) voir figure

3)

$S_2 o S_1 (A) = S_2(C) = C$
$S_2 o S_1 (I) = S_2(K) = F$
$S_2 o S_1 (L) = S_2(J) = E$

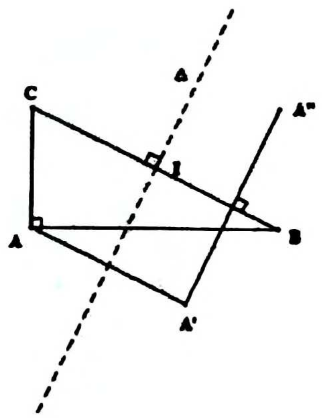
$t_{\overrightarrow{AC}}(A) = C$

$t_{\overrightarrow{AC}}(I) = F$

$t_{\overrightarrow{AC}}(L) = E$

$S_2 o S_1$ et $t_{\overrightarrow{AC}}$ sont Deux isométries qui coïncident sur trois points non alignés C,E et F Donc sont égales D'où $S_2 \circ S_1 = t_{\overrightarrow{AC}}$

EX 7 :



Désignons par I= B*C et Δ : la médiatrice de [BC].

$\Delta \perp (BC)$ d'où $S_{(BC)}\circ S_{\Delta} = S_I$: La symétrie centrale de centre I.

$S_{(BC)}\circ S_{\Delta}(A) = S_{(BC)}(A') = A''$

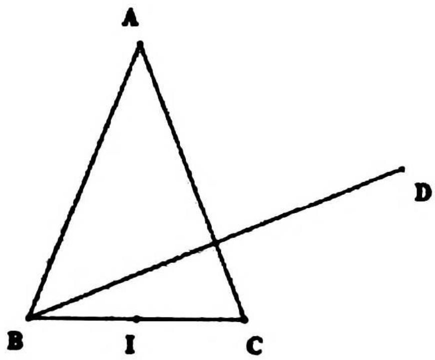
$\Rightarrow S_I(A) = A'' \Rightarrow I = A * A''$

$S_{(BC)}\circ S_{\Delta}(B) = S_{(BC)}(C) = C \Rightarrow I = B * C$

D'où ACA''B est un parallélogramme et comme $(AB) \perp (AC)$ Alors ACA''B est un rectangle.

EX 8 :

$$\begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = C \\ f(C) = D \end{cases}$$



1)

$g(A) = S_{(AC)}\circ f(A) = S_{(AC)}A = A$

$g(B) = S_{(AC)}\circ f(B) = S_{(AC)}C = C$

$g(C) = S_{(AC)}\circ f(C) = S_{(AC)}D = B$

$I = B * C \Rightarrow g(I) = g(B) * g(C)$

$\Rightarrow$ g(I) $= C * B$

$\Rightarrow g(I) = I$

2) $g \neq id$ car $g(B) \neq B$ alors g est une isométrie, différente de l'identité et fixe deux points A et I d'où $g = S_{(AI)}$

EX 9 :

1) $S_{(AC)}\circ S_{\Delta} = t_{2\overline{BI}}$ car $\Delta // (AC)$

$S_{(KJ)}\circ S_{(AC)} = t_{2\overline{IH}}$ avec $\{H\} = (JK)\cap(BI)$

2)

$f = (S_{(AC)}\circ S_{\Delta})\circ(S_{(KJ)}\circ S_{(AC)})$

$f = t_{2\overline{BI}}\circ t_{2\overline{IH}}$

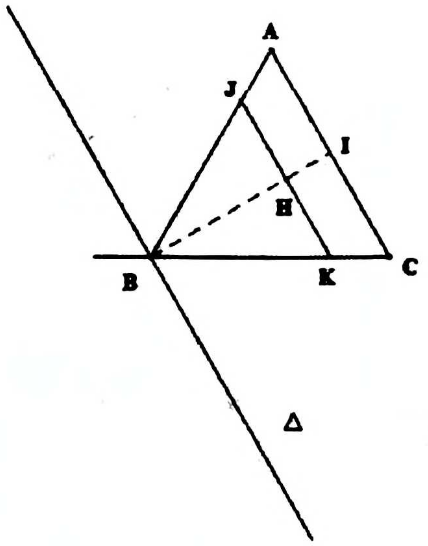
$f = t_{2\overline{BH}}$

3)

On a $f = t_{2\overline{BH}}$ donc pour que f soit la translation de vecteur $\overline{BI}$ il faut que $2\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BI}$

$\Leftrightarrow H = B*I$

$\Leftrightarrow J = A*B$



EX 10 :

Soient $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ d'images respectifs $M'_1(z'_1)$ et $M'_2(z'_2)$ par f.

On a :

$z'_1 = iz_1 - 1 - i$

$z'_2 = iz_2 - 1 - i$

$|z'_2 - z'_1| = |i(z_2 - z_1)|$

$= |i|.|z_2 - z_1|$

$= |z_2 - z_1|$

D'où $M'_1M'_2 = M_1M_2$

f conserve la distance $\Rightarrow f$ est une isométrie

*Déterminons l'ensemble des points invariant par f.

$f(M) = M \Leftrightarrow z' = z$

$\Leftrightarrow iz - 1 - i = z \Leftrightarrow z(i-1) = 1 + i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{i+1}{i-1} \Leftrightarrow z = -i$

D'où f laisse le point I d'affixe (-i) comme unique point invariant.

Par suite f est une rotation de centre I

Soit $M \neq i$ $f(M) = M' \Leftrightarrow z' = iz - 1 - i$

$\Leftrightarrow z' + i = i(z + i) \Leftrightarrow \dfrac{z'+i}{z+i} = i$

$\Leftrightarrow \dfrac{z'+i}{z+i} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'+i| = |z+i| \\ Arg\left(\dfrac{z'+i}{z+i}\right) = \dfrac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM \\ (\widehat{\overline{IM}, \overline{IM'}}) = \dfrac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

D'où $f = r_{(I,\frac{\pi}{2})}$

EX 11 :

1) Montrons que f conserve les distances $\begin{matrix} M_1(x_1,y_1) & M_2(x_2,y_2) \\ M'_1 = f(M_1) & M'_2 = f(M_2) \end{matrix}$

$$M'_1(x'_1,y'_1) tq : \begin{cases} x'_1 = 1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ y'_1 = 1+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \end{cases} \quad et \quad M'_2(x'_2,y'_2) tq : \begin{cases} x'_2 = 1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ y'_2 = 1+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(M'_1M'_2)^2 &= (x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2 \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2+y_2-x_1-y_1)\right]^2+\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2-y_2-x_1+y_1)\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1).(y_2-y_1)\right]+\frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-2(x_2-x_1).(y_2-y_1)\right] \\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \\ &= (M_1M_2)^2\end{aligned}$$

$d'ou \; M'_1M'_2 = M_1M_2$

Par suite f est une isométrie

2) a) soit $M(x,y)$

$$f(M)=M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = \sqrt{2}-2+x+y \\ \sqrt{2}y = \sqrt{2}+x-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}-1)x-y = \sqrt{2}-2 \\ x-(1+\sqrt{2})y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-(1+\sqrt{2})y+\sqrt{2} = 0 \\ x-(1+\sqrt{2})y+\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x-(1+\sqrt{2})y+\sqrt{2} = 0$$

D'où l'ensemble des points invariant par f est la droite $\Delta : x-(1+\sqrt{2})y+\sqrt{2}=0$

b) $f = S_{\Delta}$

EX 12 :

1) soient $M_1(z_1)$ $M_2(z_2)$ $M'_1(z'_1)$ $M'_2(z'_2)$

$f(M_1) = M'_1 \Leftrightarrow z'_1 = i\overline{z_1}$

$f(M_2) = M'_2 \Leftrightarrow z'_2 = i\overline{z_2}$

$$\begin{aligned} M'_1M'_2 &= |z'_2 - z'_1| \\ &= |i(\overline{z_2} - \overline{z_1})| \\ &= |i|.|\overline{z_2 - z_1}| \\ &= 1.|z_2 - z_1| \\ &= M_1M_2 \end{aligned}$$

f conserve les distances d'où f est une isométrie.

2) M(z) avec z = x+iy

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow z = i\overline{z} \\ &\Leftrightarrow x + iy = i(x - iy) \\ &\Leftrightarrow (x-y) + i(y-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y = x \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite $\Delta : y = x$

3) $f = S_{\Delta}$

EX 14 :

Soit I=A*B

1) $f([AB]) = [AB]$

Deux cas se présentent :

1[er] cas : $f(A) = A$ et $f(B) = B$

$$\begin{aligned} I = A * B &\Rightarrow f(I) = f(A) * f(B) \\ &\Rightarrow f(I) = A * B = I \end{aligned}$$

2em cas : $f(A) = B$ et $f(B) = A$

$$\begin{aligned} I = A * B &\Rightarrow f(I) = f(A) * f(B) \\ &\Rightarrow f(I) = B * A = I \end{aligned}$$

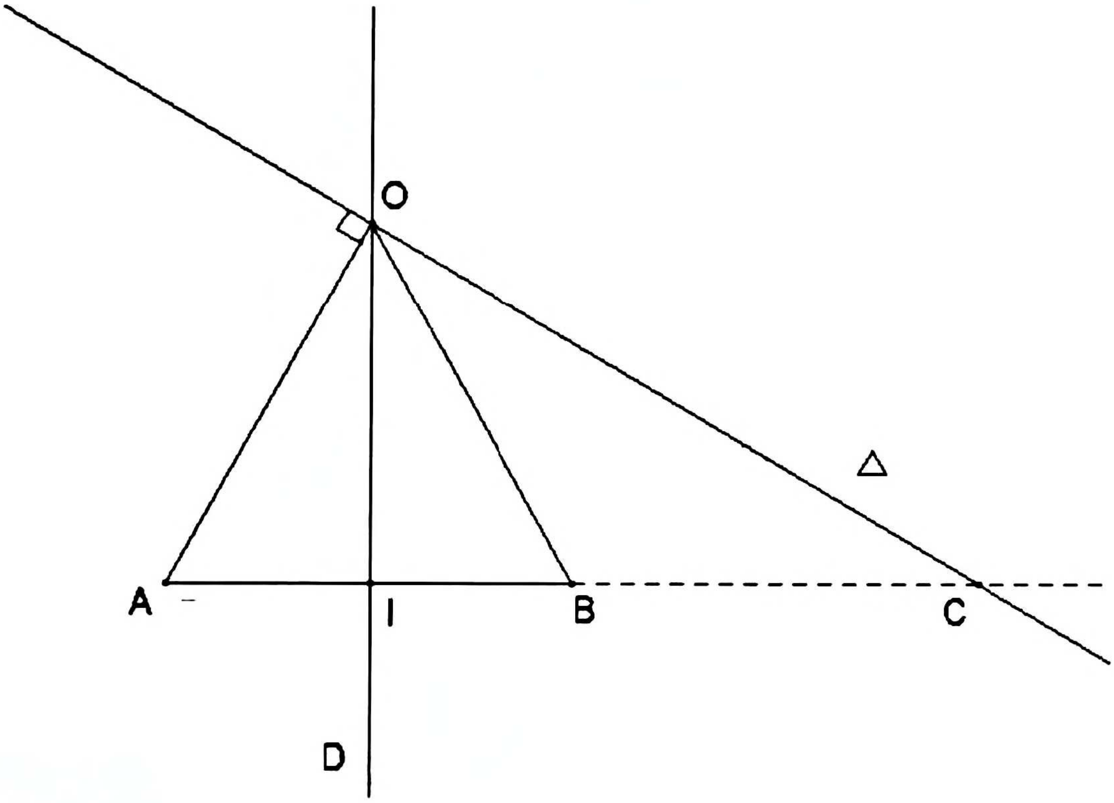
2) d'après 1) f fixe I=A*B d'où f est soit l'identité , Soit une symétrie orthogonale d'axe passent par I, Soit une rotation de centre I.

$\Rightarrow f = id$ ou $f = S_{(AB)}$

ou $f = S_{\Delta}$ avec Δ=med[AB]

ou $f = r_{(I,\pi)} = S_I$.

EX 13 :



$$S_2 \circ S_1 = S_{(OB)} \circ S_{(OA)}$$

1) $$= r_{(0,2(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}))}$$

$$= r_{(0,\frac{2\pi}{3})} = R$$

D'où $f = S_3 \circ r_{(0,\frac{2\pi}{3})}$

2) Soit C le point d'intersection de Δ et (AB) et I=A*B

$$(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})_{[2\pi]}$$

$$\equiv \frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(2\pi) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$$

$$S_3 \circ S_4 = S_\Delta \circ S_D = r_{(0,2(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}))} = r_{(0,\frac{2\pi}{3})} = R$$

3) $f = S_3 \circ R$

$$R = S_3 \circ S_4 \Rightarrow S_4 = S_3^{-1} \circ R$$

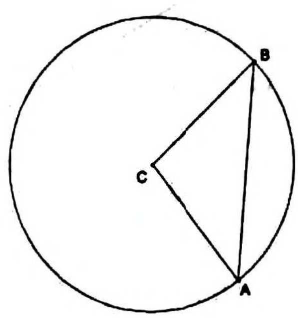
$$\Rightarrow S_4 = S_3 \circ R.$$

D'où $f = S_4 = S_D$

EX 15 :

1) L'image de (C) pour f est lui-même $\Rightarrow f(O)=O$.

D'où f est
- *soit l'identité*
- *soit une rotation de centre O*
- *soit une symétrie orthogonale*



2) on a $f(O)=O$ D'où $f([AB])=[AB]$.

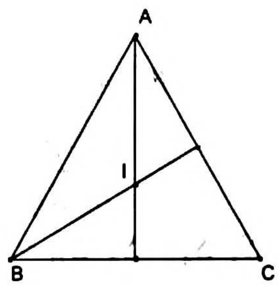
<u>1^er cas</u> : $f(A)=A$ et $f(B)=B$

$\Rightarrow f=id$

<u>2em cas</u> : $f(A)=B$ et $f(B)=A$

$\Rightarrow f=S_{\Delta}$ avec $\Delta=\text{mod}[AB]$

EX 16 :



1) $\begin{cases} f(A)=B \\ f(B)=C \end{cases}$

f est une isométrie sans points fixe d'où f est soit : une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul
Soit une symétrie glissante.

$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{BC}$ d'où f n'est pas une translation, par suite f est une symétrie glissante.

2) a) $f(I)=I \quad I\in P$.

$\text{med}[AB]\neq\text{med}[BC]$

D'où f n'est pas une symétrie orthogonale.

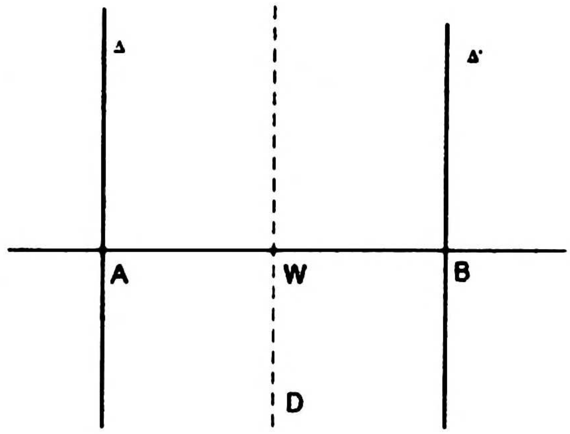
b) f fixe un point I et f n'est pas une symétrie orthogonale d'où f est une rotation de centre I car $f\neq id$

(*) IA=IB et IB=IC

I : le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

$$f=r_{\left(I,\frac{2\pi}{3}\right)}$$

EX 17 :



Soit W=A*B

<u>1er cas</u> : $(AB) \perp \Delta$ il est clair que $f \neq id$

*$f = t_{\overrightarrow{AB}}$

ou

*$f = r_{(W,\pi)} = S_W$

ou

*$f = S_D$ avec $D // \Delta$ et $W \in D$

<u>2em cas</u> : (AB) et Δ non perpendiculaires.

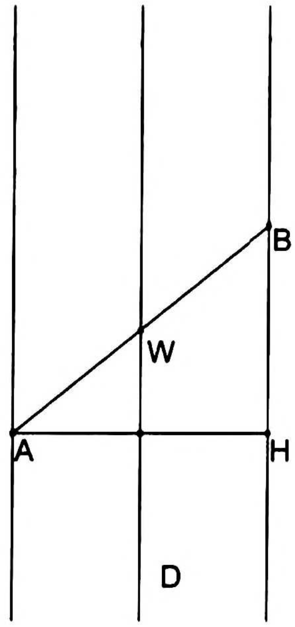
Soit H : le projeter orthogonale de A sur Δ

*$f = t_{\overrightarrow{AB}}$

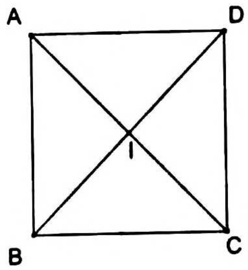
*$f = S_W$

Ou

*f : la symétrie glissante d'axe D et de vecteur $\overrightarrow{HB}$



EX 18 :



1) a) on a : $f(\{A,B,C,D\})=\{A,B,C,D\}$
Le point I est équidistant de A,B,C et D $\Rightarrow f(I)$ est équidistant de A,B,C et D $\Rightarrow f(I)=I$

b) f fixe le point I d'où f est soit l'identité, soit une rotation de centre I d'angle non nul, soit une symétrie orthogonale d'axe passant par I.

2)

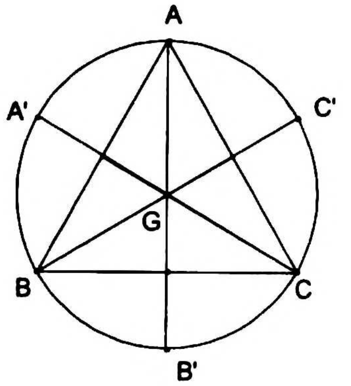
- $f(A)=A$ et $f(I)=I$
  Comme f n'est pas une symétrie orthogonale alors $f=id_p$
- $f(A)=B$ donc $f\neq id$
  Par suite f est une rotation de centre I d'angle $\theta\equiv(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}})(2\pi)$
  $$\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$
- $f(A)=C$ donc $f\neq id$
  $\Rightarrow f$ est une rotation de centre I d'angle $\theta\equiv(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}})(2\pi)$ donc $\theta\equiv\pi[2\pi]$
  D'où $f=S_I$
- $f(A)=D$ donc $f\neq id$
  $\Rightarrow f$ est une rotation de centre I d'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}})=\frac{-\pi}{2}(2\pi)$

3) f : symétrie orthogonale.

- $f(A)=A$ et $f(I)=I$
  $\Rightarrow f=S_{(AI)}$
- $f(A)=B$ d'où $f=S_{\Delta_2}$ avec $\Delta_2=\text{mod}[AB]=\text{mod}[CD]$
- $f(A)=C$
  $f=S_\Delta$ avec $\Delta=\text{mod}[AC]$
  $f=S_{(IB)}$
- $f(A)=D\Rightarrow f=S_{\Delta_1}$ avec $\Delta_1=\text{mod}[AD]=\text{mod}[BC]$

4) l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariant le carré ABCD sont :
$$\left\{id_p;r_{(I,\frac{\pi}{2})};r_{(I,\frac{-\pi}{2})};S_I;S_{(IA)};S_{(IB)};S_{\Delta_1};S_{\Delta_2}\right\}$$

EX 19 :



1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$

D'où G : le centre de gravité du triangle A'B'C'.

2) $f(\{A,B,C\})=\{A',B',C'\}$

a) f conserve les le centre de gravité

$\Rightarrow f(G)=G$

b) f fixe le point G et $f \neq id$ d'où f est soit une symétrie orthogonale d'axe passant par G soit une rotation de Centre G.

(*) on suppose que f n'est pas une symétrie orthogonale.

- $f(A)=A' \to f=r_{(G,\frac{\pi}{3})}$
- $f(A)=B' \to f=r_{(G,\pi)}=S_G$
- $f(A)=C' \to f=r_{(G,\frac{-\pi}{3})}$

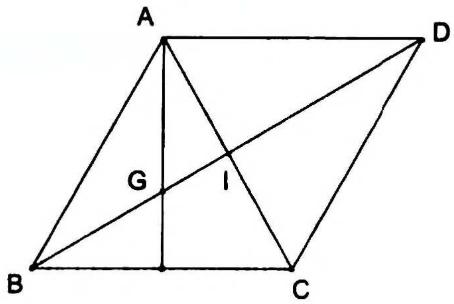
(*) on suppose que f n'est pas une rotation.

- $f(A)=A' \to f=S_{\Delta_1}$ $avec$ $\Delta_1=\mathrm{mod}[AA']$
- $f(A)=B' \to f=S_{\Delta_2}$ $avec$ $\Delta_2=\mathrm{mod}[AB']$
- $f(A)=C' \to f=S_{\Delta 3}$ $avec$ $\Delta_3=\mathrm{mod}[AC']$

<u>Conclusion</u> :

$$f \in \left\{ r_{(G,\frac{\pi}{3})}; r_{(G,\frac{-\pi}{3})}; S_G; S_{\Delta_1}; S_{\Delta_2}; S_{\Delta_3} \right\}$$

EX 20 :



1) Soit G : le centre de gravité du triangle ABC. On a : $f(G)=G$

En faisant un raisonnement analogue a celui de l'exercice N°18

$$f \in \left\{ id_p; r_{(G,\frac{2\pi}{3})}; r_{(G,\frac{-2\pi}{3})}; S_{(AG)}; S_{(BG)}; S_{(CG)} \right\}$$

2) f(ABC)=(ACD)

a) $g = S_{(AC)} \circ f$

l'image du triangle ABC par f est le triangle ACD. d'où l'image du triangle ABC par g est le triangle ABC.

g : laisse le triangle ABC globalement invariant

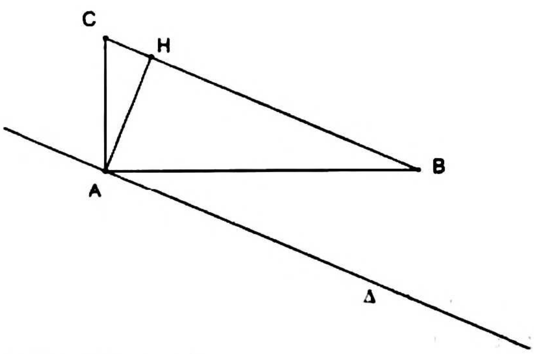
b) d'après 1)

$$g \in \left\{ id_p ; r_{(G,\frac{2\pi}{3})} ; r_{(G,\frac{-2\pi}{3})} ; S_{(AG)} ; S_{(BG)} ; S_{(CG)} \right\}$$

- $g = id \Rightarrow S_{(AC)} \circ f = id$
  $\Rightarrow f = S_{(AC)}$
- $g = S_{(AG)} \Rightarrow S_{(AC)} \circ f = S_{(AG)}$
  $\Rightarrow f = S_{(AC)} \circ S_{(AG)}$
  $\Rightarrow f = r_{(A,\frac{\pi}{3})}$
- $g = S_{(BG)} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ S_{(BG)}$
  $\Rightarrow f = S_I \text{ avec } I = A * C$
- $g = S_{(CG)} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ S_{(CG)}$
  $\Rightarrow f = r_{(C,\frac{-\pi}{3})}$
- $g = r_{(G,\frac{2\pi}{3})} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ r_{(G,\frac{2\pi}{3})}$
- $g = r_{(G,\frac{-2\pi}{3})} \Rightarrow f = S_{(AC)} \circ r_{(G,\frac{-2\pi}{3})}$

Rq : on montrera dans le chapitre suivant que pour les deux dernier cas : f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

EX 21 :



1) $S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_A$

Car $(AB) \perp (AC)$

$S_\Delta \circ S_{(AH)} = S_A \Rightarrow \Delta$ est la perpendiculaire à (AH) en A. donc $\Delta // (BC)$ et $A \in \Delta$

2) $f = S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$

$S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_\Delta \circ S_{(AH)}$

$\Rightarrow S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_{(BC)} \circ S_\Delta \circ S_{(AH)}$

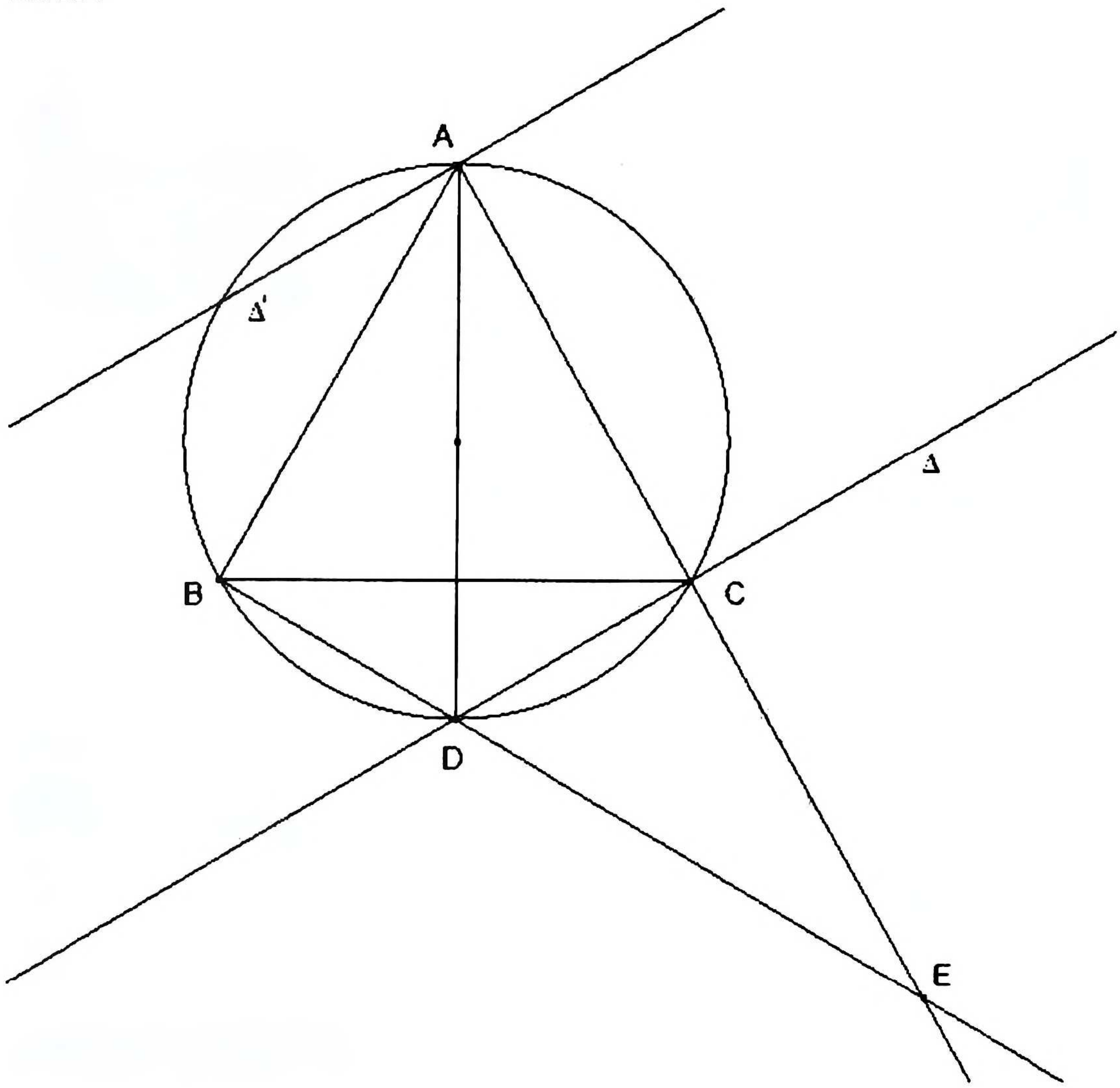
$\Rightarrow f = (S_{(BC)} \circ S_\Delta) \circ S_{(AH)}$

$S_{(BC)} \circ S_\Delta = t_{2\overrightarrow{AH}}$ car $\Delta // (BC)$

D'où $f = t_{2\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AH)}$

f est la symétrie glissante d'axe (AH), de vecteur $2\overrightarrow{AH}$

EX 22 :



1)a) [AD] est un diamètre pour (C) => le triangle ABD est rectangle en B
Par suite le triangle ABE est rectangle en B. De plus CA=CB
⇨ c : le centre du cercle circonscrit au triangle ABE
⇨ CB=CE C=A*E

b) C=A*E
le triangle ADC est rectangle en C car [AD] diamètre de (C)
on a donc :

$$\begin{cases} C = A * E \\ (DC) \perp (AE) \end{cases}$$

D'où (DC) est la médiatrice du segment [AE].

2)
$f = S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$
$g = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

a) f est la rotation de centre D d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}}) \equiv \frac{4\pi}{3} (2\pi)$

d'où $f = r_{(D, \frac{-2\pi}{3})}$ de même $g = r_{(A, \frac{2\pi}{3})}$

b) $f = S_{\Delta} \circ S_{(AD)} = r_{(D, \frac{-2\pi}{3})}$ d'où $\Delta = (DC)$ car $D \in (DC)$ *et* $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}}) \equiv \frac{-\pi}{3} (2\pi)$

$g = S_{(AD)} \circ S_{\Delta'} = r_{(A, \frac{2\pi}{3})}$ Δ' : la perpendiculaire à (AC) en A.

c)

- $\left.\begin{array}{l} \Delta' \perp (AC) \\ \Delta \perp (AC) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta // \Delta'$
- $f \circ g = S_{\Delta} \circ \underbrace{S_{(AD)} \circ S_{(AD)}}_{id} \circ S_{\Delta'}$

$= S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$ car $\Delta // \Delta'$ *et* $(AC) \perp \Delta$

$= t_{2\overrightarrow{AC}}$

QCM :

1) $t_{\vec{u}} o S_A$ est une symétrie centrale
2) Un déplacement qui fixe deux points distincts est l'identité
3) La composée de deux symétries glissantes est un déplacement
4) $S_D \circ r_{(0,\frac{\pi}{3})}$: symétrie orthogonale
5) $S_A \circ S_B = t_{2\vec{BA}}$

VRAI ou FAUX :

1) vrai : la composée de trois symétries orthogonale est un antidéplacement
2) vrai : symétrie glissante n'a pas de points invariants
3) faux : $g \circ f(I) = I$ $g \circ f$ est un antidéplacement qui fixe un point $\Rightarrow g \circ f$ est une symétrie orthogonale
4) vrai : $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ $f^{-1} = s_\Delta o t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} o s_\Delta$
5) faux : f(A)=C
f(B)=D
$\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ f n'est pas une translation f=S_O avec o=A∗C

EX1 : $\begin{cases} f(o)=o \\ f(A)=B \end{cases}$

f fixe o et $f \neq id$ d'où f soit une symétrie orthogonale d'axe Δ=med[AB] soit une rotation de centre o d'angle $\alpha=(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ $[2\pi]$

EX2 :

1. AD=BC et A≠D d'où il existe un unique déplacement φ tel que $\begin{cases} \varphi(A)=B \\ \varphi(D)=C \end{cases}$ $\varphi=t_{\overrightarrow{AB}}$

De même il existe un unique antidéplacement ψ tel que $\begin{cases} \psi(A)=B \\ \psi(D)=C \end{cases}$ med[AB]≠med[DC]

$\Rightarrow \psi$ n'est pas une symétrie orthogonale

$\Rightarrow \psi$ est une symétrie glissante

De même : il existe un unique déplacement f tel que $\begin{cases} f(A)=C \\ f(D)=B \end{cases}$ $f=S_o$

Et il existe un unique antidéplacement g tel que $\begin{cases} g(A)=C \\ g(D)=B \end{cases}$ (g : symétrie glissante)

Conclusion : il existe exactement 4 isométries qui transforment le segment [AD] en [BC]

2) le triangle BCO est ADI ne sont pas isométriques (AI≠BC ; AI≠BO et AI≠OC) d'où il n'existe aucune isométrie qui transforme le triangle BCO au triangle ADI

EX3 :

1) $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est un antidéplacement qui fixe le point A donc c'est une symétrie orthogonale d'axe passant par A

2) $S_1(B)=B'$; $S_2(B')=B'$; $S_3(B')=E$

3) $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est une symétrie orthogonale et $S_3 \circ S_2 \circ S_1(B)=E$ $\Rightarrow S_3 \circ S_2 \circ S_1 = S_\Delta$ avec Δ=med[BE]

EX4 :

$r=r_{(A,\frac{\pi}{12})}$

1) on a : $\begin{cases} AB=AF \\ (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ d'où F=r'(B) $r'=r_{(A,\frac{\pi}{3})}$

2) D=A*G⇒(AD)=(AG)⇒$S_{(AD)} o S_{(AG)}$ =Id et $S_{(AC)} o S_{(AE)} = R_{(A,-\frac{\pi}{3})}$

$\Rightarrow S_{(AD)} o S_{(AG)} \neq S_{(AC)} o S_{(AE)}$

EX5 :

1) AB=CD et AB≠0 donc il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D
De même : il existe un unique déplacement qui envoie A sur D et B sur C
f et g : les seuls déplacements qui transforment [AB] en [CD]

$(AB) \parallel (CD)$

2) a) $\begin{cases} f(A)=C \\ f(B)=D \end{cases}$

f est d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv 0(2\pi) \quad \Rightarrow f = t_{\overrightarrow{AC}}$

$\begin{cases} g(A)=D \\ g(B)=C \end{cases}$ g est un déplacement d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC}}\right)=\pi[2\pi]$

⇒ g est une symétrie centrale, $g=S_I$ avec $I=A*D$

b) * $\begin{cases} f(A)=C \\ f(B)=D \end{cases}$

f est d'angle α tel que $\alpha \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)(2\pi)$

⇒ f est une rotation d'angle α de centre ω avec $\{\omega\} = med[AC] \cap med[BD]$

* $\begin{cases} g(A)=D \\ g(B)=C \end{cases}$

g est d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}) \equiv \alpha + \pi(2\pi)$

⇒ g est une rotation d'angle $(\alpha+\pi)$ de centre Ω avec $\{\Omega\} = med[AD] \cap med[BC]$

EX6 :

1) OA=OA' et OA≠0 d'où il existe un unique déplacement f tel que $\begin{cases} f(O)=O' \\ f(A)=A \end{cases}$

f est un déplacement d'angle $\alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'}})(2\pi) \quad \Rightarrow \begin{matrix} f = r_{(A,\alpha)} \\ f(\zeta)=\zeta' \end{matrix}$

2)

$$\left.\begin{cases} r_{(A,\alpha)}(O)=O' \\ r_{(A,\alpha)}(M)=M' \\ r_{(A,\alpha)}(A)=A \end{cases}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'A}}\right)\ (2\pi) \text{car } r \text{ conserve la mesure des angles orientés}$$

$$(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM'}})(2\pi)$$

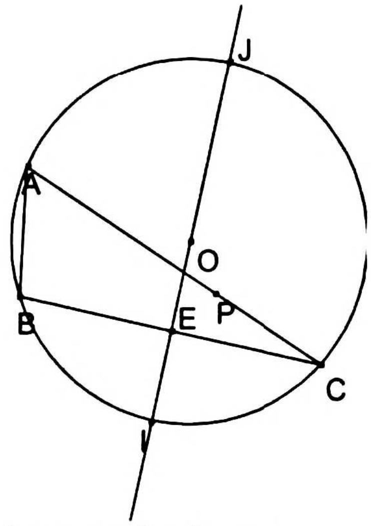
$$\equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}}) + \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'M'}})(\pi)$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left[\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'A}}\right)\right] \equiv 0(\pi) \ \text{car} \ \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'A}}\right)$$

d'où les points B,M et M' sont alignés

EX7 :

1) a) voir figure



b) l'ensemble des points M du plan vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ est l'arc $[\widehat{BC}]$ contenant A, privé de B et C

c) l'ensemble des points M du plan vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ et MB<MC est l'arc$[\widehat{BJ}]$contenantA, privé de B et J

2) a) on a : AB=PC et AB≠0 d'où il existe un unique déplacement R tel que R(A)=P et R(B)=C $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{PC}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ d'où R est une rotation d'angle $(\frac{\pi}{3})$

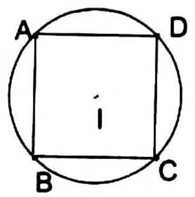
b) soit ω le centre de R . R(B)=C $\Leftrightarrow \begin{cases} \omega B = \omega C \\ (\widehat{\overrightarrow{\omega B},\overrightarrow{\omega C}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ d'où ω=J

$R = r_{(J,\frac{\pi}{3})}$

c) R(A)=P $\Leftrightarrow \begin{cases} JA = JP \\ (\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JP}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ d'où JAP est un triangle équilatéral direct

EX8 : $f = T \circ R$

1) $f(D) = T \circ R(D) = T(D) = A$
$f(A) = T \circ R(A) = T(C) = B$



2) f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (composée d'une translation et une rotation)

soit ω son centre f(D)=A ⇒ ω∈med[DA]
f(A)=B ⇒ ω∈med[AB] d'où ω=I et $f = r_{(I,\frac{\pi}{2})}$

EX9 :

1) Comme étant composée d'un nombre pair de symétries orthogonales, f, g et h sont des déplacements
2) ABCD rectangle

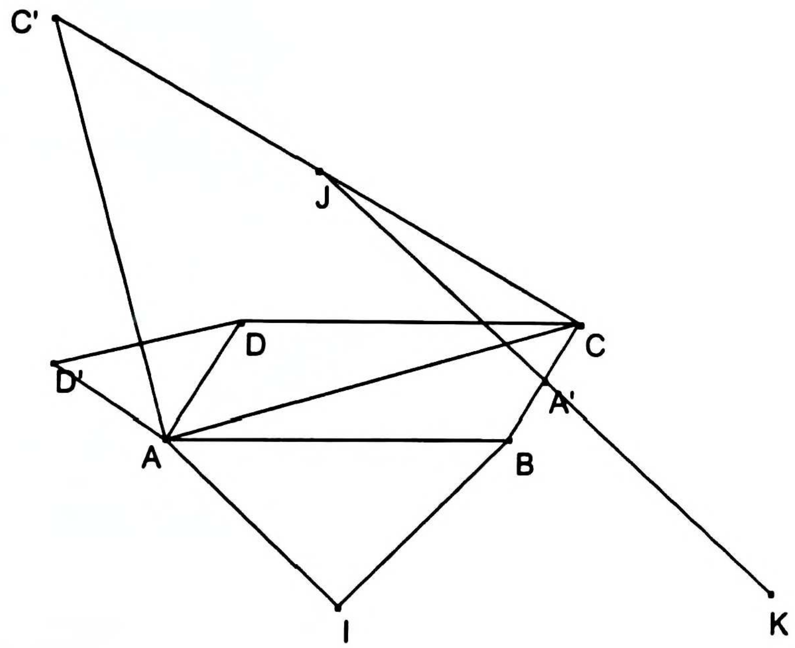
$f=(S_{(AB)}\circ S_{(CD)})\circ(S_{(AD)}\circ S_{(CB)})$ $g=(S_{(AB)}\circ S_{(AD)})\circ(S_{(CB)}\circ S_{(CD)})$ $h=(S_{(AB)}\circ S_{(AD)})\circ(S_{(CD)}\circ S_{(CB)})$

$f=t_{2\overrightarrow{DA}}\circ t_{2\overrightarrow{CD}}$ $g=S_A\circ S_C$ $h=S_A\circ S_C=t_{2\overrightarrow{CA}}$

$f=t_{2(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})}=t_{2\overrightarrow{CA}}$ $g=t_{2\overrightarrow{CA}}=f$ $h=g=f$

EX10 :

$R_A=r_{(A,\frac{\pi}{2})}$ $T=t_{\overrightarrow{BA}}$



1) $f=R_A\circ T$

a) $f(B)=R_A\circ T(B)=R_A(A)=A$ f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (composée d'une translation et d'une rotation) et f(B)=A

D'autre part on a : $\begin{cases} IA=IB \\ (\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases}$ d'où f est de centre I $f=r_{(I,\frac{\pi}{2})}$

b) $f(C)=R_A\circ T(C)=R_A(D)=D'$ d'où $\begin{cases} IC=ID' \\ (\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID'}})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases}$

par suite le triangle ICD' est rectangle est isocèle en I.

2) J=C∗C' ; $R_J = r_{(J,\frac{\pi}{2})}$

a) ACC' est rectangle et isocèle en A et de sens direct J=C∗C' d'où $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JC}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \\ et \\ JA = JC = JC' \end{cases}$

Par suite $R_J(A)=C$

b) $(\widehat{\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{CB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{DA}})(2\pi) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{AD}}) + \pi(2\pi)$

$\equiv \frac{-\pi}{2} + \pi(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

c) montrons que $R_J(D') = B$

soit $D'' = R_J(D')$ on a aussi $C = R_J(A)$ d'où $\begin{cases} CD'' = AD' \\ (\widehat{\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{CD''}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD'' = AD' = AD = CB \\ (\widehat{\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{CB}}) + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD''}}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD'' = CB \\ \frac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD''}}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD'' = CB \\ (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD''}}) = 0(2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD''} \Rightarrow D'' = B$$

D'où $R_J(D')=B$

$\Rightarrow \begin{cases} JD' = JB \\ (\widehat{\overrightarrow{JD'},\overrightarrow{JB}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ est par suite le triangle BJD' est rectangle et isocèle en J

3) $g = R_J \circ f$

a) $g(B) = R_J \circ f(B) = R_J(A) = C$

b) $K = R_J(I)$

$g = r_{(J,\frac{\pi}{2})} \circ r_{(I,\frac{\pi}{2})}$ g est une rotation d'angle π ⇒ g est une symétrie centrale

g(B)=C ⇒ g est de centre A'=B∗C Donc $g=S_{A'}$

$g(I) = R_J \circ f(I) = R_J(I) = K$

$\Rightarrow A' = I * K$

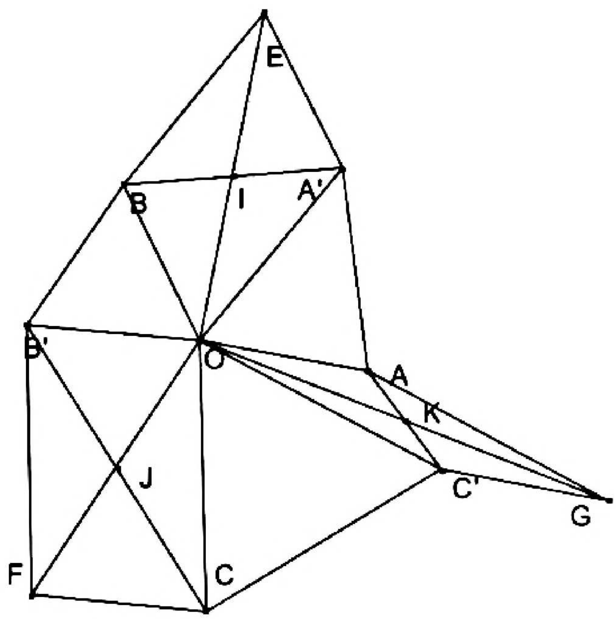
$\Rightarrow K' = S_{A'}(I)$

EX11 :

1)

$r_1 = r_{(o,\frac{\pi}{3})}$

$r_2 = r_{(B',\frac{-\pi}{3})}$ $f_1 = r_1 \circ r_2$ f_1 est un



déplacement d'angle $(\frac{\pi}{3} + (\frac{-\pi}{3})) \equiv 0(2\pi)$

Donc f_1 une translation

$f_1(B) = r_1 \circ r_2(B) = r_1(O) = O$ d'où $f_1 = t_{\overrightarrow{BO}}$

2) a) $(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}})(2\pi) \equiv \frac{-\pi}{3}(2\pi)$

(car OBEA' est un parallélogramme)

b)

$r_1 \circ r_2 = t_{\overrightarrow{BO}}$

$\Rightarrow r_2 = r_1^{-1} \circ t_{\overrightarrow{BO}}$

$\Rightarrow r_2 = r_{(O,\frac{-\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{BO}}$

$r_2(E) = r_{(O,\frac{-\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{BO}}(E) = r_{(O,\frac{-\pi}{3})}(A') = A$

$\Rightarrow \begin{cases} B'E = B'A \\ (\widehat{\overrightarrow{B'E}, \overrightarrow{B'A}}) \equiv \frac{-\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$

D'où le triangle EB'A est équilatéral direct

3) $t_1 = t_{\overrightarrow{OA}}$

$t_2 = t_{\overrightarrow{B'O}}$

a) $f_2 = t_1 \circ (r_1 \circ t_2)$ $r_1 \circ t_2$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ d'où f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

b) $f_2(B') = t_1 \circ r_1 \circ t_2(B') = t_1 \circ r_1(O) = t_1(O) = A$

on a : $\begin{cases} EB' = EA \\ (\widehat{\overrightarrow{EB'}, \overrightarrow{EA}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ d'où f_2 est de centre E Donc $f_2 = r_{(E,\frac{\pi}{3})}$

c) $f_2(F) = t_1 \circ r_1 \circ t_2(F) = t_1 \circ r_1(C) = t_1(C') = G$ car OB'FC et OC'GA sont des parallélogrammes

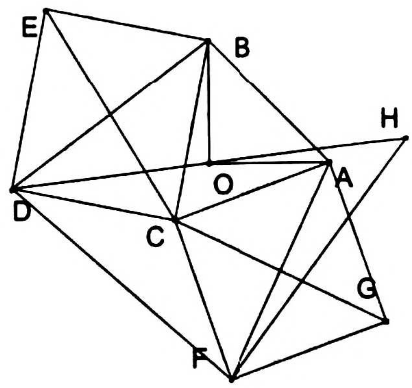
$f_2(F) = G \Leftrightarrow r_{(E,\frac{\pi}{3})}(F) = G \Leftrightarrow \begin{cases} EF = FG \\ (\widehat{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ par suite EFG est un triangle équilatéral direct

d) on a : EF=FG=GE

$\left.\begin{array}{l} I = O * E \\ J = O * F \end{array}\right\} \Rightarrow IJ = \frac{1}{2}EF$ de même $JK = \frac{1}{2}FG$ et $IK = \frac{1}{2}GE$ d'où IJ=IK=JK par suite le triangle IJK est équilatéral

EX12 :

1) $r_A = r_{(A,\frac{\pi}{2})}$ $r_B = r_{(B,\frac{\pi}{2})}$



a) $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ est la rotation de centre A d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ d'où

$S_{(AO)} \circ S_{(AB)} = r_A$

b) $r_A = S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ et $r_B = S_{(BA)} \circ S_{(BO)}$

$\Rightarrow r_A \circ r_B = S_{(AO)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BO)} = S_{(AO)} \circ S_{(BO)} = S_O$

car (AO)⊥ (BO)

2) a) $r_A \circ r_B(E) = r_A(C) = G$

b)

$r_A \circ r_B(E) = G$

$\Rightarrow S_O(E) = G$

$\Rightarrow O = E * G$

c) $r_F = r_{(F,\frac{\pi}{2})}$

$r_D = r_{(D,\frac{\pi}{2})}$

$r_F \circ s_O \circ r_D(C) = r_F \circ s_O(E) = r_F(G) = C$

$r_F \circ s_O$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2} + \pi \equiv \frac{3\pi}{2}(2\pi)$ d'où $r_F \circ s_O \circ r_D$ est une translation $\left[\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv 0(2\pi)\right]$ qui fixe le point C d'où $r_F \circ s_O \circ r_D = id_p$

d) $O = D * H \Rightarrow S_O(D) = H$ et $r_F \circ s_O \circ r_D = id_p \Rightarrow r_F \circ s_O \circ r_D(D) = D$

$$r_F \circ s_O \circ r_D(D) = D \Rightarrow r_F \circ s_O(D) = D \Rightarrow r_F(H) = D \Rightarrow \begin{cases} FD = FH \\ (\widehat{\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

D'où le triangle DFH est un triangle rectangle et isocèle en F $O = D * H \Rightarrow OD = OF = OH$
Et (OF)⊥(DO) par suite ODF est rectangle et isocèle en O

EX13 :

$R = r_{(I,\frac{\pi}{2})}$

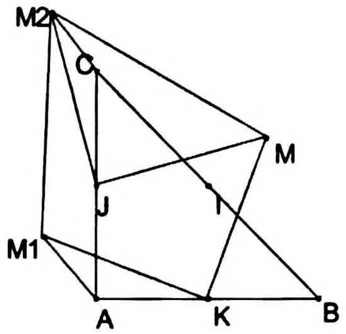
$T = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

$f = R \circ T$

$g = T \circ R$

1) a) f(K)=R ∘ T(K)=R(J)=K

g(J)=T ∘ R(J)=T(K)=J



b) f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (composée d'une translation et dune rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$)

f(K)=K d'où $f = r_{(K,\frac{\pi}{2})}$

g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et g(J)=J d'où $g = r_{(J,\frac{\pi}{2})}$

2) a) $g \circ f^{-1} = r_{(J,\frac{\pi}{2})} \circ r_{(K,\frac{-\pi}{2})}$ et $(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{2} \equiv 0(2\pi))$ D'où $g \circ f^{-1}$ est une translation

b) $g \circ f^{-1}(A) = g(I) = C$ d'où $g \circ f^{-1} = t_{\overrightarrow{AC}}$

c) g(M)=M_2 f(M)=M_1

$g \circ f^{-1}(M_1) = g(M) = M_2$

$\Rightarrow t_{\overrightarrow{AC}}(M_1) = M_2$ d'où ACM_2M_1 est un parallélogramme

$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$

EX14 :

$r(C) = D$

$r^{-1}(B) = E$

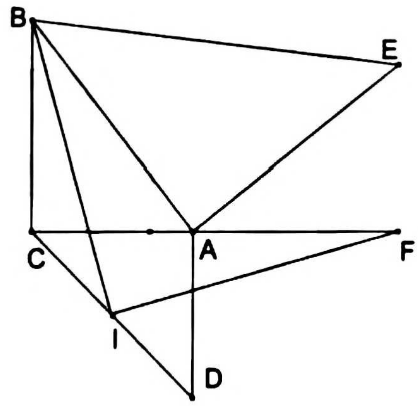
1) a) $r_{(A,\frac{\pi}{2})}(C) = D$ AC=DA et AC≠0 d'où

il existe un unique déplacement f tel que

f(A)=D et f(C)=A

b) f est un déplacement d'angle

$(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) + \pi(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi(2\pi) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi)$



d'où f est une rotation d'angle $(\frac{-\pi}{2})$

soit ω son centre

f(A)=D $\Rightarrow \omega \in med[AD]$

f(C)=A $\Rightarrow \omega \in med[AC]$ d'où ω=I et

$f = r_{(I,\frac{-\pi}{2})}$

2) $g = f \circ r$

a) $g = r_{(I,\frac{-\pi}{2})} \circ r_{(A,\frac{\pi}{2})}$ $\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv 0(2\pi)\right)$ d'où g est une translation

et comme g(A)=D $\Rightarrow g = t_{\overrightarrow{AD}}$

b) $g(E) = F \Rightarrow f \circ r(E) = F \Rightarrow f(B) = F$

$* f(B) = F \Leftrightarrow \begin{cases} IF = IB \\ (\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IF}}) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ d'où BIF est isocèle et rectangle en I

c) $\left.\begin{matrix} f(C) = A \\ f(B) = F \end{matrix}\right\} \Rightarrow (AF) \perp (BC)$ (1) car f est une rotation d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

or (AC)⊥(BC) (2)

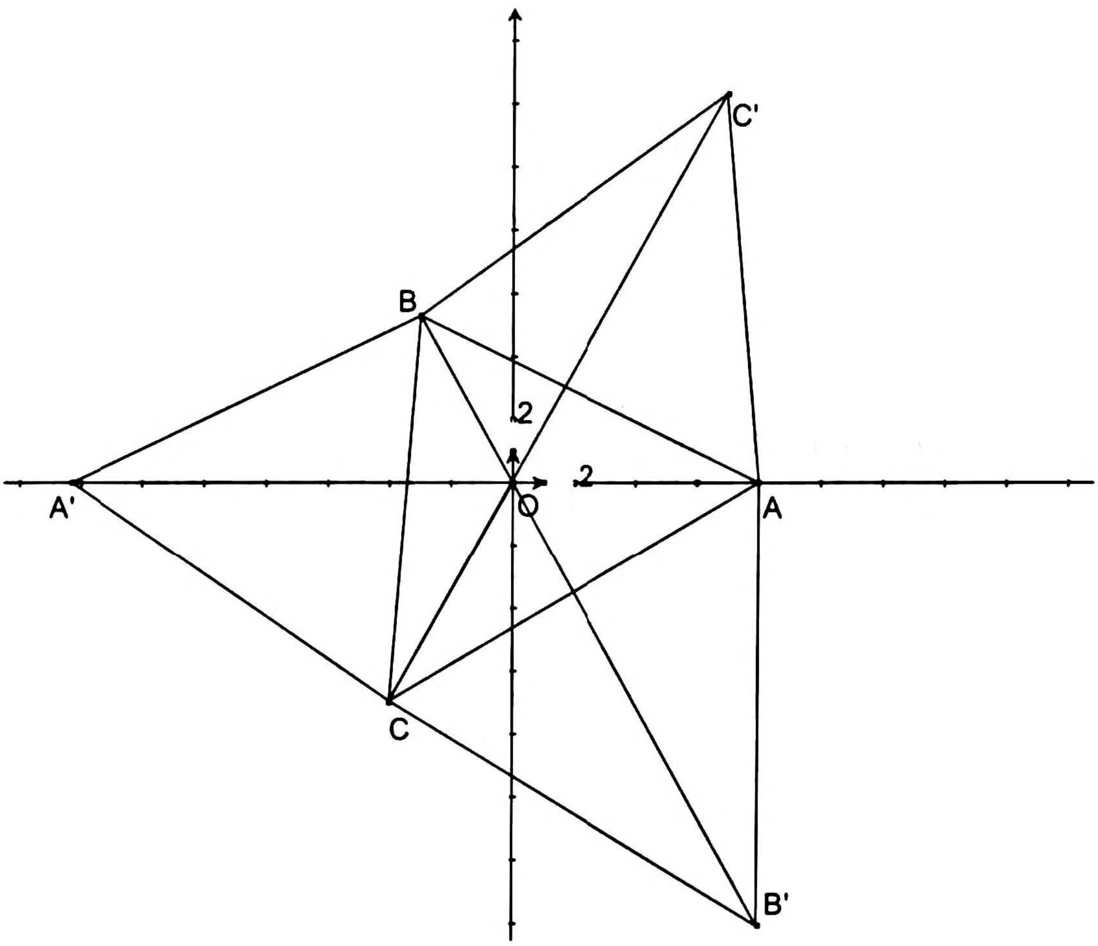
(1)+(2)$\Rightarrow (AF) \parallel (AC)$ par suite A,C et F sont alignés

EX15 :

$a = 8$

1) a) $b = 6e^{2i\frac{\pi}{3}}$

$c = 8e^{4i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-2i\frac{\pi}{3}}$



b) $A'=r_{(C,\frac{\pi}{3})}(B)\Leftrightarrow\begin{cases}CA'=CB\\(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA'}})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|a'-c|=|b-c|\\Ag(\frac{a'-c}{b-c})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\frac{a'-c}{b-c}\right|=1\\Ag(\frac{a'-c}{b-c})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a'-c}{b-c}=e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow a'-c=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)$$

$$\Leftrightarrow a'=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)+c\Leftrightarrow a'=e^{i\frac{\pi}{3}}(6e^{2i\frac{\pi}{3}}-8e^{-2i\frac{\pi}{3}})+8e^{-2i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow a'=e^{i\pi}-8e^{-i\frac{\pi}{3}}+8e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a'=-6+8(e^{-2i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}})=-6+8\left[\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=-14$$

De même :

$*r_{(A,\frac{\pi}{3})}(C)=B'$

$\Rightarrow b'=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)+a$

$\Rightarrow b'=e^{i\frac{\pi}{3}}(8e^{-2i\frac{\pi}{3}}-8)+8$

$\Rightarrow b'=8(1-i\sqrt{3})$

$*r_{(B,\frac{\pi}{3})}(A)=C'$

$\Rightarrow C'=e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b)+b$

$\Rightarrow C'=7(1+i\sqrt{3})$

c) $*\ \frac{c'}{c}=\frac{7(1+i\sqrt{3})}{8e^{-2i\frac{\pi}{3}}}=\frac{14e^{i\frac{\pi}{3}}}{8e^{-2i\frac{\pi}{3}}}=\frac{7}{4}e^{i\pi}=\frac{-7}{4}\Rightarrow\frac{c'}{c}\in\mathbb{R}\Rightarrow$ O,C et C' alignés

$*\ \frac{a'}{a}=\frac{-14}{8}\in\mathbb{R}\Rightarrow$ O,A et A' alignés

$*\ \frac{b'}{b}=\frac{8(1-i\sqrt{3})}{6e^{2i\frac{\pi}{3}}}=\frac{16e^{-i\frac{\pi}{3}}}{6e^{2i\frac{\pi}{3}}}=\frac{8}{3}e^{-i\pi}=\frac{-8}{3}\in\mathbb{R}\Rightarrow$ O,B et B' alignés

D'où (AA'),(BB') et (CC') sont concourantes en O

2) a) OA+OB+OC=$|a|+|b|+|c|=8+6+8=22$

b) $1+J+J^2=1+e^{2i\frac{\pi}{3}}+e^{4i\frac{\pi}{3}}=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

3) a)

$$|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|=\left|(a+bj^2+cj)-\underbrace{(1+j+j^2)}_{0}z\right|=|a+bj^2+cj|$$

$$=\left|8+6e^{2i\frac{\pi}{3}}e^{4i\frac{\pi}{3}}+8e^{-2i\frac{\pi}{3}}e^{2i\frac{\pi}{3}}\right|=|8+6e^{2i\pi}+8e^{2i0}|=|8+6+8|=22$$

b) $|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$ (cours) $\Rightarrow |z+z'+z''| \le |z|+|z'|+|z''|$

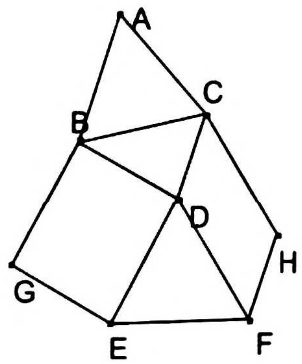
c) $|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j| \le |a-z|+|b-z||j|^2+|c-z||j|$

$\Rightarrow 22 \le |a-z|+|b-z|+|c-z| \Rightarrow 22 \le MA+MB+MC$ or OA+OB+OC=22

D'où MA+MB+MC est minimale pour M=O

EX16 :

I/ 1) ABC équilatéral direct d'où



$$r_{(A,\frac{\pi}{3})}(B)=C \Rightarrow \begin{cases} AC=AB \\ (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1 \\ Ag(\frac{c-a}{b-a}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

* de même : $r_{(D,\frac{\pi}{3})}(E)=F \Rightarrow f-d=e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$

2) EDBG est un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{BG}=\overrightarrow{DE} \Rightarrow g-b=e-d \Rightarrow g=e-d+b$

De même : $\Rightarrow \overrightarrow{CH}=\overrightarrow{DF} \Rightarrow h-c=f-d \Rightarrow h=f-d+c$

3) h-a=(f-d)+(c-a)

$$h-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)+e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)=e^{i\frac{\pi}{3}}[(e-d+b)-a]$$

$$h-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$$

$$\frac{h-a}{g-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{h-a}{g-a}\right|=1 \\ Ag(\frac{h-a}{g-a}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |h-a|=|g-a| \\ Ag(\frac{h-a}{g-a}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH=AG \\ (\widehat{\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AH}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$$

D'où le triangle AGH est équilatéral direct

II/

1) a) $t_2 \circ R$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ (th du cours) d'où f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

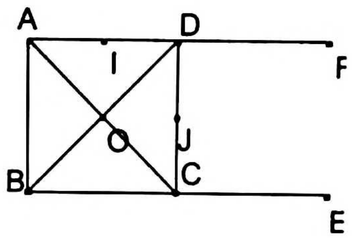
b) $f(B) = t_2 \circ R \circ t_1(B) = t_2 \circ R(D) = t_2(D) = C$

Or on a : $\begin{cases} AB = AC \\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ d'où f est une rotation de centre A $\Rightarrow f = r_{(A,\frac{\pi}{3})}$

2) $f(G) = t_2 \circ R \circ t_1(G) = t_2 \circ R(E) = t_2(F) = H$ D'où $\begin{cases} AG = AH \\ (\widehat{\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$ par suite AGH est Équilatéral direct

EX17 :

1) $\begin{cases} f(A) = D \\ f(D) = C \end{cases}$



$f \circ f(A) = f(D) = C \neq A$

$\Rightarrow f \circ f \neq id$

d'où f n'est pas une symétrie orthogonale par suite f est une symétrie glissante

* soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

$$f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$$

$$f \circ f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta \circ S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$$

$$f \circ f(A) = C \Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}$$

$$f(A) = D \Rightarrow A * D \in \Delta$$

$$f(D) = C \Rightarrow D * C \in \Delta$$

D'où Δ=(IJ) avec I=A∗D et J=D∗C

2) E=f(C)

a) C=f(D) $\Rightarrow E = f \circ f(D) \Rightarrow E = t_{\overrightarrow{AC}}(D) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$ d'où ACED est un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ d'où CE=CD et $(\widehat{\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})(2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ par suite DCE est un triangle isocèle rectangle en C et direct.

b) $E = S_C(B)$

c) F=f(B)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(D)f(C)} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CE} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow D = A * F \Rightarrow F = S_D(A)$

3) $f \circ S_{(AD)}$ est un déplacement (composée de 2 anti-déplacements)

$$f \circ S_{(AD)}(A) = f(A) = D$$

$$f \circ S_{(AD)}(D) = f(D) = C$$

$f\circ S_{(AD)}$ est un déplacement d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}})+\pi(2\pi)\equiv\frac{\pi}{2}+\pi(2\pi)=\frac{-\pi}{2}(2\pi)$

D'où $f\circ S_{(AD)}$ est une rotation d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

On a : $f\circ S_{(AD)}$(A)=D et $\begin{cases}OA=OD\\(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}})\equiv\frac{-\pi}{2}(2\pi)\end{cases}$ d'où $f\circ S_{(AD)}=r_{(O,\frac{-\pi}{2})}$

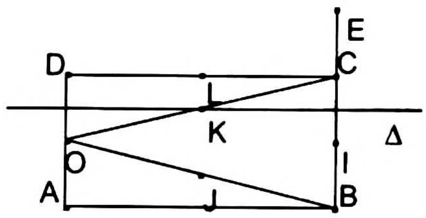
EX18 :

1) a) $t_{\overrightarrow{JK}}\circ S_{(JK)}(B)=t_{\overrightarrow{JK}}(A)=O$

$t_{\overrightarrow{JK}}\circ S_{(JK)}(I)=t_{\overrightarrow{JK}}(O)=D$

c) BI=OD et BI$\neq$0 d'où il existe un unique antidéplacement f qui transforme B en O et I en D

alors d'après a) $f=t_{\overrightarrow{JK}}\circ S_{(JK)}$ donc symétrie glissante



* de même : il existe un unique déplacement g tel que g(B)=O et g(I)=D

$(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{OD}})\equiv 0(2\pi)\Rightarrow$ g est une translation g(B)=O $\Rightarrow g=t_{\overrightarrow{BO}}$

2) Δ=med[IC] ; k$\in\Delta$

a) voir figure

b) $L=C*D$ donc $S_L(D)=C$

c) 1ére méthode $S_L\circ(t_{\overrightarrow{JK}}\circ S_{(JK)})(I)=S_L(D)=C$

$S_L\circ(t_{\overrightarrow{JK}}\circ S_{(JK)})(B)=S_L(O)=E$ (car OCED est un paraléllogramme)

Or S_Δ(I)=C et S_Δ(B)=E

Deux antidéplacements qui coïncident en deux points distincts sont égaux d'où

$S_L\circ t_{\overrightarrow{JK}}\circ S_{(JK)}=S_\Delta$

2éme méthode : on a :

$S_L=S_{(JK)}\circ S_{(DC)}$

$t_{\overrightarrow{JK}}=S_{(DC)}\circ S_\Delta$

D'où :

$$S_L\circ t_{\overrightarrow{JK}}\circ S_{(JK)}=S_{(JK)}\circ S_{(DC)}\circ S_{(DC)}\circ S_{(\Delta)}\circ S_{(JK)}=(S_{(JK)}\circ S_{(\Delta)})\circ S_{(JK)}$$

$$=S_{(\Delta)}\circ S_{(JK)}\circ S_{(JK)}\quad car\,\Delta\perp(JK)$$

$$=S_{(\Delta)}$$

EX19 :

a) A(1,2) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$*t_{\vec{u}} : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

tq $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=1 \\ y'-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y-1 \end{cases}$

$*R_{(A,\frac{\pi}{3})} : M(z) \mapsto M'(z')$

(voir ex16)

tq $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_A)+z_A$

En posant z=x+iy et z'=x'+iy' on aura $z'=\frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y+1+1\sqrt{3})+\frac{1}{2}i(\sqrt{3}x+y+2-\sqrt{3})$

D'où l'expression analytique de $R_{(A,\frac{\pi}{3})}$

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y+1+2\sqrt{3}) \\ y'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y+2-\sqrt{3}) \end{cases}$$

$f=R_{(A,\frac{\pi}{3})}\circ t_{\vec{u}}$

$M(x,y)\xrightarrow{t_{\vec{u}}} M_1(x_1,y_1)\xrightarrow{R_{(A,\frac{\pi}{3})}} M'(x',y')$

On aura :

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{2}((x+1)-\sqrt{3}(y-1)+1+2\sqrt{3}) \\ y'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}(x+1)+(y-1)+2-\sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y+2+3\sqrt{3}) \\ y'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y+1) \end{cases}$$ (expression analytique de f)

$f=R_{(A,\frac{\pi}{3})}\circ t_{\vec{u}}$, f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre ω :le point invariant par f

$$f(\omega)=\omega \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y+2+3\sqrt{3}) \\ y=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{3}y=2+3\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \\ y=\frac{1}{2}(5+\sqrt{3}) \end{cases}$$

D'où $\omega(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}),\frac{1}{2}(5+\sqrt{3}))$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

D : 2x-3y+1=o

$f=t_{\vec{u}}\circ S_D$

Déterminons l'expression analytique de S_D

$S_D : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

tq $:\begin{cases} M * M' \in D \\ \overrightarrow{MM'} \perp \vec{v} \end{cases}$ avec: $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$: *vecteur directeur de D*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(\dfrac{x+x'}{2}) - 3(\dfrac{y+y'}{2}) + 1 = 0 \\ 3(x'-x) + 2(y'-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x'-3y' = -2x+3y-2 \\ 3x'+2y' = 3x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{13}(5x+12y-4) \\ y' = \dfrac{1}{13}(12x-5y+6) \end{cases}$$

* $t_{\vec{u}} :\ M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

tq $:\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+1 \end{cases}$

d'où $f = t_{\vec{u}} \circ S_D$

$f\ : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

$$\text{tq } :\begin{cases} x' = \dfrac{1}{13}(5x+12y-4)+1 \\ y' = \dfrac{1}{13}(12x-5y+6)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{13}(5x+12y+9) \\ y' = \dfrac{1}{13}(12x-5y+19) \end{cases}$$

Caractérisons f :

Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{13}(5x+12y+9) \\ y' = \dfrac{1}{13}(12x-5y+19) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-12y=9 \\ 12x-18y=-19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x-36y=27 \\ 24x-36y=-38 \end{cases} \text{ impossible}$$

f est un antidéplacement qui n'a pas de points invariants d'où f est une symétrie glissante soit $\vec{\omega}$ son vecteur et Δ son axe.

$$f \circ f :\ M(x,y) \mapsto M'(x',y') \text{ tq } :\begin{cases} x' = x + \dfrac{30}{13} \\ y' = y + \dfrac{20}{13} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} \dfrac{30}{13} \\ \dfrac{10}{13} \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = t_{2\vec{w}} \Rightarrow \vec{\omega}\begin{pmatrix} 15/13 \\ 10/13 \end{pmatrix}$$

* $\Delta = \{M \in P / \overrightarrow{MM'} = \vec{\omega}\}$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{\omega} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{13}(5x+12y+9) - x = \dfrac{15}{13} \\ \dfrac{1}{13}(12x-5y+19) - y = \dfrac{10}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x+12y-6=0 \\ 12x-18y+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow 4x-6y+3=0$$

d'où Δ a pour équation $4x-6y+3=0$

c) $D_1 : y = 1$ $\quad D_2 : y = x-1$ $\quad D_1 \cap D_2 = \{A(2,1)\}$

$$f = S_{D_1} \circ S_{D_2} = r_{(A, \frac{-\pi}{2})}$$

EX20 :

$r : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

tq : $\begin{cases} x' = 1-y \\ y' = x \end{cases}$

1) montrons que r est une isométrie

$M_1(x_1,y_1)$ $r(M_1) = M'_1(x_1',y_1')$

$M_2(x_2,y_2)$ $r(M_2') = M'_2(x_2',y_2')$

$M_1'M_2' = \sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2} = \sqrt{(1-y_2-1+y_1)^2+(x_2-x_1)^2} = \sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} = M_1M_2$

D'où r est une isométrie

* déterminons l'ensemble des points invariants par r

$r(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-y \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ d'où r laisse le point $I(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ comme unique

point invariant. $\Rightarrow$ r est une rotation de centre I

$r : M(z) \mapsto M'(z')$

tq $: z' = x'+iy' = 1-y+ix = i(x+iy)+1$

$\Leftrightarrow z' = iz+1 \Leftrightarrow z'-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i) = i\left[z-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)\right] \Leftrightarrow z'-z_I = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_I) \Leftrightarrow \frac{z'-z_I}{z-z_I} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-z_I}{z-z_I}\right| = 1 \\ Ag(\frac{z'-z_I}{z-z_I}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM \\ (\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ *pour* $M \neq I$

d'où $r = R(I,\frac{\pi}{2})$

2) $S_{(O,\vec{j})} : M(x,y) \mapsto M'(-x,y)$ D'où : $f : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$ tq $: \begin{cases} x' = 1-y \\ y' = -x \end{cases}$

$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-y \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x+y = 0 \end{cases}$ impossible

$f = r \circ S_{(O,\vec{j})}$ est un antidéplacement qui n'a pas de points invariants

D'où f est une symétrie glissante soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

$f \circ f = t_{2\vec{u}}$

$M(x,y) \xrightarrow{f} M_1(1-y,-x) \xrightarrow{f} M'(1+x,y-1)$

$f \circ f \;: M(x,y) \mapsto M'(x',y')$ tq $:\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y-1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ f \circ f = t_{2\vec{u}} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$*\Delta = \left\{ M \in P \,/\, \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \right\}$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = \dfrac{1}{2} \\ y'-y = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-y-x = \dfrac{1}{2} \\ -x-y = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\dfrac{1}{2} = 0 \\ -x-y = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x+y-\frac{1}{2} = 0$$

$$d'où \quad \Delta : x+y-\frac{1}{2} = 0$$

EX21 :

E : P(Z)=0 avec $P(z)=z^3-(2+4i)z^2-(9-10i)z+18+6i$

1) a) P(3)=0

b) $P(z)=(z-3)(z^2+bz+c)=z^3+(b-3)z^2+(c-3b)z-3c$

identifions : $\begin{cases} b-3=-2-4i \\ c-3b=-9+10i \\ -3c=18+6i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1-4i \\ c=-6-2i \end{cases}$

d'où $P(z)=(z-3)[z^2+(1-4i)z-6-2i]$

$$P(z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ ou \\ z^2+(1-4i)z-6-2i \end{cases}$$

$\Delta = 9 \rightarrow \delta = 3$

$z_1 = 1+2i$

$z_2 = -2+2i$

$S_{\mathbb{C}} = \{3, z_1, z_2\}$

2) a) $z_A=3$ $\quad z_B=1+2i \quad z_C=-2+2i$

$aff(\overrightarrow{OA}) = z_A = 3$

$aff(\overrightarrow{CB}) = z_B - z_C = 3$

D'où $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$

Par suite OABC est un parallélogramme

b) OA=BC et OA≠0

D'où il existe un unique déplacement f et un unique antidéplacement g tel que :

$$\begin{cases} f(O)=g(O)=B \\ f(A)=g(A)=C \end{cases}$$

d) f est un déplacement d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}})\equiv\pi(2\pi)$

⇒ f est une rotation d'angle π

⇒ f est une symétrie centrale de centre I=O∗B

$z_I=\frac{1}{2}+i$

3) $f\circ S(O)=f(O)=B$

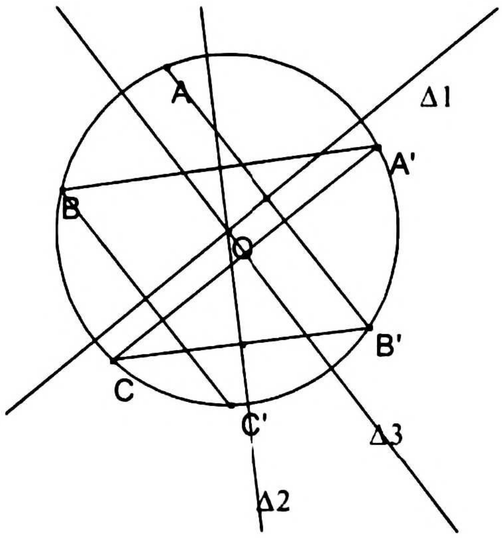
$f\circ S(A)=f(A)=C$

$f\circ S$ et g sont deux antidéplacements qui coïncident sur deux points distincts

⇒ $g=f\circ S$

<u>EX22 :</u>

1)



2) a) $f=S_3\circ S_2\circ S_1$

Comme étant composée de trois symétries orthogonales f est un antidéplacement

$O\in\Delta_1\cap\Delta_2\cap\Delta_3$ f(O)=O

f fixe le point O d'où f est une symétrie orthogonale d'axe passant par O.

b) $f\circ f=id$ $(S_\Delta\circ S_\Delta=id)$

c) $f\circ f=id$ ⇒ $f=f^{-1}$

$f=S_3\circ S_2\circ S_1$ ⇒ $f^{-1}=S_1\circ S_2\circ S_3$

$f(A)=S_3\circ S_2\circ S_1(A)=S_3\circ S_2(B')=S_3(C)=A'$ (erreur dans l'énoncé)

$f(C)=f^{-1}(C)=S_1\circ S_2\circ S_3(A')=S_1\circ S_2(B)=S_1(B)=C'$

f est une symétrie orthogonale tq : f(A)=A' et f(C)=C' d'où (AA')∥(CC')

EX23 :

A/

$R_D = r_{(D,\frac{\pi}{2})}$ $\qquad$ $R_B = r_{(B,\frac{\pi}{2})}$

1) $f = R_D \circ S_I \circ R_B$

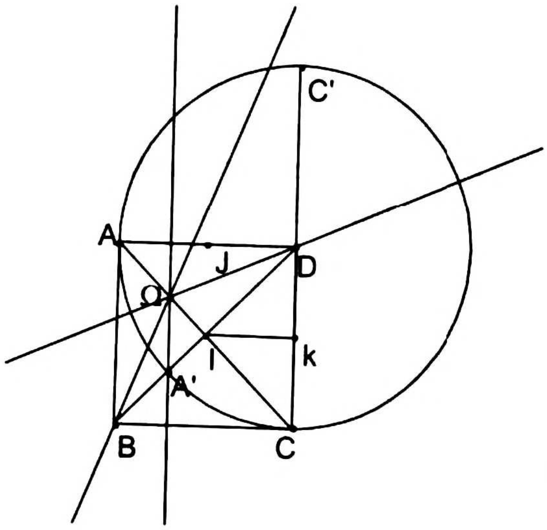
a)

$f(B) = R_D \circ S_I \circ R_B(B) = R_D \circ S_I(B) = R_D(D) = D$

b) $f = r_{(D,\frac{\pi}{2})} \circ (r_{(I,\pi)} \circ r_{(B,\frac{\pi}{2})})$

$r_{(I,\pi)} \circ r_{(B,\frac{\pi}{2})}$ est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \equiv 0(2\pi)$ d'où f est une translation



Et comme f(B)=D $\Rightarrow f = t_{\overrightarrow{BD}}$

2) $g = f \circ S_{(IJ)}$

a) $g(C) = f \circ S_{(IJ)}(C) = f(B) = D$ $\qquad$ $g(D) = f \circ S_{(IJ)}(D) = f(A) = C'$

b) g est un antidéplacement (composé d'un déplacement et antidéplacement)

$g \circ g(C) = g(D) = C'$ donc $g \circ g \neq id \Rightarrow$ g n'est pas une symétrie orthogonale

d'où g est une symétrie glissante soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

$$g \circ g = t_{2\vec{u}}$$

$$g \circ g(D) = C'$$

$$\Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{DC'}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{CK}$$

$$*g(C) = D \Rightarrow K = C * D \in \Delta$$

$$*g(D) = C' \Rightarrow D * C' \in \Delta$$

D'où Δ=(DC)

3) a) $S_{(AD)} \circ S_{(CD)} = S_D$ car (AD)$\perp$(CD) ; $S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} = S_I$ car (IK)$\perp$(IJ)

D'où $S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} = S_D \circ S_I = t_{2\overrightarrow{ID}} = t_{\overrightarrow{BD}} = f$

b) $S_{(CD)} \circ S_{(IK)} = S_K$ car $(CD) \perp (IK)$ d'où $f = S_{(AD)} \circ S_K \circ S_{(IJ)} \Rightarrow S_{(AD)} \circ f = S_K \circ S_{(IJ)}$

c) $\Rightarrow S_{(AD)} \circ f = S_{(AD)} \circ t_{\overrightarrow{BD}} = S_{(AD)} \circ t_{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}} = S_{(AD)} \circ t_{\overrightarrow{BA}} \circ t_{\overrightarrow{AD}} = S_{(AD)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(IK)} \circ t_{\overrightarrow{AD}} = S_{(IK)} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$

$\overrightarrow{AD}$: vecteur directeur de (IK) d'où $S_{(AD)} \circ f$ est la symétrie glissante d'axe (IK) et de vecteur $\overrightarrow{AD}$

B/ 1) $A' = r_{(D,\frac{\pi}{4})}(A) \Rightarrow \begin{cases} DA' = DA \\ (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DA'}}) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

2) $r'\circ r$ est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$; $r'\circ r(A) = r'(A) = A'$

$r'\circ r(B) = r'(D) = D$

Soit ω le centre de $r'\circ r$ $\omega \in med[BD] \Rightarrow \omega \in (AC)$

$\omega \in med[AA'] \Rightarrow \omega \in (A\Omega)$

Car DAA' est isocèle en D et $\Omega \in$ bissectrice intérieure de $[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DA'}]$

D'où ω=Ω

Conclusion : $r'\circ r = r_{(\Omega, \frac{3\pi}{4})}$

3) $r'\circ r(A) = A'$

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}) \equiv \frac{3\pi}{4}(2\pi)$

$\Omega \in [AC]$

$(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{BA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AB}})(2\pi) \equiv \frac{-\pi}{4}(2\pi)$

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Omega A'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Omega A}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}}) + \pi + \frac{3\pi}{4}(2\pi) \equiv \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{3\pi}{4}(2\pi) \equiv 0(2\pi)$

D'où (Ω A')//(AB)

EX 24 :

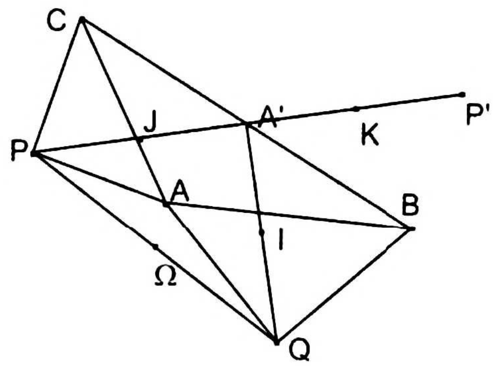
F =R_Q o $S_{A'}$ o R_P

1) a) f (A) =R_Q o $S_{A'}$ o R_P(A)

=R_Q o $S_{A'}$(c)

=R_Q (B)

=A



F =$r_{(Q,\frac{\pi}{2})}$ o $r_{(A',\pi)}$ o $r_{(P,\frac{\pi}{2})}$

$\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} \equiv 0(2\pi)$ D'où f est une translations et comme f (A)=A alors f =id_P

b) f (P) =P

⇒ R_Q o $S_{A'}$ o R_P (P) =P

⇒ R_Q o $S_{A'}$ (P) =P

⇒ R_Q(P') =P

2) a/ R_Q(P') =P $\Rightarrow \begin{cases} QP = QP' \\ (\widehat{\overrightarrow{QP'}, \overrightarrow{QP}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

⇒ Q P P' est un triangle rectangle et isocèle en Q

et comme A' =P*P' alors A' P =A' P' =A' Q

On a : A' P=Q A' et A'P≠0 D'où il existe un unique déplacement φ tels que :

$\varphi(A') = Q$ et $\varphi(P) = A'$

b/ φ *est un déplacement d'angle* $(\widehat{\overrightarrow{A'p},\overrightarrow{QA'}}) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi)$ d'ou φ est une rotation d'angle $(\frac{-\pi}{2})$ *de centre* Ω (car med[A'Q] ∩ med[PA']={Ω} $\varphi = r_{(\Omega,\frac{-\pi}{2})}$

c/ h= $\varphi \circ S_{(A'Q)}$ h est un antidéplacement

$h(A') = \varphi \circ S_{(A'Q)}(A') = \varphi(A')=Q$

$h(P') = \varphi \circ S_{(A'Q)}(P) = \varphi(P) = A'$

$h \circ h(P') = h(A') = Q$

$h \circ h \neq id \Rightarrow$ h n'est pas une symétrie orthogonale

d'où h est une symétrie glissante ; soit $\vec{U}$ *son vecteur et* Δ *son axe*

$h \circ h = t_{2\vec{U}}$

$h \circ h(P') = Q \Rightarrow \vec{U} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P'Q}$ $\qquad \vec{U} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P'Q}$

Δ passe par Q*A'=I et P'*A'=K $\Rightarrow \Delta$=(I K)

3) $\begin{cases}\psi(A')=Q\\ \psi(P)=A'\end{cases}$

a/ $J = A'*P \Rightarrow \psi(J) = \psi(A')*\psi(P) \Rightarrow \psi(J) = Q*A' \Rightarrow \psi(J) = I$

b/ med $[A'Q] \neq med[PA']$ d'ou ψ n'est pas une symétrie orthogonale par suite ψ est une symétrie glissante .

c/ soit Δ son axe et $\vec{U}$ son vecteur

$\psi(A') = Q \Rightarrow I = A'*Q \in \Delta$

$\psi(P) = A' \Rightarrow J = P*A' \in \Delta$ $\qquad$ D'où $\Delta = (IJ)$

$\psi = T_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}$ et $\psi(J) = I \Rightarrow T_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}(J) = I \Rightarrow T_{\vec{u}}(J) = I \Rightarrow \vec{U} = \overrightarrow{JI}$

4) $\psi(M) = M_1$ et $\varphi(M) = M_2$

$\varphi \circ \psi^{-1}(M_1) = \varphi(M) = M_2$

Caractérisons $\varphi \circ \psi^{-1}$

$\varphi \circ \psi^{-1}(Q) = \varphi(A') = Q$

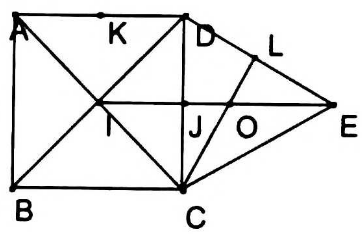
$\varphi \circ \psi^{-1}(A') = \varphi(P) = A'$

$\varphi \circ \psi^{-1}$ est un antidéplacement qui fixe Q et A' d'ou $\varphi \circ \psi^{-1} = S_{(QA')}$

$\varphi \circ \psi^{-1}(M_1) = M_2 \Rightarrow S_{(QA')}(M_1) = M_2$ donc M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à la droite (QA')

EX 25 :

1) $\varphi = r_{(D,\frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}$



a / $\varphi(c) = r_{(D,\frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}(c) = r_{(D,\frac{\pi}{3})}(D) = D$

$\varphi(D) = r_{(D,\frac{\pi}{3})} \circ S_{(IJ)}(D) = r_{(D,\frac{\pi}{3})}(c) = E$

b / φ est un antidéplacement (composé d'un déplacement et d'un antidéplacement)

$\varphi o \varphi$ (c) $=\varphi$ (D) =E $\Rightarrow$ $\varphi o \varphi \neq$ id $\Rightarrow$ φ n'est pas une symétrie orthogonale

par suite φ est une symétrie glissante de vecteur $\vec{U} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$ et

d'axe Δ passant par C*D et D*E $\Rightarrow \Delta = (JL)$

2) a / $T_{\overrightarrow{AD}}$ o $S_{(AB)} = S_{(KI)}$ o $S_{(AB)}$o $S_{(AB)} = S_{(KI)}$

b / $\psi = T_{\overrightarrow{BD}}$ o $S_{(AB)} = T_{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}}$ o $S_{(AB)}$

$\psi = T_{\overrightarrow{BA}} \, o \, T_{\overrightarrow{AD}} \, o \, S_{(AB)}$ ψ est la symétrie glissante d'axe (KI) de vecteur $\overrightarrow{BA}$

$\psi = T_{\overrightarrow{BA}} \, o \, S_{(KI)}$

3)

$$\left.\begin{array}{l} N_1 = r_{(D,\frac{\pi}{3})}(N) \\ N_2 = r_{(0,\frac{-2\pi}{3})}(N) \Rightarrow N = r_{(0,\frac{2\pi}{3})}(N_2) \end{array}\right\} \Rightarrow r_{(D,\frac{\pi}{3})} \, o \, r_{(0,\frac{2\pi}{3})}(N_2) = N_1$$

or

$r_{(D,\frac{\pi}{3})} \, o \, r_{(0,\frac{2\pi}{3})}$ *et une retation d'angle* $\pi \Rightarrow r_{(D,\frac{\pi}{3})} \, o \, r_{(0,\frac{2\pi}{3})}$ *est une symétrie centrale*

$$r_{(D,\frac{\pi}{3})} \, o \, r_{(0,\frac{2\pi}{3})}(D) = r_{(D,\frac{\pi}{3})}(C) = E$$

$$\Rightarrow r_{(D,\frac{\pi}{3})} \, o \, r_{(0,\frac{2\pi}{3})} = S_L$$

par suite $S_L(N_2) = N_1 \qquad \Rightarrow L = N_1 * N_2$

4) $\varphi(M_n) = M_{n+1}$

a / Rappelons que :

$\varphi = S_{(JL)} \, o \, T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}} = T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}} \, o \, S_{(JL)}$

$\varphi o \varphi = T_{\overrightarrow{CE}} = T_{2\overrightarrow{JL}}$

(Démonstration par récurrence)

Vérifions pour n =0

$\overrightarrow{MoMo} = (2x0)\,\overrightarrow{JL}$ (*vrai*)

Supposant que $\overrightarrow{MoM_{2n}} = (2n)\,\overrightarrow{JL}$

et montrons que

$\overrightarrow{MoM_{2(n+1)}} = 2(n+1)\,\overrightarrow{JL}$

$\overrightarrow{MoM_{2n+2}} = \overrightarrow{MoM_{2n}} + \overrightarrow{M_{2n}M_{2n+2}}$

$= (2n)\,\overrightarrow{JL} + 2\overrightarrow{JL}$

$= (2n+2)\,\overrightarrow{JL}$

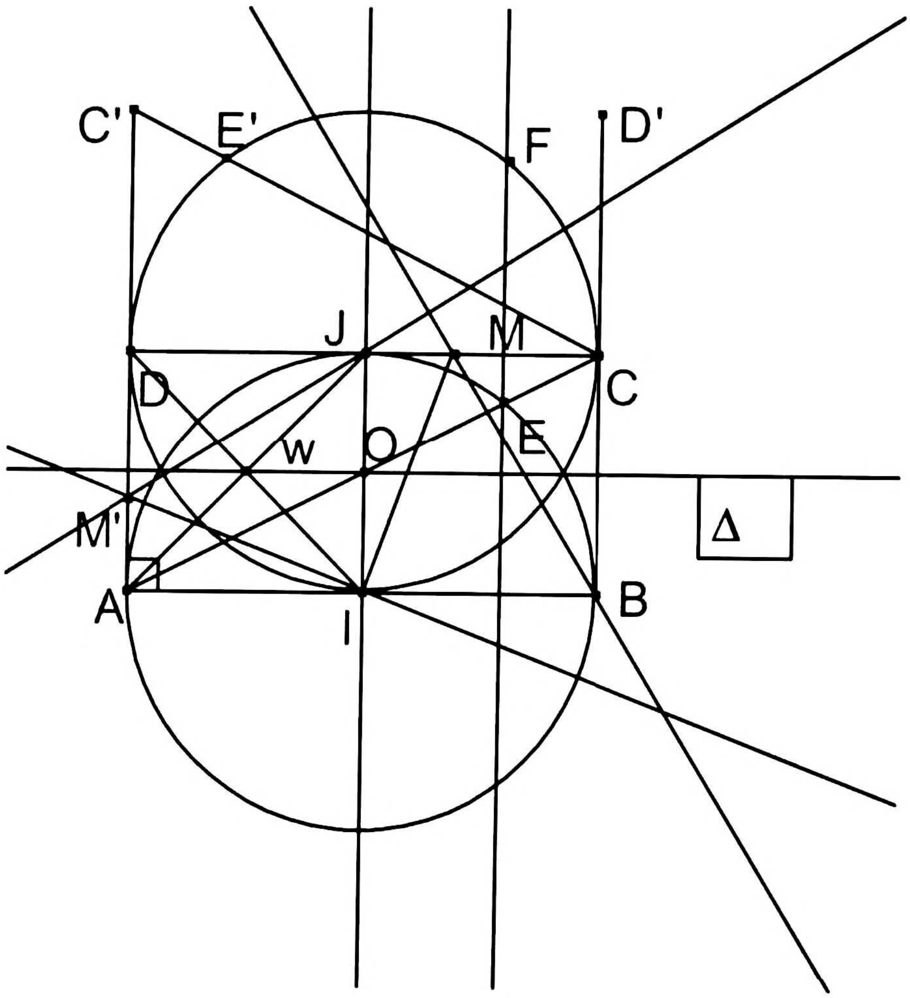
$M_{2n+2} = \varphi \circ \varphi(M_{2n})$

en effet : $\Rightarrow \overrightarrow{M_{2n}M_{2n+2}} = 2\overrightarrow{JL}$ Conclusion : $\overrightarrow{MoM_{2n}} = (2n).\overrightarrow{JL} \quad \forall n \in IN$

b / $\overrightarrow{MoM_{2n}} = (2n)\,\overrightarrow{JL} \quad \Rightarrow (MoM_{2n}) // (JL)$

$\Rightarrow M_{2n}$ Appartient à la droite passant par Mo et parallèle à la droite (JL).

EX 26 :



1)

a) AI=CJ et AI≠0 d'où il existe un unique déplacement f tel que $\begin{cases} f(A) = C \\ f(I) = J \end{cases}$

b) f est d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{CJ}}) \equiv \pi(2\pi)$ $\Rightarrow$ f est une rotation d'angle π $\Rightarrow$ f est une symétrie centrale

f(A)=C $\Rightarrow$ f=S_O avec O=A * C donc f(B)=S_O(B)=D

2) $f = S_{(IJ)} \circ S_\Delta \Leftrightarrow S_{(IJ)} \circ S_\Delta = S_O \Rightarrow \Delta$ la perpendiculaire à (IJ) en O$\Rightarrow$ Δ=med[AD]

3) $r = r_{(I,\frac{\pi}{2})}$

a) r(B)=J

r(C)=D

r(J)=A

b)l'image de la droite (BM) par r est la droite passant par r(B)=J et qui lui est perpendiculaire (car r est d'angle $\frac{\pi}{2}$) ⇒r((BM))=(JM') De même r((IM))=(IM')

D'où r(M)=M'

M∈[CJ] ⇔ M'∈r([CJ]) ⇔ M'∈[DA]

4) $g = r \circ f = r_{(I,\frac{\pi}{2})} \circ S_O$

a) $g = r_{(I,\frac{\pi}{2})} \circ r_{(O,\pi)}$ g est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$. g est d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b) $g(A) = r \circ S_O(A) = r(C) = D$

c) soit ω le centre de g

$$g(A) = D \Leftrightarrow \begin{cases} \omega A = \omega D \\ (\widehat{\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega D}}) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$ ⇒ω : le centre du carré AIJD

5) a) AI=CJ et AI≠0 D'où….

b) med[AC]≠med[IJ] donc h n'est pas une symétrie orthogonale ⇒h est une symétrie glissante

c) I=A∗B ⇒ h(I)=h(A) ∗h(B) ⇒ J=C∗h(B) ⇒ h(B)=S_J(C)=D

6) a/<u>1ére méthode</u>:

$h \circ S_{(AB)}(A) = h(A) = C$

$h \circ S_{(AB)}(B) = h(B) = D$

$h \circ S_{(AB)}$ est un déplacement d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv \pi(2\pi)$

$h \circ S_{(AB)}$: symétrie centrale de centre A∗C =O

$h \circ S_{(AB)}$=S_O=f

b) $h \circ S_{(AB)}$=S_O ⇒ $h \circ S_{(AB)} = S_{(IJ)} \circ S_{(O\omega)} \Rightarrow h = S_{(IJ)} \circ (S_{(O\omega)} \circ S_{(AB)})$

$\Rightarrow h = S_{(IJ)} \circ t_{2\overrightarrow{I\overrightarrow{O}}}$

h: symétrie glissante d'axe (IJ) de vecteur $\overrightarrow{IJ}$

a) <u>2éme méthode</u> :

$$\left.\begin{aligned} h(A) &= C \\ h(D) &= D' \end{aligned}\right\} \Rightarrow CD' = AD = BC \qquad (1)$$

D'=h(D)

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$ car un antidéplacement change les mesures des Angles orientées en leurs opposées

$(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) + (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CD'}})(2\pi)$

$\equiv \frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(2\pi) \equiv \pi(2\pi)$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD'}$ $\Rightarrow$ C=B * D' $\Rightarrow$ D'=S_C (B)

b) <u>2 éme methode</u> : h(B)=D et h(D)=D'

$h \circ h(B) = D'$ or $h \circ h = t_{2\vec{u}}$

$\Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{BD'} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IJ}$

Δ passe par B * D=O et Δ//(IJ) $\Rightarrow$ Δ=(IJ)

c) $h \circ h(A) = h(C) = C' \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BD'} \Rightarrow C' = S_D(A)$

7) on a : h(E)=E' car h(ζ)=ζ' et h([AC])=[CC']

$F = S_{(IJ)}(E')$

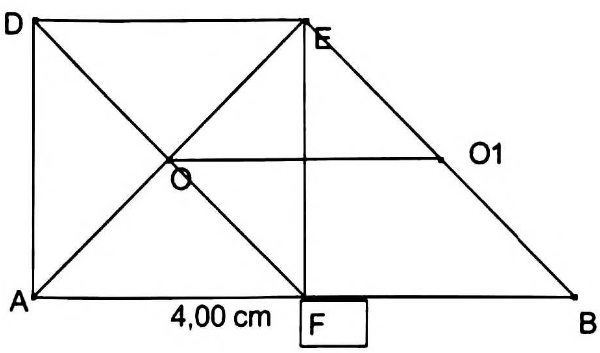
$\Rightarrow F = S_{(IJ)} o h(E)$

$\Rightarrow F = \circ S_{(IJ)} \circ S_{(IJ)} o t_{IJ}(E)$

$\Rightarrow F = t_{\overrightarrow{IJ}}(E)$

$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IJ} \Rightarrow (EF)//(AD)$

EX 27 :



1) a) r(F)=E r(E)=D

$\left.\begin{aligned} &(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{ED}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \\ &med[FE] \cap med[ED] = \{O\} \end{aligned}\right\rangle$ D'où $r = r_{(O,\frac{\pi}{2})}$

b) $f = r \circ S_{(OO_1)}$ $\quad f(O) = r \circ S_{(OO_1)}(O) = r(O) = O$

$f(E) = r \circ S_{(OO_1)}(E) = r(F) = E$

f est un antidéplacement (composé d'un déplacement et un antidéplacement) qui fixe deux points distincts O et E d'où $f=S_{(OE)}$

2) $r' = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1} = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r_{(O,\frac{\pi}{2})}$

a) comme étant composée d'une translation et d'une rotation d'angle $(\frac{-\pi}{2})$,

r' est une rotation d'angle $(\frac{-\pi}{2})$

b) $r'(O) = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1}(O) = t_{\overrightarrow{OO_1}}(O) = O_1$

on a : $\begin{cases} FO = FO_1 \\ (\widehat{\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{FO_1}}) \equiv \frac{-\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$ d'où r est de centre F donc $r' = r_{(F,\frac{-\pi}{2})}$

3) g(D)=F et $g(O)=O_1$

a) * $med[DF] \neq med[OO_1]$ d'où g n'est pas une symétrie orthogonale, par suite g est une symétrie glissante

* soit Δ son axe et $\vec{u}$ son vecteur

$g(D)=F \Rightarrow D*F=O \in \Delta$

$g(O)=O_1 \Rightarrow O*O_1 \in \Delta$ d'où $\Delta=(OO_1)$

$$g(O) = O_1 \Leftrightarrow t_{\vec{u}} \circ S_{(OO_1)}(O) = O_1 \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(O) = O_1 \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{OO_1}$$

d'où : $g=t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ S_{(OO_1)} = S_{(OO_1)} \circ t_{\overrightarrow{OO_1}}$

b) g(M)=r'(M) $\Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ S_{(OO_1)}(M) = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1}(M)$

$\Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OO_1}}(S_{(OO_1)}(M)) = t_{\overrightarrow{OO_1}}(r^{-1}(M))$

$\Leftrightarrow S_{(OO_1)}(M) = r^{-1}(M)$

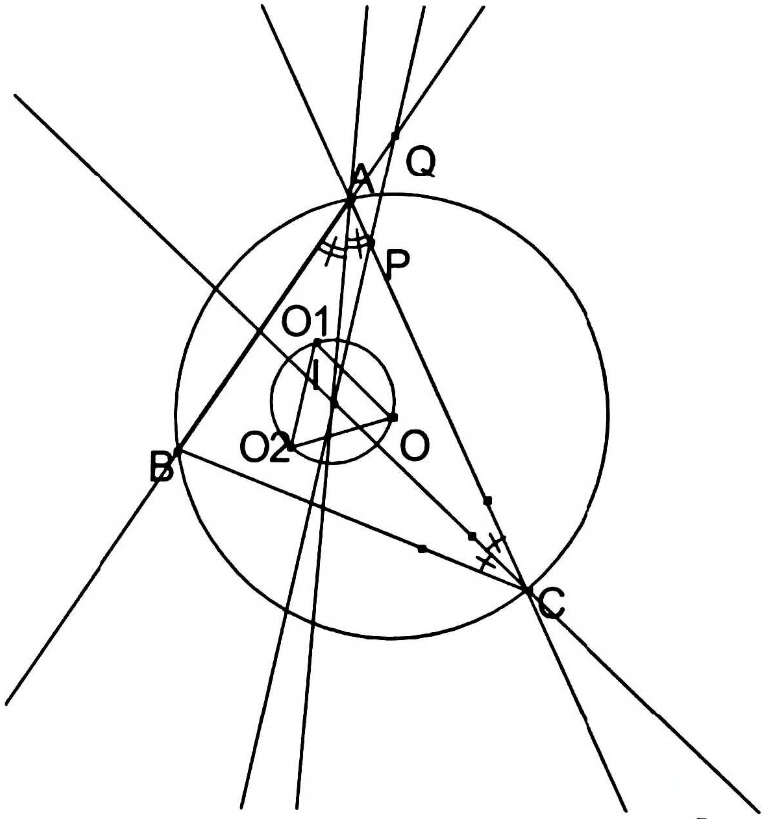
$\Leftrightarrow r(S_{(OO_1)}(M)) = M$

$\Leftrightarrow r \circ S_{(OO_1)}(M) = M$

$\Leftrightarrow f(M) = M$

c) $g(M) = r'(M) \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow S_{(OE)}(M) = M \Leftrightarrow M \in (OE)$

EX 28 :



1) a) le triangle BCP est isocèle en C et [CI) : bissectrice de $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BP}\right]$ D'où (CI)=med[BP]

De même (BI)=med[CQ]

b) $(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}})(2\pi) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) + \pi(2\pi) \equiv \frac{-\pi}{3} + \pi(2\pi) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

2) f(C)=Q F(P)=B

a) $(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$ et $med[CQ] \cap med[PB] = \{I\}$ D'où $f = r_{(I,\frac{2\pi}{3})}$

b) $f(P) = B \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

le triangle CPB est isocèle en C et direct et (CI)=med[BP]

L'image de $\left[\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}\right]$ par $S_{(CI)}$ est $\left[\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IC}\right]$ D'où $\widehat{BIC} = \widehat{PIC}$

$\Rightarrow \widehat{PIB} + 2\widehat{BIC} = 2\pi \Rightarrow 2\widehat{BIC} = 2\pi - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \widehat{BIC} = \frac{2\pi}{3}$ Par suite $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

c) f(C)=Q $\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IQ}}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$ et comme (BI)= med[CQ] D'où $(\widehat{\overrightarrow{IQ},\overrightarrow{IB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

$(\widehat{\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IQ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IB}}) + (\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IQ}})(2\pi) \equiv \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}(2\pi) \equiv 0(2\pi)$

d'où $\overrightarrow{IP}$ et $\overrightarrow{IQ}$ sont colinéaires par suite I,P et Q sont alignés

3) $O_1=f(O)$; $O_2=f(O_1)$

a) $f=r_{(I,\frac{2\pi}{3})}$ $f\circ f=r_{(I,\frac{4\pi}{3})}$ et $f\circ f\circ f=r_{(I,2\pi)}=id_P \Rightarrow f\circ f\circ f(O)=O \Rightarrow f\circ f(O_1)=O \Rightarrow f(O_2)=O$

b)

$$\begin{cases} f(O)=O_1 \\ f(O_1)=O_2 \end{cases} \Rightarrow OO_1=O_1O_2$$

$$\begin{cases} f(O_1)=O_2 \\ f(O_2)=O \end{cases} \Rightarrow O_1O_2=OO_2$$

D'où $OO_1=O_1O_2=OO_2$ par suite le triangle OO_1O_2 est équilatéral

* $f(O_1)=O_2 \Rightarrow IO_1=IO_2$ or $OO_1=OO_2$ D'où $(OI)=med[O_1O_2]$

4) $r=r_{(O,\frac{2\pi}{3})}$ $g=f\circ r\circ f$

a) $g=r_{(I,\frac{2\pi}{3})}\circ r_{(O,\frac{2\pi}{3})}\circ r_{(I,\frac{2\pi}{3})}$

$r_{(I,\frac{2\pi}{3})}\circ r_{(O,\frac{2\pi}{3})}$ est une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$ $(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\neq 0(2\pi))$

$\frac{4\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\equiv 0(2\pi)$ d'où g est une translation

$g(O_2)=f\circ r\circ f(O_2)=f\circ r(O)=f(O)=O_1$

* d'où $g=t_{\overrightarrow{O_2O_1}}$

b) O : le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

d'où $\begin{cases} OB=OC \\ et \\ (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})\equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OB=OC \\ (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})\equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow r(B)=C$

* $g(P)=f\circ r\circ f(P)=f\circ r(B)=f(C)=Q$

c) $g=t_{\overrightarrow{O_2O_1}}$

$g(P)=Q \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{O_2O_1}$

d'où $(PQ)//(O_1O_2)$

or $(OI)\perp(O_1O_2)$ car $(OI)=med[O_1O_2]$

d'où $(PQ)//(OI)$

CH 7 DIVISIBILITE DANS Z

QCM

1. Le quotient de -20 par 7 est -3
2. Pour tout entier n : $n^3-n\equiv 0(6)$
3. Le nombre 100! Est divisible par 2^{50}
4. Soit a un entier non nul.

   Si $a\equiv 19(20)$ alors $a\equiv -1(20)$ alors $a^{402}\equiv(-1)^{402}(20) \Rightarrow a^{402}\equiv 1(20)$

VRAI-FAUX

1. a/ si $a\equiv 1(n)$ alors $a^2\equiv 1^2(n)$ donc $a^2\equiv 1(n)$ ***Vrai***

   b/ si $a^2\equiv 0(n)$ alors $a\equiv 0(n)$ *Faux* (contre exemple :a=2 et n=4)

   c/ si $2a\equiv 4(10)$ alors $a\equiv 2(10)$ *Faux* (contre exemple :a=7)
2. Pour tout entier a et pour tout entier non nul n , $a^n\equiv a(n)$ *FAUX*

   Contre exemple :a=2 et n=4
3. Il existe un entier b non nul tel que $5b = 0(10)$ VRAI b=2 (par exemple)

CH 7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 1 : 13 est un nombre premier $D_{13} = \{\pm1 ; \pm13\}$

$57=3\times19$ $D_{57}= \{\pm1 ; \pm3 ; \pm19 ; \pm57\}$

$205=5\times41$ $D_{205}= \{\pm1 ; \pm5 ; \pm41 ; \pm205\}$

EX 2 : Le nombre -35763 est un multiple de 3 et de 7 et n'est pas multiple de 11

EX 3 : 1. $15=3\times5$ $D_{15}=\{\pm1 ;\pm3 ;\pm5 ;\pm15\}$

2. $a^2-b^2 = 15 \Leftrightarrow (a-b)\times(a+b)=15$

$$\begin{cases}a-b=1\\a+b=15\end{cases} ou \begin{cases}a-b=15\\a+b=1\end{cases} ou \begin{cases}a-b=3\\a+b=5\end{cases} ou \begin{cases}a-b=5\\a+b=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow ou \begin{cases}a-b=-1\\a+b=-15\end{cases} ou \begin{cases}a-b=-15\\a+b=-1\end{cases} ou \begin{cases}a-b=-3\\a+b=-5\end{cases} ou \begin{cases}a-b=-5\\a+b=-3\end{cases}$$

Tous les couples (a,b) / $a^2-b^2 = 15$ sont : (8,7) ;(8,-7) ;(4,1) ;(4,-1) ;
(-8,-7) ;(-8,7) ;(-4,-1) ;(-4,1)

EX 4 : tout entier non nul n divise n ; donc si n divise n+5 alors n divise (n+5)-n=5

Donc $n=\pm1$ ou $n=\pm5$

EX5 : n-2 divise n-2 ;donc si n-2 divise n-9 Alors n-2 divise (n-9)-(n-2)=-7 donc

$n-2=\pm1$ ou $n-2=\pm7$ Donc $n\in\{1,3,-5,9\}$

EX6 : On a $3^2=9\equiv2(7)\Rightarrow(3^2)^n\equiv2^n\ (7)\Rightarrow(3^2)^n-2^n\equiv0(7)$ donc $(3^2)^n-2^n$ est un multiple de 7

EX7 : 1. $3171=19\times166+17$(calculatrice : taper 3171 ab/c 19)

2. $3171= (-19)\times(-166)+17\Rightarrow$ le reste de la division euclidienne de 3171 par -19 est 17

EX8 : $307=7\times43+6 \Rightarrow -307=(-7)\times43-6\Rightarrow-307=(-7)\times44+1\Rightarrow$ le reste de la division euclidienne de (-307) par (-7) est 1.

EX9 :

$1345791113 = 246812 \times 5452 + 172089 \Rightarrow q=5452$ et $r=172089$

$-1345791113 = 246812 \times (-5451) + 74723 \Rightarrow q=-5451$ et $r=74723$

$1345791113 = -246812 \times(- 5452) + 172089 \Rightarrow q=-5452$ et $r=172089$

$-1345791113 = -246812 \times(5453) + 74723 \Rightarrow q=5453$ et $r=74723$

EX 10 :

1. $P(n)=0\Leftrightarrow n^4-32n^3+186n^2-280n=-125\Leftrightarrow n(-n^3+32n^2-186n+280)=125\Rightarrow n|125$
2. D'après 1. les racines entiers naturels possibles de P sont : 1 ;5 ;25 et 125
   Une simple vérification permet de conclure que 1 ;5 et 25 sont des racines de P
   Donc $P(x)=(x-1)(x-5)(x-25)(x-a)$
   Donc $P(x)=(x-1)(x-5)(x-25)(x-1)$ Donc $S_{IR}=\{1,5,25\}$

DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 11 :

1. $a+b=44$ $q=6$ $r=2$ $a=b.q+r$

$\Downarrow$

$b.q+r+b=44 \Rightarrow b.(q+1)+r=44 \Rightarrow b.7+2=44 \Rightarrow b=6 \Rightarrow a=44-6=38$

2. $a+b=-49$ $q=-13$ $r=11$ $a=b.q+r$

$\Downarrow$

$b.q+r+b=-49 \Rightarrow b.(q+1)+r=-49 \Rightarrow b.(-12)+11=-49 \Rightarrow b=5<11=r$ impossible

3. $a+b=42$ $q=-6$ $r=9$ $a=b.q+r$

$\Downarrow$

$b.q+r+b=42 \Rightarrow b.(q+1)+r=42 \Rightarrow b.(-5)+9=42 \Rightarrow -5b=33$ impossible

EX 12 :

$-1=9.(-1)+8 \Rightarrow -1\equiv 8(9)$ $\Rightarrow$ le reste modulo 9 de (-1) est 8

$10= 9\text{x}1 +1 \Rightarrow 10\equiv 1(9)$ $\Rightarrow$ le reste modulo 9 de (10) est 1

$-10= 9\text{x}(-2) +8 \Rightarrow -10\equiv 8(9)$ $\Rightarrow$ le reste modulo 9 de (-10) est 8

$-27= 9\text{x}(-3)$ -27 est un multiple de 9 $\Rightarrow$ le reste modulo 9 de (-27) est 0

$-25=9\text{x}(-3)+2 \Rightarrow -25\equiv 2(9)$ $\Rightarrow$ le reste modulo 9 de (-25) est 2

EX 13 :

- $n\equiv -2(7) \Rightarrow n=7k-2$

$-10\leq n\leq 15 \Leftrightarrow -10\leq 7k-2\leq 15 \Leftrightarrow -8\leq 7k\leq 17 \Leftrightarrow -\frac{8}{7}\leq k\leq \frac{17}{7} \Rightarrow k\in\{-1,1,0,2\}$

$\Rightarrow n\in\{-9,5,-2,12\}$

- $n\equiv 6(11)$ $\Rightarrow n= 11k+6$

$-6\leq n\leq 20 \Leftrightarrow -6\leq 11k+6\leq 20 \Leftrightarrow -12\leq 11k\leq 14 \Rightarrow k\in\{-1,0,1\} \Rightarrow n\in\{-5,6,17\}$

EX 14 :

1. n non divisible par 3 $\Rightarrow n\equiv 1(3)$ ou $n\equiv 2(3) \Rightarrow n-1\equiv 0(3)$ ou $n+1\equiv 0(3)$

$\Rightarrow$ n-1 ou n+1 est divisible par 3

2. Supposons que n ;p et n-p ne sont pas divisibles par 3 Alors

$\begin{cases} n\equiv 1(3) \\ p\equiv 2(3) \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} n\equiv 2(3) \\ p\equiv 1(3) \end{cases} \Rightarrow n+p\equiv 0(3)$ ou $n+p\equiv 0(3) \Rightarrow n+p$ est divisible par 3

EX 15 :

$a\equiv 3(15)$ et $b\equiv 11(15)\Rightarrow a+b\equiv 14(15)\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de a+b est 14

$a\equiv 3(15)$ et $b\equiv 11(15)\Rightarrow a-b\equiv -8(15)\Rightarrow a-b\equiv 7(15)\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de a-b est 7

$a\equiv 3(15)\Rightarrow -a\equiv -3(15)\Rightarrow -a\equiv 12(3)\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de -a est 12

$a\equiv 3(15)$ et $b\equiv 11(15)\Rightarrow a.b\equiv 33(15)\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de a.b est 3

$a\equiv 3(15)\Rightarrow -a^2\equiv -9(15)\Rightarrow -a^2\equiv 6(15)\Rightarrow -a^2.b\equiv 66(15)\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de $-a^2.b$ est 6

$b\equiv 11(15)\Rightarrow b^2\equiv 11^2(15)\Rightarrow b^2\equiv 121(15)\Rightarrow b^2\equiv 1(15)\Rightarrow ab^2\equiv 3(15)$

$\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de ab^2 est 3

EX 16 :

- $b\equiv 4(17)$ et $c\equiv 5(17)\Rightarrow b.c\equiv 20(17)\mathbb{Z}\Rightarrow b.c\equiv 3(17)$ et comme $a\equiv 2(17)\Rightarrow a+bc\equiv 5(17)$
  Donc le reste modulo 17 de a+bc est 5.
- $a\equiv 2(17)\Rightarrow a^2\equiv 2^2(17)\Rightarrow a^2\equiv 4(17)$
  $b\equiv 4(17)\Rightarrow b^2\equiv 16(17)\Rightarrow b^2\equiv -1(17)$ Alors $a^2+b^2+c^2\equiv 4-1+8(17)$ Donc le reste
  $c\equiv 5(17)\Rightarrow c^2\equiv 25(17)\Rightarrow c^2\equiv 8(17)$ modulo 17 de $a^2+b^2+c^2$ est 11.

EX 17 :

$\begin{cases} a\equiv 5(4) \\ b\equiv 2(4)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2\equiv 25(4) \\ a.b\equiv 10(4)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2\equiv 1(4) \\ a.b\equiv 10(4)\end{cases}\Rightarrow 3a^2+ab-9\equiv 3+10-9(4)$ Donc le reste modulo 4 de $3a^2+ab-9$ est 0.

EX 18 :

$a\equiv 7(11)\Rightarrow a+1\equiv 8(11)$ et $a+2\equiv 9(11)\Rightarrow a.(a+1)(a+2)\equiv 7\times 8\times 9\ (11)\Rightarrow a(a+1)(a+2)\equiv 504(11)$
Donc le reste modulo 11 de a.(a+1)(a+2) est 9 ($504=11\times 45+9$)

EX 19 :

1. (par récurrence)
   - <u>pour n=1</u> $1^2+2^2+\ldots+n^2=1$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=1$ donc la proprieté est vrai pour n=1
   - <u>Soit $n\in\mathbb{N}^*$</u> Supposons que .... et montrons que ....(facile)
2. D'après 1. $1^2+2^2+\ldots+100^2=\dfrac{100.101.201}{6}=50.101.67\equiv 1.3.4(7)$ (car $50\equiv 1(7)$ ...)
   Donc le reste modulo 7 De $1^2+2^2+\ldots+100^2$ est 5

EX 20 :

- Le reste modulo 10 de 30757 est 7
- Le reste modulo 10 de 15163 est 3
- Le reste modulo 10 de 12924 est 4

EX 21 :

- $171\equiv 1(17)\Rightarrow 171^{171}\equiv 1^{171}(17)$ Donc Le reste modulo 17 de 171^{171} est 1
- $186\equiv -1(17)\Rightarrow 186^{186}\equiv(-1)^{186}(17)$ Donc Le reste modulo 17 de 186^{186} est 1
- $356\equiv -1(17)\Rightarrow 356^{583}\equiv(-1)^{583}(17)$ Donc Le reste modulo 17 de 356^{583} est 16

EX 22 :

1. $-1= 10\times(-1)+9$ Donc Le reste modulo 10 de (-1) est 9
2. $9\equiv -1\ (10) \Rightarrow 9^{2007}\equiv(-1)^{2007}(10)$ Donc Le reste modulo 10 de 9^{2007} est 9

   $9\equiv -1\ (10) \Rightarrow 9^{2008}\equiv(-1)^{2008}(10)$ Donc Le reste modulo 10 de 9^{2008} est 1

EX 23 :

- $49\equiv 1(16)\Rightarrow 49^{316}\equiv 1^{316}(16)$ Donc Le reste modulo 16 de 49^{316} est 1
- $15\equiv -1\ (16) \Rightarrow 15^{2008}\equiv(-1)^{2008}(16)$ Donc Le reste modulo 16 de 15^{2008} est 1
- $-49\equiv -1(16)\Rightarrow (-49)^{236}\equiv(-1)^{236}(16)$ Donc Le reste modulo 16 de $(-49)^{236}$ est 1

EX 24 :

- $4^2=16\equiv 3(13) \Rightarrow 4^3\equiv 4\times 3(13)$ Donc Le reste modulo 13 de 4^3 est 12
- $121\equiv 4(13) \Rightarrow 121^{357}\equiv 4^{357}(13) \Rightarrow 121^{357}\equiv(4^3)^{119}\ (13) \Rightarrow 121^{357}\equiv(-1)^{119}\ (13)$

  Donc Le reste modulo 13 de 121^{357} est 12

EX 25 :

1. $50\equiv 1(7) \Rightarrow 50^{99}\equiv 1^{99}(7) \Rightarrow 50^{99}\equiv 1(7) \Rightarrow$ Le reste modulo 7 de 50^{99} est 1
2. $50\equiv -1(17) \Rightarrow 50^{99}\equiv(-1)^{99}(17)\Rightarrow 50^{99}\equiv -1(17) \Rightarrow$ Le reste modulo 17 de 50^{99} est 16

EX 26 :

$19\equiv(-2)\ (7)\Rightarrow 19^{52}\equiv(-2)^{52}\ (7) \Rightarrow 19^{52}\equiv(2)^{52}\ (7)$ et $23\equiv 2\ (7)\Rightarrow 23^{41}\equiv 2^{41}\ (7)$

Alors $19^{52}.23^{41}\equiv 2^{52+41}\ (7) \Rightarrow 19^{52}.23^{41}\equiv 2^{93}\ (7)\Rightarrow 19^{52}.23^{41}\equiv(2^3)^{31}(7)\Rightarrow 19^{52}.23^{41}\equiv 1^{31}\ (7)$

Donc le reste modulo 7 de $19^{52}.23^{41}$ est 1

EX 27 :

1. $5^2=25\equiv-1(13)\Rightarrow5^4\equiv(-1)^2(13)\Rightarrow5^4\equiv1(13)\Rightarrow$ le reste modulo 13 de 5^4 est 1
2. • $5^{4k}=(5^4)^k\equiv1^k(13)$ $\Rightarrow$ le reste modulo 13 de 5^{4k} est 1
   • $5^{4k+1}=(5^4)^k.5\equiv1^k.5(13)$ $\Rightarrow$ le reste modulo 13 de 5^{4k+1} est 5
   • $5^{4k+2}=(5^4)^k.25\equiv1^k.25(13)\Rightarrow5^{4k+2}\equiv-1(13)$ le reste modulo 13 de 5^{4k+2} est 12
   • $5^{4k+3}=(5^{4k+2}).5\equiv(-1).5(13)\Rightarrow5^{4k+3}\equiv-5(13)$ le reste modulo 13 de 5^{4k+3} est 8
3. $41\equiv1(4)\Rightarrow 5^{202020202041}=5^{4k+1}$ donc le reste modulo 13 de $5^{202020202041}$ est 5
   $55\equiv3(4)\Rightarrow 5^{555555555555}=5^{4k+3}$ donc le reste modulo 13 de $5^{555555555555}$ est 8
4. pour n=4k $5^{2n}+5^n\equiv1+1(13)$
   Pour n=4k+1 $5^{2n}+5^n\equiv-1+5(13)$
   Pour n=4k+2 $5^{2n}+5^n\equiv1+12(13)$ $\Rightarrow5^{2n}+5^n\equiv0(13)$
   Pour n=4k+3 $5^{2n}+5^n\equiv-1+8(13)$ $\Rightarrow5^{2n}+5^n\equiv7(13)$

Conclusion : l'ensemble des entiers n tels que $5^{2n}+5^n\equiv0(13)$ est $\{4k+2\ ;\ k\in\mathbb{N}\}$

EX 28 :

$-1=5x(-1)+4$ Donc le reste modulo 5 de (-1) est 4 $\Rightarrow4\equiv-1(5)\Rightarrow4^{2099}\equiv(-1)^{2099}(5)$

$-2=5x(-1)+3$ Donc le reste modulo 5 de (-2) est 3 $\Rightarrow3\equiv-2(5)\Rightarrow3^{2099}\equiv(-2)^{2099}(5)$

Alors $1^{2099}+2^{2099}+3^{2099}+4^{2099}\equiv1^{2099}+2^{2099}+(-2)^{2099}+(-1)^{2099}(5)$

$\equiv0(5)$

Donc $1^{2099}+2^{2099}+3^{2099}+4^{2099}$ est divisible par 5

EX 29 :

1. $999=27x37+0\Rightarrow999\equiv0(27)$
2. $999\equiv0(27)\Rightarrow1000\equiv1(27)\Rightarrow10^3\equiv1(27)\Rightarrow(10^3)^n\equiv1^n(27)\Rightarrow10^{3n}\equiv1(27)$
3. $10^{100}=10.10^{3x33}\equiv10(27)$ et $100^{10}=10^{20}=100.10^{3x6}\equiv100(27)$ Alors
   $10^{100}+100^{10}\equiv10+100(27)\Rightarrow 10^{100}+100^{10}\equiv2(27)$
   Conclusion : le reste modulo 27 de $10^{100}+100^{10}$ est 2

EX 30 : $2^4\equiv1(5)$ (th de Fermat)

Si n est un multiple de $4\Rightarrow n=4k\Rightarrow2^n=(2^4)^k\equiv1^k(5)\Rightarrow2^n\equiv1(5)$

Si n n'est pas multiple de $4\Rightarrow\begin{cases}n=4k+1\Rightarrow2^n=2^{4k+1}=2^{4k}\times2\equiv2(5)\\n=4k+2\Rightarrow2^n=2^{4k+2}=2^{4k}\times4\equiv4(5)\\n=4k+3\Rightarrow2^n=2^{4k+3}=2^{4k}\times8\equiv3(5)\end{cases}$ Alors 2^n n'est pas congru à 1 modulo 5

Conclusion : $2^n\equiv1(5)$ ssi n est un multiple de 4

Un travail analogue permet de conclure que : $2^n\equiv1(11)$ ssi n est un multiple de 10

CH7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 31 :

Tableau de congruence

Reste modulo 5 de n	0	1	2	3	4
Reste modulo 5 de n^2	0	1	4	4	1

Conclusion : Les restes possibles modulo 5 de n^2 sont : 0 ;1 et 4

Tableau de congruence

Reste modulo 7 de n	0	1	2	3	4	5	6
Reste modulo 7 de n^3	0	1	1	6	1	6	6

Conclusion : Les restes possibles modulo 7 de n^3 sont : 0 ;1 et 6

EX 32 :

Tableau de congruence

Reste modulo 10 de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste modulo 10 de 2x	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
Reste modulo 10 de 4x	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6

a/ $2x\equiv 4(10)$ $\quad S_{\mathbb{Z}}=\{10k+2\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{10k+7\ ;k\in\mathbb{Z}\}$

b/ $4x\equiv 8(10)$ $\quad S_{\mathbb{Z}}=\{10k+2\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{10k+7\ ;k\in\mathbb{Z}\}$

EX 33 :

Tableau de congruence

Reste modulo 4 de x	0	1	2	3
Reste modulo 4 de x^2	0	1	0	1

a/ $x^2\equiv 0\ (4)$ $\quad S_{\mathbb{Z}}=\{4k\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{4k+2\ ;k\in\mathbb{Z}\}$

b/ $x^2\equiv 2(4)$ $\quad S_{\mathbb{Z}}=\varnothing$ $\qquad$ c/ $x^2\equiv 3(4)$ $\quad S_{\mathbb{Z}}=\varnothing$

EX 34 :

Reste modulo11 de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste modulo11 de x^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

a/ $x^2\equiv 4\ (11)$ $\quad S_{\mathbb{Z}}=\{11k+2\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{11k+9\ ;k\in\mathbb{Z}\}$

b/ $x^2\equiv -1(11) \Leftrightarrow x^2\equiv 10(11)$ $\qquad S_{\mathbb{Z}}=\varnothing$

Reste modulo19 de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Reste modulo19 de x^2	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	17	6	16	9	4	1

c/ $x^2\equiv -2(19) \Leftrightarrow x^2\equiv 17(19)$ $\quad S_{\mathbb{Z}}=\{19k+6\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{19k+13\ ;k\in\mathbb{Z}\}$

CH7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 35 :

Notons respectivement r et r’ les restes modulo 8 de a et b
Les valeurs possibles de rr’ sont consignées dans le tableau ci-dessous.

$a.b \equiv -2(8) \Leftrightarrow a.b \equiv 6(8) \Leftrightarrow r.r' \equiv 6(8)$
On conclut de ce tableau que :

$a.b \equiv -2(8)$ ssi

$a \equiv 1(8)$ et $b \equiv 6(8)$ ou
$a \equiv 2(8)$ et $b \equiv 3(8)$ ou $a \equiv 2(8)$ et $b \equiv 7(8)$ ou
$a \equiv 3(8)$ et $b \equiv 2(8)$ ou
$a \equiv 5(8)$ et $b \equiv 6(8)$ ou
$a \equiv 6(8)$ et $b \equiv 1(8)$ ou $a \equiv 6(8)$ et $b \equiv 5(8)$ ou
$a \equiv 7(8)$ et $b \equiv 2(8)$

\r r’	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

EX 36 : a/

Reste modulo 7 de x	0	1	2	3	4	5	6
Reste modulo 7 de x^2+6x+5	5	5	0	4	3	4	0

$S_{\mathbb{Z}}=\{7k+2 \,;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{7k+6 \,;k\in\mathbb{Z}\}$

b/

Reste modulo 8 de x	0	1	2	3	4	5	6	7
Reste modulo 8 de x^2-4x+3	3	0	7	0	3	0	7	0

$S_{\mathbb{Z}}=\{ 8k+1 \,;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{8k+3 \,;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{ 8k+5 \,;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{8k+7;k\in\mathbb{Z}\}$

EX 37 :

1. $10\equiv -1(11) \Rightarrow 10^{20}\equiv(-1)^{20}\ (11) \Rightarrow 10^{20}\equiv 1(11)$
2. $99999999999999999995=10^{20}-5\equiv 1-5(11)$ Donc le reste modulo 11 de
   $\equiv 7(11)$ 99999999999999999995 est 7

EX38 :

$10^{102}\equiv 1(103)$ (th de Fermat) Alors
$10^{204}=(10^{102})^2\equiv 1(103)$ et $10^{612}=(10^{102})^6\equiv 1(103)$ Donc
$10^{102}+3.\ 10^{204}\ 106.10^{612}\equiv 1+3+106\ (103)$ Donc le reste modulo 103 de
$10^{102}+3.\ 10^{204}\ 106.10^{612}$ est 7

EX 39 :

1. • si 5 divise x alors $x\equiv 0(5) \Rightarrow x.(x^4-1)\equiv 0(5)$
   • si 5 ne divise pas x alors (d’après Fermat) $x^4\equiv 1(5) \Rightarrow x.(x^4-1)\equiv 0(5)$
   Donc pour tout entier naturel x on a : $x.(x^4-1)\equiv 0(5)$
   $(x^4-x^2).(x^2+1)= x^2.(x^2-1).(x^2+1) = x.[x.(x^4-1)]\equiv 0(5)$
2. de même que 1. $(x^8-x^5)(x^3+1)= x^4.[x.(x^6-1)]$

CH7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 40 :

p premier et a non divisible par p alors d'après Fermat $a^{p-1}\equiv 1(p)$

Donc le reste modulo p de a^{p-1} est 1.

Le reste modulo p de a^{p-1} -2 est p-1 ($1-2=-1\equiv p-1(p)$)

$2a^{10p-10}-2=2.(a^{p-1})^{10}-3\equiv 2.1-3(p)$ donc Le reste modulo p de $a^{10p-10}-3$ est p-1

EX 41 :

1. a/ $1000=111\text{x}9+1$ donc le reste modulo 111 de 1000 est 1

   b/ $1000\equiv 1(111)\Rightarrow 1000.n\equiv n(111)$ donc n et 1000.n ont le même reste mod 111

   c/ • $111111=111\text{x}1000+111$ 111 et 111x1000 sont divisibles par 111 alors 111111 est divisibles par 111

   • $100010001=100010\text{x}1000+1\equiv 100010+1(111)$ d'après b/
   $$\equiv 100\text{x}1000+10+1(111)$$
   $$\equiv 100+10+1\ (111)$$
   $$\equiv 111(111)$$
   $$\equiv 0(111)$$ Donc 100010001 est divisible par 111

   • $100010000001=100010000\text{x}1000+1\equiv 100010000+1(111)$
   $$\equiv 100010001(111)$$
   $$\equiv 0(111)$$

2. $100\,000=9\text{x}11111+1\Rightarrow 100\,000\equiv 1(11111)\Rightarrow 100\,000n\equiv n(11111)$

   $1001001001001=10010010\text{x}100\,000+1001\equiv 10010010+1001(11111)$
   $$\equiv 100\text{x}100\,000+10010+1001(11111)$$
   $$\equiv 100+10010+1001(11111)$$
   $$\equiv 11111(11111)$$
   $$\equiv 0(11111)$$

EX 42 :

Pour n=o $1^n+2^n+3^n+4^n=1+1+1+1=4$ le reste modulo 4 est 0

Pour n=1 $1^n+2^n+3^n+4^n=1+2+3+4=10$ le reste modulo 4 est 2

Pour $n\geq 2$ • si n est pair $1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 1+0+(-1)^n+0(4)$
$$\equiv 2(4)$$

• si n est impair $1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 1+0+(-1)^n+0(4)$
$$\equiv 1+(-1)(4)$$
$$\equiv 0(4)$$

Conclusion : les restes possibles modulo 4 de $1^n+2^n+3^n+4^n$ sont 0 et 2

EX 43 :

1. $3^0=1\equiv1(7)$; $3^1=3\equiv3(7)$; $3^2=9\equiv2(7)$; $3^3=27\equiv6(7)$; $3^4\equiv4(7)$; $3^5\equiv5(7)$; $3^6\equiv1(7)$
2. on a $3^6\equiv1(7)\Rightarrow 3^6-1\equiv0(7)\Rightarrow 3^n.(3^6-1)\equiv0(7)\Rightarrow 3^{n+6}-3^n\equiv0(7)\Rightarrow 3^{n+6}-3^n$ divible par7
3. a/ $3^{1000}=3^{6\times166+4}=(3^6)^{166}.3^4\equiv1^{166}.4(7)\Rightarrow$ le reste modulo 4 de 3^{1000} est 4

   b/ on a $3^4=81\equiv1(10)\Rightarrow(3^4)^{250}\equiv1^{250}(10)\Rightarrow3^{1000}\equiv1(10)$ Donc le chiffre des unités de 3^{1000} est 1.

EX 44 :

1. D'après ce tableau de congruence on Constate que $a^3\equiv a(3)$

Reste modulo 3 de a	0	1	2
Reste modulo 3 de a^3	0	1	2

2. $a^3-b^3\equiv0(3)\Leftrightarrow a^3\equiv b^3(3)\Leftrightarrow a\equiv b\ (3)$ (d'après 1.)$\Leftrightarrow a-b\equiv0(3)$

   On a $a^3\equiv a(3)$ et $b^3\equiv b(3)$ Alors $a^3+b^3\equiv0(3)\Leftrightarrow a+b\equiv0(3)$

   On a $a^3\equiv a(3)$ et $b^3\equiv b(3)$ Alors $a^3+2b^3\equiv0(3)\Leftrightarrow a+2b\equiv0(3)$

Ex 45 :

D'après ce tableau de congruence il n'ya pas deux Valeurs distincts du reste modulo 11 de a qui donnent le même reste modulo 11 de a^3 donc

Reste modulo 11 de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste modulo 11 de a^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
Reste modulo 11 de a^3	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10

$a^3\equiv b^3(11)$ ssi $a\equiv b\ (11)$ c-a-d $a^3-b^3\equiv0(11)$ ssi $a-b\equiv0(11)$

EX 47 :

1. a solution de (E) $\Rightarrow a^2+9=2^n\Rightarrow a^2$ impair $\Rightarrow$ a impair$\Rightarrow a\equiv1(2)$
2. $a\equiv1(2)\Rightarrow a^2=4k^2+4k+1\Rightarrow a^2\equiv1(4)\Rightarrow a^2+9\equiv10\ (4)\Rightarrow a^2+9\equiv2\ (4)$
3. si a est une solution de (E) alors (d'après 1. et 2.) $a^2+9\equiv2\ (4)$

   D'autre part si a est une solution de (E) alors $a^2+9=2^n$ avec $n>3$ ce qui entraine Que a^2+9 est un multiple de 4 c-a-d $a^2+9\equiv0\ (4)$ d'où l'absurdité

   Conclusion : (E) n'admet pas de solution

EX48 :

1. a solution de (E) $\Rightarrow a^2+9=3^n\Rightarrow a^2$ pair $\Rightarrow$ a pair$\Rightarrow a\equiv0(2)$
2. $a\equiv0(2)\Rightarrow a=2k\Rightarrow a^2=4k^2\Rightarrow a^2\equiv0(4)\Rightarrow a^2+9\equiv9\ (4)\Rightarrow a^2+9\equiv1\ (4)$
3. n impair $\Rightarrow$ n= 2k+1 $\Rightarrow 3^n=3^{2k}.3=9^k.3\equiv1^k.3\ (4)\Rightarrow 3^n\equiv3\ (4)$
4. si a est une solution de (E) alors (d'après 1. et 2.) $a^2+9\equiv1\ (4)$

   D'autre part si a est une solution de (E) alors $a^2+9=3^n\equiv3\ (4)$ Absurde

   Conclusion : (E) n'admet pas de solution

EX 46 :

a/ • pour n=1 $16^n=16$ et $1-10n=1-10=-9$

et comme $16\equiv-9(25)$ Donc la propriété est vrai à l'ordre initial

• Soit $n\in IN^*$ Supposons que $16^n\equiv 1-10n(25)$ et montrons que $16^{n+1}\equiv 1-10(n+1)(25)$

$16^n\equiv 1-10n(25)\Rightarrow 16^{n+1}\equiv16-160n(25)$

$\equiv 1-10(n+1)+25-150n(25)$

$\equiv 1-10(n+1)(25)$ (car 25 et 150n sont des multiples de 25)

b/ • pour n=1 $7^n=7$ et $6n+1=7$ Donc la propriété est vrai à l'ordre initial

• Soit $n\in IN^*$ Supposons que $7^n\equiv 6n+1(36)$ et montrons que $7^{n+1}\equiv 6(n+1)+1(36)$

$7^n\equiv 6n+1(36)\Rightarrow 7^{n+1}\equiv42n+7(36)$

$\equiv 6(n+1)+1+36n\ (36)$

$\equiv 6(n+1)+1(36)$

c/ • pour n=1 $4^n=4$ et $3n+1=4$ Donc la propriété est vrai à l'ordre initial

• Soit $n\in IN^*$ Supposons que $4^n\equiv 3n+1(9)$ et montrons que $4^{n+1}\equiv 3(n+1)+1(9)$

$4^n\equiv 3n+1(9)\Rightarrow 4^{n+1}\equiv12n+4(9)$

$\equiv 3(n+1)+1+9n\ (9)$

$\equiv 3(n+1)+1(9)$

d/ • pour n=1 $2^n+3^n=5$ et $5^n=5$ Donc la propriété est vrai à l'ordre initial

• Soit $n\in IN^*$ Supposons que $2^n+3^n\equiv 5^n\ (6)$ et montrons que $2^{n+1}+3^{n+1}\equiv 5^{n+1}\ (6)$

$2^n+3^n\equiv 5^n\ (6)\Rightarrow(2^n+3^n).(2+3)\equiv 5^{n+1}\ (6)$

$\Rightarrow\ 2^{n+1}+3^{n+1}+2^n.3+3^n.2\equiv 5^{n+1}\ (6)$

$\Rightarrow\ 2^{n+1}+3^{n+1}\equiv 5^{n+1}\ (6)$ (car $2^n.3$ et $3^n.2$ sont des multiples de 6)

EX 49 :

1. $5.2^7+1=5\ .\ 128+1=641$ et $5^4+2^4=625+16=641$
2. $5.2^7+1=641\ \Rightarrow5.2^7+1\equiv0(641)\Rightarrow 5.2^7\equiv-1(641)\Rightarrow5^4.2^{28}\equiv(-1)^4\ (641)$

   $\Rightarrow5^4.2^{28}\equiv 1\ (641)$

   $5^4+2^4=641\Rightarrow5^4+2^4\equiv0(641)\Rightarrow 5^4.\equiv-2^4\ (641)$
3. On a $(5^4.2^{28}\equiv 1\ (641)$ et $5^4.\equiv-2^4\ (641)\ )\Rightarrow-2^4.2^{28}\equiv1(641)$

   $\Rightarrow-2^{32}-1\equiv0(641)$

   $\Rightarrow2^{32}+1\equiv0(641)$

Donc 641 divise $2^{32}+1$

EX 50 :

1. supposons $n=a_na_{n-1}\dots a_2a_1a_0 = a_0+a_1.10+a_2.10^2+\dots+a_n.10^n \Rightarrow f(n)= a_0+a_1+a_2+\dots+a_n$
   $\Rightarrow n-f(n)= a_1.(10-1)+a_2.(10^2-1)+\dots+a_n.(10^n-1)$ or on peut montrer Facilement (par récurrence) que $10^n-1 \equiv 0(9)$ pour tout entier n
   Ce qui donne $n-f(n) \equiv 0(9)$ donc $n \equiv f(n)\ (9)$
2. a/ $4444=493.9+7 \Rightarrow 4444 \equiv 7(9)$
   b/ $3 \times 1481 = 4443$
   c/ on a $4444 \equiv 7(9) \Rightarrow 4444^{4444} \equiv 7^{4443+1}\ (9)$
   $\Rightarrow 4444^{4444} \equiv 7^{3\times1481+1}\ (9)$
   $\Rightarrow 4444^{4444} \equiv (7^3)^{1481}.7\ (9)$ or $7^3=343 \equiv 1(9)$
   $\Rightarrow 4444^{4444} \equiv 7\ (9)$
   d/ on a $N \equiv 7\ (9)$ alors (d'après 1.) $f(N) \equiv 7\ (9)$ et $f(f(N)) \equiv 7\ (9)$
3. a/ on a $4444 < 10^4 \Rightarrow 4444^{4444} < (10^4)^{4444} < (10^4)^{5.1000} = 10^{20\,000}$
   donc $N < 10^{20\,000} \Rightarrow f(N) < 9+9+9+\dots+9 = 9\ .\ 20\,000 = 180\,000$
   b/ on a $f(N) < 180\,000 \Rightarrow f(f(N)) < 9+9+9+9+9+9 = 9\ .6 = 54$
4. on a $f(f(N)) < 54 \Rightarrow f(f(f(N))) < 5+9 = 12$ et comme $f(f(f(N))) \equiv 7(9)$ Alors $f(f(f(N))) = 7$

CH 8 IDENTITE DE BEZOUT

Q.C.M :

1. L'entier 5 est un inverse modulo 6 de 5 en effet $5\times5=25=6\times4+1\equiv1(6)$
2. Si p est un entier premier alors $p\wedge p^2=p$
3. L'ensemble des solutions entières de l'équation $11x-5y=1$ est :
   $\{(1+5k\,;2+11k),k\in\mathbb{Z}\}$
4. L'ensemble des solutions entières de l'équation $13x-17y=0$ est :
   $\{(17k\,;13k),k\in\mathbb{Z}\}$

VRAI-FAUX :

1. $n\equiv0\,(143)$ ssi $n\equiv0(13)$ et $n\equiv0(11)$ (VRAI)

   Justification :($\Rightarrow$) si $n\equiv0\,(143)$ alors $n=k.143=k.11.13\Rightarrow n\equiv0(13)$
   et $\Rightarrow n\equiv0(11)$
   ($\Leftarrow$)Si $n\equiv0(13)$ et $n\equiv0(11)$ Alors $n\equiv0(11\times13)$ car $11\wedge13=1$
   Alors $n\equiv0(143)$
2. $-3a\wedge3b=3(a\wedge b)$ (VRAI)
   Justification: $-3a\wedge3b=3(-a\wedge b)=3(a\wedge b)$

$k.a\wedge k.b=\lvert k\rvert(a\wedge b)$
$a\wedge b=\lvert a\rvert\wedge\lvert b\rvert$

3. $25x-80y=3$ admet des solutions entières (FAUX)
   Justification: on a $25\wedge80=5$ et 5 ne divise pas 3
4. Tout entier admet un inverse modulo 14 (FAUX)
   Justification: 2 n'admet pas un inverse modulo 14
5. Pour tout entier $n\geq2$; $n-1$ est son propre inverse modulo n (VRAI)
   Justification : $n-1\equiv-1(n)\Rightarrow(n-1)^2\equiv(-1)^2(n)\Rightarrow(n-1).(n-1)\equiv1(n)$

CH 8 IDENTITE DE BEZOUT

EX 1 page 175 :

$558 \wedge (-1235) = 1$ Algorithme d'Euclide(pour le calcul du pgcd)

r	1 235	558	119	82	37	8	5	3	2	1	0
q	-	-	2	4	1	2	4	1	1	1	2

1 est le dernier reste non nul

$924 \wedge 990 = 66$

$(-999) \wedge (888) = 111$

$1890 \wedge (-5250) = 210$

EX 2 page 175 :

$558 \wedge (-1235) = 1 \Rightarrow 558 \vee (-1235) = 558 \times 1235 = 726\,180$

$51 \wedge (-255) = 51 \Rightarrow 51 \vee (-255) = \dfrac{51 \times 255}{51} = 255$

$(2n+1) \wedge n = 1 \Rightarrow (2n+1) \vee n = |n.(2n+1)|$

EX 3 page 175 :

$$\left.\begin{array}{l} 180 = 36 \times 5 \\ a \wedge 180 = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 36.k \text{ avec } k \text{ n'est pas un multiple de } 5$$

$$|a| < 360 \Rightarrow k \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 7; \pm 8; \pm 9\}$$

$$a \in \{\pm 36; \pm 72; \pm 108; \pm 144; \pm 216; \pm 252; \pm 288; \pm 324\}$$

EX 4 page 175 :

$a \wedge b = 19 \Rightarrow a = k.19$ et $b = k'.19$

$a.b = 2166 = 2 \times 3 \times 19 \times 19 \quad \rangle \quad k \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

$$\text{Donc } (a\,;b) \in \left\{\begin{array}{l} (19;114),(114;19),(38;57)(57;38), \\ (-19;-114),(-114;-19),(-38;-57),(-57;-38) \end{array}\right\}$$

EX 5 page 175 : (Raisonnement par l'absurde)

Supposons qu'il existe un couple (a ;b) tels que : $a \wedge b = 19$ et $a^2 - b^2 = 490$.

$$a \wedge b = 19 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 19 | a \\ 19 | b \end{array}\right\} \Rightarrow 19 | a - b \Rightarrow 19 | (a-b).(a+b) \Rightarrow 19 | a^2 - b^2$$

$19 | 490$ absurde

CH 8 IDENTITE DE BEZOUT

EX 6 :

1. $2^5 = 32 = 11\times3 - 1 \Rightarrow 2^5 \equiv -1(11)$

   $2^5 = 32 = 31\times1+1 \Rightarrow 2^5 \equiv 1(31)$

2. On a $2^5 \equiv -1(11) \Rightarrow (2^5)^{68} \equiv (-1)^{68}(11) \Rightarrow 2^{340} \equiv 1(11)$

   On a $2^5 \equiv 1(31) \Rightarrow (2^5)^{68} \equiv 1^{68}(31) \Rightarrow 2^{340} \equiv 1(31)$

3. $$\left.\begin{array}{r} on\ a\ 2^{340} \equiv 1(31) \Rightarrow 31 \text{ divise } 2^{340}-1 \\ \text{on a } 2^{340} \equiv 1(11) \Rightarrow 11 \text{ divise } 2^{340}-1 \\ \text{et comme } 31\wedge11=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 11\times31 = 341 \, divise\, 2^{340}-1$$

EX 7 :

1. a^561=1 $\Rightarrow a\wedge(3.11.17)=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a\ n'est\ pas\ un\ multiple\ de\ 3 \\ et\ comme\ 3\ nombre\ premier \end{array}\right\} \Rightarrow a\wedge3=1$

   de même on montre que a^11=1 et a^17=1

2. a/

   $$\left.\begin{array}{l} 3\ un\ nombre\ premier \\ a\ n'est\ pas\ un\ multiple\ de\ 3 \end{array}\right\} \overset{fermat}{\Rightarrow} a^{3-1} \equiv 1(3) \Rightarrow a^2 - 1 \equiv 0(3) \Rightarrow 3\ divise\ a^2-1$$

   b/ de même que a/

   c/ de même que a/

3. a/ On a $a^2\equiv1(3) \Rightarrow (a^2)^{280}\equiv1^{280}(3) \Rightarrow a^{560}\equiv1(3)$

   On a $a^{10}\equiv1(11) \Rightarrow (a^{10})^{56}\equiv1^{56}(11) \Rightarrow a^{560}\equiv1(11)$

   On a $a^{16}\equiv1(17) \Rightarrow (a^{16})^{35}\equiv1^{35}(17) \Rightarrow a^{560}\equiv1(17)$

   b/

   $$\left.\begin{array}{r} a^{560} \equiv 1(17) \Rightarrow 17\ divise\ a^{560}-1 \\ a^{560} \equiv 1(11) \Rightarrow 11\ divise\ a^{560}-1 \\ et\ comme\ 11\wedge17=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 11\times17\, divise\ a^{560}-1 \Rightarrow 187\, divise\ a^{560}-1$$

   $$\left.\begin{array}{r} on\ a\ \ a^{560} \equiv 1(3) \Rightarrow 3\ divise\ a^{560}-1 \\ et\ on\ a\ 187\, divise\ a^{560}-1 \\ 3\wedge187=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\times187\, divise\ a^{560}-1 \Rightarrow 561\ divise\ a^{560}-1$$

IDENTITE DE BEZOUT

EX 8 :

1. $$\left.\begin{matrix} n|4a+5b \\ n|5a+2b \end{matrix}\right\} \Rightarrow n|5.(5a+2b)-2(4a+5b) \Rightarrow n|17a$$
$$\left.\begin{matrix} n|4a+5b \\ n|5a+2b \end{matrix}\right\} \Rightarrow n|5.(4a+5b)-4.(5a+2b) \Rightarrow n|17b$$

2. Soit h= (4a+5b)∧(5a+2b).

On a d=a∧b$\Rightarrow \left.\begin{matrix} d|a \\ d|b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d|4a+5b \\ d|5a+2b \end{matrix}\right\} \Rightarrow d|h \Rightarrow h=k.d$

h=(4a+5b)∧(5a+2b)$\Rightarrow \left.\begin{matrix} h|4a+5b \\ h|5a+2b \end{matrix}\right\} \overset{d'après 1}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} h|17a \\ h|17b \end{matrix}\right\} \Rightarrow h|17a \wedge 17b \Rightarrow h|17(a\wedge b) \Rightarrow k.d|17.d \Rightarrow k|17$

⇒ k=1 ou k=17

⇒ h=d ou h=17d

EX 9 :

1. Si d divise a et b alors d divise toute combinaison linéaire de a et b et en particulier d divise a+bn et a+b(n-1)

2. Si d divise a+bn et a+b(n-1) Alors d divise a+bn-(a+b(n-1))= b donc d divise b et par suite d divise bn
d divise a+bn et d divise bn Alors d divise a

3. Soient d = a^b et d' = (
* d =a^b Alors d divise a et b Alors (d'après 1/) d divise a+bn et a+b(n-1) Donc d divise d'

* d' =(a+bn)^(a+b(n-1)) Alors d' divise a+bn et a+b(n-1) Alors (d'après 2.) d' divise a et d' divise b donc d' divise d

On a d divise d' et d' divise d Donc d'=d

Conclusion : $\boxed{\text{(a+bn) ^ (a+b)(n-1)) = a^b}}$

IDENTITE DE BEZOUT

EX 10 : (L'algorithme d'Euclide-Bézout)

C'est ;d'après M Achour Abdennebi* ;le plus important des algorithmes de l'Arithmétique.

Etant donné deux entiers a et b(b>a>0) ;le tableau ci-dessous

Suggère ce qu'il faut faire.

	1	2	3	…	i	i+1	…	n	
r	b	a	R_3=le reste de b/a	…	r_i	R_{i+1}= le reste de r_{i-1}/r_i		r_n	0
q	-	-	Q_3=le quotient de b/a	…	q_i	Q_{i-1}= le quotient de r_{i-1}/ri	…	q_n	
x	$X_1=0$	$X_2=1$	$X_3=q_3.x_2+x_1$	…	x_i	$X_{i+1}=q_{i+1}.x_i+x_{i-1}$	…	x_n	
y	$Y_1=1$	$Y_2=0$	$Y_3=q_3.y_2+y_1$	…	y_i	$Y_{i+1}=q_{i+1}.y_i+y_{i-1}$	…	y_n	

* r_n le dernier reste non nul est le pgcd de a et b .

* $a.xn - b.yn = \pm r_n$

Appliqué au cas a =2015 et b = 2007 , cet algorithme donne

r	2015	2007	8	7	1	0
q	-	-	1	250	1	7
x	0	1	1.1+0=1	250 .1+1=251	1.251+1=252	-
y	1	0	1.0+1=1	250.1+0=250	1.250+1=251	-

. Le dernier reste non nul est 1 Donc 2015^2007 = 1.

. L'identité de Bézout s'écrit : 2015x251-2007x252 =1 Donc a = (-252) et b=251

EX 11 :

Appliquons encore une fois l'algorithme d'Euclide-Bézout au cas a=323 et b=391

r	391	323	68	51	17	0
q	-	-	1	4	1	3
x	0	1	1	5	6	-
y	1	0	1	4	5	

1. Le dernier reste non nul est 17 Donc $391\wedge323=17$
2. L'identité de Bézout s'écrit : 391X5-323X6=17 Donc a=5 et b=-6
3. En déduire une solution de 391a-323b=306

   On remarque que 306= 17x18 Donc a=5x18 et b= (-6)x18

EX12 :

1. L'algorithme d'Euclide Bézout donne

r	97	11	9	2	1	0
q	-	-	8	1	4	2
x	0	1	8	9	44	-
y	1	0	1	1	5	-

L'identité de Bézout s'ecrit : 97x5-11x44 = 1donc (5,-44) est une solution particulière

$97x+11y=1 \Leftrightarrow 97x+11y=97.5+11.(-44) \Leftrightarrow 97.(x-5)=11.(-44-y) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 11 | 97(x-5) \\ or\ 11 \wedge 97 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 11 | x-5$

$\Rightarrow x=11k+5$

$97x+11y=1 \Rightarrow 11y=1-97x \Rightarrow 11y=1-97.(11k+5) \Rightarrow y=-97k-44$

Réciproquement si (x,y)=(11k+5,-97k-44) Alors 97x+11y=97(11k+5)+11(-97k-44)

$$\boxed{\text{Conclusion : } \quad S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(11k+5,-97k-44)\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}}$$

2.

a/ L'algorithme d'Euclide Bézout donne 97x27 -77x34=1

En multipliant par 7 on obtient : 97.(27x7)-77.(34x7)=7 ⇔ 97.189+77.(-238)=7
donc une solution particulière de (E) est (189 ;-238)

b/ On a 97.189 -77.238=7 Donc 97x+77y=7 ⇔ 97x+77y=97.189-77.238

⇔ 97(x-189) = -77(y+238)

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 77 | 97.(x-189) \\ or\ 77 \wedge 97 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 77 | x-189 \Rightarrow x = 77k+189$

97x+77y=7 ⇒ 77y = 7-97x ⇒ 77y=7-97(77k+189) ⇒ y= -238-97k

Réciproquement si (x,y)=(77k+189 ;-97k-238)

Alors 97x+77y=97.(77k+189)+77.(-97k-238)=7

$$\boxed{\text{Cl : } \quad S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(77k+189\ ;-97k-238)\}}$$

CH 8 Identité de Bézout

EX 13 :

1. a/ * Pour n=1 $u^n = u^1 = u = 2+\sqrt{3} = a_1+b_1\sqrt{3}$ avec $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$ deux entiers naturels

Donc la propriété est vrai à l'ordre initial

* Soit $n\in IN^*$ Supposons que $u^n = a_n+b_n\sqrt{3}$ avec a_n et b_n deux entiers

et montrons que $u^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{3}$ avec a_{n+1} et b_{n+1} deux entiers

On a $u^n = a_n+b_n\sqrt{3} \Rightarrow u^{n+1} = u.u^n = (2+\sqrt{3}).(a_n+b_n\sqrt{3}) = (2a_n+3b_n)+(2b_n+a_n)\sqrt{3}$

$= a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$

Comme a_n et b_n sont deux entiers naturelles alors $a_{n+1}=2a_n+3b_n$ et $b_{n+1} = 2b_n+a_n$ sont deux entiers naturelles

Cl : pour tout $n\in IN^*$ $u^n = a_n+b_n\sqrt{3}$ avec a_n et b_n deux entiers naturelles

b/ $a_{n+1}=2a_n+3b_n$ et $b_{n+1} = 2b_n+a_n$

2. a/ (Par recurrence)

* Pour n=1 $a_n^2-3b_n^2 = a_1^2-3b_1^2 = 2^2-3\times 1^2 = 1$

* Soit $n\in IN^*$ Supposons que $a_n^2-3b_n^2=1$ *et montrons que* $a_{n+1}^2-3b_{n+1}^2=1$

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2-3b_{n+1}^2 &= (2a_n+3b_n)^2-3(a_n+2b_n)^2 \\ &= 4a_n^2-3a_n^2+9b_n^2-12b_n^2+12a_nb_n-12a_nb_n \\ &= a_n^2-3b_n^2=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n &= a_n.(a_n+2b_n)-(2a_n+3b_n).b_n \\ &= a_n^2+2a_nb_n-2a_nb_n-3b_n^2 = a_n^2-3b_n^2=1 \end{aligned}$$

b/ On a $\forall n\geq 1$ $\left.\begin{array}{l} a_n \text{ et } b_n \text{ deux entiers naturelles} \\ a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n=1 \end{array}\right\} \overset{bezout}{\Rightarrow} a_n\wedge b_n = 1 = a_n\wedge a_{n+1} = b_{n+1}\wedge b_n$

EX 14:

a/ $7\wedge 14=7$ ne divise pas 5 donc l'équation $7x-14y=5$ n'admet pas de solutions

b/ $5x-10y=10 \Leftrightarrow x-2y=2 \Leftrightarrow x=2+2y$ Donc $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(2+2k,k)\ k\in\mathbb{Z}\}$

c/ $29\wedge 58=29$ ne divise pas 3 donc l'équation $29x+58y=3$ n'admet pas de solutions

CH8 IDENTITE DE BEZOUT

EX 15 :

1. $(4x-3y-5)(4x+3y-1)=0 \Leftrightarrow 4x-3y=5$ ou $4x+3y=1$

(1 ;-1) est une solution particulière trivial de l'équation $4x+3y=1$ alors un travail analogue à l'exercice 12 permet de conclure que les solutions de l'éq $4x+3y=1$ sont les couples $(1+3k\ ;-1-4k)$ k entier

(5 ;5) est une solution particulière trivial de l'équation $4x-3y=5$ alors un travail analogue à l'exercice 12 permet de conclure que les solutions de l'éq $4x-3y=5$ sont les couples $(5+3k\ ;5+4k)$ k entier .

Conclusion :

$$\boxed{S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(1+3k\ ;-1-4k)\ ;(5+3k\ ;5+4k)\ k\in\mathbb{Z}\}}$$

2. $x^2-9y^2=2 \Leftrightarrow (x-3y).(x+3y)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=2 \\ x+3y=1 \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} x-3y=1 \\ x+3y=2 \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+3y=-1 \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} x-3y=-1 \\ x+3y=-2 \end{cases}$

chacun de ces 4 systèmes n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ (en effet on obtient $2x=3$ ou $2x=-3$) donc l'équation $x^2-9y^2=2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

EX 16 :

1. (-3,-5) est une solution particulière trivial de l'équation $13x-8y=1$ alors un travail analogue à l'exercice 12 permet de conclure que les solutions de l'éq $13x-8y=1$ sont les couples $(-3+8k\ ;-5+13k)$ k entier.

2. Si (x,y,z) solution de S Alors en faisant la somme on obtient : $13x-8y=1$ donc (x,y) est une solution de (E).

$5x+y-2z=1 \Leftrightarrow 2z=5x+y-1=5(8k-3)+13k-5-1=53k-21$ un nombre pair

donc k entier impair

donc $k=2p+1$ p entier

Cl : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \left\{\left(8k-3,13k-5,\dfrac{53k-21}{2}\right), k=2p+1 \quad p\in\mathbb{Z}\right\}$

$= \{(16p+5, 26p+8, 53p+16), p\in\mathbb{Z}\}$

CH8 IDENTITE DE BEZOUT

EX 17 :

1. On remarque que (5,4) est une solution particulière triviale de L'équation 9u-11v=1 (si non l'algorithme d'Euclide-Bezout permet d'en trouver)

2.
$$\left.\begin{matrix} x \equiv a(9) \\ x \equiv b(11) \end{matrix}\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 9k + a \\ x = 11k' + b \end{matrix}\right) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 44x = 396k + 44a \\ 45x = 495k' + 45b \end{matrix}\right) \Rightarrow x = (495k' - 396k) + (45b - 44a)$$
$$\Rightarrow \quad x = 99.(5k' - 4k) + (45b - 44a)$$
$$\Rightarrow \quad x \equiv (45b - 44a)\,(99)$$

3. $\begin{cases} x \equiv 6(9) \\ x \equiv 8(11) \end{cases} \Rightarrow$ (d'apres 2.) x≡(45x8-44x6)(99)⇒x≡96(99)⇒x=k.99+96

Réciproquement : si x=k.99+96⇒x-6=9.(k.11+10)⇒x≡6(9)

⇓

x-8=k.99+88⇒x−8=11.(k.9+8)⇒x≡8(11)

EX 18 :

1. a/ 5x7=35=17.2+1≡1(17) donc 7 est une solution particulière

b/ 5x≡1(17) ⇔5x≡5.7(17)⇔5(x-7)≡0(17)⇒ $\left.\begin{matrix} 17|5(x-7) \\ or\ 17 \wedge 5 = 1 \end{matrix}\right) \Rightarrow 17|x-7 \Rightarrow x = 17k + 7$

Cl : $S_{\mathbb{Z}}=\{17.k+7\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

c/ On a 345=17x20+5⇒345≡5(17) Donc

345x≡1(17)⇔5x≡1(17) Alors d'après b/ $S_{\mathbb{Z}}=\{17.k+7\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

2. a/ 5x14=70=17x4+2 Donc 14 est une solution particulière de 5x≡2(17)

Donc 5x≡2(17)⇔5x≡5.14(17)⇔5(x-14)≡0(17) $\left.\begin{matrix} 17|5(x-14) \\ or\ 17 \wedge 5 = 1 \end{matrix}\right) \Rightarrow 17|x-14 \Rightarrow x = 17k + 14$

Cl : $S_{\mathbb{Z}}=\{17.k+14\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

b/ On a 430=17x25+5⇒430≡5(17) Donc

430x≡2(17) ⇔5x≡2(17) Alors d'après a/ $S_{\mathbb{Z}}=\{17.k+14\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

EX 19

1. $17x\equiv1(33)$ On remarque que 2 est une solution particulière donc

$$17x\equiv1(33) \Leftrightarrow 17x\equiv17.2(33)\Leftrightarrow 17.(x-2)\equiv0(33)\Rightarrow \left.\begin{matrix}33|17(x-2)\\ or\ 33\wedge17=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow 33|x-2\Rightarrow x=33k+2$$

Cl : $S_{\mathbb{Z}}=\{33k+2, k\in\mathbb{Z}\}$

2. Ona $17\times2\equiv1(33)\Rightarrow 17\times2\times(-9)\equiv-9(33)$donc $2\times(-9)=-18\equiv15(33)$ est une solution particulière Donc $17x\equiv-9(33) \Leftrightarrow 17x\equiv17.15(33)\Leftrightarrow 17(x-15)\equiv0(33) \Rightarrow$

33 divise $17(x-15)$ et comme $33\wedge17=1$ Donc 33divise $x-15\Rightarrow x=33k+15$

Cl : $S_{\mathbb{Z}}=\{33k+15, k\in\mathbb{Z}\}$

EX 20

$12x\equiv30y(15) \Leftrightarrow 12x\equiv0(15)\Leftrightarrow 12x=15k\Leftrightarrow 4x=5k\Rightarrow 5$ divise $4x$ et comme $5\wedge4=1\Rightarrow 5$ divise x

Donc x est un multiple de 5 et y est quelconque

Donc l'ensemble des couples (x,y) / $12x\equiv30y(15)$ est $\{(5k,y) ;\ k\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}\}$

EX 21

$11x\equiv99y(77)\Leftrightarrow 11x=k.77+99y\Leftrightarrow x=k.7+9y$

Donc l'ensemble des couples (x,y) / $11x\equiv99y(77)$ est $\{(7k+9y,y) ;\ k\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}\}$

EX 22

1. Soit $d=a\wedge b \Rightarrow d\ |\ 2b-3a=7\Rightarrow d=1$ ou $d=7$ Donc les valeurs possibles de $a\wedge b$ sont 1 et 7
2. a/ $3a-2b=3(2n-3)-2(3n-1)=-7$ Donc pour tout n le couple(a,b) est une solution de (E).

   b/ (E) $:3x-2y=-7\Leftrightarrow 3x-2y=3a-2b\Leftrightarrow 3(x-a)=2(y-b)$

   $\Rightarrow 3\ |\ 2(y-b)$ et comme $3\wedge2=1$ Donc $3\ |\ y-b\Rightarrow y=3k+b=3k+3n-1=3(k+n)-1=3h-1$

   Remplacons y par $3h-1$ dans (E) on obtient : $3x=2(3h-1)-7\Rightarrow x=2h-3$

Cl : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(2h-3,3h-1) ;h\in\mathbb{Z}\}$

3. $a\wedge b=7\Rightarrow a\equiv0(7)$ et $b\equiv0(7)\Rightarrow a\equiv b(7)\Rightarrow 3n-1\equiv2n-3(7)\Rightarrow n\equiv-2(7)\Rightarrow n\equiv5(7)$

   Réciproquement si $n\equiv5(7) \Rightarrow n=7k+5 \Rightarrow a=2(7k+5)-3=14k+7=7(2k+1)\Rightarrow 7\ |\ a$

   $\Downarrow$

   $b=3(7k+5)-1=21k-14=7(3k-2)\Rightarrow 7\ |\ b$

   On a donc $7\ |\ a$ et $7\ |\ b$ et comme les valeurs possibles de $a\wedge b$ sont 1 et 7 donc

Cl : $\boxed{a\wedge b=7 \quad \text{ssi}\quad n=5+7k\ ;\ k\in\mathbb{Z}}$

CH 8 IDENTITE DE BEZOUT

EX23 :

1. $a\wedge n=1 \Rightarrow a\wedge pqu=1 \Rightarrow a\wedge p=1$; $a\wedge q=1$ et $a\wedge u=1$

$a\wedge p=1$ et p premier alors d'apré th de Fermat $a^{p-1}\equiv 1(p)$

$a\wedge q=1$ et q premier alors d'apré th de Fermat $a^{q-1}\equiv 1(q)$

$a\wedge u=1$ et u premier alors d'apré th de Fermat $a^{u-1}\equiv 1(u)$

On a p-1 divise n-1 donc $n-1=k.(p-1) \Rightarrow a^{n-1}=(a^{p-1})^k\equiv 1^k\ (p) \Rightarrow a^{n-1}\equiv 1(p)$

On a q-1 divise n-1 donc $n-1=k.(q-1) \Rightarrow a^{n-1}=(a^{q-1})^k\equiv 1^k\ (q) \Rightarrow a^{n-1}\equiv 1(q)$

On a u-1 divise n-1 donc $n-1=k.(u-1) \Rightarrow a^{n-1}=(a^{u-1})^k\equiv 1^k\ (u) \Rightarrow a^{n-1}\equiv 1(u)$

2. On a $a^{n-1}-1\equiv 0(p)$; $a^{n-1}-1\equiv 0(q)$ et $p\wedge q=1$ Alors $a^{n-1}-1\equiv 0(pq)$

On a $a^{n-1}-1\equiv 0(pq)$; $a^{n-1}-1\equiv 0(u)$ et $pq\wedge n=1$ Alors $a^{n-1}-1\equiv 0(pqu)$ donc $a^{n-1}-1\equiv 0(n)$

3. $561=3\times 11\times 17$ On pose n=561 ; p=3 ;q=11 ; u=17 et a=224

Alors d'après les questions 1. et 2. on peut conclure que $224^{560}\equiv 1(561)$

4. $1729=7\times 13\times 19$ on pose n=1729 ; p=7 ;q=13 ; u=19 et a=561

Alors d'après les questions 1. et 2. on peut conclure que $561^{1728}\equiv 1(1729)$

EX 24 :

1.

a/ On a $(a+b)\wedge ab=p \Rightarrow$ p divise ab et p divise a+b

Supposons que p ne divise pas a ; comme p est premier alors $p\wedge a=1$

On a $p \mid ab$ et $p\wedge a=1$ donc p divise b et comme $p \mid a+b$ Alors $p \mid a$ Absurde

Donc p divise a et comme p divise a+b Alors p divise aussi b

donc p est un diviseur commun de a et b.

b/ Soit $d=a\wedge b$

On a p est un diviseur commun de a et b Donc p divise d

$d=a\wedge b \Rightarrow$ d divise a et b $\Rightarrow$ d divise a+b et ab $\Rightarrow$ d divise p

On a donc d divise p et p divise d Donc p=d Donc $p=a\wedge b$

2. a/ $\begin{cases} a\wedge b=5 \\ a\vee b=170 \end{cases} \Rightarrow$ a et b sont des multiples de 5 et $a\times b=5\times 170=5\times(5\times 2\times 17)$

Et comme $a\leq b$ Alors $a=5$ et $b=5\times 2\times 17=170$ ou $a=5\times 2$ et $b=5\times 17=85$

b/ 5 étant un nombre premier alors d'apres 1. $(a+b)$^a.b=a^b Alors

$$\begin{cases} (a+b)\wedge ab=5 \\ a\vee b=170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\wedge b=5 \\ a\vee b=170 \end{cases}$$

Alors a=5 et b=170 ou a=10 et b=85 (d'après 2. a/)

CH 8 Identité de Bézout

EX 25 :

1. $363 \wedge 484=121$ (Algorithme d'Euclide)

   On a $363 \wedge 484=121$ et $484-363=121$ Donc $(363,484) \in S$

2. $n \wedge n+1=1=n+1-n$ Donc $(n ;n+1) \in S$

3.

   a/ ($\Rightarrow$)

   s'il existe $k \in IN^*$ / $x=k(y-x)$ et $y=(k+1)(y-x)$ $x<y$ Alors

   $x \wedge y=k(y-x) \wedge (k+1)(y-x)= | y-x | (k \wedge k+1)=(y-x).1=y-x$ Donc $(x,y) \in S$

   ($\Leftarrow$) si $(x;y) \in S$ Alors $x<y$ et $x \wedge y=y-x \Rightarrow (y-x) \mid x$ et $(y-x) \mid y$

   $\Rightarrow x=k(y-x)$ et $y=k'(y-x)$

   $\Rightarrow y-x=(k'-k)(y-x) \Rightarrow k'-k=1 \Rightarrow k'=k+1$

   Donc $x=k.(y-x)$ et $y=(k+1)(y-x)$

Cl : $\boxed{(x;y) \in S \text{ ssi il existe } k \in IN^* \ / \ x=k(y-x) \text{ et } y=(k+1)(y-x) \quad x<y}$

   b/ $(x;y) \in S$ donc il existe $k \in IN^*$ / $x=k(y-x)$ et $y=(k+1)(y-x)$

   Donc $x \vee y=\dfrac{x.y}{x \wedge y}=\dfrac{k(y-x).(k+1)(y-x)}{y-x}=k(k+1)(y-x)$

4. a/ $D_{228}=\{1 ;2 ;3 ;4 ;6 ;12 ;19 ;38 ;57 ;76 ;114 ;228\}$

   b/ $(x;y) \in S$ et $x \vee y=228 \Rightarrow 228=k.(k+1)(y-x)$ Donc k ; k+1 et y-x sont des diviseurs de 228

   Donc les valeurs possibles de k sont 1 ; 2 ou 3

   $k=1 \Rightarrow y-x=114 \Rightarrow x=k.(y-x)=114$ et $y=(k+1)(y-x)=228$

   $k=2 \Rightarrow y-x=38 \Rightarrow x=2x38=76$ et $y=3x38=114$

   $k=3 \Rightarrow y-x=19 \Rightarrow x=3x19=57$ et $y=4x19=76$

   Conclusion : L'ensemble des couples (x,y) de S tel que $x \vee y=228$ est $\{(114,128) ;(76,114) ;(57,76)\}$

CH8 IDENTITE DE BEZOUT

EX 26 :

1. a/ M(z) est invariant par f ssi z'=z en posant z=x+iy

ssi $\frac{3+4i}{5}(x-iy)+\frac{1-2i}{5}=x+iy$

ssi (3+4i)(x-iy)+1-2i=5(x+iy)

ssi 1+3x+4y+i(4x-3y-2)=5x+i5y

ssi $\begin{cases}1+3x+4y=5x\\4x-3y-2=5y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-4y-1=0\\4x-8y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow 2x-4y-1=0$

Conclusion : L'ensemble des points invariants par f est la droite Δ d'équation

Δ : 2x-4y-1=0

b/ f est une similitude indirecte de rapport k= $\left|\frac{3+4i}{5}\right|=1$ donc f est un antidéplacement ayants des points invariants donc f est une symétrie axiale d'axe la droit Δ :2x-4y-1=0

2. a/ z' réel ⇔ Im(z')=0⇔4x-3y-2=0 Donc D est la droite d'éq :4x-3y-2=0

b/ 4x-3y=2 (2 ;2) est une solution particulière triviale

un travail analogue à l'ex 12 permet de trouver $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ ={(3k+2 ;4k+2) ;k∈ℤ}

c/ Les poits de D dont les coordonnées sont des entiers sont :M=(3k+2 ;4k+2) ;k∈ℤ

1. z=1+iy ⇒z'= $\frac{3+4i}{5}(1-iy)+\frac{1-2i}{5}=\frac{4+4y+i(2-3y)}{5}$

réel(z') entier ⇔ $\frac{4+4y}{5}=k \Leftrightarrow 4(1+y)=5k \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}5|4(1+y)\\ or\ 5\wedge 4=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow 5|1+y$ ⇒y=5k-1

y=5k-1 ⇒Im(z')= $\frac{2-3(5k-1)}{5}=\frac{5-15k}{5}=1-3k \Rightarrow$ Im(z') est un entier

Cl : Réel(z') et Im(z') sont entiers ssi y=5k-1 ; k∈ℤ

EX 27

1. $(a^2+ab-b^2)^2=1$ ⇒ $a^2+ab-b^2=1$ ou $a^2+ab-b^2=-1$

⇒ a(a+b)-b.b=1 ou a(a+b)-b.b=-1 Alors d'aprés th de Bézout a et b sont premiers entre eux

2. Si x=y alors (E) ⇔ $(xy)^2=1$ ⇔ $x^4=1$ ⇔x=1 ou x=-1

Cl : Les solutions de (E) telles que x=y sont (1,1) et (-1,-1)

3. a/ (p,q) solution ⇒ $(p^2+pq-q^2)^2=1$

$(q^2+q(p+q)-(p+q)^2)^2=(q^2+pq+q^2-p^2-q^2-2pq)^2=(-p^2-pq+q^2)^2=(p^2+pq-q^2)^2=1$

Donc (q,p+q) est une solution de (E).

b/ On a (q,p+q) est une solution de (E) Alors d'après a/ (p+q,q+p+q) solution

Donc (p+q,p+2q) est une solution de (E)

c/ On a (1,1) solution ,en utilisant 3. a/ on obtient (1,2) ;(2, 3) ;(3,5) ;(5,8) et (8,13) solutions de (E).

EX 28 :

1. On a $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$ Donc $(a^2-b^2 ; 2ab ; a^2+b^2) \in E$.

2. a/ (x,y,z) élément de E donc $x^2+y^2=z^2$

$$x\wedge y=1 \Leftrightarrow x^2\wedge y^2=1 \Rightarrow x^2\wedge(x^2+y^2)=1 \Rightarrow x^2\wedge z^2=1 \Rightarrow x\wedge z=1$$

$$\Downarrow$$

$$(x^2+y^2)\wedge y^2=1 \Rightarrow z^2\wedge y^2=1 \Rightarrow z\wedge y=1$$

b/ Si x et y sont tout les deus paires alors 2 est un diviseur commun de x et y ce qui est absurde car pgcd(x,y)=1

c/ Les restes possibles d'un entier a modulo 4 sont :0 ;1 ;2 ;3.

Alors le tableau de congruence suivant

Reste modulo 4 de a	0	1	2	3
Reste modulo 4 de a^2	0	1	0	1

prouve que. l'équation : $a^2\equiv 2\ (4)$ ne Possède pas de solution entière

d/ Si x et y sont impairs $\Rightarrow x=2k+1$ et $y=2k'+1$

Donc $z^2=x^2+y^2=(2k+1)^2+(2k'+1)^2= 4.(k^2+k'^2+k+k')+2\equiv 2(4)$ absurde

Car l'équation : $a^2\equiv 2\ (4)$ ne Possède pas de solution entière

Donc x et y ne sont pas tout les deux impairs .

d/ (x impair et y pair)$\Rightarrow$(x^2impair et y^2 pair)$\Rightarrow x^2+y^2$impair$\Rightarrow z^2$impair$\Rightarrow$zimpair

(x impair et z impair)$\Rightarrow$ z+x et z-x sont pairs.$\Rightarrow$ il existe deux entiers Strictement positifs p et q / z+x=2p et z-x=2q (car x,yet z $\in IN^*$ Et $x^2+y^2=z^2 \Rightarrow z > x$)

(z+x=2p et z-x=2q)$\Rightarrow$ x=p-q et z=p+q et $y^2=z^2-x^2=(p+q)^2-(p-q)^2=4pq$

Soit $d=p\wedge q \Rightarrow$d divise p etq$\Rightarrow$d divise p+q etp-q$\Rightarrow$d divse z et x$\Rightarrow$d=1 car $x\wedge y=1$

Donc p et q sont premiers entre eux.

On a y pair $\Rightarrow y=2k \Rightarrow y^2=4k^2=4pq \Rightarrow k^2=pq$ et comme $p\wedge q=1$ Alors p et q sont Des carrées parfaits.

3. Remarquons d'abord que si $(x,y,z)\in E$ alors $(y,x,z)\in E$ et $(kx,ky,kz)\in E$

Tenant compte de cette remarque et des questions 1. et 2. on peut conclure que

$$E=\{(k(a^2-b^2),k(2ab),k(a^2+b^2)) ;(k(2ab),k(a^2-b^2),k(a^2+b^2)) ;\ k\in IN^* \text{et } a>b>0\}$$

4.

b=1 et a=2 $\longrightarrow$ (3,4,5) ;(6,8,10) ; (9,12,15) ;(4,3,5); (8,6,10);(12,9,15)

b= 1 et a=3 $\longrightarrow$ (8,6,10) ; (6,8,10

b=1 et a=4 $\longrightarrow$ (15,8,17) ; (8,15,17) b=1 et a=5 $\longrightarrow$ z>18

b=2 et a=3 $\longrightarrow$ (5,12,13) ;(12,5,13)

b=2 et a=4 $\longrightarrow$ z>18 b=3 et a=4 $\longrightarrow$ z>18

Conclusion: Tous les triplets de E tels que z EMBED Equation.DSMT4 18 sont :
(3,4,5) ;(6,8,10) ; (9,12,15) ;(4,3,5); (8,6,10);(12,9,15); (15,8,17) ; (8,15,17)
(5,12,13) ;(12,5,13)

EX 29 :

1. a/ $B \to i=2 \Rightarrow a^i=5^2=25\equiv 3(11) \Rightarrow f(i)=3 \to C$

   $A \to i=1 \Rightarrow a^i=5^1=5\equiv 5(11) \Rightarrow f(i)=5 \to E$

   $C \to i=3 \Rightarrow a^i=5^3=125\equiv 4(11) \Rightarrow f(i)=4 \to D$

Message	B	A	C
i	2	1	3
f(i)	3	5	4
Code	C	E	D

b/ $F \to i=6 \Rightarrow a^i=5^6 \equiv 5\ (11) \Rightarrow f(i)=5 \to E$

$A \to i=1 \Rightarrow a^i=5^1=5\equiv 5(11) \Rightarrow f(i)=5 \to E$

$D \to i=4 \Rightarrow a^i=5^4 \equiv 9(11) \Rightarrow f(i)=9 \to I$

$E \to i=5 \Rightarrow a^i=5^5 \equiv 1\ (11) \Rightarrow f(i)=1 \to A$

Donc le message <<FADE>> est codé <<EEIA>>

On ne peut pas déchiffrer avec certitude le message codé car E peut-être déchiffrer F ou A.

2. a=2

Message	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(i)	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
Code	B	D	H	E	J	I	G	C	F	A

Oui on peut déchiffrer avec certitude un message codé (bijection)

3. a/ $(\Rightarrow)$

$$a^{i'}\equiv a^i(11) \Leftrightarrow a^{i'}=a^i+11k \Leftrightarrow a^{i'}-a^i=11k \Leftrightarrow a^i.(a^{i'-i}-1)=11k$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 11 \mid a^i(a^{i'-i}-1) \\ or\ 11\wedge a=1 \end{matrix}\right) \Rightarrow 11 \mid a^{i'-i}-1 \Rightarrow a^{i'-i}\equiv 1(11)$$

$(\Leftarrow)$ si $a^{i'-i}\equiv 1(11) \Rightarrow a^{i'-i}.a^i \equiv 1.a^i(11) \Rightarrow$

Cl : $\boxed{a^{i'}\equiv a^i(11) \quad \Leftrightarrow \quad a^{i'-i}\equiv 1(11)}$

b/ f permet de chiffrer et de déchiffrer avec certitude tous les messages ssi $\forall i' \neq i\ \ a^{i'} \not\equiv a^i(11)$ ssi $a^{i'-i} \not\equiv 1(11)$ i et i' deux entiers compris entre 1 et 10 et i<i'

$\Rightarrow i'-i \in \{1,2,3,\dots,9\}$

ssi a^i n'est pas congru à 1 modulo 11 pour tout $i \in \{1,2,3,\dots,9\}$

c/ On a a< 11 donc 11 ne divise pas a ;et comme 11 nombre premier Alors d'après th de Fermat $a^{10}\equiv 1(11)$

Supposons que k ne divise pas 10 alors 10= n.k+u avec u<k

$a^k\equiv 1(11) \Rightarrow a^{n.k}\equiv 1(11)$ et comme $a^{10}\equiv 1(11)$ Alors $a^{10-n.k}\equiv 1(11) \Rightarrow a^u\equiv 1(11)$ avec u<k

Absurde car k est le plus petit entier deΩ tel que $a^k\equiv 1(11)$.

d/ Pour bien choisir a il suffit que a^2 et a^5 ne sont pas congrus à 1 modulo 10.

EX 30 :

1. $F_0=0$; $F_1=1$; $F_2=F_1+F_0=1$; $F_3=F_2+F_1=2$; $F_4=3$; $F_5=5$
   $F_6=8$; $F_7=13$; $F_8=21$; $F_9=34$; $F_{10}=55$

2. (Par recurrence)
   *Pour n=1: $(-1)^n=(-1)^1=-1$ et $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=F_2F_0-F_1^2=-1$
   Donc la proprieté est vrai à l'ordre initial.
   *Soit $n\in IN^*$ supposons que $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$
   et montrons que $F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$
   $$\begin{aligned}F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2&=(F_{n+1}+F_n).F_n-F_{n+1}^2=F_n^2+F_{n+1}F_n-F_{n+1}^2\\&=F_n^2-F_{n+1}(F_{n+1}-F_n)\\&=F_n^2-F_{n+1}(F_n+F_{n-1}-F_n)\\&=F_n^2-F_{n+1}.F_{n-1}=-(F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2)=-(-1)^n\\&=(-1)^{n+1}\end{aligned}$$
   Cl : pour tout entier non nul n on a : $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$

3.
   pour tout entier non nul n on a : $F_{n+1}F_{n-1}-F_nF_n=(-1)^n$
   et comme pour tout entier non nul n F_n est un entier ; alors d'après th de bézout $F_n\wedge F_{n+1}=1$

4. (Par recurrence sur m)
   *Pour m=0 $F_{n+m}=F_n$ et $F_mF_{n-1}+F_{m+1}F_n=F_0F_{n-1}+F_1F_n=F_n$
   Donc la proprieté est vrai à l'ordre initial
   *Soi $m\in IN$ Supposons que $F_{n+m}=F_mF_{n-1}+F_{m+1}F_n$
   Et montrons que $F_{n+m+1}=F_{m+1}F_{n-1}+F_{m+2}F_n$
   $$\begin{aligned}F_{n+m+1}=F_{n+m}+F_{n+m-1}&=F_mF_{n-1}+F_{m+1}F_n+F_{m-1}F_{n-1}+F_mF_n\\&=(F_m+F_{m-1})F_{n-1}+(F_{m+1}+f_m)F_n\\&=F_{m+1}F_{n-1}+F_{m+2}F_n\end{aligned}$$
   Cl : pour tout entier non nul n et pour tout entier m on a $F_{n+m}=F_mF_{n-1}+F_{m+1}F_n$

5.
   $F_m\wedge F_{m+n}=F_m\wedge(F_mF_{n-1}+F_{m+1}F_n)=F_m\wedge(F_{m+1}F_n)=F_m\wedge F_n$ car $F_m\wedge F_{m+1}=1$

CH 8 IDENTITE DE BEZOUT

EX 31 :

1. Tout les entiers non nul et inférieurs à 7 sont premiers avec7donc $\varphi(7)=6$
   les entiers non nul , inférieurs à 8 et premiers avec 8 sont : 1 ;3 ;5 et 7
   donc $\varphi(8)=4$
2. Comme 0 n'est pas premier avec n ; alors il existe au plus n-1 entiers inférieurs à n et premiers avec n donc $\varphi(n)\leq n-1$
3. a/ p est premier donc tout les entiers non nul et inférieurs à p sont premiers avec p donc $\varphi(p)=p-1$
   b/ a non divisible par p et p premier alors d'après th de Fermat $a^{p-1}\equiv1(p)$
   et comme $\varphi(p)=p-1$ alors $a^{\varphi(p)}\equiv1(p)$
4. a/ p et q sont deux nombres premiers ;alors les nombres non premiers avec pq sont seulement les multiples de p ou les multiples de q
   Or il ya exactement q-1 multiples non nul de p <u>inférieur à pq</u>
   et il ya exactement p-1 multiples non nul de q <u>inférieur à pq</u>
   et il ya exactement pq-1 entier non nul et inférieur à pq
   Alors $\varphi(pq)=(pq-1)-[(q-1)+(p-1)]=pq-p-q+1=(p-1)(q-1)=\varphi(p).\varphi(q)$
   b/ On a $a^{\varphi(p)}\equiv1(p)\Rightarrow(a^{\varphi(p)})^{\varphi(q)}\equiv1(p)\Rightarrow a^{\varphi(p)\varphi(q)}\equiv1(p)\Rightarrow a^{\varphi(pq)}\equiv1(p)$
   On a $a^{\varphi(q)}\equiv1(q)\Rightarrow(a^{\varphi(q)})^{\varphi(p)}\equiv1(q)\Rightarrow a^{\varphi(q)\varphi(p)}\equiv1(q)\Rightarrow a^{\varphi(pq)}\equiv1(q)$
   Et comme $p\wedge q=1$
   Alors $a^{\varphi(pq)}\equiv1(pq)$

   $\boxed{\text{Si}(n\equiv0(a)\ ;n\equiv0(b)\text{ et }a\wedge b=1)\text{ Alors }n\equiv0(ab)}$

   c/ 1649=97x17 (17 et 97 sont premiers ; $\varphi(17)=16$ $\varphi(97)=96$)
   10 n'est pas divisible par 17 et par 97 alors d'après b/
   $10^{16\times96}\equiv1(97\times17)\Rightarrow10^{1536}\equiv1(1649)$
   10403=101x103 (101 et 103 sont premiers ; $\varphi(101)=100$ $\varphi(103)=102$)
   10430 n'est pas divisible par 101 et par 103 alors d'après b/
   $10430^{100\times102}\equiv1(101\times103)\Rightarrow10^{10200}\equiv1(10403)$
5. a/ p étant premier donc seuls les multiples de p ne sont pas premiers avec p^k qui sont :1.p ;2.p ;3.p ;... ;$p^{k-1}.p=p^k$ Donc il ya $p^{k-1}-1$ entiers inférieur à p^k et non premiers avec p^k donc $\varphi(p^k)=(p^k-1)-(p^{k-1}-1)=p^k-p^{k-1}$
   b/ $\varphi(125)=\varphi(5^3)=5^3-5^2=100$;$\varphi(256)=\varphi(2^8)=2^8-2^7=128$; $\varphi(1331)=\varphi(11^3)=11^3-11^2$
6. a/ $(1+up)^{p^{(k-1)}}=\sum_{j=0}^{p^{k-1}}C_{p^{k-1}}^{j}(u.p)^j=1+\sum_{j=1}^{p^{k-1}}C_{p^{k-1}}^{j}(u.p)^j$

   et comme p^{k-1} *divise* $C_{p^{k-1}}^{j}$ *Alors* p^k *divise* $C_{p^{k-1}}^{j}(u.p)^j\ \forall j\in\{1;2;...;p^{k-1}\}$

   b/ (Par récurrence) * <u>Pour k=1</u> La propriété est vrai d'après 3. b/
   *<u>Soit $k\in IN^*$</u> supposons que $a^{\varphi(p^k)}\equiv1(p^k)\Rightarrow a^{\varphi(p^k)}=1+u.p^k$
   Et montrons que $a^{\varphi(p^{k+1})}\equiv1(p^{k+1})$
   D'après 5. a/ on a $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}\Rightarrow\varphi(p^{k+1})=p.\varphi(p^k)$
   Donc $a^{\varphi(p^{k+1})}=a^{p.\varphi(p^k)}=(a^{\varphi(p^k)})^p=(1+u.p^k)^p\equiv1(p^{k+1})$

Pour a=17 ;p=5 et k=3 on obtient $17^{100}\equiv1(125)$; pour a=17 ; p=2 et k=8 on obtient...