CMS

4ème

SECTION MATH

CORRIGEES DES EXERCICES DU MANUEL SCOLAIRE

TOME 2

ABROUG FETHI
Professeur principal

BOUSSETTA JALLOULI
Professeur principal

CHAMS EDITION

MATHEMATIQUES

CMS

4ème

SECTION MATH

CORRIGEES
DES EXERCICES DU MANUEL SCOLAIRE

TOME 2

SUJET BAC 2008 SESSION PRINCIPALE
BAREME DETAILLE DU SUJET BAC 2008 S-P
SUJET BAC 2008 SESSION DE CONTROLE
CORRIGEES DETAILLEES DE BAC 2008 S-P
CORRIGEES DETAILLEES DE BAC 2008 S-C

ABROUG FETHI
Professeur principal

BOUSSETTA JALLOULI
Professeur principal

CHAMS EDITION

MATHEMATIQUES

SOMMAIRE

INTEGRALES... ………………………………………………..1

FONCTION LOGARITHME……………………………..23

FONCTION EXPONENTIELLE…………………………65

EQUATIONS DIFFERENTIELLES……………………..104

SIMILITUDES……………………………………………….120

CONIQUES…………………………………………………..136

GEOMETRIE DANS L'ESPACE…………………….162

PROBABILITES……………………………………………..186

STATISTIQUES……………………………………………..200

BAC 2008 SESSION PRINCIPALE (Corrigé)…… 207

BAC 2008 SESSION CONTROLE (Corrigé)…….210

BAC 2008 SESSION PRINCIPALE (Sujet)………215

BAC 2008 SESSION CONTROLE (Sujet)……….218

BAC 2008 SESSION PRINCIPALE (Barème)….222-223

QCM :

1) encadré par 7 et 13

2) $I+J=\frac{1}{2}$

3) $I \leq J$

VRAI – FAUX :

1) (vrai)

$$\int_{4\pi}^{\frac{9\pi}{2}} \sin x dx = \int_{4\pi}^{\frac{\pi}{2}+4\pi} \sin x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

car 4π est une période de la fonction $x \mapsto \sin x$

(on pourra aussi vérifier le résultat en calculant chacune des deux intégrales)

2) (vrai)

la fonction : $x \mapsto |x|$ est paire

d'où $\int_{-1}^{1}|x|dx = 2.\int_{0}^{1}|x|dx = \int_{0}^{1}2x dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$

3) (vrai)

Formule d'intégration par parties :

$U'(x)=1 \xrightarrow{P} U(x)=x$

$V(x)=f(x) \xrightarrow{d} V'(x)=f'(x)$

4) (vrai)

$f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$

d'où $\int_{0}^{1} f(x)dx \leq \int_{0}^{1} dx$

$\Rightarrow \int_{0}^{1} f(x)dx \leq [x]_0^1 \Rightarrow \int_{0}^{1} f(x)dx \leq 1$

5) (vrai)

soit :

* A_1 : l'aire de la partie du plan limitée par (ζ_f); l'axe des abscisses et les droites d'équation :

$x=-2$ et $x=\frac{1}{2}$

* A_2 : l'aire de la partie du plan limitée par (ζ_f), l'axe des abscisses et les droite d'équation : $x=\frac{1}{2}$ et $x=2$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx = A_1 - A_2 \geq 0$$

6) (faux)

contre exemple : $f(x)=x$, $[a,b]=[-1,2]$

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2} \geq 0$$

mais f n'est pas positive sur $[-1,2]$

7) (vrai)

la fonction : $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur IR

et $0 \in$ IR

d'où $F : x \mapsto \int_{0}^{x} f(t)dt$ est définie, continue et dérivable sur IR et $F'(x)=f(x)$ (th cours)

EX 1 :

1) $\int_{-1}^{3}(\frac{x^2}{2}-x)dx=\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{3}=\frac{2}{3}$

2) $\int_{+1}^{2}t.(t+1)^3.dt=\int_{1}^{2}(t^4+3t^3+3t^2+t).dt$

$=\left[\frac{t^5}{5}+\frac{3t^4}{4}+t^3+\frac{t^2}{2}\right]_1^2=\frac{519}{20}$

3) $\int_{-1}^{1}(2x+1).(x^2+x-5)^3\,dx=\left[\frac{1}{4}(x^2+x-5)^4\right]_{-1}^{1}$

$=\frac{3^4}{4}-\frac{5^4}{4}=\frac{-272}{2}=-136$

4) $\int_{1}^{2}\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}2.\sqrt{2x+1}dx$

$=\frac{1}{2}.\left[\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}\right]_1^2=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-3\sqrt{3})$

5) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{(1+x)^2}=\left[\frac{-1}{1+x}\right]_1^2=\frac{1}{6}$

6) $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}=\int_{0}^{4}\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}dx$

$=\left[\sqrt{2x+1}\right]_0^4=2$

7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin t.\cos^4 t dt=\left[\frac{-1}{5}\cos^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8-\sqrt{2}}{40}$

8) $\int_{-2}^{1}|x(x+1)|.dx=I$

x	-2		-1		0		1
x(x+1)		+	0	-	0	+	

$I=\int_{-2}^{-1}x(x+1)dx+\int_{-1}^{0}-x(x+1)dx+\int_{0}^{1}x(x+1)dx$

$I=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{5}{3}$

9) $x^3+x=x.(x^2+1)$

$x\mapsto|x^3+x|$ est paire

$\int_{-3}^{3}|x^3+x|dx=2\int_{0}^{3}|x^3+x|dx=2\int_{0}^{3}(x^3+x)dx$

$=2.\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\frac{99}{2}$

10)

t	0		½		3
2t-1		-	0	+	

$\int_{0}^{3}|2t-1|dt=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-2t+1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{3}(2t-1)dt$

$=\left[-t^2+t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[t^2-t\right]_{\frac{1}{2}}^{3}=\frac{13}{2}$

11) $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx=\int_{0}^{\pi}|\sin x|dx+\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|dx$

$=\int_{0}^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx$

$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}+\left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}=4$

EX 2 :

$aire(D_1\cup D_2)=2\int_{0}^{2}(4-x^2)dx$

$=2\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{32}{3}$

$aire(D_1)=2\int_{0}^{\sqrt{a}}(a-x^2)dx=2\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}}$

$=2(a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3})=\frac{4a\sqrt{a}}{3}$

$aire(D_1)=aire(D_2)$

$\Leftrightarrow aire(D_1)=\frac{1}{2}aire(D_1\cup D_2)$

$\Leftrightarrow\frac{4a\sqrt{a}}{3}=\frac{32}{6}\Leftrightarrow a\sqrt{a}=4\Leftrightarrow(\sqrt{a})^3=4$

$\Leftrightarrow\sqrt{a}=\sqrt[3]{4}\Leftrightarrow a=(\sqrt[3]{4})^2\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}$

EX 3 :

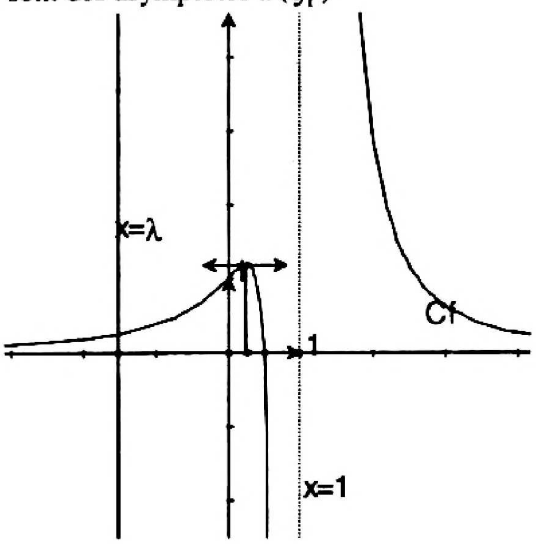
$f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^3}$; $D_f = IR/\{1\}$

1) $f'(x)=\dfrac{-4x+1}{(x-1)^4}$

x	$-\infty$			1		$+\infty$
f '(x)	+	0	-	‖	-	
f(x)	0 ↗	$\frac{32}{27}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

les droites $\Delta : y=0$ et Δ':x=1

sont des asymptotes à (ζ_f)



2) $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^3}=\dfrac{2(x-1)+1}{(x-1)^3}$

$=\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^3}$

$(a=2 \quad , \; b=1)$

3) $\lambda<\frac{1}{2}$

a) $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^3}\right)dx$

$=\left[\dfrac{-2}{x-1}-\dfrac{1}{2(x-1)^2}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=2+\left(\dfrac{2}{\lambda-1}+\dfrac{1}{2(\lambda-1)^2}\right)$

$A(\lambda)=2+\left(\dfrac{2}{\lambda-1}+\dfrac{1}{2(\lambda-1)^2}\right)=2+\dfrac{4\lambda-3}{2(\lambda-1)^2}\ u.a$

b) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty} 2+\dfrac{4\lambda-3}{2(\lambda-1)^2}=2$

EX 4 :

1) $h(x)=x^2-4x+6-3\sqrt{x}$

a) $h'(x)=2x-4-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

$h''(x)=2+\dfrac{3}{4x\sqrt{x}}$

b) h''(x)>0 ; $\forall x\in\,]0,+\infty[$

x	0		$+\infty$
h''(x)	‖	+	
h'(x)	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

h' est continue et strictement croissante

sur $]0,+\infty[$

elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$

sur IR

comme 0 $\in$ IR alors il existe un unique

réel α de $]0,+\infty[$ tel que : $h'(\alpha)=0$

$h'(2)\times h'(3)=..<0$

$\Rightarrow\ 2<\alpha<3$

c)

x	0		α		$+\infty$
h'(x)	‖	-	0	+	

x	0		α		$+\infty$
h'(x)	‖	-	0	+	
h(x)	‖ 6	↘	$h(\alpha)$	↗	$+\infty$

d) h(1)=0

h(4)=0

* h est strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$

$4\in[\alpha,+\infty[$ et h(4)=0

d'où l'équation h(x)=0 admet 4 comme unique solution sur $[\alpha,+\infty[$

* de meme : h(1)=0

hest strictement décroissante sur $]0,\alpha[$

d'où 1 est la seule solution de l'équation h(x)=0 dans $]0,\alpha[$

conclusion : l'équation h(x)=0 admet 1 et 4 comme solutions dans $]0,+\infty[$

2) a) $f(x)=x^2-4x+6$

$g(x)=3\sqrt{x}$

x	0		2		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	6	↘	2	↗	$+\infty$

$f'(x)=2(x-2)$

$\lim\limits_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

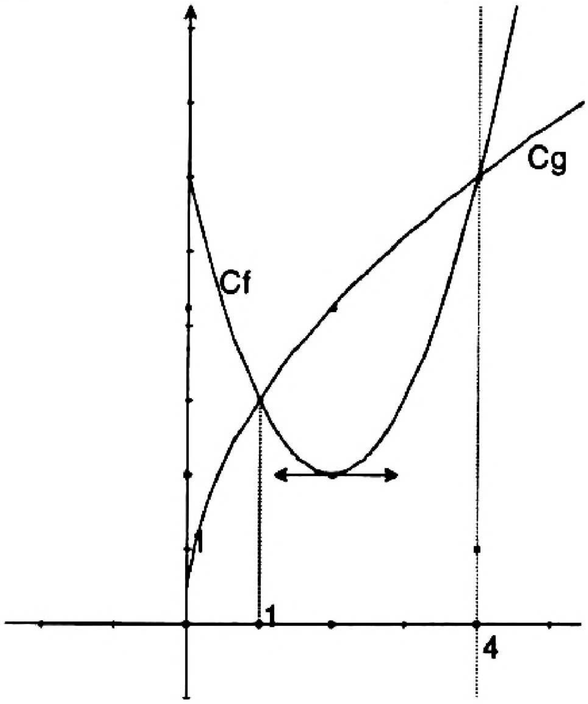
branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$

* $g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}$

x	0		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{+\infty}\frac{3}{\sqrt{x}}=0$

branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$



b) $A=\int_1^4(g(x)-f(x))dx=\int_1^4(3\sqrt{x}-x^2+4x-6)dx$

$A=\left[2x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}+2x^2-6x\right]_1^4=5\ u.a$

EX 5 :

$\begin{cases} f(x)=\sin x \\ g(x)=\sin^2 x \end{cases}\qquad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

1) f et g sont dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$f'(x)=\cos x$

$g'(x)=2\sin x\cos x$

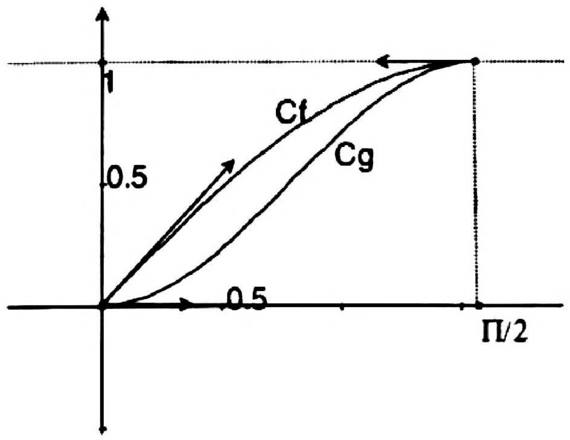
x	0		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	0	+	0
f(x)	0	↗	1

x	0		$\frac{\pi}{2}$
g'(x)	0	+	0
g(x)	0	↗	1

2) $f(x)-g(x)=\sin x(1-\sin x)\geq 0 \quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

(ζ_f) est au dessus de (ζ_g)

3)



4) $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)-g(x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

$A=1-\frac{\pi}{4} \quad u.a$

EX 6 :

$x\in[0,\pi]$

$f(x)=x+\sin x$

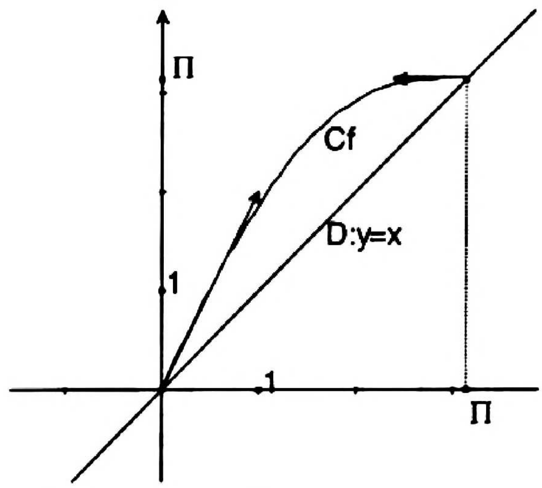
1) $f'(x)=1+\cos x\geq 0$

x	0		π
f'(x)	2	+	0
f(x)	0	↗	π

2) $f(x)-x=\sin x\geq 0$

(ζ_f) est au dessus de D

3)



4) $A=\int_0^{\pi}(f(x)-x)dx=\int_0^{\pi}\sin x dx$

$=[-\cos x]_0^{\pi}=2 \quad u.a$

EX 7 :

$x\in\,]0,+\infty[$

1) $f(x)=3x^2+\frac{2}{x^3}$

$g(x)=3x^2$

• $f'(x)=6x-\frac{6}{x^4}=\frac{6(x^5-1)}{x^4}$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)		$+\infty$ ↘	5	↗ $+\infty$	

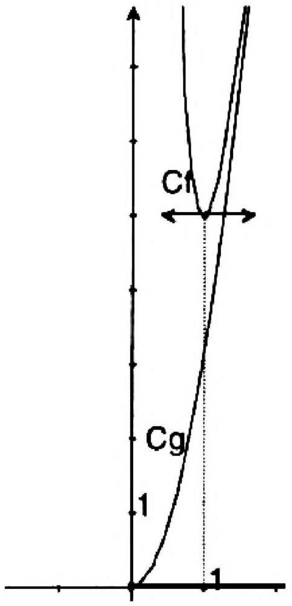
• $g'(x)=6x$

x	0		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$

(ζ_f) et (ζ_g) admettent chacune d'elles une branche infine parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

Rq: $f(x)>g(x)$; $\forall x \in]0,+\infty[$



2) □si $\lambda \geq 1$

$A(\lambda)=\int_1^{\lambda}(f(x)-g(x))dx = \int_1^{\lambda}\frac{2}{x^3}dx$

□si $0<\lambda<1$

$A(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}(f(x)-g(x))dx = \int_{\lambda}^{1}\frac{2}{x^3}dx = -\int_{1}^{\lambda}\frac{2}{x^3}dx$

d'où $A(\lambda)=\left|\int_1^{\lambda}\frac{2}{x^3}dx\right|$ car $A(\lambda)\geq 0$

$A(\lambda)=\left|\int_1^{\lambda}\frac{2}{x^3}dx\right| = A(\lambda)=\left|\left[\frac{-1}{x^2}\right]_1^{\lambda}\right| = \left|1-\frac{1}{\lambda^2}\right|$

b) $\begin{cases} A(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}-1 & \text{si } 0<\lambda<1 \\ A(\lambda)=1-\frac{1}{\lambda^2} & \text{si } \lambda \geq 1 \end{cases}$

□ dérivabilité en 1 :

$\lim\limits_{\lambda\to 1^-} \frac{A(\lambda)-A(1)}{\lambda-1} = \lim\limits_{\lambda\to 1} \frac{-(1+\lambda)}{\lambda^2} = -2$

$\lim\limits_{\lambda\to 1^+} \frac{A(\lambda)-A(1)}{\lambda-1} = \lim\limits_{\lambda\to 1^+} \frac{1+\lambda}{\lambda^2} = 2$

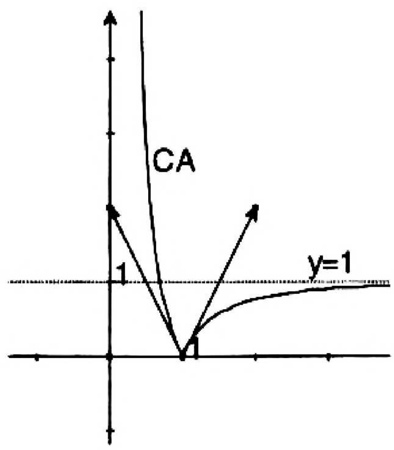
le point I(1,0) est un point anguleux

$\begin{cases} A'(\lambda = \frac{-2}{\lambda^3} & \text{si } 0<\lambda<1 \\ A'(\lambda)=\frac{2}{\lambda^3} & \text{si } \lambda>1 \end{cases}$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} (1-\frac{1}{\lambda^2}) = 1$

$\lim\limits_{\lambda\to 0^+} A(\lambda) = +\infty$

λ	0	1	+∞
A'(λ)	|| -	||	+
A(λ)	|| +∞ ↘	0	↗ 1



c) □si : $m \in]-\infty,0[$

l'équation : $A(\lambda)=m$ n'a pas de solutions

□si : $m \in \{0\}\cup[1,+\infty[$: une seule solutions

□si : $m \in]0,1[$: deux solutions

EX 8 :

1) $x \in]2,+\infty[$

$$f(x) = x+1+\frac{4}{(x-2)^2}$$

$$g(x) = x+1$$

(ζ_g) est la droite d'équation : y=x+1

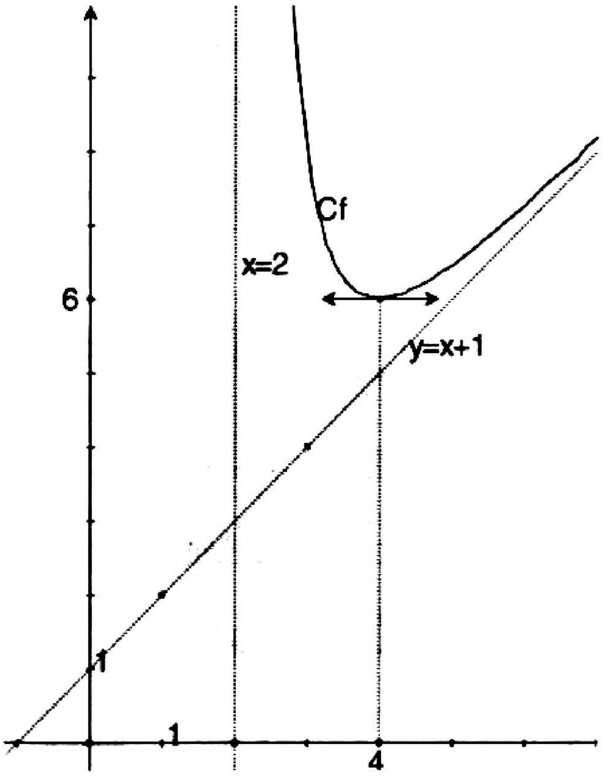
$$f'(x) = 1-\frac{8}{(x-2)^3} = \frac{(x-2)^3-2^3}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = \frac{(x-4)\left[(x-2)^2+2(x-2)+4\right]}{(x-2)^3}$$

x	2		4		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{(x-2)^2} = 0$$

(ζ_g) : y=x+1 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $(+\infty)$



2) $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in]2,+\infty[$

a) si $\lambda \geq 3$

$$A(\lambda) = \int_3^{\lambda}(f(x)-g(x))dx = \int_3^{\lambda}\frac{4}{(x-2)^2}dx$$

si $2<\lambda<3$

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{3}\frac{4}{(x-2)^2}dx = -\int_3^{\lambda}\frac{4}{(x-2)^2}dx$$

$A(\lambda) \geq 0$

d'où $A(\lambda) = \left|\int_3^{\lambda}\frac{4}{(x-2)^2}dx\right|$

b) $A(\lambda) = \left|\left[\frac{-4}{x-2}\right]_3^{\lambda}\right| = \left|4-\frac{4}{\lambda-2}\right|$

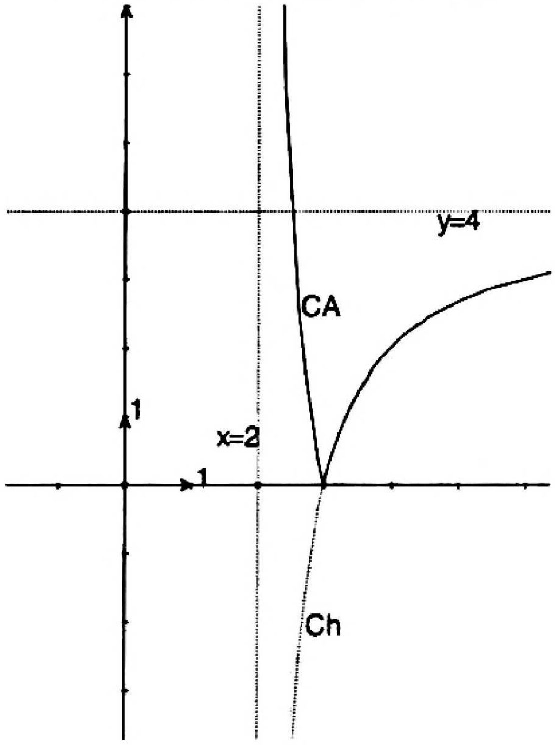
c) soit $h(\lambda) = 4-\frac{4}{\lambda-2}$

$$\begin{cases} A(\lambda)=h(\lambda) & \text{si } \lambda \geq 3 \\ A(\lambda)=-h(\lambda) & \text{si } 2<\lambda<3 \end{cases}$$

$$h'(\lambda) = \frac{4}{(\lambda-2)^2} > 0$$

λ	2		$+\infty$
h'(λ)	‖	+	
h(λ)	‖ $-\infty$	↗	4

$x = 2$ et y=4 sont les asymptotes à (ζ_h)



d) □m<0

l'équation A(λ)=m n'a pas de solution

□$m \in]0,4[$

l'équation A(λ)=m admet deux solutions

□$m \in \{0\} \cup [4,+\infty[$

l'équation admet une seule solution

EX 9 :

1) $A = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^3}dx$

$= \left[\frac{-1}{4(1+x^2)^2}\right]_0^1 = \frac{3}{16}$

2) $A + B = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \left[\frac{-1}{2(1+x^2)}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

3) $\begin{cases} A=\frac{3}{16} \\ A+B=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow B = \frac{1}{16}$

EX 10 :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$

$= \left[\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

EX 11 :

1) onpose :

$\begin{cases} U'(x)=\cos 2x \xrightarrow{P} U(x)=\frac{1}{2}\sin 2x \\ V(x)=x \xrightarrow{d} V'(x)=1 \end{cases}$

d'où : $\int_0^{\pi} x\cos 2x dx = \left[\frac{1}{2}x.\sin(2x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2x dx$

$\int_0^{\pi} x\cos 2x dx = 0 + \left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi} = 0$

2) a)

* I+J= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^2 x + \sin^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$

* I-J= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = 0$

b) $\begin{cases} I+J=\frac{\pi^2}{8} \\ I-J=0 \end{cases}$ d'où $I=J=\frac{\pi^2}{16}$

EX 12 :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = [tgx]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$

2) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$f'(x) = \frac{\cos x.\cos^3 x - \sin x(-3\sin x\cos^2 x)}{\cos^6 x}$

$= \frac{\cos^4 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x}{\cos^6 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}$

$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{3}{\cos^2 x}$

$f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

3) $\frac{1}{\cos^4 x}=\frac{1}{3}\left[f'(x)+\frac{2}{\cos^2 x}\right]$

d'où $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\frac{1}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx\right)$

$=\frac{1}{3}\left([f(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}+2\times 1\right)=\frac{1}{3}\left(f(\frac{\pi}{4})-f(0)+2\right)=\frac{4}{3}$

EX 13 :

$f(x)=\frac{1}{\cos x}\quad ; x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

1) $0\le x\le\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos x\le 1$

$\Rightarrow 1\le\frac{1}{\cos x}\le\sqrt{2}\ \Rightarrow\ 1\le f(x)\le\sqrt{2}$

2) $1\le f(x)\le\sqrt{2}\quad ;\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}$

$\Rightarrow(\frac{\pi}{4}-0)\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}\le\sqrt{2}(\frac{\pi}{4}-0)$

$\Rightarrow\frac{\pi}{4}\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}\le\frac{\pi.\sqrt{2}}{4}$

EX 14 :

$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$

1) a) $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\ \Rightarrow(\frac{\pi}{2})^2\le x^2\le\pi^2$

$\Rightarrow\ 1+(\frac{\pi}{2})^2\le 1+x^2\le 1+\pi^2$

$\Rightarrow\ \frac{1}{1+\pi^2}\le\frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}$

on a aussi : $0\le\sin x\le 1$

d'où $0\le\frac{\sin x}{1+x^2}\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}$

b) $0\le\frac{\sin x}{1+x^2}\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}\quad ;\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

d'où : $0\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}dx$

$\Rightarrow 0\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\frac{\pi}{2(1+(\frac{\pi}{2})^2)}$

d'aprés a) : $\frac{1}{1+\pi^2}\le\frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}\quad\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

d'où $\frac{\sin x}{1+\pi^2}\le\frac{\sin x}{1+x^2}\le\frac{\sin x}{1+(\frac{\pi}{2})^2}$ car $\sin x\ge 0$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+\pi^2}dx\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+(\frac{\pi}{2})^2}dx$

$\Rightarrow\frac{1}{1+\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x dx\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x dx=[-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1$

d'où $\frac{1}{1+\pi^2}\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}$

Ex 15 :

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\quad ;\ x\in\mathbb{R}_+$

$I=\int_{100}^{1000}f(t).dt$

1) a) pour $x>0$: $1+x^4\ge x^4$

$\Rightarrow\sqrt{1+x^4}\ge x^2\ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\le\frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow f(x)\le\frac{1}{x^2}$ pour $x>0$

b) x>0

soit $g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$; $t\geq 0$

$g'(t)=\dfrac{-1}{2(\sqrt{1+t})^3}$

$t\geq 0 \Rightarrow 1+t\geq 1 \Rightarrow \sqrt{1+t}\geq 1 \Rightarrow (\sqrt{1+t})^3\geq 1$

$\Rightarrow 2(\sqrt{1+t})^3\geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2(\sqrt{1+t})^3}\leq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow g'(t)\geq -\dfrac{1}{2}$

$g'(t)\geq -\dfrac{1}{2}$; $\forall t\in[0,x]$

d'aprés le théorème des inégalités des accroissements finis:

$g(x)-g(0)\geq -\dfrac{1}{2}(x-0)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}-1\geq -\dfrac{1}{2}x \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\geq 1-\dfrac{1}{2}x$

c) t>0 pour $x=\dfrac{1}{t^2}>0$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\geq 1-\dfrac{1}{2t^2} \Rightarrow \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\geq 1-\dfrac{1}{2t^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\geq \dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2t^3}$

pour $t=x^2$

on aura : $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}\geq \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x^6}$

$\Rightarrow f(x)\geq \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x^6}$

2) pour $t\in[100,1000]$

$\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{2t^6}\leq f(t)\leq \dfrac{1}{t^2}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{100}^{1000}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2t^6}\right)dt\leq \int_{100}^{1000} f(t)dt\leq \int_{100}^{1000}\frac{1}{t^2}dt$

$\Rightarrow \left[\dfrac{-1}{t}+\dfrac{1}{10t^5}\right]_{100}^{1000}\leq I\leq \left[\dfrac{-1}{t}\right]_{100}^{1000}$

$10^{-2}-10^{-3}+10^{-16}-10^{-11}\leq I\leq 10^{-2}-10^{-3}$

EX 16 :

$f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$; $x\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$

1) $f'(x)=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}>0$

$\displaystyle\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{1}{\sin x}=1$

$\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{1}{\sin x}=+\infty$

f est continue et strictement croissante sur $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$

elle réalise donc une bijection de $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$

sur $f(\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[)=]1,+\infty[=I$

2) f est dérivable sur $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$

et $f'(x)=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\neq 0$

d'où f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$=\dfrac{1}{f'(y)}$ avec $y=f^{-1}(x)$, $f(y)=x$, $\dfrac{1}{\sin y}=x$, $\sin y=\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{-\sin^2 y}{\cos y}$

$y\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[\rightarrow \cos y<0$

$\cos y=-\sqrt{1-\sin^2 y}=-\sqrt{1-1/x^2}$

d'où $(f^{-1})'(x)=\dfrac{\frac{-1}{x^2}}{-\sqrt{1-1/x^2}}=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

3) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dt=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}(f^{-1})'(t)dt=\left[f^{-1}(t)\right]_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}$

$=f^{-1}(\sqrt{2})-f^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{12}$

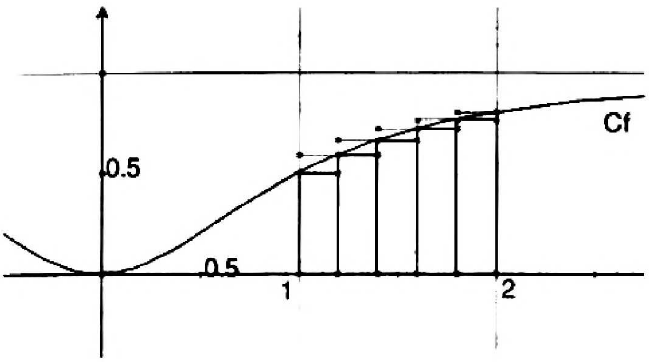
EX 17 :

1) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; $D_f = IR$

$f'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

f est paire

x	0		$+\infty$
f'(x)	0	+	0
f(x)	0	↗	1



2) a) $A=\int_1^2 f(x)dx$

$1 \le x \le 2 \Rightarrow f(1) \le (x) \le f(2)$

(car f est croissante sur $[1,2]$)

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \le f(x) \le \dfrac{4}{5} \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le f(x) \le 1$

d'où $\int_1^2 \dfrac{1}{2}dx \le \int_1^2 f(x)dx \le \int_1^2 dx \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le A \le 1$

b) a_i : l'aire du rectangle r_i

A_i :l'aire du rectangle R_i

$\sum_{k=1}^{5} a_i \le A \le \sum_{k=1}^{5} A_i$

$\sum_{k=1}^{5} a_i = (0,2)\times f(1)+(0,2).f(1,2)+(0,2).f(1,4)$

$+(0,2).f(1,6)+(0,2).f(1,8)$

$=(0,2).[f(1)+f(1,2)+f(1,4)+f(1,6)+f(1,8)]$

$\sum_{k=1}^{5} A_i = (0.2).[f(1,2)+f(1,4)+f(1,6)+f(1,8)+f(2)]$

(calculatrice)

EX 18 :

$U_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{(x^2+1)^2}dx$; $(n \ge 1)$

1) $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le 1+x^2 \le 2$

$\Rightarrow 1 \le (1+x^2) \le 4 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{(1+x^2)^2} \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \dfrac{1}{(1+x^2)^2} \le 1 \Rightarrow 0 \le \dfrac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^2} \le x^{2n+1}$

2) pour $x \in [0,1]$

$0 \le \dfrac{x^n}{(1+x^2)^2} \le x^n$

$\Rightarrow 0 \le U_n \le \int_0^1 x^4 dx \Rightarrow 0 \le U_n \le \left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow 0 \le U_n \le \dfrac{1}{n+1}$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} U_n = 0$

EX 19 :

$U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$

$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n.\cos 2x dx$

1) $U_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}.\cos 2x\, dx$

$0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow x^{n+1} \le x^n$

$\Rightarrow x^{n+1}.\cos 2x \le x^n.\cos 2x \quad (\cos 2x \ge 0)$

d'où $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}.\cos 2x\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n.\cos 2x\, dx$

$\Rightarrow U_{n+1} \le U_n$

(U_n) est décroissante

2) pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $\cos 2x \le 1$

$x^n.\cos 2x \le x^n$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n.\cos 2x\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\,dx$$

$$\Rightarrow U_n \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\,dx$$

3) $x^n.\cos 2x \ge 0$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n.\cos 2x\,dx \ge 0 \quad \Rightarrow U_n \ge 0$$

* $0 \le U_n \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\,dx$

$$\Rightarrow 0 \le U_n \le \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow 0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} = 0$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

4) a) * $U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$U_0 = \frac{1}{2}$$

* $U_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\cos 2x\,dx$

intégrant par parties, on pose :

$$\begin{cases} U'(x) = \cos 2x \xrightarrow{P} U(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \\ V(x) = x \xrightarrow{d} V'(x) = 1 \end{cases}$$

$$U_1 = \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2x dx$$

$$U_1 = \frac{\pi}{8} + \left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

b) $U_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+2}.\cos 2x dx$

intégration par parties, on pose :

$$\begin{cases} U'(x) = \cos 2x \xrightarrow{P} U(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \\ V(x) = x^{n+2} \xrightarrow{d} V'(x) = (n+2)x^{n+1} \end{cases}$$

$$U_{n+2} = \left[\frac{1}{2}x^{n+2}.\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{(n+2)}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}.\sin 2x dx$$

$$U_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2} - \frac{(n+2)}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}.\sin 2x dx \qquad (1)$$

faisons une 2éme intégration par parties :

$$\begin{cases} U'(x) = \sin 2x \xrightarrow{P} U(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x \\ V(x) = x^{n+1} \xrightarrow{d} V'(x) = (n+1)x^n \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}.\sin 2x dx = \left[\frac{-x^{n+1}}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{(n+1)}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n.\cos 2x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}.\sin 2x dx = \frac{(n+1)}{2}.U_n \qquad (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$

$$U_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2} - \frac{(n+1)(n+2)}{4}.U_n$$

c)

* $U_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}U_0 = \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}$

* $U_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{3}{2}U_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$

$$U_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{3\pi}{16} + \frac{3}{8}$$

EX 20 :

$U_0=\int_0^1\sqrt{1-x}.dx$

$U_n=\int_0^1 x^n.\sqrt{1-x}.dx$

1) $0\le x\le 1 \Rightarrow -1\le -x\le 0 \Rightarrow 0\le 1-x\le 1$

$\Rightarrow 0\le\sqrt{1-x}\le 1 \Rightarrow 0\le x^n.\sqrt{1-x}\le x^n$

d'où $0\le\int_0^1 x^n.\sqrt{1-x}.dx\le\int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow 0\le U_n\le\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow 0\le U_n\le\frac{1}{n+1}$

2) pour $n\ge 1$

on a : $0\le U_n\le\frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

3) a)

* $U_0=\int_0^1\sqrt{1-x}.dx=\left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1$

$U_0=\frac{2}{3}$

* $U_1=\int_0^1 x.\sqrt{1-x}.dx$

intégrations par parties :

$$\begin{cases}U'(x)=\sqrt{1-x}\xrightarrow{p}U(x)=\frac{-2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\\ V(x)=x\xrightarrow{d}V'(x)=1\end{cases}$$

$U_1=\left[\frac{-2}{3}x(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)\sqrt{1-x}.dx$

$U_1=\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)\sqrt{1-x}.dx=\frac{2}{3}\left(\int_0^1\sqrt{1-x}.dx-\int_0^1 x\sqrt{1-x}.dx\right)$

$U_1=\frac{2}{3}(U_0-U_1)$

$\Rightarrow 3U_1=2U_0-2U_1 \Rightarrow 5U_1=2U_0 \Rightarrow U_1=\frac{2}{5}U_0$

$U_1=\frac{4}{15}$

b) pour $n\ge 2$

$U_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}.dx$

on pose : $\begin{cases}U'(x)=\sqrt{1-x}\longrightarrow U(x)=\frac{-2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\\ V(x)=x^n\longrightarrow V'(x)=n.x^{n-1}\end{cases}$

$U_n=\left[\frac{-2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1+\frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx$

$U_n=\frac{2n}{3}\left(\int_0^1(x^{n-1}\sqrt{1-x}-x^n\sqrt{1-x})dx\right)$

$U_n=\frac{2n}{3}\left(\int_0^1(x^{n-1}\sqrt{1-x})dx-\int_0^1(x^n\sqrt{1-x})dx\right)$

$U_n=\frac{2n}{3}(U_{n-1}-U_n)$

$\Rightarrow U_n=\frac{2n}{3}U_{n-1}-\frac{2n}{3}U_n$

$\Rightarrow 3U_n=2nU_{n-1}-2nU_n$

$\Rightarrow(3+2n).U_n=2n.U_{n-1}$

pour n=1 : $(3+2)U_1=2n.U_0$

$5U_1=2U_0$ (vrai)

d'où : $(3+2n)U_n=2nU_{n-1}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

c) * $(3+4)U_2=4U_1 \Rightarrow U_2=\frac{4}{7}U_1 \Rightarrow U_2=\frac{16}{105}$

* $(3+6)U_3=6U_2 \Rightarrow U_3=\frac{6}{9}U_2 \Rightarrow U_3=\frac{2}{3}U_2 \Rightarrow U_3=\frac{32}{315}$

EX 21 :

$n\ge 1$

$U_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1) $U_1=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$

2) pour $0\le x\le 1$ on a : $1\le\sqrt{1+x^2}\le 2$

$\Rightarrow 0\le\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\le 1 \Rightarrow 0\le\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\le x^n$

d'où $0\le\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx\le\int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow 0\le U_n\le\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow 0\le U_n\le\frac{1}{n+1}$

3) $0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$; pour $n \ge 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}=0$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=0$

EX 22 :

$x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$f(x)=tg^3x+tgx$

1) $f'(x)=3(1+tg^2x)tg^2x+(1+tg^2x)$

$f'(x)=(1+tg^2x)(1+3tg^2x)>0$

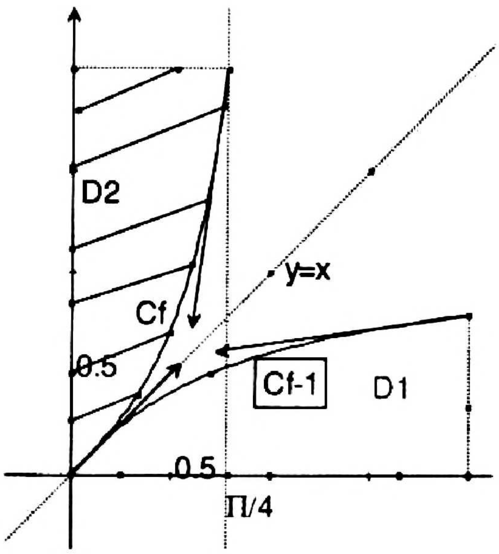
x	0		$\frac{\pi}{4}$
f'(x)	0	+	
f(x)	0	↗	2

2) f est continue et stictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

elle réalise donc une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

sur $f(\left[0,\frac{\pi}{4}\right])=\left[f(0),f(\frac{\pi}{4})\right]=[0,2]$

3) a) $f'_d(0)=1$; $f'_g(\frac{\pi}{4})=8$



b) * $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x).tgx.dx=\left[\frac{1}{2}tg^2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$

* $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$ représente l'aire de la partie du plan limitée par $(\zeta_{f^{-1}})$ et les droites d'équations : y=0 , x=
et x=2

$\int_0^2 f^{-1}(x)dx=$aire$(D_1)=$aire(D_2) (voir figure)

d'où : $\int_0^2 f^{-1}(x)dx=2\times\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$

EX 23 :

$x\in[0,3]$

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x\in\,]1,3] \end{cases}$$

1) f est continue sur chacun des intervalles $[0,1[$ et

$*f(1)=1$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x)=1=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x^2}=1=f(1)$

d'où f est continue en 1

par suite f est continue sur $[0,3]$

2) $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

a) pour $x\in[0,1]$

$F(x)=\int_0^x t.dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2}{2}$ pour $x\in[0,1]$

pour $x\in\,]1,3]$

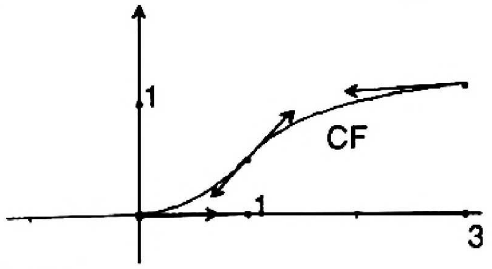
$F(x)=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\int_0^1 t.dt+\int_1^x \frac{1}{t^2}dt$

$=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{-1}{t}\right]_1^x=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}-\frac{1}{x}$

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x\in[0,1] \\ \frac{3}{2}-\frac{1}{x} & \text{si } x\in\,]1,3] \end{cases}$$

b) $F'(x)=f(x) \geq 0$

$F'(1)=f(1)=1$; $F'(0)=0$; $F'(3)=\frac{1}{9}$



EX 24 :

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$; $x \in [0,1]$

1) a) □ f est continue sur $[0,1]$

□ f est dérivable sur $[0,1[$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{-(1-x)} = \lim\limits_{x\to 1^-} -\frac{\sqrt{1+x}}{1-x} = -\infty$

f non dérivable à gauche en 1

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \leq 0$

x	0	1
f'(x)	0 -	‖
f(x)	1 ↘ 0	

b) $M(x,y) \in (\zeta_f) \Leftrightarrow y=\sqrt{1-x^2}$

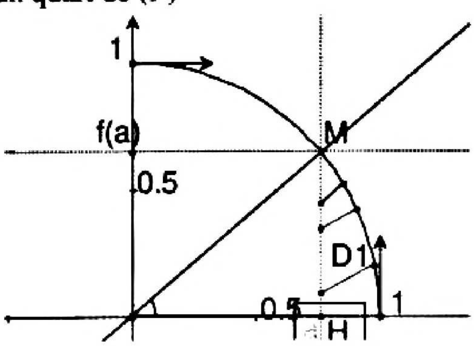
$\Leftrightarrow y^2=1-x^2$ avec $\begin{cases} y \in [0,1] \\ x \in [0,1] \end{cases}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=1$ avec $\begin{cases} y \in [0,1] \\ x \in [0,1] \end{cases}$

(ζ_f) est la partie du cercle (Γ) de centre O et de rayon 1 tel que : $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$

(ζ_f) est un quart de (Γ)

c)



2) $F(x)=\int_0^x f(t).dt$; $x \in [0,1]$

F(1) : l'aire de la partie du plan limitée par (ζ_f) et les axes du repère

$F(1)=\frac{1}{4}\text{aire}(\Gamma)=\frac{1}{4}(\pi \times 1^2)=\frac{\pi}{4}$

3) $a \in [0,1]$

$a=\cos\theta$; $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

a) $F(a)=\int_0^a f(t).dt$

F(a): représente l'aire de la partie du plan limitée par (ζ_f) et les droites d'équation : y=0 , x=0 et x=a

* soit M(a,f(a))

H : son projeté orthogonal sur (Ox)

$F(a)=F(1)-\text{aire}(D_1)$ (voir figure)

$F(1)=\frac{\pi}{4}$

$aireD_1 = \frac{\theta}{2} \times 1^2 - aire(OHM) = \frac{\theta}{2} - \frac{a.f(a)}{2}$

d'où $F(a)=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\theta}{2}-\frac{a.f(a)}{2}\right)$

$F(a)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}+\frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}$

b) * $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$F(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3/4}}{2}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$

* $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$

$F(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}+\frac{\frac{1}{2}\sqrt{1/4}}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}$

EX 25 :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+2}x.dx$$

1) a) $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x.dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left((1+tg^2x)-1\right)dx$

$=\left[tg(x)-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\dfrac{\pi}{4}$

b) $I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+3}x.dx$

pour : $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$ on a : $0\le tgx\le 1$

$\Rightarrow 0\le tg^{n+3}x\le tg^{n+2}x \Rightarrow 0\le \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+3}x.dx\le\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n+2}x.dx$

$\Rightarrow 0\le I_{n+1}\le I_n\quad \forall n\in \mathbb{N}$

c) (I_n) est décroissante et minorée par 0 elle est donc convergente.

3) a) $I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(tg^{n+2}x+tg^{n+4}x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x).tg^{n+2}x.dx=\left[\dfrac{1}{n+3}tg^{n+3}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{n+3}$

b) $I_{n+2}\ge 0 \Rightarrow I_n+I_{n+2}\ge I_n$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n+3}\ge I_n$ or $I_n\ge 0$

d'où $0\le I_n\le\dfrac{1}{n+3}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+3}=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$

EX 26 :

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; $x\in\left]0,+\infty\right[$

1) $n\in\mathbb{N}^*$

a) $\int_1^n f(x)dx=\left[\dfrac{-1}{x}\right]_1^n=1-\dfrac{1}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{n})=1$

2) $k\in\mathbb{N}^*$

$\int_k^{k+1} f(x)dx=\left[\dfrac{-1}{x}\right]_k^{k+1}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$

3) $\int_k^{k+1} f(x)dx=\dfrac{1}{k(k+1)}$

$S_n=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+....+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$S_n=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+...+\int_n^{n+1} f(x)dx$

$S_n=\int_1^{n+1} f(x)dx=1-\dfrac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=1$

EX 27 :

$f(x)=\dfrac{1}{x^3}$; $x\in\left[1,+\infty\right[$

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$; $n\ge 1$

1) a) $\square f'(x)=\dfrac{-3}{x^4}<0\quad\forall x\in\left[1,+\infty\right[$

d'où f est décroissante sur $\left[1,+\infty\right[$

$\square f(x)=\dfrac{1}{x^3}\ge 0\quad \forall x\in\left[1,+\infty\right[$

b) $S_{n+1}-S_n=f(n+1)\ge 0$

d'où (S_n) est croissante

2) a) * $\int_1^n f(t)dt=\int_1^n\dfrac{1}{t^3}.dt=\left[\dfrac{-1}{2t^2}\right]_1^n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n^2}$

* $n\ge 1 \Rightarrow n^2\ge 1\Rightarrow -2n^2\le -2\Rightarrow \dfrac{-1}{2n^2}\ge\dfrac{-1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{-1}{2}\le\dfrac{-1}{2n^2}\le 0\Rightarrow 0\le\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n^2}\le\dfrac{1}{2}$

doù $0\le\int_1^n f(t).dt\le\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n f(t)dt=\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n^2})=\dfrac{1}{2}$

3) a) $k \geq 2$

* pour $k \leq t \leq k+1$ on a : $f(t) \leq f(k)$ (car f est décroissante)

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt \Rightarrow \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).[k+1-k]$$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \quad (1)$$

* pour $k-1 \leq t \leq k$ on a : $f(k) \leq f(t)$

$$\Rightarrow \int_{k-1}^{k} f(k).dt \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \Rightarrow f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$$

b) pour $k \geq 2$

$$\int_k^{k+1} f(t).dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t).dt$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(t).dt \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t).dt$$

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = S_n - f(1)$$

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(t).dt = \int_2^{n+1} f(t)dt$$

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t).dt = \int_1^{n} f(t)dt$$

d'où $\int_2^{n+1} f(t).dt \leq S_n - f(1) \leq \int_1^{n} f(t).dt$

c) $f(1)=1$

$$\int_1^{n} f(t).dt \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad \int_2^{n+1} f(t).dt \geq 0$$

d'où $0 \leq S_n - 1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq S_n \leq \frac{3}{2}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + .. + \frac{1}{n^3}$$

(S_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$

elle est donc convergente ; soit $\ell = \lim_{n \to +\infty} S_n$

$$1 \leq S_n \leq \frac{3}{2} \quad \Rightarrow 1 \leq \ell \leq \frac{3}{2}$$

EX 28 :

1) $f(x) = x^4 - x^3 + 1$

$I = [-1,3]$

$$\bar{f} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} f(x)dx = \frac{1}{4} \times \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{3} = \frac{41}{5}$$

2) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 1$

$I = [2,4]$

$$\bar{f} = \frac{1}{2}\int_2^4 f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2x^2} - x\right]_2^4 = \frac{-61}{64}$$

3) $f(x) = \sin(2x)$

$I = [0,\pi]$

$$\bar{f} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} = 0$$

EX 29 :

soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$; $x \in [2,4]$

$f'(x) = \dfrac{1-2x}{(x^2-x+1)} < 0$; $\forall x \in [2,4]$

f est décroissante

$2 \leq x \leq 4 \Rightarrow f(4) \leq f(x) \leq f(2)$

$\Rightarrow \frac{1}{13} \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$

f est continue sur $[2,4]$ et $\frac{1}{13} \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$

d'où $\frac{1}{13} \leq \bar{f} \leq \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{13} \leq \frac{1}{2}\int_2^4 f(x)dx \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{13} \leq \int_2^4 \frac{dx}{x^2 - x + 1} \leq \frac{2}{3}$$

EX 30 :

soit $f(x) = \dfrac{1}{3 + tg^2 x}$

$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq tgx \leq \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq tg^2 x \leq 3 \Rightarrow \frac{10}{3} \leq 3 + tg^2 x \leq 6$

$\Rightarrow \frac{1}{6} \leq f(x) \leq \frac{3}{10}$

f est continue sur $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ et $\frac{1}{6}\le f(x)\le\frac{3}{10}$

d'après le théorème de la moyenne :

$$\frac{1}{6}\le\overline{f}(x)\le\frac{3}{10}\Rightarrow\frac{1}{6}\le\frac{6}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx\le\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{36}\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{3+tg^2x}\le\frac{\pi}{20}$$

EX 31 :

$$V=\pi.\int_0^2 x^4dx=\pi.\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{32\pi}{5}\text{ u .v}$$

EX 32 :

$$V=\pi.\int_1^3\frac{1}{x^2}dx=\pi.\left[\frac{-1}{x}\right]_1^3=\frac{2\pi}{3}\text{ u.v}$$

EX 33 :

$$V=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^2xdx=\pi.[tgx-x]_0^{\frac{\pi}{4}}=(1-\frac{\pi}{4}).\pi\text{ u.v}$$

EX 34 :

$$V=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x\sin x)dx$$

$$=\pi.\left[x+\sin^2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.(1+\frac{\pi}{2})\ u.v$$

EX 35 :

$$V=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2.dx-\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2xdx$$

$$=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2.dx-\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$$

$$=\pi.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\pi.\left[\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{3}(\frac{\pi}{2})^3-\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^4}{24}-\frac{\pi^2}{4}\quad u.v$$

EX 36 :

I. $F(x)=\int_0^{tgx}\frac{dt}{1+t^2}$; $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

1) la fonction : $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ est continue sur IR

la fonction : $x\mapsto tgx$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$tg(\left[0,\frac{\pi}{4}\right])=[0,1]\subset IR$ et $0\in IR$

d'où f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et

$$F'(x)=(tgx)'.\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1+tg^2x}{1+tg^2x}=1$$

2) F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et $F'(x)=1$

d'où $F(x)=x+k$; $k\in IR$

$F(0)=\int_0^0\frac{dt}{1+t^2}=0\Rightarrow 0+k=0\Rightarrow k=0$

d'où $F(x)=x$; $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

3) $\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{tg\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{1+t^2}=F(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$

II / $I_n=\int_0^1\frac{1}{(1+t^2)^n}$ $n\in$ □

1) * $I_0=\int_0^1dt=[t]_0^1=1$

* $I_1=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$

2) $n\ge 1$

$$I_{n+1}=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

$$I_n=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

intégration par parties :

on pose $\begin{cases}U'(t)=1\xrightarrow{P}U(t)=t\\ V(t)=\frac{1}{(1+t^2)^n}\xrightarrow{d}V'(t)=\frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}\end{cases}$

$$I_n=\left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^1+2n.\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

$$I_n=\frac{1}{2^n}+2n.\int_0^1\frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

$$I_n=\frac{1}{2^n}+2n\left[\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^n}-\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}\right]$$

$$I_n=\frac{1}{2^n}+2n\left[I_n-I_{n+1}\right]$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{1}{2^n}+2n.I_n-2n.I_{n+1}\Rightarrow 2n.I_{n+1}=\frac{1}{2^n}+(2n-1)I_n$$

d'où $\mathrm{I}_{n+1}=\frac{1}{2.n}\left[\frac{1}{2^n}+(2n-1).I_n\right]$

$$I_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-I_1\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}$$

$$I_3=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+3I_2\right)=\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{8}$$

$$I_4=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}-5.I_3\right)=\frac{1}{8}-\frac{5\pi}{64}$$

III / $\quad J_0=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$

$J_n=\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\quad ;\ n\geq 1$

1) a) pour n=0 : $J_0=\frac{\pi}{4}$

$0\leq J_0\leq\frac{1}{1+2\times 0}=1$

* pour $n\geq 1$

$0\leq t\leq 1\ \Rightarrow\ 0\leq t^2\leq 1\ \Rightarrow 1\leq 1+t^2\leq 2$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+t^2}\leq 1\ \Rightarrow 0\leq\frac{1}{1+t^2}\leq 1$

$\Rightarrow 0\leq\frac{t^{2n}}{1+t^2}\leq t^{2n}\ \Rightarrow 0\leq\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\leq\int_0^1 t^{2n}.dt$

$\Rightarrow\ 0\leq J_n\leq\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1\ \Rightarrow 0\leq J_n\leq\frac{1}{2n+1}$

b) $0\leq J_n\leq\frac{1}{2n+1}\quad ;\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0\quad$ d'où $\quad\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=0$

2) a) $J_{n+1}+J_n=\int_0^1\frac{t^{2n+2}+t^{2n}}{1+t^2}dt$

$=\int_0^1\frac{t^{2n}(1+t^2)}{1+t^2}dt=\int_0^1 t^{2n}dt=\frac{1}{2n+1}$

b) * $J_0=\frac{\pi}{4}$

* $J_1+J_0=1\quad\Rightarrow\ J_1=1-\frac{\pi}{4}$

* $J_2+J_1=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow J_2=\frac{1}{3}-(1-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$

$J_3=\frac{13}{5}-\frac{\pi}{4}$

$J_4=\frac{\pi}{4}-\frac{156}{35}$

$J_5=\frac{1439}{315}-\frac{\pi}{4}$

3) $U_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{(-1)^n}{1+2n}$

a) $1=J_1+J_0$

$\frac{1}{3}=J_2+J_1$

$\frac{1}{5}=J_3+J_2$

$\frac{1}{7}=J_4+J_3$

.

.

$\frac{1}{2n+1}=J_{n+1}+J_n$

d'où

$$U_n=(J_1+J_0)-(J_2+J_1)+(J_3+J_2)+..+(-1)^n(J_{n+1}+J_n)$$

$$\Rightarrow U_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(J_k+J_{k+1})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kJ_k+\sum_{k=0}^{n}(-1)^kJ_{k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kJ_k-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}J_{k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kJ_k-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^kJ_k$$

$$U_n=J_0+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k.J_k-\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^kJ_k+(-1)^{n+1}J_{n+1}\right)$$

$$U_n=J_0-(-1)^{n+1}J_{n+1}=J_0+(-1)^nJ_{n+1}$$

$$\Rightarrow(-1)^nJ_{n+1}=U_n-J_0\ \Rightarrow J_{n+1}=(-1)^n(U_n-J_0)$$

b) $|U_n-J_0|=|J_{n+1}|$

$\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=0\ \Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}|J_{n+1}|=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-J_0)=0\ \Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=J_0=\frac{\pi}{4}$

EX 37 :

$n \geq 1$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx$$

1) a) soit $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$; $x \in [0,1]$

$$f'(x) = \frac{-(2x+1)}{(1+x+x^2)^2} < 0$$

f est décroissante sur $[0,1]$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq (x) \leq f(0) \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+x^2+x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2+x} \leq x^n \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{3}x^n dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

2) a) $n \geq 1$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx$$

intégration par parties :

$$\begin{cases} U'(x) = x^n \xrightarrow{p} U(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ V(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \xrightarrow{d} V'(x) = \frac{-(2x+1)}{(1+x+x^2)^2} \end{cases}$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{1+x+x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}.\int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx$$

b) $$3(n+1).I_n = 1 + 3\int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \quad (*)$$

soit $g(x) = \frac{(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$; $x \in [0,1]$

* $g'(x) = \frac{-6(x^2+x)}{(1+x+x^2)^3} \leq 0$

g est décroissante sur $[0,1]$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq (0) \Rightarrow \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{9}x^{n+1} \leq \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2} \leq x^{n}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{9}x^{n+1}dx \leq \int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leq \int_0^1 x^{n+1}dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{9}\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leq \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3(n+2)} \leq 3\int_0^1 \frac{(1+2x).x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2}dx \leq \frac{3}{n+2}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{3(n+2)} \leq 3(n+1).I_n \leq 1 + \frac{3}{n+2} \quad \text{(d'aprés *)}$$

c) $$1 + \frac{1}{3(n+2)} \leq 3n.I_n + 3I_n \leq 1 + \frac{3}{n+2}$$

$$\Rightarrow 1 - 3I_n + \frac{1}{3(n+2)} \leq 3n.I_n \leq 1 - 3I_n + \frac{3}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - I_n + \frac{1}{9(n+2)} \leq n.I_n \leq \frac{1}{3} - I_n + \frac{1}{n+2}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3} - I_n + \frac{1}{9(n+2)}\right) = \frac{1}{3}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3} - I_n + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{3}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n.I_n = \frac{1}{3}$

EX 38 :

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}.dt$$

1) la fonction : f: $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

la fonction : $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]) = [0,1] \subset [-1,1]$, et $0 \in [-1,1]$

d'où F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$F'(x)=\cos x.f(\sin x)=\cos x.\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x.|\cos x|$

$F'(x)=\cos^2 x$ car $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

2) F est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$F'(x)=\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$

d'où $F(x)=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{1}{2}\sin 2x)+k \quad (k\in □)$

$F(0)=\int_0^0\sqrt{1-t^2}\,dt=0 \Rightarrow 0+k=0 \Rightarrow k=0$

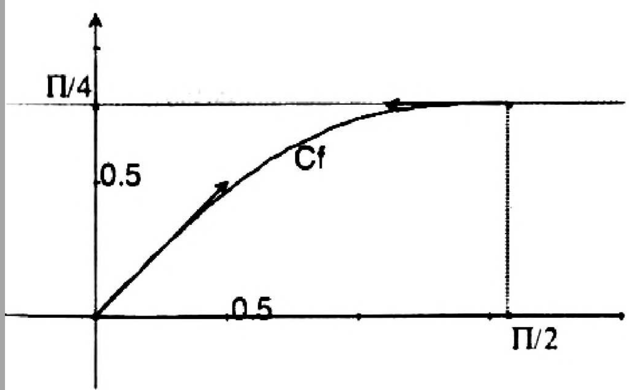
d'où $F(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x$

3) $\int_0^1\sqrt{1-t^2}.dt=\int_0^{\sin\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-t^2}.dt=F(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{4}$

4) $F'(x)=\cos^2 x\geq 0$

$F'(0)=1$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
F'(x)	0	+	0
F(x)	0	↗	$\frac{\pi}{4}$



EX 39 :

$f(x)=x+\sqrt{4-x^2} \qquad x\in[-2,2]$

1) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)+\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}1+\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}1+\dfrac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}1-\dfrac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}=-\infty$

f non dérivable à gauche en 2

□de meme f non dérivable à droite en (-2)

□f est dérivable sur $]-2,2[$

$f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

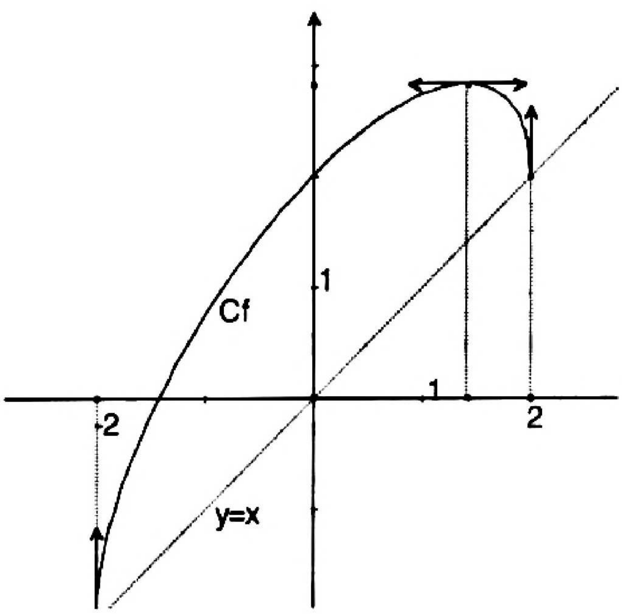
* pour $x\in]-2,0]\to f'(x)>0$

* pour $x\in[0,2[$: $f'(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x)=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}(\sqrt{4-x^2}+x)}$

$=\dfrac{2(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{\sqrt{4-x^2}(\sqrt{4-x^2}+x)>0}$ signe de $(\sqrt{2}-x)$

x	-2		$\sqrt{2}$		2
f'(x)	|	+	0	-	|
f(x)	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2



2) $F(x)=\int_{0}^{2\cos x}\sqrt{4-t^2}\,dt \quad x\in[0,\pi]$

a) la fonction $g: t\mapsto\sqrt{4-t^2}$ est continue sur $[-2,2]$
la fonction $U: x\mapsto 2\cos x$ est dérivablesur $[0,\pi]$
$U([0,\pi])=[-2,2]$ et $0\in[-2,2]$

d'où F est dérivable sur $[0,\pi]$ et

$F'(x)=U'(x).g(U(x))=-2\sin x\sqrt{4-4\cos^2 x}$

$F'(x)=-2\sin x\sqrt{4\sin^2 x}=-4\sin x\,|\sin x|=-4\sin^2 x$

(car $x\in[0,\pi]\rightarrow\sin x\geq 0$)

b) $F(\frac{\pi}{2})=\int_{0}^{0}\sqrt{4-t^2}.dt=0$

c) F est continue sur $[0,\pi]$

$F'(x)=-4\sin^2 x=-2(1-\cos 2x)$

$F(\frac{\pi}{2})=0$

d'où $F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}F'(t).dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}-2(1-\cos 2t)dt$

$F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(-2+2\cos 2t)dt=[-2t+\sin(2t)]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$

$F(x)=-2x+\sin 2x+\pi$

3) a) $A=\int_{-2}^{2}(f(t)-t)dt=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-t^2}dt$

$A=\int_{-2}^{0}\sqrt{4-t^2}dt+\int_{0}^{2}\sqrt{4-t^2}dt$

$A=\int_{0}^{2}\sqrt{4-t^2}dt-\int_{0}^{-2}\sqrt{4-t^2}dt$

$A=\int_{0}^{2\cos 0}\sqrt{4-t^2}dt-\int_{0}^{2\cos\pi}\sqrt{4-t^2}dt$

$A=F(0)-F(\pi)$

b) $A=F(0)-F(\pi)=\pi-(-2\pi+\pi)$

$A=2\pi$ u.a

QCM :

1) $Ln(x+x^2)=Lnx+Ln(x+1)$

2) $Ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\dfrac{1}{2}$

3) $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

4) $f'(x)=2(1+Ln|x|)$

5) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{Lnx}{x}=-\infty$

6) $\lim\limits_{x\to0^+}(Lnx+\dfrac{1}{x})=+\infty$

Vrai-Faux :

1) Vrai
Soit $F(x)=xLnx-x+1$
On a : $F(1)=0$
et $F'(x)=Lnx$

2) Faux
En effet :
$$Ln(IR_+^*)=\left]\lim_{x\to0^+}Ln(x),\lim_{x\to+\infty}\right[$$
$$=]-\infty,+\infty[=IR$$

3) Faux
Ln(x) existe pour x>0

4) Faux
En effet :
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\underbrace{xLnx-x}_{0^-}}=-\infty$$

EX 1 :

1) $(E): Lnx+Ln(x+1)=0$
Lnx *et* $Ln(x+1)$ ont un sens
Ssi x>0 et x>-1 ⇔ x>0
Dans $]0,+\infty[$

$(E)\Leftrightarrow Ln\left[x(x+1)\right]=0$
$\Leftrightarrow x(x+1)=1$
$\Leftrightarrow x^2+x-1=0$

$\Delta=5$ $x'=\dfrac{-1-\sqrt5}{2}$ *à rejeter*

et $x''=\dfrac{-1+\sqrt5}{2}$

$S_{IR}=\left\{\dfrac{-1+\sqrt5}{2}\right\}$

2) $Ln(Lnx)=0$
$\Leftrightarrow Lnx=1$ *et* $x>0$
$\Leftrightarrow x=e$
$S_{IR}=\{e\}$

3)
$(E): Ln\left(\dfrac{1}{x}\right)+Ln\left(x^4\right)=3Ln2$

dans $]0,+\infty[$

$(E)\Leftrightarrow Ln\left(x^3\right)=3Ln2$
$\Leftrightarrow 3Lnx=3Ln2$
$\Leftrightarrow x=2$
$S_{IR}=\{2\}$

4) $(E): (Lnx)^2-3Lnx+2=0$
On pose $t=Lnx$, $x>0$
L'équation devient :
$t^2-3t+2=0$
$t'=1$ *et* $t''=2$
$t=1\Leftrightarrow Lnx=1\Leftrightarrow x=e$
$t=2\Leftrightarrow Lnx=2\Leftrightarrow x=e^2$
$S_{IR}=\{e;e^2\}$

5)

$(E): Ln|x-1|+Ln|x+2|=Ln|4x^2+3x-7|$

$4x^2+3x-7=0$

$x'=1\ ;\ x''=-\dfrac{7}{4}$

$*\ dans\ IR\setminus\left\{-2;-\dfrac{7}{4};1\right\}$

$(E)\Leftrightarrow Ln|(x-1)(x+2)|=Ln|4x^2+4x-7|$

$\Leftrightarrow |(x-1)(x+2)|=|4x^2+4x-7|$

$\Leftrightarrow |x-1||x+2|=|x-1||4x+7|$

$\Leftrightarrow |x+2|=|4x+7| \qquad car\ \underline{x\neq 1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+7=x+2 \\ ou \\ 4x+7=-x-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{3} \\ ou \\ x=-\dfrac{9}{5} \end{cases}$$

$S_{IR}=\left\{-\dfrac{5}{3};-\dfrac{9}{5}\right\}$

EX 2 :

1) $(I): Ln\left(\sqrt{3+x}\right)<4$

* dans $]-3,+\infty[$

$(I)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}Ln(3+x)<4$

$\Leftrightarrow Ln(3+x)<8$

$\Leftrightarrow 0<3+x<e^8$

$\Leftrightarrow -3<x<e^8-3$

$S_{IR}=\left]-3,e^8-3\right[$

2) $(I): Ln(5x)>2+Ln3$

* dans IR_+^*

$(I)\Leftrightarrow Ln(5x)-Ln3>2$

$\Leftrightarrow Ln\left(\dfrac{5}{3}x\right)>2$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{3}x>e^2$

$\Leftrightarrow x>\dfrac{3e^2}{5}$

$S_{IR}=\left]\dfrac{3e^2}{5};+\infty\right[$

3) $Ln(4x+1)\leq 0$

$\Leftrightarrow 0<4x+1\leq 1$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}<x\leq 0$

$S_{IR}=\left]-\dfrac{1}{4};0\right]$

4) $Ln\left(\dfrac{1+x}{3x-5}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+x}{3x-5}\geq 1\ et\ x\neq\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+x}{3x-5}-1\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x+6}{3x-5}\geq 0$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
-2x+6		+		+	0	-	
3x-5		-	0	+		+	
Q		-	‖	+	0	-	

$S_{IR}=\left]\dfrac{5}{3};3\right]$

5) $(I):(Lnx)^2-2Lnx<0$

* dans IR_+^*

$(I)\Leftrightarrow Lnx[Lnx-2]<0$

x	0		1		e^2		$+\infty$
Ln(x)	‖	-	0	+		+	
Ln(x)-2	‖	-		-	0	+	
P	‖	+	0	-	0	+	

$S_{IR}=\left]1;e^2\right[$

6) $Ln|\sin x| < 0$

$\Leftrightarrow 0 < |\sin x| < 1$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}$

$car\ 0 \leq |\sin x| \leq 1$

$\forall x \in IR$

$S_{IR} = IR \setminus \left\{ k\dfrac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

EX 3 :

1) $f(x) = \dfrac{Ln(x+2)}{(x+2)+1}$

On pose $X = x+2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{LnX}{X+1}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \left(\dfrac{X}{X+1} \right) . \dfrac{LnX}{X}$

$= 1 \times 0 = 0$

2) $f(x) = \dfrac{Ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}$

On pose $X = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = X^3$

$x \to +\infty \Rightarrow X \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{Ln(2X^3+3)}{X}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{Ln\left[X^3 \left(2 + \dfrac{3}{X^3} \right) \right]}{X}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{Ln(X^3)}{X} + \dfrac{Ln\left(2 + \dfrac{3}{X^3} \right)}{X}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{3LnX}{X} + \dfrac{Ln\left(2 + \dfrac{3}{X^3} \right)}{X}$

$= 0$

3) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{xLnx}$

Pour $x > 1$

$f(x) = \dfrac{\left(1 - \dfrac{2}{x^2} \right)}{\left(\dfrac{Lnx}{x} \right)}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(1 - \dfrac{2}{x^2} \right)}{\left(\dfrac{Lnx}{x} \right)} = +\infty$

(de la forme $\dfrac{1}{0^+}$)

4) pour $x > 0$

$f(x) = \dfrac{Ln\left[x^2 \left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{x^2} \right) \right]}{x}$

$= \dfrac{Ln(x^2)}{x} + \dfrac{Ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{x^2} \right)}{x}$

$f(x) = 2\dfrac{Lnx}{x} + \dfrac{Ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{x^2} \right)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$

5) $x > 0$ (même travaille)

$f(x) = \dfrac{5Lnx}{x} + \dfrac{Ln\left(1 - \dfrac{1}{x^2} \right)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

6) $f(x)=\dfrac{1+Lnx}{1-Lnx}$

Pour $x>e$

$$f(x)=\frac{Ln(x).\left[\dfrac{1}{Lnx}+1\right]}{Ln(x).\left[\dfrac{1}{Lnx}-1\right]}$$

$$f(x)=\frac{\dfrac{1}{Lnx}+1}{\dfrac{1}{Lnx}-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\dfrac{1}{Lnx}}^{0}+1}{\underbrace{\dfrac{1}{Lnx}}_{0}-1}=-1$$

Ou bien : on pose $X=Lnx$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to+\infty}\frac{1+X}{1-X}=-1$$

7) $f(x)=Ln\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=Ln(1)=0$

8) $f(x)=x.Ln\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$

Pour $x>0$

$$f(x)=x.Ln\left(1-\frac{1}{2+x}\right)$$

On pose $X=\dfrac{-1}{2+x}\Rightarrow x=-\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)$

$$x\to+\infty\Rightarrow X\to0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to0}-\left(\frac{2X+1}{X}\right)Ln(1+X)$$

$$=\lim_{X\to0}-(2X+1).\frac{Ln(1+X)}{X}$$

$$=(-1)\times1=-1$$

9) $f(x)=x^2-(Lnx)^5$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left[1-\underbrace{\frac{(Ln)^5}{x^2}}_{0}\right]$$

$$=+\infty$$

EX 4 :

1) $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{Lnx+Ln2}{x-\dfrac{1}{2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{Lnx-Ln\dfrac{1}{2}}{x-\dfrac{1}{2}}\right)$$

$$=(Ln)'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=2 \qquad car(Ln)'(x)=\frac{1}{x}$$

2) $$\lim_{x\to7}\frac{Ln\left(\dfrac{1}{x}\right)+\ln7}{x-7}$$

$$=\lim_{x\to7}\frac{-(Lnx-\ln7)}{x-7}$$

$$=-(Ln)'(7)=-\frac{1}{7}$$

3) soit $f(x)=Ln(1+2\sin x)$

$$f'(x)=\frac{2\cos x}{1+2\sin x}$$

$f(0)=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=2$$

4) $\dfrac{Ln(1+3tgx)}{x^3}=\dfrac{1}{x^2}.\dfrac{Ln(1+3tgx)}{x}$

Soit $f(x)=Ln(1+3tgx)$

$f'(x)=\dfrac{3(1+tg^2x)}{1+3tgx}$

$f'(0)=3\,,\,f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)=3$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{Ln(1+3tgx)}{x}=3$

$\lim\limits_{x\to0}\underbrace{\dfrac{1}{x^2}}_{+\infty}.\underbrace{\dfrac{Ln(1+3tgx)}{x}}_{3}=+\infty$

5) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+4)}{Lnx}$

$f(x)=\dfrac{x+4}{\left(\dfrac{Lnx}{x-1}\right)}$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+4}{\underbrace{\left(\dfrac{Lnx}{x-1}\right)}_{1}}=5$

6) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}.Lnx\overset{X=\sqrt{x}}{=}\lim\limits_{X\to0^+}X.Ln\left(X^2\right)$

$=\lim\limits_{X\to0^+}2XLnX=0$

7) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}.(Lnx)^{10}\qquad X=\sqrt{x}$

$=\lim\limits_{X\to0^+}X\left[Ln\left(X^2\right)\right]^{10}$

$=\lim\limits_{X\to0^+}2^{10}.\left(XLn^{10}X\right)=0$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{Ln(1+3x)}{\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\overbrace{\dfrac{Ln(1+3x)}{x}}^{3}}{\underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{1}}=3$

EX 5 :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$

$I=IR_+^*$

$F(x)=-\dfrac{1}{3x^3}-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}+Ln|x|$

$F(x)=Lnx-\dfrac{2+3x+6x^2}{6x^3}$

2) $f(x)=\dfrac{3x-4}{x+5}\ ;\ I=]-5,+\infty[$

$f(x)=\dfrac{3(x+5)-19}{x+5}$

$f(x)=3-\dfrac{19}{x+5}$

$F(x)=3x-19.Ln|x+5|$

$F(x)=3x-19Ln(x+5)$

3) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos x+\sin x}$

$f(x)=\dfrac{-(\cos x+\sin x)'}{\cos x+\sin x}$

$F(x)=-Ln|\cos x+\sin x|$

$F(x)=-Ln(\cos x+\sin x)$

car $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$

$F(x)=Ln|x^2+x|$

$F(x)=Ln\left(x^2+x\right)\ ;x\in]0,+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{Lnx}$

$F(x)=Ln|Lnx|$

$F(x)=Ln(Lnx)\ \ pour\ x\in]1,+\infty[$

6) $f(x)=\dfrac{1}{x}(Lnx)^3$

$F(x)=\dfrac{1}{4}(Lnx)^4$

EX 6 :

1) $I = \int_e^1 Ln^2 x.dx$

$$\begin{cases} U'(x) = 1 \xrightarrow{P} U(x) = x \\ V(x) = Ln^2 x \xrightarrow{d} V'(x) = \frac{2}{x} Lnx \end{cases}$$

$I = \left[xLn^2x\right]_e^1 - 2\int_e^1 Lnx.dx$

$I = -e - 2\left[xLnx - x\right]_e^1$

$\underline{I = 2 - e}$

2) $I = \int_1^e xLnx.dx$

$$soit \begin{cases} U'(x) = x \xrightarrow{P} U(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ V(x) = Lnx \xrightarrow{d} V'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$I = \left[\frac{1}{2}x^2 Lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x.dx$

$I = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$

$\underline{I = \frac{1+e^2}{4}}$

3) $I = \int_e^{e^2} x^2.\ln(x)dx$

$$soit \begin{cases} u'(x) = x^2 \to u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v(x) = Ln(x) \to v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$I = \left[\frac{x^3}{3}Ln(x)\right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{1}{3}x^2 dx$

$= \frac{2.e^6}{3} - \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_e^{e^2}$

$= \frac{5.e^6 - 2e^3}{9}$

4)

$I = \int_e^1 \frac{x-1}{x+1}dx = \int_e^1 (1 - \frac{2}{x+1})dx$

$= \left[x - 2Ln|x+1|\right]_e^1$

$= 1 - e + 2Ln(\frac{e+1}{2})$

5) $I = \int_1^e 5x(Lnx)^2.dx$

Soit :

$$soit \begin{cases} U'(x) = 5x \longrightarrow U(x) = \frac{5x^2}{2} \\ V(x) = (Lnx)^2 \longrightarrow V'(x) = \frac{2}{x}Lnx \end{cases}$$

$I = \left[\frac{5x^2}{2}(Lnx)^2\right]_1^e - \int_1^e 5.x.Lnx.dx$

$I = \frac{5e^2}{2} - 5\int_1^e x.Lnx.dx$

$I = \frac{5e^2}{2} - 5\left(\frac{1+e^2}{4}\right)$ $\quad d'aprés\ 2)$

$I = \frac{5}{4}(e^2 - 1)$

6) $I = \int_3^2 \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{Lnx}}dx$

$I = \left[2\sqrt{Lnx}\right]_3^2 = 2\left(\sqrt{Ln2} - \sqrt{Ln3}\right)$

7) $I = \int_2^3 Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$

Soit :

$$\begin{cases} U'(x) = 1 \longrightarrow U(x) = x - 1 \\ V(x) = Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \longrightarrow V'(x) = \frac{-2}{(x+1)(x-1)} \end{cases}$$

$I = \left[(x-1)Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{2}{x+1}dx$

$I = 2Ln2 - Ln3 + \left[2Ln|x+1|\right]_2^3$

$I = 2Ln2 - Ln3 + 2Ln4 - 2Ln3$

$\boxed{I = 6Ln2 - 3Ln3}$

8) $I=\int_4^2 \frac{dx}{xLn(x)}=\int_4^2 \frac{1/x}{Ln(x)}dx$

$I=\left[Ln|Lnx|\right]_4^2$

$=Ln[Ln(2)]-Ln[Ln(4)]$

$\boxed{I=-Ln(2)}$

9) $I=\int_1^2 \frac{1}{x}Lnx.dx$

$I=\left[\frac{1}{2}(Lnx)^2\right]_1^2$

$\boxed{I=\frac{1}{2}(Ln2)^2}$

10) $I=\int_0^1 \frac{x^2+3x-1}{2x+1}.dx$

Soit :

$f(x)=\frac{x^2+3x-1}{2x+1}$

$f(x)=\frac{x^2+3x+\frac{5}{4}-\frac{9}{4}}{2x+1}$

$f(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{9}{4}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

$f(x)=\frac{x+\frac{5}{2}}{2}-\frac{\frac{9}{4}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{9}{4(2x+1)}$

$I=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{5}{4}x-\frac{9}{8}Ln|2x+1|\right]_0^1$

$\boxed{I=\frac{3}{2}-\frac{9}{8}Ln3}$

EX 7 :

$x\in\,]1,+\infty[$

$f(x)=\frac{1}{x^2(x-1)}$

1) $\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}=\frac{(a+c)x^2+(b-a)x-b}{x^2(x-1)}$

Identifions $\begin{cases}a+c=0\\ b-a=0\\ -b=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-1\\ c=1\end{cases}$

D'où

$f(x)=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}$

2)

$\int_2^3 f(x)dx=\left[-Lnx+\frac{1}{x}+Ln(x-1)\right]_2^3=Ln\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{6}$

3) $I=\int_2^3 \frac{Ln(x-1)}{x^3}dx$

On pose :

$\begin{cases}U'(x)=\frac{1}{x^3}\rightarrow U(x)=\frac{-1}{2x^2}\\ V(x)=Ln(x-1)\rightarrow V'(x)=\frac{1}{x-1}\end{cases}$

$I=\left[\frac{-1}{2x^2}Ln(x-1)\right]_2^3+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{dx}{x^2(x-1)}$

$I=\frac{-1}{18}Ln2+\frac{1}{2}\left(Ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\right)$

$\boxed{I=\frac{17}{18}Ln2-\frac{1}{2}Ln3-\frac{1}{12}}$

EX 8 :

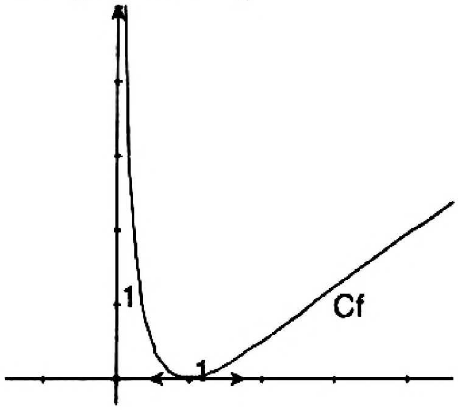
1) $f(x)=(Lnx)^2$

$* \ D_f=]0,+\infty[$

$* \ f'(x)=\dfrac{2}{x}Lnx$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	||	-	0	+	
f(x)	||	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

$$* \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(Lnx)^2}{x}=0$$



2) $f(x)=\dfrac{1}{Lnx}$

$D_f=]0,+\infty[\setminus\{1\}$

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}}{Ln(x)^2}=\frac{-1}{x(Lnx)^2}<0$$

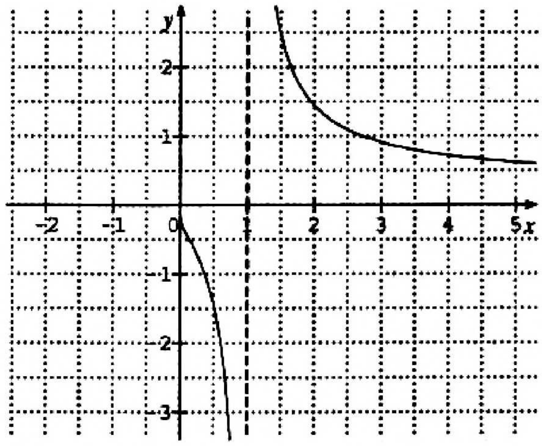
x	0		1		$+\infty$
f'(x)	||	-	||	-	
f(x)	||	0 ↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	0

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{Lnx}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{Lnx}=0$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{Lnx}=+\infty \qquad \lim_{x\to1^-}\frac{1}{Lnx}=-\infty$$

Les droites d'équations $x=0,\ x=1$ *et* $y=0$

Sont des asymptotes à (Cf)



3) $f(x)=Ln(Lnx)$

$D_f=]1,+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{1}{xLnx}>0$

x	1	$+\infty$
f'(x)	||	+
f(x)	|| $-\infty$	↗ $+\infty$

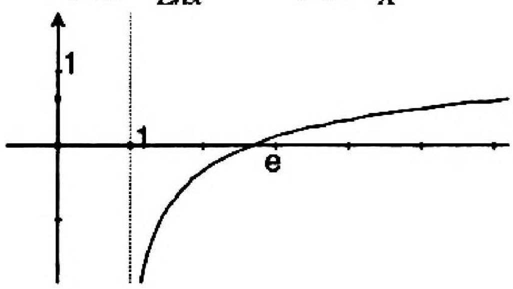
$$\lim_{x\to1^+}Ln(\underbrace{Lnx}_{0^+})=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}Ln(\underbrace{Lnx}_{+\infty})=+\infty$$

$$* \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(Lnx)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{Lnx}{x}\right)}_{0}\underbrace{\left(\frac{Ln(Lnx)}{Lnx}\right)}_{0}=0$$

$$car \ \lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(Lnx)}{Lnx}\overset{X=Lnx}{=}\lim_{X\to+\infty}\frac{LnX}{X}=0$$



4) $f(x) = Ln|x| + Ln(x^2-3)$

$D_f =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$

$D_E =]\sqrt{3}, +\infty[$ *car f est paire*

pour $x \in]\sqrt{3}, +\infty[$

$f(x) = Lnx + Ln(x^2-3)$

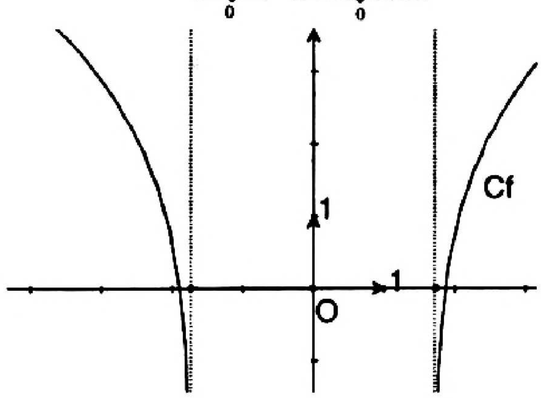
$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-3} > 0$

x	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{Lnx}{x} + \frac{Ln(x^2-3)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{Lnx}{x} + \frac{Ln\left[x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{3Lnx}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{Ln\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{x}}_{0} = 0$$



EX 9 :

$f(x) = 2 - x + \frac{Lnx}{x}$; $x \in]0, +\infty[$

1) $* \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2 - x + \underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{0}\right) = -\infty$

$* \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(2 - x + \underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{-\infty}\right) = -\infty$

2) $g(x) = 1 - x^2 - Lnx$

a) $g'(x) = -\left(2x + \frac{1}{x}\right) < 0$; $\forall x \in IR_+^*$

g est strictement décroissent sur $]0, +\infty[$

b) g(1)=0

x	0		1	$+\infty$
g(x)		+	0	-

3) $f'(x) = -1 + \frac{1 - Lnx}{x^2}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

4)

a) $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (-x+2)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{Lnx}{x} = 0$

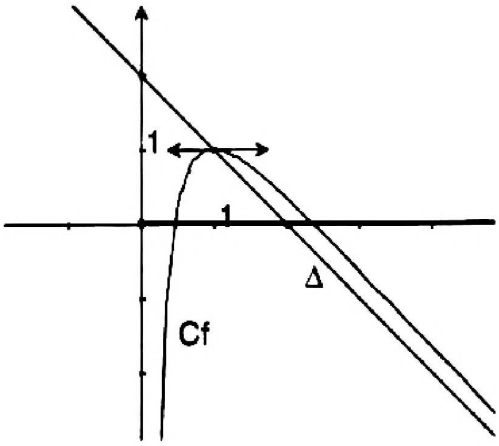
$\Delta : y = -x + 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

b) $f(x) - (-x+2) = \frac{Lnx}{x}$

x	0		1	$+\infty$
$f(x)-(-x+2)$		-	0	+
P.R		$\frac{\Delta}{(C)}$	(1,1)	$\frac{(C)}{\Delta}$

c) le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	0		1	$+\infty$
f'(x)		+	0	-
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$



EX 10 :

$f(x) = (Lnx)^2 - 3Lnx + 2$

1) $D_f =]0, +\infty[$

$f'(x) = \frac{2}{x} Lnx - \frac{3}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x}[2Lnx - 3]$

x	0		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖	$+\infty$ ↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\underbrace{Lnx}_{-\infty} \left[\underbrace{Lnx - 3}_{-\infty} \right] + 2 \right) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\underbrace{Lnx}_{+\infty} \left[\underbrace{Lnx - 3}_{+\infty} \right] + 2 \right) = +\infty$

2)

$* f(x) = 0 \Leftrightarrow (Lnx)^2 - 3Lnx + 2 = 0$

On pose $X = Lnx$

L'équation devient : $X^2 - 3X + 2 = 0$

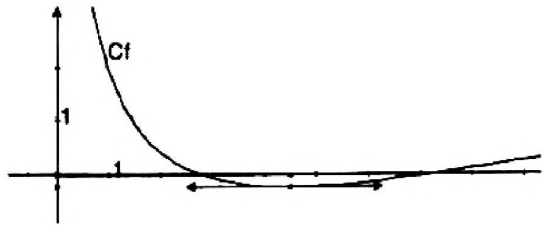
$X' = 1 \quad et \quad X'' = 2$

$x' = e \quad et \quad x'' = e^2$

$(Cf) \cap (o, \vec{i}) = \{A(e, 0); B(e^2, 0)\}$

$* \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \underbrace{\frac{(Lnx)^2}{x}}_{0} - \underbrace{\frac{3Lnx}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{2}{x}}_{0} = 0$

B.P de direction celle de $(o, \vec{i})$



3) F est dérivable sur $]0, +\infty[$

Et

$F'(x) = (Lnx)^2 + 2Lnx - 5(Lnx + 1) + 7$

$F'(x) = f(x)$

D'où F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

4) $A = -\int_e^{e^2} f(x)dx$

$A = \int_{e^2}^{e} f(x)dx$

$A = [F(x)]_{e^2}^{e}$

$\boxed{A = e(3 - e)}$ U.a

EX 11 :

1) $Ln|x| < 1 \Leftrightarrow$

$0 < |x| < e \Leftrightarrow$

$0 < x < e \quad ou \quad -e < x < 0$

$S_{IR} =]-e, 0[\cup]0, e[$

2)

$F(x) = \begin{cases} 2x - xLn|x| & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

a) $D_f = IR$

*<u>Continuité :</u> f est continue sur IR^*

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x - \underbrace{xLnx}_{0}) = 0 = f(0)$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x - xLn(-x))$

$\underline{X=-x}\quad \lim_{x\to 0^+}(-2X + \underbrace{XLnX}_{0}) = 0 = f(0)$

f est continue sur tout IR

*$\underline{\text{Dérivabilité :}}$ f est dérivable sur IR^*

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}(2-Lnx) = +\infty$

f n'est pas dérivable en 0.

b) $*\forall x \in D_f = IR \;\; on\; a\; (-x) \in D_f$

$*pour\; x \neq 0$

$f(-x) = 2(-x) - (-x)Ln|-x|$

$f(-x) = -f(x)$

$f(0) = 0$

D'où f est impaire

$D_E = [0,+\infty[$

$pour\; x > 0$

$f'(x) = 2 - (Ln|x| + 1)$

$f'(x) = 1 - Ln|x|$

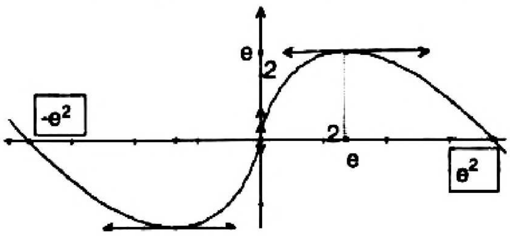
x	0		e		$+\infty$
f'(x)	||	+	0	-	
f(x)	0	↗	e	↘	$-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(2-Lnx) = -\infty$

(C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 - Lnx = -\infty$

(C) admet au voisinage de $+\infty$ une B.I parabolique de direction celle de $(o,\vec{j})$



EX 12 :

$0 < a < b$

$f(x) = \frac{Ln(ax+1)}{Ln(bx+1)}$

1) $f(x)$ existe si seulement si

$ax+1>0\; et\; bx+1>0\; et\; bx+1 \neq 1$

$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{a}\; et\; x > -\frac{1}{b}\; et\; bx \neq 0$

$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{b}\; et\; x \neq 0$

$D_f = \left]-\frac{1}{b},+\infty\right[\setminus\{0\}$

2) f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{b},+\infty\right[\setminus\{0\}$

Comme quotient de deux fonctions dérivables.

$$f'(x) = \frac{\frac{a.Ln(bx+1)}{ax+1} - \frac{b}{bx+1}Ln(ax+1)}{[Ln(bx+1)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{a(bx+1)Ln(bx+1) - b(ax+1)Ln(ax+1)}{(ax+1)(bx+1)[Ln(bx+1)]^2}$$

3)

$g(x) = a(bx+1)Ln(bx+1) - b(ax+1)Ln(ax+1)$

$g'(x) = ab.Ln(bx+1) + ab - baLn(ax+1) - ba$

$g'(x) = ab.[Ln(bx+1) - Ln(ax+1)]$

$pour\; x \in]0,+\infty[$

$a<b \Rightarrow ax < bx$

$\Rightarrow ax+1 < bx+1$

$\Rightarrow Ln(ax+1) < Ln(bx+1)$

$\Rightarrow g'(x) > 0$

$pour\; x \in \left]-\frac{1}{b},0\right[$

$a<b \Rightarrow ax > bx$

$\Rightarrow ax+1 > bx+1 \Rightarrow g'(x) < 0$

x	$-\frac{1}{b}$		0		$+\infty$
g'(x)	||	-	0	+	
g(x)	|| $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

g admet 0 comme minimum absolu

$\Rightarrow g(x)\geq 0;\ \forall x\in \left]-\frac{1}{b},+\infty\right[$

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(ax+1)(bx+1)[Ln(bx+1)]^2}$

Le signe de f'(x) est celui de g(x)

$\forall x\in\left]-\frac{1}{b},0\right[,\ g(x)>0$

f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{b},0\right[$

de même f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)<f\left(\frac{1}{b}\right)$

Car f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$$\Rightarrow \frac{Ln2}{Ln\left(\frac{b}{a}+1\right)}>\frac{Ln\left(\frac{a}{b}+1\right)}{Ln2}$$

$$\Rightarrow (Ln2)^2>Ln\left(\frac{a}{b}+1\right).Ln\left(\frac{b}{a}+1\right)$$

EX 13 :

1) $U(x)=Lnx-\dfrac{x-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}U(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(Lnx-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}U(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left[\underbrace{xLnx}_{0}-x+1\right]=+\infty$

$U'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

x	0		1	+∞
U'(x)	‖	-	0	+
U(x)	‖	+∞ ↘	0	↗ +∞

$*\ V(x)=x-1-Lnx$

$\lim\limits_{x\to 0^+}V(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}V(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{0}\right]$

$V'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

x	0		1	+∞
V'(x)	‖	-	0	+
V(x)	‖	+∞ ↘	0	↗ +∞

2) * U admet 0 comme minimum absolu ⇨

$U(x)\geq 0;\ \forall x\in IR_+^*$

$\Rightarrow Lnx-\frac{x-1}{x}>,\forall x\in IR_+^*$

$\boxed{\Rightarrow \frac{x-1}{x}\leq Lnx}(1)$

* V admet 0 comme minimum absolu ⇨

$V(x)\geq 0,\ \forall x\in IR_+^*$

$\Rightarrow x-1-Lnx\geq 0;\ \forall x\in IR_+^*$

$\boxed{\Rightarrow Lnx\leq x-1}(2)$

(1)+(2)⇨ $\frac{x-1}{x}\leq Lnx\leq x-1;\ \forall x\in IR_+^*$

3) * pour $x=1+\frac{1}{n}$

$Lnx\leq x-1\Rightarrow Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}$

$\Rightarrow n.Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq 1$

$\Rightarrow Ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\leq Lne$

$\boxed{\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e}(I)$

* pour $x = 1 - \frac{1}{n} > 0$

$Lnx \leq x - 1 \Rightarrow$

$Ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n} \Rightarrow$

$-nLn\left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq 1 \Rightarrow$

$Ln\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right] \geq 1 \Rightarrow$

$Ln\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}}\right] \geq Lne \Rightarrow$

$\boxed{e \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}}}(II)$

$(I) + (II) \Rightarrow$

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \leq e \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}}}$$

EX 14 :

1) $t \geq 0$

$* \frac{1}{1+t} - (1-t) = \frac{t^2}{1+t} \geq 0$

$d'ou\ \boxed{1 - t \leq \frac{1}{1+t}}(1)$

$* \left(1 - t + t^2\right) - \frac{1}{t+1} = \frac{t^3}{1+t} \geq 0$

$d'ou\ \boxed{\frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2}(2)$

$(1) + (2) \Rightarrow 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2 \quad pour\ t \geq 0$

2) $x \geq 0$

On a :

$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2\ ;\ \forall t \in [0, x]$

D'où

$$\int_0^x (1-t)\,dt \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^x \left(1 - t + t^2\right) dt$$

$$\Rightarrow \left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^x \leq \left[Ln|1+t|\right]_0^x \leq \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2}x^2 \leq Ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

3)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{Ln(1+x)}{x} & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions dérivable $(x \neq 0)$

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{Ln(1+x)}{x} = 1 = f(0)$

d'où f est continue à droite en 0.

c) pour $x > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{Ln(1+x) - x}{x^2}$$

D'après 2)

$$-\frac{x^2}{2} \leq Ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{Ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

$$\lim_{x \to 0^+}\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

D'où

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$$

f est dérivable à droite en 0 et

$$f'_d(0) = -\frac{1}{2}$$

EX 15 :

1) $f(x) = Lnx$

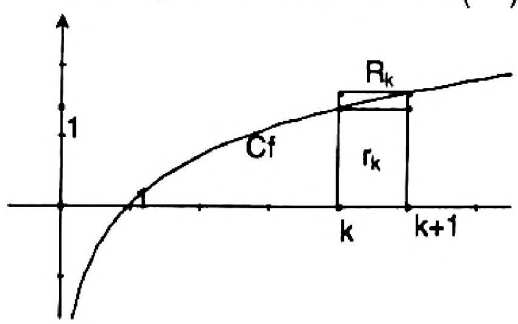
$D_f = IR_+^*$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0\ ;\ \forall x \in IR_+^*$

x	0	$+\infty$
f'(x)	‖	+
f(x)	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{Lnx}{x} = 0$

B.I .Parabolique de direction celle de $(o, \vec{i})$



2) $S_n = Ln1 + Ln2 + ... + Ln(n)$

$T_n = Ln1 + Ln2 + ... + Ln(n-1)$

En utilisant la méthode des rectangles

$aire(r_k) \leq \int_k^{k+1} Lnxdx \leq aire(R_k)$

(Voir figure)

$\Rightarrow Lnk \leq \int_k^{k+1} Lnxdx \leq Ln(k+1)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} Lnk \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} Lnxdx \leq \sum_{k=1}^{n-1} Ln(k+1)$

$\Rightarrow T_n \leq \int_1^n Lnxdx \leq S_n$

3)

$* \ S_n = Ln(1 \times 2 \times 3 \times .... \times n)$

$S_n = Ln(n!)$

$T_n = Ln\left[(n-1)!\right]$

$\int_1^n Lnxdx = \left[xLnx - x\right]_1^n$

$= nLn - n + 1$

D'après 2)

$\boxed{Ln\left[(n-1)!\right] \leq nLn - n + 1 \leq Ln(n!)}(I)$

$* \ nLnn - n + 1 = Ln(n^n) - Ln(e^n) + Lne$

$= Ln\left(\frac{n^n}{e^n}\right) + Lne$

$= Ln\left[e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$

D'après (I) :

$Ln\left[e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right] \leq Ln(n!)$

$\Rightarrow \boxed{e.\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!}(1)$

$* \ Ln\left[(n-1)!\right] \leq Ln\left[e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$

$\Rightarrow Ln\left[(n-1)!\right] + Lnn \leq Lnn + Ln\left[e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$

$\Rightarrow Ln(n!) \leq Ln\left[ne\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$

$\Rightarrow \boxed{n! \leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n}(2)$

$(1) + (2) \Rightarrow$

$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$

EX 16 :

$f(x) = (x+1).Ln|x-3|$

1) $D_f = IR \setminus \{3\}$

2)

a) $f'(x) = Ln|x-3| + (x+1).\frac{1}{x-3}$

$f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + Ln|x-3|$

b) $f''(x) = \frac{-4}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3}$

$f''(x) = \frac{x-7}{(x-3)^2}$

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$f''(x)$		-	||	-	0	+	
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$2+Ln4$	↗	$+\infty$

c) f' est continue et strictement decroissante sur $]-\infty,3[$, elle réalise donc une bijection de $]-\infty,3[$ sur IR comme $0\in IR$ alors il existe un unique réel $\alpha\in]-\infty,3[$ tel que $f'(\alpha)=0$

$f'(0).f'(1)<0 \quad \Rightarrow 0<\alpha<1$

$f'(0,7).f'(0,8)<0 \Rightarrow 0,7<\alpha<0,8$

x	$-\infty$		α		3
$f'(x)$		+	0	-	||

d) f' admet $(2+Ln4)$ comme minimum absolu sur $]3,+\infty[$

$\Rightarrow f'(x)\geq 2+Ln4$

$\Rightarrow f'(x)>0;\ \forall x\in]+3,+\infty[$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)Ln|x-3|=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+3} f(x)=\lim\limits_{x\to+3}(x+1)Ln|x-3|=-\infty$

$x=+3$ est une asymptote à (Cf)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)Ln|x-3|=+\infty$

4) $f(x)=0 \Leftrightarrow x+1=0\ ou\ |x-3|=1$

$\Leftrightarrow x=-1\ ou\ x-3=1\ ou\ x-3=-1$

$\Leftrightarrow x=-1\ ou\ x=4\ ou\ x=2$

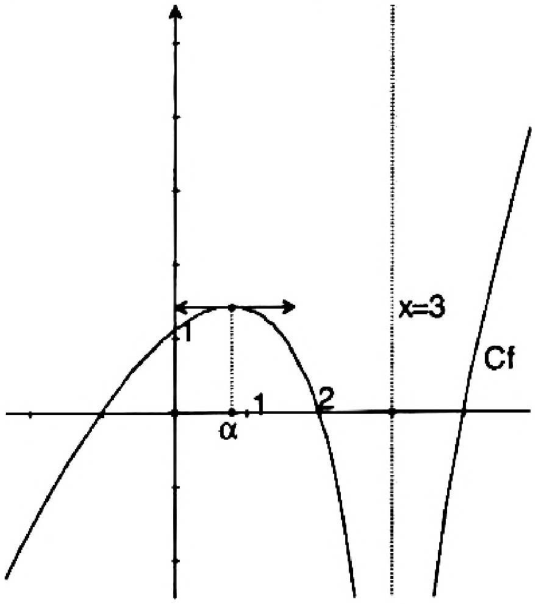
$(Cf)\cap(o,\vec{i})=\{A(-1,0);B(2,0);C(4,0)\}$

5)

x	$-\infty$		α		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$\lim\frac{f(x)}{x}=+\infty$

B.P de direction celle de $(o,\vec{j})$



EX 17 :

$f(x)=-\frac{x}{2}+Ln\frac{|x-1|}{x}$

1) $D_f=IR^*\setminus\{1\}$

2) $f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\frac{x-1}{x}}$

$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)}$

$f'(x)=\frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$

$-x^2+x+2=0$

$x'=-1\ et\ x''=2$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	||	-	||	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+Ln(2)$	↗ $+\infty$	||	$+\infty$ ↘ $-\infty$	||	$-\infty$ ↗	$-1-Ln(2)$	↘	$-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} Ln\left|\underbrace{\frac{x-1}{x}}_{1}\right|=0$

D'où $\Delta: y=-\frac{x}{2}$ est une asymptote à (C)

$* \ f(x)+\frac{x}{2}=Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=Ln\left|1-\frac{1}{x}\right|$

• $pour\ x<0 \to \left|1-\frac{1}{x}\right|>1 \Rightarrow Ln(\left|1-\frac{1}{x}\right|)>0$

$\Rightarrow f(x)+\frac{x}{2}>0$

• $pour\ 0<x<\frac{1}{2} \to \left|1-\frac{1}{x}\right|>1 \Rightarrow Ln(\left|1-\frac{1}{x}\right|)>0$

$\Rightarrow f(x)+\frac{x}{2}>0$

• $pour\ x\in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\setminus\{1\} \to \left|1-\frac{1}{x}\right|<1$

$\Rightarrow Ln\left|1-\frac{1}{x}\right|<0 \Rightarrow f(x)+\frac{x}{2}<0$

x	$-\infty$	0		1/2	1		$+\infty$
$f(x)+\frac{x}{2}$	+	‖	+	-	‖	-	
P.R	$\frac{(C)}{\Delta}$	‖	$\frac{(C)}{\Delta}$	$\frac{\Delta}{(C)}$	‖	$\frac{\Delta}{(C)}$	

Point
D'intersection

4) pour $x\in D_f=IR^*\setminus\{1\}$

On a : $x\neq 0\ et\ x\neq 1$

$\Rightarrow -x\neq 0\ et\ -x\neq -1$

$\Rightarrow 1-x\neq 1\ et\ 1-x\neq 0$

$\Rightarrow (1-x)\in D_f$

$* \ f(1-x)+f(x)=\frac{x-1}{2}+Ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|-\frac{x}{2}+Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

$=-\frac{1}{2}+Ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

$=-\frac{1}{2}+Ln\left|\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)\right|$

$=-\frac{1}{2}+Ln1$

$=-\frac{1}{2}=2\left(-\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow f(1-x)=2\left(-\frac{1}{4}\right)-f(x)$

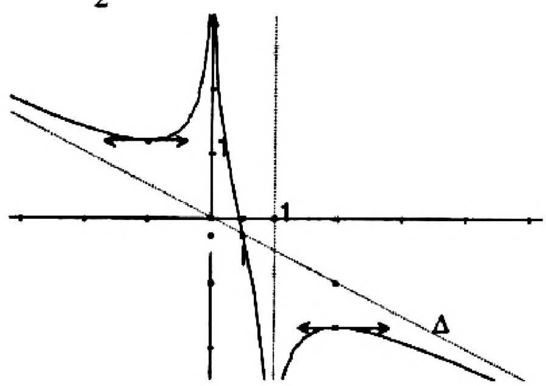
D'où

$I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie pour (C)

5)

$*\ x=0\ et\ x=1$ sont des asymptotes à (C)

$*\Delta: y=-\frac{x}{2}$ asymptote à (C)



6) * Sur $]-\infty,0[$ f admet $\left(\frac{1}{2}+Ln2\right)$ comme minimum absolue

$\Rightarrow f(x)\geq\frac{1}{2}+Ln2;\ \forall x\in\ ]-\infty,0[$

D'où l'équation : $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $]-\infty,0[$

* de même l'équation : $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $]1,+\infty[$

* f est continue est strictement décroissante sur $]0,1[$

$\Rightarrow f$ réalise une bijection de $]0,1[$ sur IR

Comme $0\in IR$ alors il existe un unique réel

$x_0 \in]0,1[\ tq : f(x_0)=0$

$f\left(\frac{2}{5}\right).f\left(\frac{9}{2}\right)=........<0$

$\Rightarrow \frac{2}{5}<x_0<\frac{9}{2}$

<u>Conclusion :</u>

L'équation $f(x)=0$ admet x_0 comme unique solution dans $IR^*\setminus\{1\}$.

EX 18 :

A)

1) $g(x)=(1-x).Lnx \qquad x\in IR_+^*$

$g(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \ ou \ Lnx=0$

$\Leftrightarrow x=1$

x	0		1	+∞
g(x)	‖	-	0	-

2) $h(x)=Lnx-x$

a) $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

x	0		1		+∞
h'(x)	‖	+	0	-	
h(x)	‖ −∞	↗	-1	↘	−∞

$\lim\limits_{x\to0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(Ln(x)-x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{0}-1\right]=-\infty$

b) h admet (-1) comme maximum absolu

$\Rightarrow h(x)\le -1;\ \forall x\in IR_+^*$

D'où $h(x)<0;\ \forall x\in IR_+^*$

B)

$f(x)=Lnx.(Lnx-x)$

1) f est dérivable sur IR_+^* comme étant produit de deux fonctions dérivables

$f'(x)=\frac{1}{x}(Ln-x)+Lnx\left(\frac{1}{x}-1\right)$

$f'(x)=\frac{(Lnx-x)+(1-x)Lnx}{x}$

$f'(x)=\frac{g(x)+h(x)}{x}$

2) $f'(x)<0$ car $g(x)\le 0 \ et \ h(x)<0$

x	0		+∞
f'(x)	‖	-	
f(x)	‖ +∞	↘	−∞

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\underbrace{Lnx}_{-\infty}\Big(\underbrace{Lnx-x}_{-\infty}\Big)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{x.Lnx}_{+\infty}\left[\underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{0}-1\right]=-\infty$

3) * $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

La droite d'équation : $x=0$ est une asymptote à (Cf)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{Lnx}_{+\infty}\left[\underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{0}-1\right]=-\infty$

(Cf) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(o,\vec{j})$ au voisinage de $(+\infty)$.

4)

a) on a :

$f(1)=0$

f est continue et strictement décroissante sur IR_+^*, d'où

$(Cf)\cap(o,\vec{i})=\{B(1,0)\}$

b) $T: y=f'(1).(x-1)+f(1)$

$T: y=-x+1$

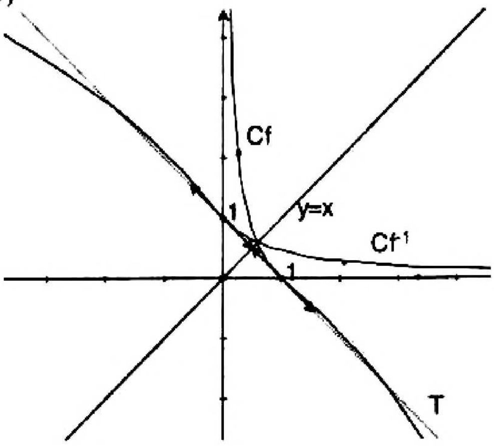
c) $*f(e)=-e+1$

$\Rightarrow A(e,-e+1)\in(Cf)$

$*A\in T$

D'où $A\in T\cap(Cf)$

5)



6) $\alpha\in\,]0,1[$

a) $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{1}f(x)dx$

$A(\alpha)=\int_{\alpha}^{1}Lnx(Lnx-x).dx$

Soit :

$$\begin{cases} U'(x)=Lnx-x\rightarrow U(x)=xLnx-x-\dfrac{x^2}{2} \\ V(x)=Lnx\rightarrow v'(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

$$A(\alpha)=\left[xLn^2x-\left(x+\frac{x^2}{2}\right).Lnx\right]_{\alpha}^{1}$$

$$-\int_{\alpha}^{1}\left(Lnx-1-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$A(\alpha)=\left(\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right)Ln\alpha-\alpha.(Ln\alpha)^2$$

$$-\left[xLnx-x-x-\frac{x^2}{4}\right]_{\alpha}^{1}$$

$$A(\alpha)=\left(2\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right).Ln\alpha-\alpha(Ln\alpha)^2-\frac{\alpha^2}{4}-2\alpha+\frac{9}{4}$$

b)

$$\lim_{\alpha\to0^+}\left(2\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right)Ln\alpha=\lim_{\alpha\to0^+}2\alpha Ln\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2.Ln\alpha=$$

$$\lim_{\alpha\to0^+}\alpha(Ln\alpha)^2=0$$

D'où $\lim_{\alpha\to0^+}A(\alpha)=\dfrac{9}{4}$

7)a) f est continue et strictement décroissante sur IR_+^* elle réalise donc une bijection de IR_+^* sur $f(IR_+^*)=IR$.

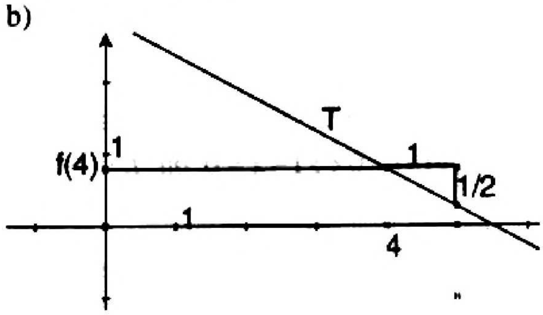
b) $(Cf^{-1})=S_\Delta(Cf)$ avec $\Delta:y=x$

EX 19 :

1)

a) $f(3)=1$ *et* $f'(3)=0$

b)



2)

a) $\lim_{x\to2^+}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

b)

x	2		3		+∞
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖ -∞	↗	1	↘	-∞

3) $f(x)=ax+b+Ln(x+c)$

$f'(x)=a+\dfrac{1}{x+c}$

$$\begin{cases} f'(3)=0 \\ f'(4)=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{1}{3+c}=0 \\ a+\dfrac{1}{4+c}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-2 \end{cases}$$

D'où

$f(x)=-x+b+Ln(x-2)$

$f(3)=1 \Rightarrow -3+b=1$

$\Rightarrow \boxed{b=4}$

D'où

$f(x)=-x+4+Ln(x-2)$

4) $X=x-2$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}(-X+2+LnX)$

$=\lim\limits_{X\to+\infty} X.\left[-1+\underbrace{\dfrac{2}{X}+\dfrac{LnX}{X}}_{0}\right]=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{Ln(x-2)}{x}\right)=-1$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=+\infty$

(Cf) admet une B.I de direction asymptotique celle de : $\Delta: y=-x$

5)

a) $\Delta: y=-x+4$

b) $f(x)-(-x+4)=Ln(x-2)$

$Ln(x-2)=0 \Leftrightarrow x=3$

x	2	3	$+\infty$
$f(x)-(-x+4)$	-	0	+
P.R	$\dfrac{\Delta}{(C)}$	(3,1)	$\dfrac{(C)}{\Delta}$

6) $g(x)=f(x)$ *pour* $x\in\,]2,3]$

a) g est continue et strictement croissante sur $]2,3] \Rightarrow g$ est bijective de $]2,3]$ sur $J=g(]2,3])=]-\infty,1]$

b) $(Cg-1)=S_\delta(Cg)$

avec $\delta: y=x$

c) $(Cg-1)$ admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 1

d'où g-1 n'est pas dérivable à gauche en 1.

EX 20 :

A/

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{Lnx}$

$D_f=]0,+\infty[\setminus\{1\}$

1)

* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{+\infty}+\underbrace{\dfrac{1}{Lnx}}_{0}=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{1}+\underbrace{\dfrac{1}{Lnx}}_{-\infty}=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{0}+\underbrace{\dfrac{1}{Lnx}}_{0}=0$

Les droites d'équation $x=0;\ x=1;\ et\ y=0$ sont des asymptotes à (Cf)

2)

a) les fonctions $x\mapsto x$ *et* $x\mapsto Lnx$ sont dérivables et ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ d'où f est dérivable.

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{-\frac{1}{x}}{(Lnx)^2}$

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x(Lnx)^2}$

b) $f'(x)<0;\ \forall x\in\,]0,+\infty[\setminus\{1\}$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		-		-	
f(x)		$+\infty \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0$	

3) $h(x) = f(x)$ $pour\ x \in]0,1[$

a) h est continue est strictement décroissante sur $]0,1[$ elle réalise donc une bijective de $]0,1[$ sur

$J = h(]0,1[) = IR$

b) h est une bijection de $]0,1[$ sur IR comme $0 \in IR$ alors il existe un unique réel α de $]0,1[$ tel que $h(\alpha)=0$

$h(0,5).h(0,6) = (+)(-) < 0$

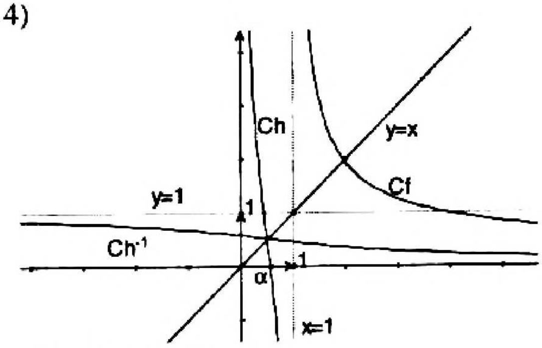
D'où $0,5 < \alpha < 0,6$

c) $f(]1,+\infty[) =]0,+\infty[$

$0 \notin]0,+\infty[$ d'où l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $]1,+\infty[$ d'où

$(Cf) \cap (o,\vec{i}) = \{A(\alpha,0)\}$

4)



5) $(C_h - 1) = S_\Delta(C_h)$

avec $\Delta : y = x$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
(h-1)'(x)	-
h(x)	1 ↘ 0

6)

a) $h'(\alpha) = f'(\alpha) = \dfrac{-1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha(Ln\alpha)^2}$

$h(\alpha) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{Ln\alpha} = 0$

$\Rightarrow \boxed{Ln\alpha = -\alpha}$

D'où

$h'(\alpha) = \dfrac{-1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha^3} = -\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha^3}\right)$

b) $h^{-1}(0) = \alpha$ $car\ h(\alpha) = 0$

h est dérivables en α et

$h'(\alpha) = -\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha^3}\right) \neq 0$

D'où h^{-1} est dérivable en 0 et

$(h^{-1})'(0) = \dfrac{1}{h'(\alpha)} = \dfrac{-\alpha^3}{1+\alpha}$

B/

$g(x) = 2.f(x^2)$ $\qquad x \in]1,+\infty[$

1)

$f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{Lnx} - 2f(x^2)$

$= \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{Lnx} - 2\left[\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{Ln(x^2)}\right]$

$= \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{Lnx} - 2\left[\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2Lnx}\right]$

$= \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

2) $f(x) - g(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$

x	1		2	$+\infty$
$f(x)-g(x)$		-	0	+
P.R		$\dfrac{(Cg)}{(Cf)}$	$(2, f(2))$	$\dfrac{(Cf)}{(Cg)}$

3) $x \in [2,+\infty[$

$MN = f(x) - g(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$

Soit $\zeta(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$ $\qquad x \in [2,+\infty[$

$\zeta'(x) = \dfrac{4-x}{x^3}$

x	2		4		$+\infty$
$\zeta'(x)$		+	0	-	
$\zeta(x)$	0	↗	$\frac{1}{8}$	↘	0

$MN = \zeta(x)$ est maximale pour $x = 4$

EX 21 :

A/

$g(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}-Lnx$

1) $g'(x)=\dfrac{-1}{(2x+1)^2}-\dfrac{1}{x}<0$

$\forall x\in\,]0,+\infty[$

g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

2) g est continue est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur

$g(]0,+\infty[)=]\lim\limits_{+\infty} g,\lim\limits_{0^+} g[\,=\,]-\infty,+\infty[\,=IR$

Comme $0\in IR$ alors il existe un unique réel α de $]0,+\infty[$ tel que

$g(\alpha)=0$

$g(1).g(2)<0\Rightarrow 1<\alpha<2$

.

.

.

calculatrice

$1,8<\alpha<1,9$

3)

x	0		α		$+\infty$
g(x)	||	+	0	-	

$x>\alpha\Rightarrow g(x)<g(\alpha)$

Car g est strictement décroissante

$\Rightarrow g(x)<0$

B/

$f(x)=\dfrac{2Lnx}{x^2+x}$

1) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2Lnx}{x^2+x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x+1}\right)\left(\dfrac{Lnx}{x}\right)=0$

2) $f'(x)=\dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}.g(x)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

3)

x	0		α		$+\infty$
f'(x)	||	+	0	-	
f(x)	|| $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

$f(\alpha)=\dfrac{2Ln\alpha}{\alpha^2+\alpha}$

Or

$g(\alpha)=0\Rightarrow \boxed{Ln\alpha=\dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}}$

D'où

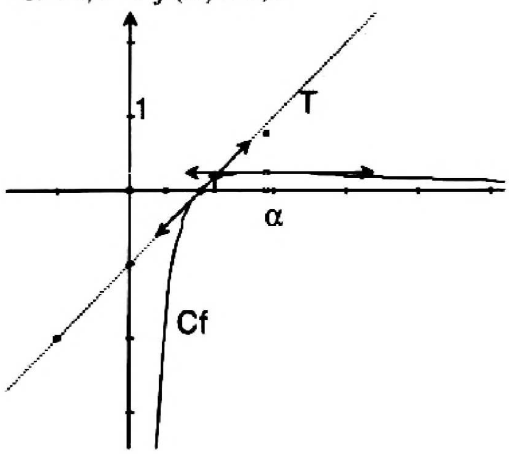
$f(\alpha)=\dfrac{2\left(\dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}\right)}{\alpha^2+\alpha}=\dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

4) $*x=0$ *et* $y=0$ sont des asymptotes à (C)

$*T: y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$T: y=x-1$

$*\alpha\simeq 1,8\to f(\alpha)\simeq 0,3$



C/1) a) $u(x)=\dfrac{Lnx}{x}$

$U(x)=\dfrac{1}{2}(Ln)^2$ est une primitive de u sur $]0,+\infty[$

b) pour $x\geq1$ $\dfrac{2}{1+x}\leq1\Rightarrow\dfrac{2}{1+x}.\dfrac{Lnx}{x}\leq\dfrac{Lnx}{x}$

(Car $Lnx\geq0$) $\Rightarrow f(x)\leq\dfrac{Lnx}{x}$

2)
$$\begin{cases} F'(x) = f(x) \quad ; \ \forall x \in [1, +\infty[\\ F(1) = 0 \end{cases}$$

On a : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

$f(t) \leq \frac{Lnt}{t}$; $\forall t \in [1, x]$

$\Rightarrow \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^x \frac{Lnt}{t}dt$

$\Rightarrow F(x) \leq \left[\frac{1}{2}(Lnt)^2\right]_1^x$

$\Rightarrow F(x) \leq \frac{1}{2}(Lnx)^2$

$\forall x \in [1, +\infty[$

EX 22 :

$x \in [0, +\infty[$

$f(x) = Ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

1)

a) $f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = [f(t)]_0^1 = Ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

2) $f'(x) > 0$

x	0 $+\infty$
f'(x)	+
f(x)	0 ↗ $+\infty$

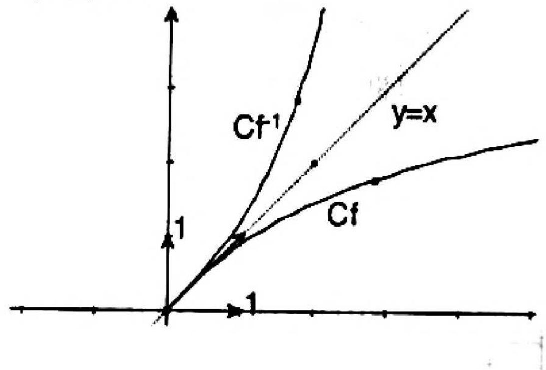
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} Ln\Bigg(\underbrace{x + \sqrt{1+x^2}}_{+\infty}\Bigg) = +\infty$

$* \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Ln\left[x\left(1 + \sqrt{x + \frac{1}{x^2}}\right)\right]}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{0} + \underbrace{\dfrac{Ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x}}_{0} = 0$

B.I de direction parabolique celle de $(o, \vec{i})$

$* f'(0) = 1$



3)

a) f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $J = [0, +\infty[$

b) $(Cf^{-1}) = S_\Delta(Cf)$

$\Delta : y = x$

c) $I = \int_0^1 Ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).dx$

$$\begin{cases} U'(x) = 1 \xrightarrow{p} U(x) = x \\ V(x) = f(x) \xrightarrow{d} V'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

$I = [x.f(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$I = f(1) - \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$

$I = Ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{2} - 1\right)$

$\boxed{I = Ln\left(1+\sqrt{2}\right) + 1 - \sqrt{2}}$

* $\int_0^1 Ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Cf), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x=0$ *et* $x=1$

* $\int_0^{Ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x)dx = \int_0^{f(1)} f^{-1}(x)dx$

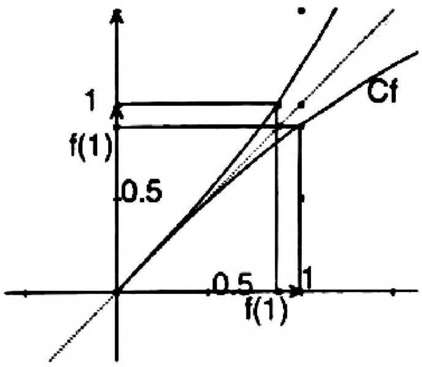
Représente l'aire de la partie du plan limitée par (Cf^{-1}), l'axe des abscisses et les droites d'équation :
$x=0$ *et* $x=f(1)$

D'où

$$\int_0^{Ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x)dx = 1.f(1) - \int_0^1 Ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$$

$$= Ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \left(Ln\left(1+\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}-1$$



EX 23 :

$$I_p = \int_1^e x^2 (Lnx)^p\, dx \ ; \ p \geq 1$$

1)

a) $I_{p+1} = \int_1^e x^2 (Lnx)^{p+1} .dx$

pour $1 \leq x \leq e$

$\Rightarrow 0 \leq Lnx \leq 1$

$\Rightarrow x^2 (Lnx)^{p+1} \leq x^2 (Lnx)^p$

$\Rightarrow \int_1^e x^2 (Lnx)^{p+1} dx \leq \int_1^e x^2 (Lnx)^p\, dx$

$\Rightarrow I_{p+1} \leq I_p$

D'où (I_p) est décroissante.

b) $I_{p+1} = \int_1^e x^2 (Lnx)^{p+1}\, dx$

soit :

$$\begin{cases} U'(x) = x^2 \rightarrow U(x) = \dfrac{x^3}{3} \\ V(x) = (Lnx)^{p+1} \rightarrow V'(x) = \dfrac{p+1}{x}(Lnx)^p \end{cases}$$

$$I_{p+1} = \left[\frac{x^3}{3}(Lnx)^{p+1}\right]_1^e - \frac{p+1}{3}.\int_1^e x^2 (Lnx)^p\, dx$$

$$I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{p+1}{3}.I_p$$

D'où :

$$I_{p+1} + \frac{p+1}{3}.I_p = \frac{e^3}{3}$$

c) $I_1 = \int_1^e x^2 .Lnx\, dx$

$x^2 \xrightarrow{p} \dfrac{x^3}{3}$

$Lnx \xrightarrow{d} \dfrac{1}{x}$

$$I_1 = \left[\frac{x^3}{3}Lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx$$

$$I_1 = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{9}\left(1+2e^3\right)}$$

$*I_2 + \dfrac{2}{3}I_1 = \dfrac{e^3}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{1}{27}\left(5e^3-2\right)}$$

2)

a) (I_p) décroissante

$\Rightarrow I_{p+1} \leq I_p$

$\Rightarrow I_{p+1} + \frac{p+1}{3} I_p \leq I_p + \frac{p+1}{3} I_p$

$\Rightarrow \frac{e^3}{3} \leq \frac{p+4}{3} I_p$

$\Rightarrow \boxed{\frac{e^3}{p+4} \leq I_p} (1)$

* pour $p \geq 2$

On a : $I_p + \frac{p}{3} I_{p-1} = \frac{e^3}{3}$

D'après 1)b)

$I_p \leq I_{p-1} \quad car\ I_p$ □

$\Rightarrow \frac{p}{3} I_p \leq \frac{p}{3} I_{p-1}$

$\Rightarrow I_p + \frac{p}{3} I_p \leq I_p + \frac{p}{3} I_{p-1}$

$\Rightarrow \frac{p+3}{3} I_p \leq \frac{e^3}{3}$

$\Rightarrow I_p \leq \frac{e^3}{p+3}$

□ pour $p = 1$; $I_p = \frac{1}{9}(1 + 2e^3) \leq \frac{e^3}{4}$

D'où $\boxed{I_p \leq \frac{e}{p+3}} (2)$; $pour \quad p \geq 1$

$(1)+(2) \Rightarrow \frac{e^3}{p+4} \leq I_p \leq \frac{e^3}{p+3}$

b) $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{e^3}{p+4} = \lim\limits_{p\to+\infty} \frac{e^3}{p+3} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{p\to+\infty} I_p = 0$

$* \frac{p}{p+4}.e^3 \leq p.I_p \leq \frac{p}{p+3}.e^3$

$\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{p}{p+4} e^3 = \lim\limits_{p\to+\infty} \frac{p}{p+3} e^3 = e^3$

D'où $\lim\limits_{p\to+\infty} p.I_p = e^3$

EX 24 :

$f(x) = Ln(Lnx)$

1) $D_f =]1, +\infty[$

2) la fonction : $x \mapsto Lnx$ est dérivable et strictement positive sur $]1, +\infty[$

D'où f est dérivable sur $]1, +\infty[$

$f'(x) = \frac{(Lnx)'}{Lnx} = \frac{1}{x.Lnx}$

3) $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k.Lnk}$; $x \geq 2$

$k \geq 2$

$k \leq t \leq k+1 \Rightarrow 0 \leq Lnk \leq Lnt$

$\Rightarrow 0 \leq kLnk \leq t.Lnt$

$\Rightarrow \frac{1}{tLnt} \leq \frac{1}{k.Lnk}$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{tLnt} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k.Lnk} dt$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{t.Lnt} dt \leq \frac{1}{k.Lnk}$

4) $* \int_2^{n+1} \frac{1}{tLnt} dt$

$= \int_2^{n+1} f'(t) dt = [f(t)]_2^{n+2}$

$= Ln(Ln(n+2)) - Ln(Ln2)$

$* \int_{(k)}^{k+1} \frac{1}{tLnt} dt \leq \frac{1}{kLnk}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{tLnt} dt \leq \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{kLnk}$

$\Rightarrow \int_2^{n+1} \frac{1}{tLnt} dt \leq S_n$

$\Rightarrow S_n \geq Ln(Ln(n+2)) - Ln(Ln2)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} Ln(Ln(n+2)) - Ln(Ln2) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

EX 25 :

Pour $x \in IR_+$

1) on pose : $U(x) = x - Ln(1+x)$

$U'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} \geq 0$

U est croissante sur IR_+

$x \geq 0 \Rightarrow U(x) \geq U(0)$

$\Rightarrow U(x) \geq 0$

$\Rightarrow x - Ln(1+x) \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{Ln(1+x) \leq x}(1)$

* soit pour $x \geq 0$

$V(x) = Ln(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

$V'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x$

$V(x) = \dfrac{x^2}{1+x} \geq 0$

V est croissante sur IR_+

$x \geq 0 \Rightarrow V(x) \geq V(0)$

$\Rightarrow Ln(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{x - \dfrac{x^2}{2} \leq Ln(1+x)}(2)$

$(1)+(2) \Rightarrow x - \dfrac{x^2}{2} \leq Ln(1+x) \leq x$

2)

a) $w_p = p$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$

$\sum_{p=1}^{n} p = \sum_{n=1}^{n} w_p = \dfrac{n}{2}(w_1 + w_n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

* démonstration par récurrence

_ pour $n = 1$

$\sum_{p=1}^{1} p^2 = 1 = \dfrac{1*2*3}{6}$ (vrai)

_ supposons que $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Montrons que

$\sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$\sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \sum_{p=1}^{n} p^2 + (n+1)^2$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \dfrac{(n+1)}{6}[n(2n+1) + 6(n+1)]$

$= \dfrac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right)$

$= \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Conclusion :

$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in IN^*$

b)

$Ln(P_n) = Ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) + Ln\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right) + \ldots$

$.. + Ln\left(1 + \dfrac{n}{n^2}\right)$

$Ln(P_n) = \sum_{p=1}^{n} Ln\left(1 + \dfrac{p}{n^2}\right)$

d'après 1)

$\dfrac{p}{n^2} - \dfrac{p^2}{2n^4} \leq Ln\left(1 + \dfrac{p}{n^2}\right) \leq \dfrac{p}{n^2}$

$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n} \dfrac{p}{n^2} - \sum_{p=1}^{n} \dfrac{p}{4n^4} \leq Ln(P_n) \leq \sum_{p=1}^{n} \dfrac{p}{n^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p - \dfrac{1}{4n^4}\sum_{p=1}^{n} p^2 \leq Ln(P_n) \leq \dfrac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right) - \dfrac{1}{4n^4}.\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

$\leq Ln(P_n) \leq \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{(n+1)(2n+1)}{24n^3} \leq Ln(P_n) \leq \dfrac{n+1}{2n}$

$\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$

$\lim_{n \to +\infty} \dfrac{(n+1)(2n+1)}{24n^3} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} Ln(P_n) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} P_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

EX 26 :

$f_a(x)=Ln(x^2+a)$

1)

a) 1^{er} cas : $a>0$

$D_{f_a}=IR$

2eme cas : a=0

$D_{f_0}=IR^*$

3eme cas : $a<0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{-a}$		$\sqrt{-a}$	$+\infty$
x^2+a	+	0	-	0	+

$D_{f_a}=\left]-\infty,-\sqrt{-a}\right[\cup\left]\sqrt{-a},+\infty\right[$

b) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+a}$

1^{er} cas : $a>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_a'(x)$	-	0	+
$f_a(x)$	$+\infty \searrow$	$Ln(a)$	$\nearrow +\infty$

2eme cas : a=0

$f_0(x)=Ln(x^2)$ $\quad f_0'(x)=\dfrac{2}{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_0'(x)$	-	||	+
$f_0(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

3eme cas : $a<0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{-a}$		$\sqrt{-a}$	$+\infty$
$f_a'(x)$	-	||		||	+
$f_a(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	||		||	$-\infty \nearrow +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_a(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Ln(x^2+a)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Ln\left[x^2\left(1+\dfrac{a}{x^2}\right)\right]}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Ln(x^2)+Ln\left(1+\dfrac{a}{x^2}\right)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}2\underbrace{\dfrac{Ln(x)}{x}}_{0}+\underbrace{\dfrac{Ln\left(1+\dfrac{a}{x^2}\right)}{x}}_{0}=0$

(C_{f_a}) admet une B.I parabolique de direction celle de $(o,\vec{i})$ au voisinage de $(+\infty)$

* f est paire d'où (C_{f_a}) admet un B.I parabolique de direction celle de $(o,\vec{i})$ au voisinage de $(-\infty)$

d) $a\neq a'$

$MM'=|f_a(x)-f_{a'}(x)|$

$=|Ln(x^2+a)-Ln(x^2+a')|$

$=\left|Ln\left(\dfrac{x^2+a}{x^2+a'}\right)\right|$

$\neq 0$

Car $\dfrac{x^2+a}{x^2+a'}\neq 1$

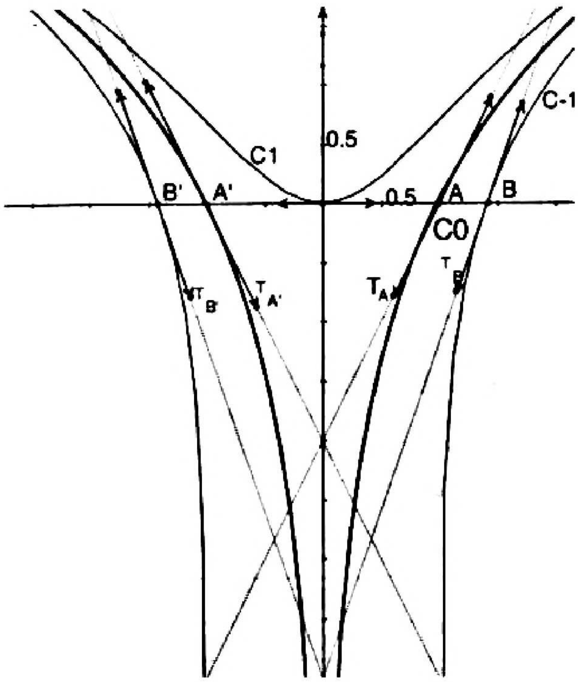
* (Ca) et (Ca') sont disjointes $(Ca\cap Ca'=\phi)$

* $MM'=\left|Ln\left(\dfrac{x^2+a}{x^2+a'}\right)\right|$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+a}{x^2+a'}=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}MM'=0$

e)



$*(C_1)\cap(o,\vec{i})=\{o(0,0)\}$

$T_1: y=0$

$*(C_0)\cap(o,\vec{i})=\{A(-1,0);A'(1,0)\}$

$T_A: y=-2(x+1)$

$T_{A'}: y=2(x-1)$

$*(C_{-1})\cap(o,\vec{i})=\{B(\sqrt{2},0);B'(-\sqrt{2},0)\}$

$T_B: y=2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$

$T_{B'}: y=-2\sqrt{2}(x+\sqrt{2})$

2) $a=\frac{3}{4}$ $\quad x\in IR_+$

$g(x)=x-Ln\left(x^2+\frac{3}{4}\right)$

a) $g'(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+\frac{3}{4}}$

$$g'(x)=\frac{x^2-2x+\frac{3}{4}}{x^2+\frac{3}{4}}$$

$$g'(x)=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x^2+\frac{3}{4}}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	0	+	
g(x)	$Ln\frac{4}{3}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{3}{2}-Ln3$	↗	$+\infty$

$g(x)>0\ ;\forall x\in IR_+$

$\left(C_{\frac{3}{4}}\right)$ est au dessous de D.

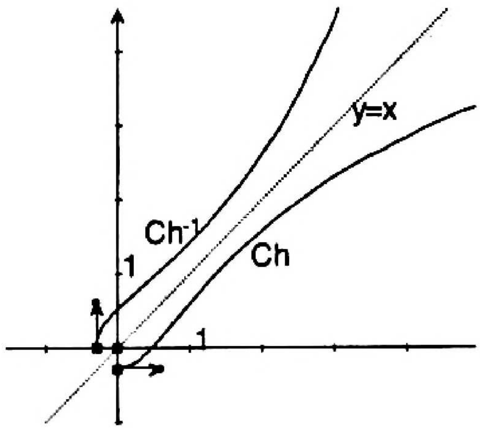
b) $h(x)=f_{\frac{3}{4}}(x)=Ln\left(x^2+\frac{3}{4}\right)$; $x\in IR_+$

$h'(x)=\dfrac{2x}{x^2+\frac{3}{4}}\geq 0;\ \forall x\in IR_+$

h est continue et strictement croissante sur IR_+ elle réalise une bijection de IR_+ sur

$h(IR_+)=\left[Ln\frac{3}{4},+\infty\right[$

c)



EXERCICE 27

A

$n \subset IN^*$

$f_n(x) = (x - 1)^n . \text{Ln}x$

1) $\varphi_n(x) = n.\text{Ln}x + 1 - \dfrac{1}{x}$

a) $\varphi'_n(x) = \dfrac{n}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0$

x	0		$+\infty$
$\varphi'_n(x)$		+	
$\varphi_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $\varphi_n(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$\varphi_n(x)$		-	0	+	

2) a) pour $n = 1$

$f_1(x) = (x - 1).\text{Ln}x$

$f_1'(x) = \text{Ln}x + 1 - \dfrac{1}{x} = \varphi_1(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		-	0	+	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $n \geq 2$

$f_n'(x) = n(x - 1)^{n-1}.\text{Ln}x + \dfrac{(x-1)^n}{x}$

$f_n'(x) = (x - 1)^{n-1} . \varphi_n(x)$

1[ier] cas (n : impair)

Le signe de $f_n'(x)$ est celui de $\varphi_n(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		-	0	+	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2[eme] cas (n : pair)

Le signe de $f_n'(x)$ est celui de $(x - 1).\varphi_n(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		+	0	+	
$f_n(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

b) $f_2(x) - f_1(x) = (x - 1)^2.\text{Ln}x - (x - 1).\text{Ln}x$

$= (x - 1)(x - 2).\text{Ln}x$

x	0		1		2		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$		-	0	-	0	+	
P.R		$\mathcal{C}_1/\mathcal{C}_2$	(1,0)	$\mathcal{C}_1/\mathcal{C}_2$	(2, Ln2)	$\mathcal{C}_2/\mathcal{C}_1$	

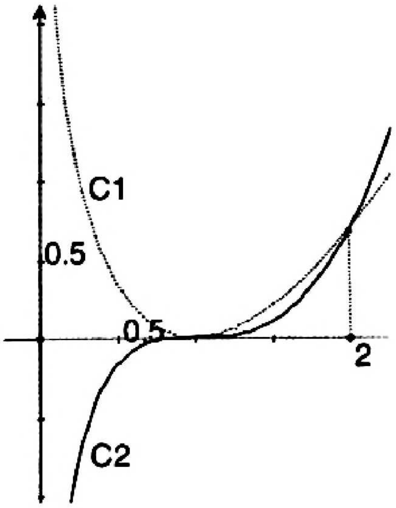
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \text{Ln}x$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}\right) \text{Ln}x = +\infty$

Branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$.



3) $\mathcal{A} = \int_1^2 (f_1(x) - f_2(x))\,dx$

$\mathcal{A} = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2).\,\text{Ln}x\,dx$

Soit
$\begin{cases} u'(x) = -x^2+3x-2 \\ v(x) = \text{Ln}x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{-x^2}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \\ v'(x) = 1/x \end{cases}$

$\mathcal{A} = \left[\left(\frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right)\text{Ln}x\right]_1^2$

$- \int_1^2 \left(\frac{-x^2}{3} + \frac{3x}{2} - 2\right) dx$

$\mathcal{A} = -\frac{2}{3}\,\text{Ln}2 - \left[\left(\frac{-x^3}{9} + \frac{3x^2}{4} - 2x\right)\right]_1^2$

$\mathcal{A} = \left(\frac{19}{36} - \frac{2}{3}\,\text{Ln}2\right)$ u .a

B) $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$; $n \in \mathbb{N}$

1) $u_n = \int_1^2 f_n(x)\,dx$

Soit $u_n = \int_1^2 (x-1)^n\,\text{Ln}x\,dx$

$\begin{cases} (x-1)^n \xrightarrow{P} \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1} \\ \text{Ln}x \xrightarrow{d} \frac{1}{x} \end{cases}$

$u_n = \left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\text{Ln}x\right]_1^2 - \frac{1}{n+1}\int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\,dx$

$u_n = \frac{\text{Ln}2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\,dx$

D'où

$(n+1)\,u_n = \text{Ln}2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\,dx$

2) pour $n \in \mathbb{N}^*$

a) $\text{Ln}2 - (n+1)\,u_n = \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\,dx$

$1 \le x \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x-1)^{n+1} \le \frac{(x-1)^{n+1}}{x} \le (x-1)^{n+1}$

$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{2}(x-1)^{n+1}\,dx \le \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\,dx \le$

$\int_1^2 (x-1)^{n+1}\,dx$

$$\Rightarrow \left[\frac{(x-1)^{n+2}}{2(n+2)}\right]_1^2 \leq \text{Ln}2 - (n+1)\,\mathcal{U}_n \leq \left[\frac{(x-1)^{n+2}}{(n+2)}\right]_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(n+2)} \leq \text{Ln}2 - (n+1)\,\mathcal{U}_n \leq \frac{1}{(n+2)}$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{(n+2)} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty}(\text{Ln}2 - (n+1)\,\mathcal{U}_n) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty}((n+1)\,\mathcal{U}_n) = \text{Ln}2$$

3) $n \geq 1$ et $x \geq 0$

$\mathcal{S}_n(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 + \ldots\ldots$

$\ldots + (-1)^n (x-1)^n$

a) $\mathcal{S}_n(x)$ est la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suites géométrique de raison $q = -(x-1) \neq 1$

d'où

$$\mathcal{S}_n(x) = \frac{1-[-(x-1)]^{n+1}}{1+(x-1)}$$

$$= \frac{1-(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{x}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{x}$$

b) on a : pour $n \in IN^*$

$$\text{Ln}2 - (n+1)\,\mathcal{U}_n = \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow (-1)^{n+1}[\,\text{Ln}2 - (n+1)\,\mathcal{U}_n]$$

$$= \int_1^2 \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{x}\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \mathcal{S}_n(x)\right) dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \mathcal{S}_n(x)dx$$

$$= [\text{Ln}x]_1^2 - \int_1^2 \mathcal{S}_n(x)dx$$

$$= \text{Ln}2 - \left[x - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots\ldots + (-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right]_1^2$$

$$= \text{Ln}2 - \left[\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) - 1\right]_1^2$$

$$= \text{Ln}2 - \left[\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]_1^2$$

$$= \text{Ln}2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \text{Ln}2 - \mathcal{V}_n$$

D'où

$$\text{Ln}2 - \mathcal{V}_n = (-1)^{n+1}[\text{Ln}2 - (n+1)\mathcal{U}n]$$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\text{Ln}2 - (n+1)\,\mathcal{U}_n) = 0$

$$|\,\text{Ln}2 - (n+1)\,\mathcal{U}_n| = |\,\text{Ln}2 - \mathcal{V}_n\,|$$

D'où

$$\lim_{x \to +\infty}(\text{Ln}2 - \mathcal{V}_n) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \to +\infty} \mathcal{V}_n = \text{Ln}2$$

EX 28 :

I)

1) $x\in[1,+\infty[$

$g(x)=xLnx-x+1$

a) $g'(x)=Lnx\geq 0 \quad \forall x\in[1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
g'(x)	0	+
g(x)	0	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x.[Lnx-1]+1=+\infty$

b) $g(x)\geq 0\,;\forall x\in[1,+\infty[$

2)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{Lnx} & si \quad x>1\\ 1 & si\ x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\underbrace{\frac{Lnx}{x-1}}_{1}}=1=f(1)$$

D'où f est continue à droite en 1

3)

a)

$$*(t-1)-\left(1-\frac{1}{t}\right)=\frac{t^2-2t+1}{t}=\frac{(t-1)^2}{t}\geq 0$$

d'où $\boxed{1-\frac{1}{t}\leq t-1}(1)\,;\ \forall t\in[1,+\infty[$

$$*\left(1-\frac{1}{t}\right)-\left[t-1-(t-1)^2\right]=\frac{(t-1)^3}{t}\geq 0$$

D'où

$$\boxed{t-1-(t-1)^2\leq t-\frac{1}{t}}(2)$$

$(1)+(2)\Rightarrow$

$$t-1-(t-1)^2\leq 1-\frac{1}{t}\leq t-1$$

$\forall t\in[1,+\infty[$

b) $x\geq 1$

pour $t\in[1,x]$ on a :

$$(t-1)-(t-1)^2\leq 1-\frac{1}{t}\leq(t-1)$$

$$\Rightarrow\int_1^x\left((t-1)-(t-1)^2\right)dt\leq\int_1^x\left(1-\frac{1}{t}\right)dt\leq\int_1^x(t-1)\,dt$$

$$\Rightarrow\left[\frac{(t-1)^2}{2}-\frac{(t-1)^3}{3}\right]_1^x\leq[t-Lnt]_1^x\leq\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^x$$

$$\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3}\leq x-1-Lnx\leq\frac{(x-1)^2}{2}$$

c) pour $x>1$

$$\frac{1}{2}-\frac{x-1}{3}\leq\frac{x-1-Lnx}{(x-1)^2}\leq\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{2}-\frac{(x-1)}{3}=\frac{1}{2}$$

D'où

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-1-Lnx}{(x-1)^2}\right)=\frac{1}{2}$$

d) pour $x>1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x-1-Lnx}{(x-1)Lnx}=\left(\frac{x-1-Lnx}{(x-1)^2}\right).f(x)$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}*1=\frac{1}{2}$$

d'où f est dérivable à droite en 1 et

$$f'_d(1)=\frac{1}{2}$$

4)

a) pour $x>1$

$$f'(x)=\frac{Lnx-\frac{1}{x}(x-1)}{(Lnx)^2}$$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x(Lnx)^2}\geq 0$$

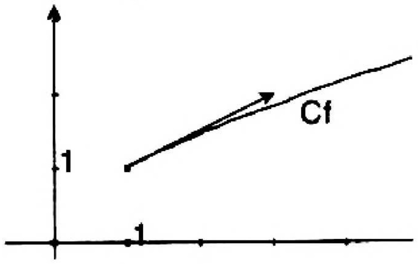
x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\left(1-\frac{1}{x}\right)}^{1}}{\underbrace{\left(\frac{Lnx}{x}\right)}_{0^+}} = +\infty$$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right).\frac{1}{Lnx} = 0$

(C) admet une B.I parabolique de diréction celle de $(o,\vec{i})$

$*f'_d(1) = \frac{1}{2}$



II)

$$F(x) = \begin{cases} \int_x^{x^2} \frac{1}{Lnt}dt & si \ \ x>1 \\ Ln2 & si \ \ x=1 \end{cases}$$

1)

a) $x>1$

$x \le t \le x^2 \Rightarrow \frac{x}{tLnt} \le \frac{1}{Lnt} \le \frac{x^2}{tLnt}$

Car $tLnt > 0$

b) $\frac{x}{tLnt} \le \frac{1}{Lnt} \le \frac{x^2}{tLnt}$

pour $t \in [x, x^2]$

$\Rightarrow \int_x^{x^2} \frac{x}{tLnt}dt \le \int_x^{x^2} \frac{dt}{Lnt} \le \int_x^{x^2} \frac{x^2}{tLnt}dt$

$\Rightarrow x.[Ln(Lnt)]_x^{x^2} \le F(x) \le x^2.[Ln(Lnt)]_x^{x^2}$

$\Rightarrow xLn2 \le F(x) \le x^2Ln2$

c) $\lim_{x\to1^+} xLn2 = \lim_{x\to1^+} x^2Ln2 = Ln2 = F(1)$

d'où F est continue a droite en 1.

3)

a) la fonction $U: t \mapsto \frac{1}{Lnt}$ est continue sur $]1,+\infty[$, soit V une primitive de U sur $]1,+\infty[$

$F(x) = [V(t)]_x^{x^2}$

$F(x) = V(x^2) - V(x)$

V est dérivable sur $]1,+\infty[$

$x \mapsto V(x^2)$ est dérivable sur $]1,+\infty[$

(composée de deux fonctions dérivables)

D'où F est dérivable sur $]1,+\infty[$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x.V'(x^2) - V'(x) \\ &= 2x.U(x^2) - U(x) \\ &= 2x\frac{1}{Ln(x^2)} - \frac{1}{Lnx} \\ &= \frac{2x}{2Lnx} - \frac{1}{Lnx} = \frac{x-1}{Lnx} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) $x>1$

F est continue sur $[1,x]$ dérivable sur $]1,x[$

D'après le théorème des Acc.finis

Il existe $c \in]1,x[$ tel que :

$F(x) - F(1) = (x-1).F'(c)$

c) lorsque :

$x \to 1^+$

$c \to 1^+$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^+} F'(c) \\ &= \lim_{x\to1^+} f(c) \\ &= f(1) = 1 \end{aligned}$$

Car f est continue en 1 à droite, d'où F est dérivable à droite en 1 et $F'_d(1) = 1$

4)

$F'(x) = f(x) > 0$

x	$1 \qquad\qquad\qquad +\infty$
$F'(x)$	$+$
$F(x)$	$\mathrm{Ln}\,2 \nearrow +\infty$

* $F(x) \geq x\,\mathrm{Ln}\,2$ pour $x > 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x.Ln(2) = +\infty$

$D'où \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

* déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$

<u>Pour $x > 1$</u>

$$x \leq t \leq x^2 \Rightarrow \mathrm{Ln}\,x \leq \mathrm{Ln}\,t \leq \mathrm{Ln}\,x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\mathrm{Ln}\,x} \leq \frac{1}{\mathrm{Ln}\,t} \leq \frac{1}{\mathrm{Ln}\,x}$$

$$\rightarrow \int_x^{x^2} \frac{1}{2\mathrm{Ln}\,x}\,dt \leq F(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\mathrm{Ln}\,x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x}{2\mathrm{Ln}\,x} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{\mathrm{Ln}\,x}$$

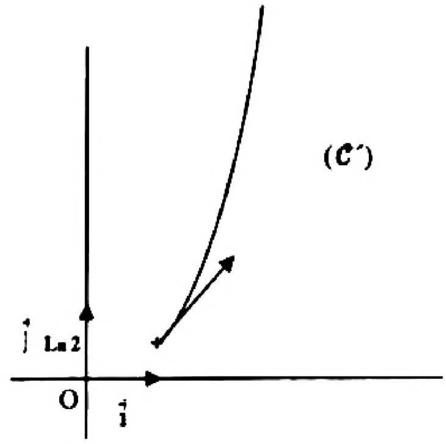
$$\Rightarrow F(x) \geq \frac{x^2 - x}{2\mathrm{Ln}\,x}$$

$$\Rightarrow \frac{F(x)}{x} \geq \frac{x - 1}{2\mathrm{Ln}\,x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{2\mathrm{Ln}\,x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} f(x) = +\infty$$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$

$(\mathscr{C}')$ admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$



III) <u>$\alpha > 1$</u>

1) pour tout $x \in]1, +\infty[$

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\mathrm{Ln}\,t}$$

Soit $G(x) = \int_1^x f(t)\,dt + \mathrm{Ln}\,2$

On a : $F'(x) = f(x)$

$$G'(x) = f(x)$$

D'où : $F(x) = G(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$

$F(1) = G(1) + k \Rightarrow k = 0$

d'où

$F(x) = G(x)$; $\forall x \in]1, +\infty[$

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt + \mathrm{Ln}\,2$$

2) $A(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(t)\ dt$

$A(x) = F(\alpha) - \text{Ln}\, 2$

$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{A(\alpha)}{\alpha} =$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \overbrace{\frac{F(\alpha)}{\alpha}}^{+\infty} - \frac{\text{Ln}\, 2}{\alpha} = +\infty$$

D'après 4)

$$\frac{\alpha^2 - \alpha}{2\text{Ln}\, \alpha} \leq F(\alpha) \leq \frac{\alpha^2 - \alpha}{\text{Ln}\, \alpha}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{2\text{Ln}\, \alpha} \leq \frac{F(\alpha)}{x^2} \leq \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{\text{Ln}\, \alpha}$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{\text{Ln}\, \alpha} = 0$$

D'où :

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{F(\alpha)}{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{A(\alpha)}{\alpha^2} = 0$$

EXERCICE 29

I - 1) $h(x) = x - \text{Ln}\, x$

a) $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\text{Ln}\, x}{x}\right) = +\infty$, avec $\frac{\text{Ln}\, x}{x} \to 0$

b) h admet 1 comme minimum absolu alors

$h(x) \geq 1$; $\forall x \in]0, +\infty[$

2) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - \text{Ln}\, x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) f est continue sur $]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x - \text{Ln}\, x} = 0 = f(0)$

d' ou f est continue sur $[0, +\infty[$

b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2 - x\text{Ln}\, x} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

II) $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$

$x \in [0, +\infty[$

1) a)

$F(x) = \int_1^{2x} f(t)\, dt - \int_1^{x} f(t)\, dt$

f est continue sur $[0, +\infty[$ et

$1 \in [0, +\infty[$

D'où la fonction :

$x \mapsto \int_1^{x} f(t)\, dt$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée est :

$x \mapsto f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} * \text{ U} : x \mapsto 2x \text{ est dérivable sur } \\ [0, +\infty[\text{ et } U([0, +\infty[) = [0, +\infty[\\ * \text{ f est continue sur} [0, +\infty[\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$x \mapsto \int_1^{2x} f(t)\, dt$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée est :

$x \mapsto 2f(2x)$ et par suite F est dérivable sur $[0, +\infty[$

b) pour $x > 0$

$F'(x) = 2f(2x) - f(x)$

$= \frac{2}{2x - \text{Ln}\, 2x} - \frac{1}{x - \text{Ln}\, x}$

$= \frac{2h(x) - h(2x)}{h(2x).h(x)} = \frac{\text{Ln}2 - \text{Ln}x}{h(2x).h(x)}$

* $F'_d(0) = 2f(0) - f(0) = 0$

2) $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = [\mathrm{Ln}t]_x^{2x} = \mathrm{Ln}2$

3) $F(x) - \mathrm{Ln}2 = \int_x^{2x} f(t)\,dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$

$= \int_x^{2x} (f(t) - \frac{1}{t})\,dt = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{Ln}t}{t.h(t)}\,dt$

$x \geq 1$

Pour $t \in [x, 2x]$

$h(t) \geq h(x)$ car h est croissante sur

$[1, +\infty[\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{h(t)} \leq \frac{1}{h(x)}$ et

$0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$ et $0 \leq \mathrm{Ln}t \leq \mathrm{Ln}(2x)$

D'où $0 \leq \frac{\mathrm{Ln}t}{th(t)} \leq \frac{\mathrm{Ln}(2x)}{xh(x)}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{Ln}t}{t.h(t)}\,dt \leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{Ln}(2x)}{xh(x)}\,dt$

$\Rightarrow 0 \leq F(x) - \mathrm{Ln}2 \leq \frac{\mathrm{Ln}(2x)}{h(x)}$

$\Rightarrow$ * $0 \leq F(x) - \mathrm{Ln}2 \leq \frac{\mathrm{Ln}(2x)}{x - \mathrm{Ln}x}$

Pour $x \geq 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{Ln}(2x)}{x - \mathrm{Ln}x} =$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{Ln}2 + \mathrm{Ln}x}{x - \mathrm{Ln}x} =$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\mathrm{Ln}2}{x} + \frac{\mathrm{Ln}x}{x}}{1 - \frac{\mathrm{Ln}x}{x}} = 0$ d'où :

$\lim_{x \to +\infty} (F(x) - \mathrm{Ln}2) = 0$

Donc : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \mathrm{Ln}2$

4) a)

$F(\frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t - \mathrm{Ln}t}\,dt$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \Rightarrow \mathrm{Ln}t \leq 0$

$\Rightarrow -\mathrm{Ln}t \geq 0$

$\Rightarrow t - \mathrm{Ln}t \geq t$

$\Rightarrow \frac{1}{t - \mathrm{Ln}t} \leq \frac{1}{t}$

$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t - \mathrm{Ln}t}\,dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t}\,dt$

$\Rightarrow F(\frac{1}{2}) \leq [\mathrm{Ln}t]_{\frac{1}{2}}^{1} \Rightarrow F(\frac{1}{2}) \leq \mathrm{Ln}2$

b) on a :

$F(\frac{1}{2}) \leq \mathrm{Ln}2$ et $F(1) \geq \mathrm{Ln}(2)$ d'après 3)

F est continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$

Ln2 est compris entre $F(\frac{1}{2})$ et $F(1)$

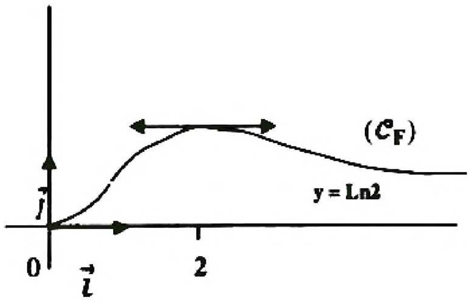
D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ tels que $F(\alpha) = \mathrm{Ln}2$

5) a)

$$F'(x) = \frac{Ln2 - Lnx}{h(2x).h(x)} \ > 0$$

x	0 2 $+\infty$
$F'(x)$	+ 0 -
$F(x)$	0 ↗ F(2) ↘ Ln2

b)



$F'_d(0) = 0$

III) $n \in IN^*$

1) $v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{t \quad Lnt}\, dt$

a) on a : $h(t) \geq 1$; $\forall\, t \in]0, +\infty[$

$\rightarrow \frac{1}{h(t)} \leq 1 \quad \rightarrow \frac{t}{h(t)} \leq t$

$\Rightarrow \frac{t}{t - Lnt} \leq t \quad ; \forall\, t \in]0, +\infty[$

b) $v_{n+1} = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{t}{h(t)}\, dt$

$v_{n+1} = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{h(t)}\, dt + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{h(t)}\, dt$

$v_{n+1} - v_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{h(t)}\, dt$

$v_{n+1} - v_n \geq 0$ car $\frac{t}{h(t)} \geq 0$

$\forall\, t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$

D'où v_n est croissante

c) pour $t \in [\frac{1}{n}, 1]$

$0 \leq \frac{t}{h(t)} \leq t$ d'après a)

$\Rightarrow 0 \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{h(t)}\, dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} t\, dt$

$$\Rightarrow 0 \leq v_n \leq \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$\rightarrow 0 \leq v_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

$$\begin{cases} * \ v_n \leq \frac{1}{2} & \forall n \in IN^* \\ (v_n) \text{ est croissante d'où} \end{cases}$$

(v_n) est convergente

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \to +\infty} v_n \leq \frac{1}{2}$$

2) $\omega_n = \int_1^n \frac{t}{h(t)}\,dt$; $n \geq 1$

a)

$$(1 + Lnt) - \left(\frac{t}{t - Lnt}\right)$$

$$= \frac{t\,Lnt - Lnt - (Lnt)^2}{h(t)}$$

$$= \frac{Lnt(t-1-Lnt)}{h(t)} = \frac{Lnt(h(t)-1)}{h(t)} \geq 0$$

Car $t \geq 1$ et $h(t) \geq 1$ d'où

$$\frac{t}{t-Lnt} \leq 1 + Lnt \ ; \quad \forall t \in [1, +\infty[$$

b) $\int_1^n \left(1 + \frac{Lnt}{t}\right) dt = \left[t + \frac{1}{2}(Lnt)^2\right]_1^n$

$$= n - 1 + \frac{1}{2}(Ln(n))^2$$

c) pour $t \geq 1$

$$\frac{t}{t-Lnt} = \frac{(t-Lnt)+Lnt}{t-Lnt}$$

$$= 1 + \frac{Lnt}{t-Lnt} \geq 1 + \frac{Lnt}{t} \quad \text{car } Lnt \geq 0$$

D'où

$$\int_1^n \left(\frac{t}{t-Lnt}\right) dt \geq \int_1^n \left(1 + \frac{Lnt}{t}\right) dt$$

$$\Rightarrow \omega_n \geq n - 1 + \frac{1}{2}(Ln(n))^2$$

$$\lim_{n \to +\infty} n - 1 + \frac{1}{2}(Ln(n))^2 = +\infty$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} \omega_n = +\infty$

EXERCICE 30

A $x \in [2, +\infty[$

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-4})$

1) – a) la fonction :

$x \mapsto x + \sqrt{x^2-4}$ est dérivable sur

$]2, +\infty[$ (car $x^2 - 4 > 0$)
et strictement positive
d'où f est dérivable sur $]2, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x+\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-4})-\ln 2}{x-2}$$

On pose $X = x + \sqrt{x^2-4}$

$x \to 2^+$ alors $X \to 2^+$

$x = \frac{X^2+4}{2X}$

Alors $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$= \lim_{X \to 2^+} \frac{\ln X - \ln 2}{\frac{X^2+4}{2X}-2} = \lim_{X \to 2^+} \frac{\ln X - \ln 2}{\frac{(X-2)^2}{2X}}$$

$$\lim_{X \to 2^+} \underbrace{\left(\frac{2X}{X-2}\right)}_{\searrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{\ln X - \ln 2}{X-2}\right)}_{\searrow \ln' 2 = \frac{1}{2}} = +\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 2

c) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} > 0$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	Ln2	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2-4}) = +\infty$$

$\searrow +\infty$

2) – a) on pose : $\varphi(x) = f(x) - x$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 1 = \frac{1-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{5-x^2}{\sqrt{x^2-4}(1+\sqrt{x^2-4})}$$

x	2		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	-	
$\varphi(x)$	Ln2-2	$\nearrow$	$\varphi(\sqrt{5})$	$\searrow$	$-\infty$

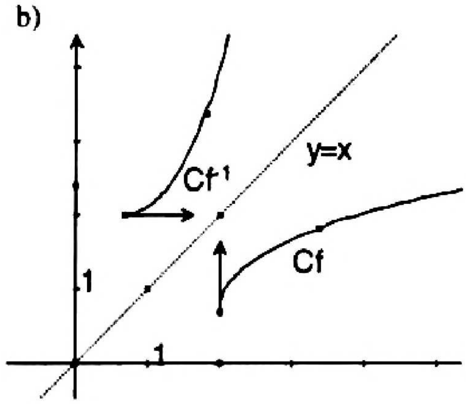
$\varphi(\sqrt{5}) = \ln(1+\sqrt{5}) - \sqrt{5} < 0$

φ admet $\varphi(\sqrt{5})$ comme maximum absolu

$\Longrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(\sqrt{5})\ \forall\ x \subset [2, +\infty[$

$\Longrightarrow \varphi(x) < 0$ d'où $(\mathscr{C}_f)$ est au dessous de D

b)



$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{Ln[x(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}})]}{x}$

$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{Lnx}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{Ln(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}})}{x}}_{\to 0} = 0$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$ au voisinage de $(+\infty)$

3) – a) f est continue et strictement croissante sur $[2, +\infty[$ elle réalise donc une bijection de $[2, +\infty[$ sur $[Ln2, +\infty[$

b) $(\mathcal{C}_f^{-1}) = S_D(\mathcal{C}_f)$

B $x \in [2, +\infty[$

$F(x) = \int_2^{\frac{2}{x}} f(t)\, dt$

1) la fonction $\mathcal{U} : x \longmapsto \frac{2}{x}$ est dérivable sur $]0, 1]$ et

$\mathcal{U}(]0, 1]) = [2, +\infty[$

Comme f est continue sur $[2, +\infty[$ alors F est dérivable sur $]0, 1]$ et :

$F'(x) = \mathcal{U}'(x).f(\mathcal{U}(x))$

$F'(x) = \frac{-2}{x^2} Ln[\frac{2}{x} + \sqrt{\frac{4}{x^2} - 4}]$

$F'(x) = \frac{-2}{x^2} Ln[\frac{2}{x}(1+\sqrt{1-x^2}]$

2) a) $t \in [2, +\infty[$

$t + \sqrt{t^2-4} \geq t \Rightarrow Ln(t+\sqrt{t^2-4}) \geq Lnt$

$\Rightarrow f(t) \geq Lnt$

b) $\int_2^{\frac{2}{x}} Lnt\, dt = [tLnt - t]_2^{\frac{2}{x}}$

$= \frac{2}{x}[Ln(\frac{2}{x}) - 1] - [2Ln2 - 2]$

$= \frac{2}{x}(Ln(\frac{2}{x}) - 1) - 2(Ln2 - 1)$

c) pour $t \in [2, \frac{2}{x}]$ $f(t) \geq Lnt$

$\Rightarrow \int_2^{\frac{2}{x}} f(t)\, dt \geq \int_2^{\frac{2}{x}} Lnt\, dt$

$\rightarrow F(x) \geq \frac{2}{x}(Ln(\frac{2}{x}) - 1) - 2(Ln2 - 1)$

$\Rightarrow F(x) \geq \frac{2}{x}(Ln(\frac{2}{x}) - 1)$

Car $-2(Ln2 - 1) > 0$

d) pour $x \in]0, 1]$

$F(x) \geq \frac{2}{x}(Ln(\frac{2}{x}) - 1)$

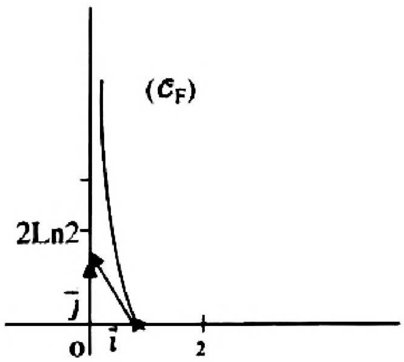
$\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x}(Ln(\frac{2}{x}) - 1) = +\infty$

D'où $\lim_{x \to 0^+} F(x) = +\infty$

3) $F'(x) < 0 ; \forall x \in]0, 1]$

x	0	1
$F'(x)$	-	
$F(x)$	$+\infty$	0

$F(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$



$F_g'(1) = -2\,\text{Ln}2$

C) $x \in]2, +\infty[$; $n \in \mathbb{N}$

$$g_n(x) = \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^{2n}}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$$

$$\ell_n = \lim_{x \to 2^+} g_n(x)$$

1) la fonction : $t \longmapsto \dfrac{t^{2n}}{\sqrt{t^2-4}}$ est continue

Sur $]2, +\infty[$ et $2\sqrt{2} \in]2, +\infty[$ d'où l'existence de $g_n(x)$ pour $x \in]2, +\infty[$

2) $g_0(x) = \displaystyle\int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{1}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$

$$= \int_{2\sqrt{2}}^{x} f'(t)\,dt$$

$$= [f(t)]_{2\sqrt{2}}^{x} = f(x) - f(2\sqrt{2})$$

$$g_0(x) = \text{Ln}(x + \sqrt{x^2-4}) - \text{Ln}(2+2\sqrt{2})$$

$$\ell_0 = \lim_{x \to 2^+} g_0(x) = \text{Ln}2 - \text{Ln}(2+2\sqrt{2})$$

$$\ell_0 = -\text{Ln}(1+\sqrt{2})$$

3) $g_1(x) = \displaystyle\int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$

On pose :

$$\begin{cases} \mathcal{U}'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-4}} \longrightarrow \mathcal{U}(t) = \sqrt{t^2-4} \\ \mathcal{V}(t) = t \longrightarrow \mathcal{V}'(t) = 1 \end{cases}$$

$$g_1(x) = \left[t\sqrt{t^2-4}\right]_{2\sqrt{2}}^{x} - \int_{2\sqrt{2}}^{x} \sqrt{t^2-4}\,dt$$

$$\int_{2\sqrt{2}}^{x} \sqrt{t^2-4}\,dt = \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^2-4}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$$

$$= \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2-4}}\,dt - 4\int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^2-4}}$$

$$\int_{2\sqrt{2}}^{x} \sqrt{t^2-4}\,dt = g_1(x) - 4\,g_0(x)$$

D'où

$$g_1(x) = \left[t\sqrt{t^2-4}\right]_{2\sqrt{2}}^{x} - g_1(x) + 4\,g_0(x)$$

$$\Rightarrow 2\,g_1(x) = x\sqrt{x^2-4} - 4\sqrt{2} + 4\,g_0(x)$$

$$\Rightarrow g_1(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\sqrt{2} + 2\,g_0(x)$$

$$\ell_1 = \lim_{x \to 2^+} g_1(x)$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\sqrt{2} + 2\,g_0(x)\right)$$

$$= -2\sqrt{2} + 2\,\ell_0$$

$$\ell_1 = -2\sqrt{2} - 2.\text{Ln}(1+\sqrt{2})$$

4) – a)

$$g_{n+1}(x) = \int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$$

on pose

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-4}} \longrightarrow U(t) = \sqrt{t^2-4} \\ v(t) = t^{2n+1} \longrightarrow v'(t) = (2n+1)t^{2n} \end{cases}$$

D'où :

$$g_{n+1}(x) = \left[t^{2n+1}\sqrt{t^2-4}\right]_{2\sqrt{2}}^{x} - (2n+1)\int_{2\sqrt{2}}^{x} t^{2n}\sqrt{t^2-4}\,dt$$

$$g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} - (2n+1)\int_{2\sqrt{2}}^{x} t^{2n}\sqrt{t^2-4}\,dt$$

b)

$$g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} - (2n+1)\int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^{2n+2}-4t^{2n}}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$$

$$g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} - (2n+1)\left[g_{n+1}(x) - 4g_n(x)\right]$$

$$\Rightarrow (2n+2)\,g_{n+1}(x) = x^{2n+1}\sqrt{x^2-4} - 2^{3n+2}\sqrt{2} + 4(2n+1)\,g_n(x)$$

c) passage aux limites lorsque $x \longrightarrow 2^+$

on aura :

$$(2n+2)\,\ell_{n+1} = 4(2n+1)\,\ell_n - 2^{3n+2}\sqrt{2}$$

$$\ell_{n+1} = \frac{2.(2n+1)}{n+1}.l_n - \frac{2^{3n+1}.\sqrt{2}}{n+1}$$

QCM

1) $e^{-3\ln\frac{1}{2}} = 8$

2) $2e^{x+y} = 2e^{x}.e^{y}$

3) $e^{x} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = -1$

4) $-2 < e^{x^2-1} < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

6) $f'(x) = \dfrac{x-1}{x^2 e^{-x}}$

7) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

Vrai – Faux

1) Vrai (théorème du cours)

2) Vrai ,en effet : pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ soit $f(x) = x - \ln(x)$

$f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$ d'où le tableau des variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

f admet le réel 1 comme minimum absolu $\Rightarrow$
$f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow x - \ln(x) > 0$

$\Rightarrow \boxed{\ln(x) < x}$, $\forall x \in IR_+^*$ (1)

Comme $\ln(x) < x \Rightarrow e^{\ln(x)} < e^{x} \Rightarrow \boxed{x < e^{x}}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $\ln x < x < e^{x}$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

3) Faux : $(x^{r+1})' = (r+1)x^{r}$

4) Faux

$f(-x) = \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \dfrac{1-e^{x}}{1+e^{x}} = -f(x)$, f est impaire

2) Vrai

$\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2} = 1 \Leftrightarrow e^{x} + e^{-x} = 2$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^{x}-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{x} = 1$

Ex1

1) $e^{5\ln3} = \left(e^{Ln(3)}\right)^5 = 3^5 = 243$

$e^{-3\ln2} = (e^{\ln2})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

2) $e^{x}e^{-2x} = e^{x}$, $e\,e^{x} = e^{x+1}$,$(e^{-x})^2 = e^{-2x}$

$\dfrac{e^{x}}{e^{-x}} = e^{2x}$, $\dfrac{e^{2x}}{e^{1-x}} = e^{3x-1}$

$\left(\dfrac{e^{x}}{e^{2x}}\right)^4 = (e^{-x})^4 = e^{-4x}$

3) a) $(e^{x} + e^{-x})^2 = (e^{x})^2 + (e^{-x})^2 + 2e^{x}.e^{-x}$

$= e^{2x} + e^{-2x} + 2$

b) $\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \dfrac{e^{x} - \frac{1}{e^{x}}}{e^{x} + \frac{1}{e^{x}}} = \dfrac{\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}} =$

$\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

4) a) $1 \leq e^{x} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq e^{-x} \leq 1$

$\Rightarrow (\frac{1}{2})^2 \leq (e^{-x})^2 \leq (1)^2 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq e^{-2x} \leq 1$

b) $1 \leq e^{x} \leq 9 \Rightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{e^{x}} \leq \sqrt{9}$

$\Rightarrow 1 \leq e^{\frac{1}{2}x} \leq 3 \Rightarrow 2 \leq 2e^{\frac{1}{2}x} \leq 6$

EX2

1) $(x^2-5x+4)\,e^x=0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0$, car $e^x \neq 0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=4$ donc $S_{IR}=\{1,4\}$

2) $e^{\frac{x}{4}}=\frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{\frac{x}{4}}=e^{-1} \Leftrightarrow \frac{x}{4}=-1$

$\Leftrightarrow x=-4$ donc $S_{IR}=\{-4\}$

3) $e^{3x}-e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^{3x}=e^{-x} \Leftrightarrow 3x=-x$

$\Leftrightarrow 4x=0 \Leftrightarrow x=0$ donc $S_{IR}=\{0\}$

4) $e^{2x}+e^{x}-2=0$, posons $t=e^x$ l'équation devient : $t^2+t-2=0$ donc $t'=1$ et $t''=-2$

$t=1 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$t=-2 \Leftrightarrow e^x=-2$ impossible car $e^x>0$

D'où $S_{IR}=\{0\}$

5) $e^x-5e^{-x}+4=0 \Leftrightarrow e^{2x}+4e^x-5=0$

Posons $t=e^x$, On aura : $t^2+4t-5=0$

Donc $t'=1$ ou $t''=-5$

Pour $t=1$ on a : $e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Pour $t=-5$ on a : $e^x=-5$ impossible car $e^x>0$

D'où $S_{IR}=\{0\}$

6) $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ a un sens si et seulement si $\frac{x-1}{x+1}>0$

Donc $x \in\,]-\infty,-1[\, \cup\,]1,+\infty[\, = D$

Pour $x \in D$:

$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=4 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}=e^4$

$\Leftrightarrow x-1=xe^4+e^4$

$\Leftrightarrow x(1-e^4)=1+e^4 \Leftrightarrow x=\frac{e^4+1}{1-e^4} \in D$

Et par suite

$S_{IR}=\left\{\frac{e^4+1}{1-e^4}\right\}$

7) $e^{-x}\leq 1 \Leftrightarrow -x\leq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$

Donc $S_{IR}=[0,+\infty[$

8) $e^{-3x}\geq 0$, $S_{IR}=IR$

9) $e^{2x}-\frac{1}{e^x}\geq 0 \Leftrightarrow e^{2x}\geq\frac{1}{e^x}$

$\Leftrightarrow e^{2x}\geq e^{-x}$

$\Leftrightarrow 2x\geq -x \Leftrightarrow 3x\geq 0$

$S_{IR}=[0,+\infty[$

10) $2-e^{\frac{1}{x}}>0$ existe dans IR*

$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}<2 \Leftrightarrow \frac{1}{x}<\ln 2 \Leftrightarrow$

$x>\frac{1}{\ln 2}$ ou $x<0$

$S_{IR}=\,]-\infty,0[\,\cup\,]\ln 2,+\infty[$

11) $e^x+\frac{2}{e^x}-3\leq 0 \Leftrightarrow e^{2x}-3e^x+2\leq 0$

$\Leftrightarrow (e^x-1)(e^x-2)\leq 0$

x	$-\infty$ 0	ln2	$+\infty$
e^x-1	−	+	+
e^x-2	−	−	+
produit	+	−	+

$S_{IR}=[0,\ln 2]$

EX3

$C_1 = C_g$ $\quad g(0) = 1$

$C_2 = C_k$ $\quad k(0) = 2$

$C_3 = C_h$ $\quad h \geq 0$ et $\lim\limits_{-\infty} h = 0$

$C_4 = C_f$ $\quad f(x) < 0$

EX4

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{e^k}$$

Soit $U_n = \dfrac{1}{e^n} = e^{-n}$

(U_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{e}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{e^k} = U_0 \left(\frac{1-(\frac{1}{e})^n}{1-\frac{1}{e}} \right)$$

$$= \frac{e}{e-1}\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right]$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{e}\right)^{n+1} = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{e} < 1$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n = \dfrac{e}{e-1}$

EX5

* $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - e^x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \dfrac{e^x}{x^2}\right) = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{3x} - 2e^x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x(e^{2x} - 2) = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2e^x - \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0}\right) = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2e^x - \dfrac{1}{x}\right) = 0$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{-(1-x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x}{e} = 0$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2x + 3)e^x =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (\overbrace{x^2 e^x}^{0} - \overbrace{2 x e^x}^{0} + \overbrace{3 e^x}^{0}) = 0$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x)e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 e^x - x e^x) = 0$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$

(on pose $t = \dfrac{1}{x}$)

* $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - e^{2x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left[1 - \overbrace{\dfrac{e^{2x}}{x^3}}^{+\infty}\right] = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\right) \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - e^x}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{2}{x} - \frac{e^x}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = -\infty$

On pose $X = -\dfrac{1}{x}$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to -\infty} -X e^X = 0$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x} = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{2x}-e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x(e^x-1) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)}{x}(e^x+1) = 2$

* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x}{e^x-1} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{\dfrac{e^x-1}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{\sqrt{2x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{2x}}{2}($

$\dfrac{e^x-1}{x}) = 0\times 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x(e^{\frac{1}{x^2}}-1) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{-1}{\sqrt{t}}(e^t-1) =$

$\lim\limits_{t\to 0^+} -\sqrt{t}(\dfrac{e^t-1}{t}) = 0\times 1 = 0$ (on pose $t = \dfrac{1}{x^2}$)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}{e^{\frac{1}{x}}+1}) = \dfrac{1}{2}$ d'après ce qui précède

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}) = ?$

Soit $f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})$

On sait que : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x(x+1)}$

On a $f(x) = x^2e^{\frac{1}{x}}(1 - e^{-\frac{1}{x(x+1)}})$

$= \dfrac{x^2e^{\frac{1}{x}}}{-x(x+1)}\left(\dfrac{(1-e^{\frac{1}{(x+1)x}})}{-\dfrac{1}{x(x+1)}}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ $X = -\dfrac{1}{x(x+1)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1-e^{-\frac{1}{(x+1)x}})}{-\dfrac{1}{x(x+1)}} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{(e^X-1)}{X} = -1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^2}{x(x+1)} = -1$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

EX6

1. $f'(x) = 2 + e^{-x}$

2. $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

3. $f'(x) = e^{-x} - x\, e^{-x} = (1-x)\, e^{-x}$

4. $f'(x) = \dfrac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \dfrac{2-x}{e^x}$

$= (2-x)\, e^{-x}$

5. $f'(x) = \dfrac{2e^x(x^2+1) - 2x(e^{2x}-1)}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{2\left[(x^2-x+1)e^{2x} + x\right]}{(x^2+1)^2}$

6. $f'(x) = 2 - 2\dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{2}{e^x+1}$

7. $f'(x) = e^x.\mathrm{Ln}(x) + \dfrac{e^x}{x} = (\frac{1}{x} + \mathrm{Ln}(x))\, e^x$

8. $f'(x) = e^x + e^{-x}$

9. $f'(x) = \dfrac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} =$

$\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

EX7

$f(x) = (ax^2 + bx + c).\, e^{-x}$

$A(0,1) \in (\xi_f) \Rightarrow f(0) = 1$

On a aussi $f'(1) = 0$ et $f'(0) = -6$

Or : $f'(x) = (2ax + b)\, e^{-x} - (ax^2 + bx + c).\, e^{-x}$

$f'(x) = [-ax^2 + (2a-b)x + (b-c)].\, e^{-x}$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f'(0) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a - c = 0 \\ b - c = -6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad c = 1 \;;\; a = 1$ et $b = -5$

Donc : $f(x) = (x^2 - 5x + 1).\, e^{-x}$

EX8

$f(x) = (x+1)^2.\, e^{-x}$

1) $f'(x) = 2(x+1)\, e^{-x} - e^{-x}(1+x)^2$

$= (1 - x^2)\, e^{-x}$

$f''(x) = -2x\, e^{-x} - e^{-x}(1-x^2)$

$= (x^2 - 2x - 1)\, e^{-x}$

2) Démonstration par récurrence :

* <u>Pour n = 1</u>

$f'(x) = (1-x^2)\, e^{-x}$

$= (-1)^1[(x^2 - 0.x + (-1)]\, e^{-x}$

$a_1 = 0$ et $b_1 = -1$ (Vrai)

*supposons que :

$f^{(n)}(x) = (-1)^n[(x^2 + a_n.x + b_n]\, e^{-x}$

avec a_n et b_n des réels et montrons que

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}[(x^2 + a_{n+1}.x + b_{n+1}]\, e^{-x}$

en Effet

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n[(2x + a_n)\, e^{-x} - (x^2 + a_n.x + b_n)\, e^{-x}]$

$= (-1)^n[-x^2 - (a_n - 2)x + (a_n - b_n)]\, e^{-x}$

$= (-1)^{n+1}[x^2 + (a_n - 2)x + (b_n - a_n)]\, e^{-x}$

De la forme

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}[x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1}]\, e^{-x}$

avec $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2 \\ a_1 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_{n+1} = b_n - a_n \\ b_1 = -1 \end{cases}$

3) (a_n) est une suite arithmétique de raison

$r = -2$ d'où $a_n = a_1 + (n-1)r$

$\boxed{a_n = -2(n-1)}$

pour $k \geq 2$, $b_k = b_{k-1} - a_{k-1}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} b_k = \sum_{k=2}^{n} b_{k-1} - \sum_{k=2}^{n} a_{k-1}$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$\Rightarrow b_n = b_1 - \frac{n-1}{2}(a_1 + a_{n-1})$

$\Rightarrow b_n = b_1 - \frac{n-1}{2}[-2(n-2)]$

$\Rightarrow b_n = -1 + (n-1).(n-2)$

D'où $\boxed{b_n = n^2 - 3n + 1}$

4) $a_{100} = -198$ et $b_{100} = 9701$

Donc $f^{(100)}(x) = (x^2 - 198x + 9701)e^{-x}$

EX9

1) $f(x) = e^{2x}$

$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

2) $f(x) = xe^{1+x^2}$

$F(x) = \frac{1}{2}e^{1+x^2}$

3) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}e^{\tan x}$

$F(x) = e^{\tan x}$

4) $f(x) = \sin(2x)e^{\cos^2 x}$

$= 2\sin x.\cos x\, e^{\cos^2 x}$

$F(x) = -e^{\cos^2 x}$

5) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$

$F(x) = -e^{\frac{1}{x-1}}$

6) $f(x) = \sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$

$F(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} = 2\sqrt{e^x}$

7) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$F(x) = \frac{1}{2}\text{Ln}(1+e^{2x})$

8) $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}}$

$= \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} - \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}+1}$

$F(x) = \frac{1}{2}\text{Ln}(1+e^{2x}) + \frac{1}{2}\text{Ln}(1+e^{-2x})$

$= \frac{1}{2}\text{Ln}[(e^{2x}+1)(e^{-2x}+1)]$

$F(x) = \frac{1}{2}\text{Ln}(e^{2x}+e^{-2x}+2)$

9) $f(x) = xe^{2x^2}$

$F(x) = \frac{1}{4}e^{2x^2}$

EX10

1) a) $\int_0^1 (1+e^x).dx = \left[x+e^x\right]_0^1 = e$

b) $\int_0^1 xe^{x^2}.dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$

c) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}.dx = \left[Ln(1+e^x)\right]_0^1$

$= \text{Ln}(\frac{1+e}{2})$

d) $\int_1^2 \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

$= \left[-Ln(1+e^{-x})\right]_1^2$

$= \text{Ln}(\frac{e^2+e}{e^2+1})$

e) $\int_1^2 \frac{1}{x}e^{Lnx}.dx = \int_1^2 .dx = 1$

f) $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.dx = \left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]_1^2$

$= \frac{e^2}{e^2+1} - \frac{e}{e+1}$

g) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}.dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = e - \sqrt{e}$

2) a) $I = \int_1^2 2xe^{-x}.dx$

$$\begin{cases} v(x) = 2x & \rightarrow \quad v'(x) = 2 \\ u'(x) = e^{-x} & \rightarrow \quad u(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

D'où

$$I = \left[-2xe^{-x}\right]_1^2 - \int_1^2 (-2e^{-x}).dx$$

$$I = \frac{2}{e} - \frac{4}{e^2} - \left[2e^{-x}\right]_1^2$$

$$I = \frac{2}{e} - \frac{4}{e^2} - \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e}$$

$$\boxed{I = \frac{4}{e} - \frac{6}{e^2}}$$

b) $I = \int_0^1 x^3 e^{-x^2}.dx$

$$\begin{cases} u'(x) = xe^{-x^2} \rightarrow u(x) = -\frac{1}{2}\ e^{-x^2} \\ v(x) = x^2 \rightarrow v'(x) = 2x \end{cases}$$

$$I = \left[-\frac{x^2}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{-x^2}.dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 -2xe^{-x^2}.dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}}$$

c) $I = \int_0^{Ln2} e^{-x}.Ln(1+e^x).dx$

$$\begin{cases} v(x) = Ln\,(1+e^x) \rightarrow v'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \\ u'(x) = e^{-x} \rightarrow u(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = \left[-e^{-x}Ln(1+e^x)\right]_0^{\ln 2} + \int_0^{Ln2} \frac{1}{1+e^x}.dx$$

$$= Ln2 - 2\,Ln\,(1+e^{-Ln2}) + \int_0^{Ln2} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.dx$$

$$= Ln2 - 2\,Ln\frac{3}{2} + \left[-Ln(1+e^{-x})\right]_0^{\ln 2}$$

$$\boxed{I = 5\ln 2 - 3Ln3}$$

d) $I = \int_1^0 x^2e^x.dx$

$$\begin{cases} u'(x) = e^x \rightarrow u(x) = e^x \\ v(x) = x^2 \rightarrow v'(x) = 2x \end{cases}$$

$$I = \left[x^2e^x\right]_1^0 - \int_1^0 2xe^x.dx$$

$$I = -e - \int_1^0 2xe^x.dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = e^x \rightarrow u(x) = e^x \\ v(x) = 2x \rightarrow v'(x) = 2 \end{cases}$$

$$I = -e - \left(\left[2xe^x\right]_1^0 - \int_1^0 2e^x.dx\right)$$

$$I = -e - \left(-2e - \left[2e^x\right]_1^0\right).\ \boxed{I = 2 - e}$$

e) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-x}\sin x).dx$

$$\begin{cases} v(x) = \sin x \rightarrow v'(x) = \cos x \\ u'(x) = e^{-x} \rightarrow u(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = \left[-\sin x.e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-x}\cos x).dx$$

$$I = -e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-x}\cos x).dx$$

$$\begin{cases} v(x) = \cos x \rightarrow v'(x) = -\sin x \\ u'(x) = e^{-x} \rightarrow u(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = -e^{-\frac{\pi}{2}} + \left(\left[-\cos\ x.e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-x}\sin\ x).dx\right)$$

$$I = -e^{-\frac{\pi}{2}} + (1 + I) \Rightarrow 2I = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\right)}$$

EX11

1) $t > 0$

$(t + \frac{1}{t}) - 2 = \frac{t^2+1-2t}{t} = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0$

D'où $(t + \frac{1}{t}) \geq 2$, pour $t > 0$

2) * pour $t = e^{\frac{x}{2}} > 0$ on a: $\frac{1}{t} = \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = e^{-\frac{x}{2}}$

on aura : $e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \geq 2$

* $e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \geq 2 \Rightarrow e^{\frac{x}{2}}\ (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) \geq 2e^{\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow e^x + 1 \geq 2e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \mathrm{Ln}\,(e^x+1) \geq \mathrm{Ln}\,(2e^{\frac{x}{2}})$

$\Rightarrow \mathrm{Ln}\,(e^x + 1) \geq \mathrm{Ln}\,2 + \mathrm{Ln}\,(e^{\frac{x}{2}})$

$\Rightarrow \mathrm{Ln}\,(e^x + 1) \geq \frac{x}{2} + \mathrm{Ln}\,2$

EX12

1) * $x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 \Rightarrow \boxed{e^x - 1 \geq 0}$ (1)

* On pose $U(x) = x\,e^x - e^x + 1$; $x \in [0, +\infty[$

$U'(x) = x\,e^x \geq 0$

U est croissante sur $[0, +\infty[$

$x \geq 0 \Rightarrow U(x) \geq U(0)$

$\Rightarrow U(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{x\,e^x - e^x + 1 \geq 0}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 0 \leq e^x - 1 \leq x\,e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$

2) $x \geq 0$

Pour $t \in [0, x]$, on a :

$0 \leq e^t - 1 \leq t\,e^t \Rightarrow 0 \leq e^t - 1 \leq t\,e^x$

Car $e^t \leq e^x$

Donc :

$$0 \leq \int_0^x (e^t - 1).dt \leq \int_0^x te^x.dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left[e^t - t\right]_0^x \leq e^x \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x$$

EX13

$$f(x) = \frac{2 + e^x}{1 + e^x}$$

1) $f(x) = \dfrac{2(1+e^x) - e^x}{1 + e^x}$

$= 2 - \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

Donc $a = 2$ et $b = -1$

2) $\int_0^1 f(x)dx = \left[2x - Ln(1 + e^x)\right]_0^1$

$= 2 - \ln(1 + e) + \mathrm{Ln}2$

$= 2 + \mathrm{Ln}\,(\dfrac{2}{1 + e})$

EX14

$Df = \mathbb{R}$

$f(x) = x - 2 + e^{-\frac{x}{2}}$

1) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}$

$= \dfrac{2e^{\frac{x}{2}} - 1}{2e^{\frac{x}{2}}}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -2\mathrm{Ln}2$

x	$-\infty$	$-2\mathrm{Ln}2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-2\mathrm{Ln}2$	↗ $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - 2 + \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}}_{\to 0}) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} (-2X - 2 + e^{X})$$

on pose $X = -\frac{x}{2}$

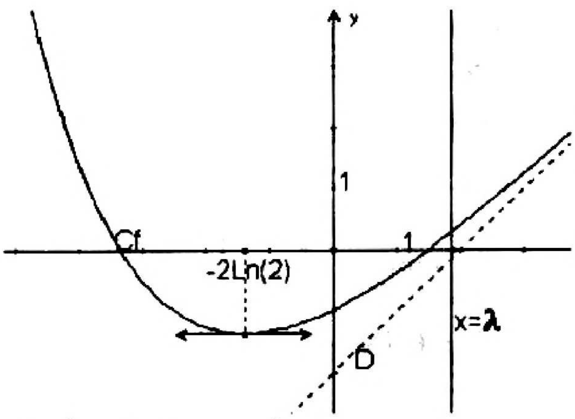
$$= \lim_{X \to +\infty} X(-2 - \frac{2}{X} + \frac{e^{X}}{X}) = +\infty$$

2) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$

D'où la droite D d'équation : $y = x - 2$ est une asymptote à (ξf) au voisinage de $+\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^{\frac{x}{2}}}) = -\infty$

Branche infinie parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$



1) $\lambda > 0$, $\Delta : x = \lambda$

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} (f(x) - (x-2))dx = \int_0^{\lambda} e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{\lambda}$$

$$A(\lambda) = 2(1 - e^{-\frac{\lambda}{2}}) \text{ u.a} \Rightarrow \lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 2$$

EX15

$$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

1) $Df=\mathbb{R}$

1) $\forall x \in Df$ on a $(-x) \in Df$

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-f(x)$$

Donc f est impaire

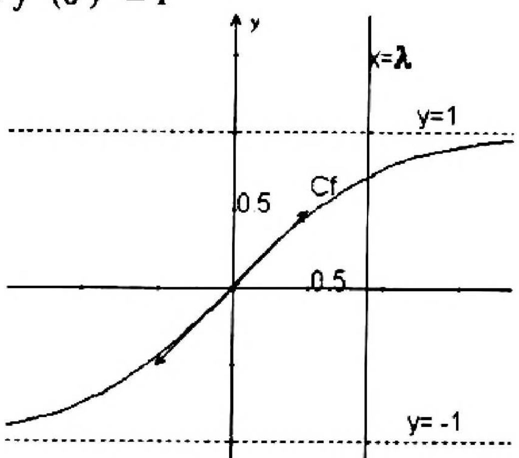
2) $f'(x)=\dfrac{4}{(e^{x}+e^{-x})^{2}}>0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	+
$f_n(x)$	$-1 \nearrow 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}\right)=1$ (avec $\frac{1}{e^{2x}} \to 0$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ car f est impaire

b) $f'(0)=1$



3) $\lambda>1$, $\Delta : x=\lambda$

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda} f(x).dx$$

$$=\left[Ln(e^{x}+e^{-x})\right]_0^{\lambda}$$

$$=\mathrm{Ln}(e^{\lambda}+e^{-\lambda})-\mathrm{Ln}\,2$$

$$\boxed{A(\lambda)=\mathrm{Ln}\left(\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\right)} \text{ u.a}$$

EX16

1) a/ on pose $u(x)=e^{x}-x-1$; $x\in\mathbb{R}$

$u'(x)=e^{x}-1>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	+
$u(x)$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

u admet 0 comme minimum absolu en 0

$\Rightarrow u(x)\geq 0$; $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow u(x)>0$; $\forall x\in\mathbb{R}^*$

$\Rightarrow e^{x}-x-1>0 \Rightarrow e^{x}>x+1$

b) $x\neq 0$

(i) $t=-x$ d'après a) $e^{t}>t+1$

$\Rightarrow e^{-x}>1-x$

(ii) pour $x\in\,]0,1[$

$e^{-x}>1-x \Rightarrow \dfrac{1}{e^{x}}>1-x$ comme $1-x>0$

on aura : $e^{x}<\dfrac{1}{1-x}$

2) $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$

$V_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

a/ * d'après 1) $e^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \boxed{e > U_n}$ (1)

* $\frac{1}{n+1} \in]0\,,1[$ d'après (ii)

$e^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \Rightarrow e^{\frac{1}{n+1}} < 1 + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \left(e^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$\Rightarrow \boxed{e < V_n}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $U_n < e < V_n$, $\forall n \in$ IN*

b/ $V_n - U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$= \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right]\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$= \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right]U_n$

$V_n - U_n = \frac{1}{n}U_n$, n ∈ IN*

$U_n \leq e \Rightarrow U_n \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{n}U_n \leq \frac{3}{n}$

D'où $V_n - U_n \leq \frac{3}{n}$, pour n ∈ IN*

c/ $V_n - U_n \leq \frac{3}{n}$, n ∈ IN*

$\frac{3}{n} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{n}{3} \geq 10^6 \Leftrightarrow n \geq 3.10^6$

D'où $U_{3\,000\,000} < e < V_{3\,000\,000}$

(calculatrice)

$\Rightarrow$ 2,718254 < e < 2,718255

EX17 :

1) $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}.dx = \left[Ln(1+e^x)\right]_0^1$ $\boxed{A = Ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$

$B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.dx = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e+1}$ $\boxed{B = \frac{e-1}{2(e+1)}}$

2) t > 0

$\frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(1+2t+t^2)-(t^2+2t)}{(1+t)^2}$

$= 1 - \frac{t^2+2t}{(1+t)^2} = 1 - \frac{(t^2+t)+t}{(1+t)^2}$

$= 1 - \left(\frac{t}{1+t} + \frac{t}{(1+t)^2}\right)$

$= 1 - \frac{t}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2}$

(a = 1, b = − 1 ; c = − 1)

$I = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right).dx$

$I = \int_0^1 .dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}.dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.dx$

$I = [x]_0^1 - (A + B)$

$I = 1 - \left(Ln\left(\frac{1+e}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{e+1}\right)$

$\boxed{I = 1 - \left(Ln\left(\frac{1+e}{2}\right) + \frac{e-1}{2(e+1)}\right)}$

3) $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}.dx$

$$\begin{cases} v(x) = x \longrightarrow v'(x) = 1 \\ u'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^3} \longrightarrow u(x) = -\dfrac{1}{2(1+e^x)^2} \end{cases}$$

$$J = \left[\frac{-x}{2(1+e^x)^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}.dx$$

$$J = -\frac{1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2}I$$

$$J = -\frac{1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2(1+e)} - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$\boxed{J = \frac{e^2+4e+1}{2(1+e)^2} - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

EX18

1) $2 - e^{1/x} > 0 \Leftrightarrow e^{1/x} < 2 \Leftrightarrow 1/x < \mathrm{Ln}(2)$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{Ln(2)}$ ou $x<0$

$S_{IR} =]\frac{1}{Ln(2)} ; +\infty[\cup IR^{*}_{-}$

2) $f(x) = \mathrm{Ln}(2 - e^{1/x})$

a/ $D_f =]\frac{1}{Ln(2)} ; +\infty[\cup IR^{*}_{-}$.

b/ $* \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} Ln(2 - e^{\frac{1}{x}})$

$= \lim\limits_{X\to0} Ln(2 - e^X) = Ln(1) = 0$

$* \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{Ln(2)}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{Ln(2)}\right)^+} Ln(2 - e^{1/x})$

$= \lim\limits_{X\to0^+} Ln(X) = -\infty$

$* \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} Ln(2 - e^{\frac{1}{x}})$

$= \lim\limits_{X\to-\infty} Ln(2 - e^X) = Ln(2)$

$* \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} Ln(2 - e^{\frac{1}{x}})$

$= \lim\limits_{X\to0} Ln(2 - e^X) = Ln(1) = 0$

c/ $* \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = Ln(2)$ $(finie)$

d où f est prolongeable par continuité à gauche en 0

3) a/

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} =$

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{Ln(2 - e^{1/x}) - Ln(2)}{x} =$

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{Ln(1 - \frac{1}{2}e^{1/x})}{x} =$

$\lim\limits_{x\to0^-} \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{1/x}}{x}\right)\dfrac{Ln(1 - \frac{1}{2}e^{1/x})}{\frac{1}{2}e^{1/x}} =$

$\lim\limits_{X\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}X.e^X\right)\dfrac{Ln(1 - \frac{1}{2}e^X)}{\frac{1}{2}e^X} =$

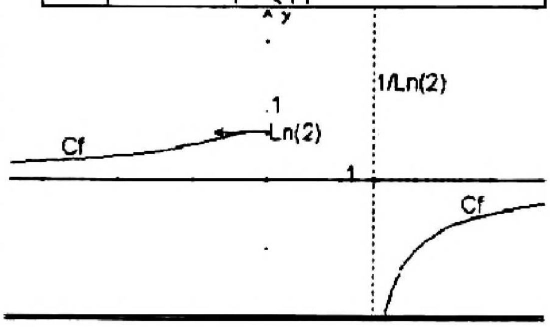
$\lim\limits_{X\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}X.e^X\right)\lim\limits_{Y\to0^-} -\dfrac{Ln(1+Y)}{Y} = 0\times(-1) = 0$

Donc g est dérivable à gauche en 0 et $g'_g(0) = 0$

b/ g est dérivable sur chacune des intervalles $]-\infty;0]$ et $]\frac{1}{Ln(2)} ;+\infty[$ et pour $x\neq0$ $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x^2}.e^{1/x}}{2 - e^{1/x}}$

$g'(x) > 0 \ \forall x \in]-\infty; 0] \cup]\frac{1}{Ln(2)} ; +\infty[$

x	$-\infty$		0	1/Ln(2)		$+\infty$
g'(x)		+			+	
g(x)	0	↗	Ln(2)	$-\infty$	↗	0



EX19 $a>0$, $G_a(x) = e^{-ax^2}$

1) la fonction : $x \to -ax^2$ est dérivable sur IR d'où G_a : $x \to e^{-ax^2}$ est dérivable sur IR et

on a : $G_a'(x) = -2ax\, e^{-ax^2}$, $a>0$ et $x \in$ IR

2)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$G_a'(x)$		$+$	0	$-$	
$G_a(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$$\lim_{x\to+\infty} -ax^2 = \lim_{x\to-\infty} -ax^2 = -\infty$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} G_a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} G_a(x) = 0$

1) $G_a'(x) = -2ax\, e^{-ax^2}$

$G_a''(x) = -2a.(e^{-ax^2} - 2ax^2\, e^{-ax^2})$

$= -2a.(1-2ax^2)\, e^{-ax^2}$

On a : $1-2ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{2a}}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$	$+\infty$
$G_a''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

G_a'' s'annule en $-\frac{1}{\sqrt{2a}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, en changeant de signe d'où les pts I $(\frac{-1}{\sqrt{2a}}$, $G_a(\frac{-1}{\sqrt{2a}})$)et J $(\frac{1}{\sqrt{2a}}$, $G_a(\frac{1}{\sqrt{2a}})$) sont deux points d'inflexion pour (ξ_{G_a})

avec : I $(-\frac{1}{\sqrt{2a}} , \frac{1}{\sqrt{e}})$ et J $(\frac{1}{\sqrt{2a}} , \frac{1}{\sqrt{e}})$

4) $y_I = y_J = \frac{1}{\sqrt{e}}$

I et J appartient à la droite Δ : $y = \frac{1}{\sqrt{e}}$

On a $x_I \neq 0$ et $x_J \neq 0$

Donc : $\xi = \Delta / \left\{ A(0, \frac{1}{\sqrt{e}}) \right\}$

5)
$$\left.\begin{array}{l} G_{\frac{1}{2}}(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ G_1(x) = e^{-x^2} \\ G_2(x) = e^{-2x^2} \end{array}\right\} \text{fonctions paires}$$

On a : $\frac{1}{2}x^2 \le x^2 \le 2x^2$

$\Leftrightarrow$

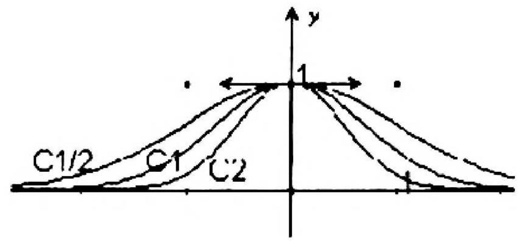
$-2x^2 \le -x^2 \le -\frac{1}{2}x^2$

Et comme la fonction exp est croissante

Donc $G_2(x) \le G_1(x) \le G_{\frac{1}{2}}(x)$

D'où : $\zeta_{\frac{1}{2}}$ au dessus de ζ_1

et ζ_1 Au dessus de ζ_2



EX20

$$f(x) = \left|3x^2 - 1\right|.e^{1-x^2}$$

1) $\forall x \in Df = IR$ on a $(-x) \in Df = IR$

$$f(-x) = \left|3(-x)^2 - 1\right|.e^{1-(-x)^2}$$

$$= \left|3x^2 - 1\right|.e^{1-x^2} = f(x)$$

D'où f est paire

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2 - 1).e^{1-x^2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2-1).e.e^{-x^2}$ *posons* $X = -x^2$

$= \lim\limits_{X\to-\infty} (-3X - 1).e.e^X$

$= \lim\limits_{X\to-\infty} -3eX.e^X - e.e^X = 0$

3) f continue sur IR : produit de deux fonctions continues

4)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$3x^2-1$		+	0	−	0	+	

$$* \lim_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} \frac{f(x)-f(\frac{1}{\sqrt{3}})}{x-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} \frac{(3x^2-1).e^{1-x^2}}{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \lim_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} \frac{3(x^2-(\frac{1}{\sqrt{3}})^2)e^{1-x^2}}{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \lim_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} \frac{3(x-\frac{1}{\sqrt{3}}).(x+\frac{1}{\sqrt{3}})e^{1-x^2}}{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \lim_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} 3\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).e^{1-x^2}$$

$$= 2\sqrt{3}\ e^{\frac{2}{3}} = f'_d\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$* \lim_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^-} \frac{f(x)-f(\frac{1}{\sqrt{3}})}{x-\frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \lim_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^-} -3\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).e^{1-x^2}$$

$$= -2\sqrt{3}\ e^{\frac{2}{3}} = f'_g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$f'_g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \neq f'_d\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ d'où f n'est pas dérivable en $\frac{1}{\sqrt{3}}$

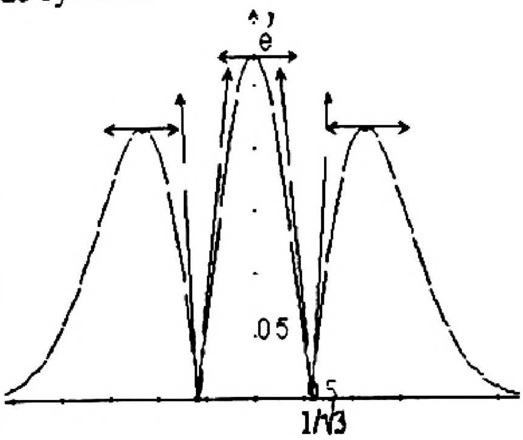
5)
$$f(x) = \begin{cases} (3x^2-1)e^{1-x^2} \text{ si } x \notin \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \\ -(3x^2-1)e^{1-x^2} \text{ si } x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\,(4-3x^2)e^{1-x^2} \text{ si } x \notin \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \\ 2x\,(3x^2-4)e^{1-x^2} \text{ si } x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[\end{cases}$$

Tableau de variation sur IR_+ car f est paire :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	$\searrow$	0	$\nearrow$	$3e^{-\frac{1}{3}}$	$\searrow$	0

6) $y = 0$ asymptote à Cf et $(O\vec{j})$ axe de symétrie



EX21

$n \in IN$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\sin x.dx$$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\cos x.dx$$

1) * $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} .\sin x.dx = [-\cos x.]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} .\cos x.dx = [\sin x.]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

2) $n \in IN^*$

* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\sin x.dx$

$$\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \to u'(x) = -n\ e^{-x} \\ v'(x) = \sin(x) \to v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

$$I_n = [-e^{-nx}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\cos x.dx$$

$I_n = 1 - nJ_n$, d'ou $\boxed{I_n + nJ_n = 1}$ (1)

* $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\cos x.dx$

Soit

$$\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \to u'(x) = -n\ e^{-x} \\ v'(x) = \cos x \to v(x) = \sin x \end{cases}$$

$$J_n = [e^{-nx}\sin x.]_0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}.\sin x.dx$$

$$J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} + nI_n$$

d'ou $\boxed{J_n - nI_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}}$ (2)

(1) et (2) donne

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -\ nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -\ nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} n\,I_n + n^2 J_n = n \\ -\ nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow (1 + n^2)J_n = n + e^{-n\frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{J_n = \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2 + 1}}$$

$\Rightarrow$ * $I_n = 1 - nJ_n \Rightarrow I_n = 1 - \dfrac{n^2 + ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}$

$$\boxed{I_n = \frac{1 - n.e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n^2+1}}$$

4) $I_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{1 - x.e^{-x\frac{\pi}{2}}}{x^2+1}$

$$\lim_{x \to +\infty} x.e^{-x\frac{\pi}{2}} = \lim_{X \to -\infty} -\frac{2}{\pi} X.e^X = 0$$

Posons $X = -x\dfrac{\pi}{2}$

D'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

On a $I_n + nJ_n = 1 \Rightarrow J_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{I_n}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} J_n = 0$

EX22: $n \in IN$

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-nx}.\sin x.dx$$

1) Soit

$\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \rightarrow u'(x) = -n\ e^{-x} \\ v'(x) = \sin x \rightarrow v(x) = -\cos x \end{cases}$

$I_n = \left[-e^{-nx}\cos x.\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - n \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-nx}.\cos dx$

Posons : $J_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-nx}.\cos dx$

$\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \rightarrow u'(x) = -n\ e^{-x} \\ v'(x) = \cos x \rightarrow v(x) = \sin x \end{cases}$

$J_n = \left[-e^{-nx}\sin x.\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + n\ I_n = n\ I_n$

Car $\sin(k\pi) = 0 \ \forall k \in Z$

D'où: $I_n = \left[-e^{-nx}\cos x.\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - n^2 I_n$

On a :

$\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\cos((n+1)\pi) = -(-1)^n$

Donc :

$I_n = e^{-n(n+1)\pi}.(-1)^n + e^{-n^2\pi}.(-1)^n - n^2 I_n$

$\Rightarrow I_n = (-1)^n e^{-n^2\pi}.\left(\dfrac{1 + e^{-n\pi}}{n^2+1}\right)$

2) $|I_n| = e^{-n^2\pi}.\left(\dfrac{1 + e^{-n\pi}}{n^2+1}\right)$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} |I_n| = 0$. Donc $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

EX23

$n \in IN^*$, $m \in IN$:

$$I_{(n,m)} = \int_0^1 t^n(1-t)^m dt \quad ; \quad I_{(n,0)} = \frac{1}{n+1}$$

1) Soit $u'(t) = t^n \Rightarrow u(t) = \dfrac{t^n}{n+1}$

$v(t) = (1-t)^m \Rightarrow v'(t) = -m(1-t)^m$

$I_{(n,m)} = \left[\dfrac{1}{n+1} t^n (1-t)^m\right]_0^1 + \dfrac{m}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{m-1} dt$

$\Rightarrow I_{(n,m)} = \dfrac{m}{n+1} I_{(n+1,m-1)}$

2) d'après 1)

$\Rightarrow I_{(n,m)} = \dfrac{m}{n+1} I_{(n+1,m-1)}$

$I_{(n+1,m-1)} = \dfrac{m-1}{n+2} I_{(n+2,m-2)}$

⋮

pour tout : $0 \leq k \leq m-1$

$$I_{(n+k,m-k)} = \frac{m-k}{n+k+1} I_{(n+k+1,m-k-1)}$$

⋮

$$I_{(n+m-1\,,1)} = \frac{1}{n+1} I_{(n+m\,,0)}$$

En multipliant terme à terme on aura

$$I_{(n,m)} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 2\,1}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m)} I_{(n+m\;0)}$$

$$I_{(n,m)} = \frac{\frac{m!}{(n+m)!}}{n!} I_{(n+m,0)}$$

Donc $I_{(n,m)} = \frac{m!\,n!}{(n+m)!} I_{(n+m\;0)}$

Or $I_{(n+m\;0)} = \frac{1}{n+m+1}$

$$\Rightarrow \boxed{I_{(n,m)} = \frac{m!\,n!}{(n+m+1)!}}$$

EX24

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{e^{U_n}}{U_n+2} \end{cases}, \; n \in \mathbb{N}$$

1) $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$; $x \in [0\,,1]$

$$f'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$$

x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{e}{3}$

b) $f''(x) = \frac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^3} > 0$

Pour $x \in [0\,,1]$

f' est croissante sur $[0\,,1]$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f'(0) \leq f'(x) \leq f'(1)$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2e}{9}$

$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{2e}{9} \leq \frac{e}{4}$

$\Rightarrow \boxed{|f'(x)| \leq \frac{e}{4}}$

c) Soit $\varphi(x) = f(x) - x$

$\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$

car $|f'(x)| \leq \frac{e}{4} < 1$

φ est strictement décroissante sur $[0\,,1]$

φ est continue sur $[0\,,1]$

$\varphi(0).\,\varphi(1) = \frac{1}{2}(\frac{e}{3} - 1) < 0$

D'où il existe un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$, par suite l'équation $f(x) = x$ admet α comme unique solution dans $[0\,,1]$

2) * pour n = 0

$0 \leq U_0 = \frac{1}{2} \leq 1$ (Vrai)

* supposons que : $0 \leq U_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

En –effet

$0 \leq U_n \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(U_n) \leq f(1)$

Car f est strictement croissante sur $[0,\,1\,]$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq \frac{e}{3}$

$\Longrightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$

Conclusion : $0 \leq U_n \leq 1$, pour tout $n \in IN$

3) a) $\int_\alpha^x f'(v)dv = [f(v)]_\alpha^x = f(x) - f(\alpha)$

b) $x \in [0\,,1]$

$$|f(x) - f(\alpha)| = \left|\int_\alpha^x f'(v)dv\right|$$

*Pour $x \geq \alpha$:

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \int_\alpha^x |f'(v)|dv$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq \int_\alpha^x \frac{e}{4}dv$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{e}{4}(x - \alpha)$$

*Pour $x < \alpha$:

$$|f(x) - f(\alpha)| = \left|\int_x^\alpha f'(v)dv\right|$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq \int_x^\alpha |f'(v)|dv$$

$$\leq \int_x^\alpha \frac{e}{4}dv \leq \frac{e}{4}(\alpha - x)$$

D'où

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{e}{4}|x - \alpha| \; \forall x \in [0\,,1]$$

$U_n \in [0\,,1] \Rightarrow |f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{e}{4}|U_n - \alpha|$

$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e}{4}|U_n - \alpha|$

c) *pour $n = 0$

$|U_0 - \alpha| = \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}$

Car $\alpha \in [0\,,1]$

D'où $|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4}\right)^0$

(Vrai)

* supposons que :

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4}\right)^n$

et montrons que

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4}\right)^{n+1}$

D'après b)

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e}{4}|U_n - \alpha|$ et

comme

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4}\right)^n$

alors $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4}\right)^{n+1}$

Conclusion : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4}\right)^n$; $n \in IN$

Or $\frac{e}{4} \in]-1,1[\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4}\right)^n = 0$ et

par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$

EX 25 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{3})^x = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^{x-1} = \frac{1}{2}\times 2^x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\times 2^x\right) = +\infty$ car $2>1$

3) $\frac{2^x}{2^{x^2+x}} = \frac{2^x}{2^x.2^{x^2}} = \frac{1}{2^{x^2}} = 2^{-x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{2^{x^2+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x^2}$

$X = -x^2$ $\lim\limits_{X\to-\infty} 2^X = 0$

4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}=\left(\frac{1}{4}\right)^x.\left[1-\frac{1}{4}\right]=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^x$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^x\right)=+\infty$ car $0<\frac{1}{4}<1$

5) $f(x)=\frac{3^x+3^{x+1}}{2^x+2^{x-1}}=\frac{4.3^x}{\frac{3}{2}.2^x}=\frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ car $\frac{3}{2}>1$

6) $\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}})=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}.\left[1-x^{\frac{1}{3}}\right]=-\infty$

7) $g(x)=\frac{\ln x}{2^x}=\frac{\ln x}{e^{x\ln 2}}=(\ln x).e^{-x\ln 2}=\left(\frac{\ln x}{x}\right)(xe^{-x\ln 2})$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$X=-x\ln 2$, $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x\ln 2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-Xe^X}{\ln 2}=0$

d'où $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0\times 0=0$

8) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left[x.e^{-3x}\right]^{\frac{1}{3}}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-1}{3}Xe^X\right]^{\frac{1}{3}}=0$

(X=-3x)

9) $\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{2}{3}}\ln x-x^{\frac{4}{3}}\ln x)=0-0=0$

10) $\lim_{x\to+\infty}2^x-e^x=\lim_{x\to+\infty}2^x.\left[1-\left(\frac{e}{2}\right)^x\right]=-\infty$

EX 26 :

$x\in\,]0,+\infty[$

$f(x)=\ln(2^x)-\ln(x^2)$

1) $f(2)=\ln 4-\ln 4=0$

$f(4)=\ln 16-\ln 16=0$

2) $f(x)=x\ln 2-2\ln x$

$f'(x)=\ln 2-\frac{2}{x}=\frac{x.\ln 2-2}{x}$

x	0		2/ln2		+∞
f '(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ +∞	↘	f(2/ln2)	↗	+∞

* $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\ln 2-2\ln x=+\infty$

* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln 2-2\frac{\ln x}{x}\right]=+\infty$

* $f\left(\frac{2}{\ln 2}\right)=2-2\ln\left(\frac{2}{\ln 2}\right)<0$

x	0		2		4		+∞
f(x)	‖	+	0	-	0	+	

3) $x\in[2,4]\to f(x)\le 0\Rightarrow 2^x\le x^2$

$x\in\,]0,2]\cup[4,+\infty[\,\to x^2\le 2^x$

EX 27 :

$f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^x=0$

d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1$

* $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^x=+\infty$

d'où $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2) f est dérivable sur IR et

$f'(x)=\ln\left(\frac{3}{5}\right).\left(\frac{3}{5}\right)^x+\ln\left(\frac{4}{5}\right).\left(\frac{4}{5}\right)^x<0$

car $\ln\left(\frac{4}{5}\right)<0$ et $\ln\left(\frac{3}{5}\right)<0$

f est strictement décroissante sur IR

* $3^x+4^x=5^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0$

• f est continue et strictement décroissante sur IR .elle réalise donc une bijection de IR sur f(IR)=]-1,+∞[

$0\in\,]-1,+\infty[$ d'où l'équation f(x)=0 admet une unique solution dans IR

(Rq: 2 est la seule solution de l'équation : $3^x+4^x=5^x$)

EX 28 :

$$f(x)=\frac{4^x}{4^{2x}-1}\quad ;\ x\in\mathbb{R}^*$$

1) $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x(4^x-4^{-x})}=\dfrac{1}{4^x-4^{-x}}$

pour $x\in D_f=IR^*$ on a $(-x)\in D_f$

$f(-x)=\dfrac{1}{4^{-x}-4^x}=\dfrac{-1}{4^x-4^{-x}}=-f(x)$

d'où f est impaire

2) $f'(x)=\dfrac{4^x.\ln 4\left(4^{2x}-1\right)-4^x\left(2\ln 4\times 4^{2x}\right)}{\left(4^{2x}-1\right)^2}$

$f'(x)=\dfrac{(\ln 4).4^x.\left[4^{2x}-1-2\times 4^{2x}\right]}{\left(4^{2x}-1\right)^2}$

$f'(x)=\dfrac{(\ln 4).4^x.\left(-4^{2x}-1\right)}{\left(4^{2x}-1\right)^2}$

$f'(x)<0\quad ;\ \forall x\in\,]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
f '(x)	|| -	
f(x)	|| $+\infty$ ↘	0

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4^x}{4^{2x}-1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4^x-\left(\frac{1}{4}\right)^x}=0$

3) a) $f(x)=\dfrac{4}{15}\Leftrightarrow\dfrac{4^x}{4^{2x}-1}=\dfrac{4}{15}$

$\Leftrightarrow 4.(4^{2x}-1)=15\times 4^x\Leftrightarrow 4.(4^{2x})-15\times 4^x-4=0$

on pose $t=4^x$

l'équation devient : $4t^2-15t-4=0$

$\Delta=289\to\sqrt{\Delta}=17$

$t'=\dfrac{1}{4}\quad ;\quad t''=4$

$t=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 4^x=\dfrac{-1}{4}$ impossible

$t=4\Leftrightarrow 4^x=4\Leftrightarrow x=1$

$S_{IR}=\{1\}$

b) $f(x)=\dfrac{-4}{15}\Leftrightarrow f(-x)=\dfrac{4}{15}$ car f est impaire

$\Leftrightarrow -x=1\ \Leftrightarrow x=-1$

$S_{IR}=\{-1\}$

EX 29 :

1) $\displaystyle\int_0^1 3^x dx=\int_0^1 e^{x\ln 3}dx=\left[\frac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3}\right]_0^1=\left[\frac{1}{\ln 3}(3^x)\right]_0^1=\frac{2}{\ln 3}$

2) $\displaystyle\int_0^{-1}\frac{3^x}{1+3^x}dx=\int_0^{-1}\frac{1}{\ln 3}.\frac{(\ln 3).3^x}{1+3^x}dx=\frac{1}{\ln 3}\left[\ln(1+3^x)\right]_0^{-1}$

$\displaystyle=\frac{1}{\ln 3}\left[\ln\left(\frac{4}{3}\right)-\ln(2)\right]=\frac{\ln(\frac{2}{3})}{\ln 3}=\frac{\ln 2}{\ln 3}-1$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\ln 2}}2^x.(1+2^x)^2dx=\left[\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{3}(1+2^x)\right)^3\right]_0^{\frac{1}{\ln 2}}$

$\displaystyle=\frac{1}{3\ln 2}\left[(1+2^x)^3\right]_0^{\frac{1}{\ln 2}}=\frac{1}{3\ln 2}\left[(1+e)^3-2^3\right]$

car $2^{\frac{1}{\ln 2}}=e$

4) $\displaystyle\int_1^2 x^{\frac{4}{3}}dx=\left[\frac{1}{\frac{4}{3}+1}x^{\frac{4}{3}+1}\right]_1^2=\left[\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right]_1^2=\frac{3}{7}(2^{\frac{7}{3}}-1)$

5) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 4.x^{\frac{-1}{5}}dx=\left[5x^{\frac{4}{5}}\right]_{\frac{1}{2}}^1=5(1-2^{\frac{-4}{5}})$

6) $\displaystyle\int_0^1\sqrt[4]{x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{4}}dx=\left[\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}\right]_0^1=\frac{4}{5}$

7) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1(3x-1)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 3(3x-1)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}(3x-1)^{\frac{5}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^1$

$\displaystyle=\frac{2}{15}(2^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{-5}{2}})=\frac{2}{15}(4\sqrt{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}})=\frac{31}{30\sqrt{2}}$

EX 30 :

1) $\text{I+J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x(\cos^2 x+\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x dx$

$$=\left[\frac{1}{\ln 2}2^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2^{\frac{\pi}{2}}-1}{\ln 2}$$

$$I+J=\frac{\sqrt{2^\pi}-1}{\ln 2}$$

2) $\text{K}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x.cox(2x)dx$

$$\begin{vmatrix} U'(x)=\cos 2x \to U(x)=\frac{1}{2}\sin(2x) \\ V(x)=2^x \to V'(x)=2^x.\ln 2 \end{vmatrix}$$

$$K=\left[\frac{2^x\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x\sin(2x)dx$$

$$K=\frac{-\ln 2}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x.\sin(2x)dx$$

$$\begin{vmatrix} U'(x)=\sin 2x \to U(x)=\frac{-1}{2}\cos 2x \\ V(x)=2^x \to V'(x)=2^x.\ln 2 \end{vmatrix}$$

$$K=\frac{-\ln 2}{2}\left(\left[\frac{-2^x.\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x\cos 2x\right)$$

$$K=\frac{-\ln 2}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2^\pi}}{2}+\frac{\ln 2}{2}.K\right)$$

$$*K+\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2.K=\frac{-\ln 2}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2^\pi}}{2}\right)$$

$$K=\frac{-\ln 2}{4+(\ln 2)^2}(1+\sqrt{2^\pi})$$

$$*I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x(\cos^2 x-\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x\cos(2x)dx=K$$

d'où $I-J=\dfrac{-\ln 2}{4+(\ln 2)^2}(1+\sqrt{2^\pi})$

3) $\begin{cases} \text{I+J}=\dfrac{\sqrt{2^\pi}-1}{\ln 2} \\ I-J=\dfrac{-\ln 2}{4+(\ln 2)^2}(1+\sqrt{2^\pi}) \end{cases}$

EXERCICE 31

$\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\alpha > 1$

1) $f(x) = x^{-\alpha}$; $D_f =]0\,,\infty[$

$f'(x) = -\alpha\, x^{-\alpha-1} < 0$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$; $n \geq 1$

$k \leq x \leq k+1 \Rightarrow f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ car f est décroissante

$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dx$

$\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$

$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{1}{k^{\alpha}}$

3) – a)

* $\frac{1}{(k+1)^{\alpha}} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \leq \int_1^{n} f(x)dx$

$\Rightarrow S_n - \frac{1}{k} \leq \int_1^{n} f(x)dx$

$\Rightarrow \boxed{S_n \leq S_1 + \int_1^{n} f(x)dx}$ (1)

* $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{1}{k^{\alpha}}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$

$\Rightarrow \boxed{\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$

$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq S_1 + \int_1^{n} f(x)dx$

b) * $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} \geq 0$

d'où S_n est croissante

* $S_n \leq S_1 + \int_1^{n} f(x)dx$

$\int_1^{n} f(x)dx = [\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}[1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}]$

$\int_1^{n} f(x)dx \leq \frac{1}{\alpha-1}$ d'où $S_n \leq S_1 + \frac{1}{\alpha-1}$

$\Rightarrow S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \Rightarrow S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ d'où S_n est majorée par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$

c) (S_n) est croissante et majorée elle est donc convergente

$0 \leq S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ d'où $0 \leq \lim_{n \to +\infty} S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$

d) on a

$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq 1 + \int_1^{n} f(x)\,dx \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$\int_1^{n} f(x)\,dx = [\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}[1 - n^{1-\alpha}]$

et $\int_1^{n+1} f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha-1}[1-(n+1)^{1-\alpha}]$

et comme on a $\int_1^{n} f(x)\,dx \leq \frac{1}{\alpha-1}$ d'où

$\frac{1}{\alpha-1}[1-(n+1)^{1-\alpha}] \leq S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$

$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{1-\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = 0 \quad \alpha > 1$

D'où $\frac{1}{\alpha-1} \leq \lim S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$

$\frac{\alpha}{\alpha-1} = 2008 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2008}{2007}$ et dans ce cas

$\frac{1}{\alpha-1} = 2007$

D'où pour $\alpha = \frac{2008}{2007}$ on aura :

$2007 \leq \lim S_n \leq 2008$

EXERCICE 32

Partie A

$f(x) = 1 + x - e^{\frac{-x}{2}}$

1)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x - e^{\frac{-x}{2}}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 + x - e^{\frac{-x}{2}})$

$X = -\frac{x}{2}$

$\lim\limits_{X \to +\infty} (1\text{-}2X - e^{X}) = \lim\limits_{X \to +\infty} X(\frac{1}{X} - 2 - \frac{e^X}{X}) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} - e^{\frac{-x}{2}} = 0$

d'où D : $y = x + 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $(+\infty)$

c) $f(x) - (x+1) = -e^{\frac{-x}{2}} \leq 0$ d'où $(\mathcal{C})$ est au dessous de D

2) – a) $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} e^{\frac{-x}{2}} > 0$

b)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3)

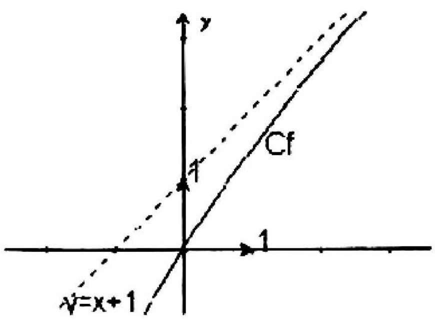
* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} + 1 - \frac{e^{\frac{-x}{2}}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x e^{\frac{x}{2}}} = +\infty$

0^-

Donc $(\mathcal{C})$ admet une B.I parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

* $f(0) = 0$



Partie B

$n > 0$

1) $A_n = \int_n^{n+1} ((x-1) - f(x))\, dx$

$A_n = \int_n^{n+1} e^{\frac{-x}{2}}\, dx = [-2e^{\frac{-x}{2}}]_n^{n+1}$

$A_n = 2[e^{\frac{-n}{2}} - e^{\frac{-n+1}{2}}]$ u.a

2) $A_n = 2[e^{\frac{-n}{2}} - e^{\frac{-n}{2}}.e^{\frac{-1}{2}}] = 2\, e^{\frac{-n}{2}}(1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$

$A_{n+1} = 2\, e^{-\frac{n+1}{2}}(1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$

$A_{n+1} = 2\, e^{-\frac{1}{2}}.\, e^{\frac{-n}{2}}\, (1 - \frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{1}{\sqrt{e}} A_n$

D'où (A_n) est une suite geométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{e}}$

3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = A_1 \frac{1-(\frac{1}{\sqrt{e}})^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}}$

$S_n = \frac{2}{\sqrt{e}}(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}) . \frac{1-(\frac{1}{\sqrt{e}})^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{2}{\sqrt{e}}(1 - e^{\frac{-n}{2}})$

S_n : représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$; la droite D et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = n + 1$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n = \frac{2}{\sqrt{e}}$

EXERCICE 33

$f(x) = \sqrt{x}\,.\,e^{1-x}$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\,.\,e^{1-x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e\,.\,\dfrac{1}{\frac{e^x}{\sqrt{x}}} = 0$ ($\frac{e^x}{\sqrt{x}} \to +\infty$)

y = 0 est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisige de $(+\infty)$

2) a) la fction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur$]0,+\infty[$

la fonction : $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur$]0,+\infty[$

$\Rightarrow x \mapsto e^{1-x}$ est dérivable sur$]0,+\infty[$

d'où la fonction est dérivable sur$]0,+\infty[$ comme étant produit de deux fonctions dérivables

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{1-x} - \sqrt{x}\,.\,e^{1-x}$

$f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{1-x} \quad \forall x \in\,]0,+\infty[$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}\,.e^{1-x}}{x}$

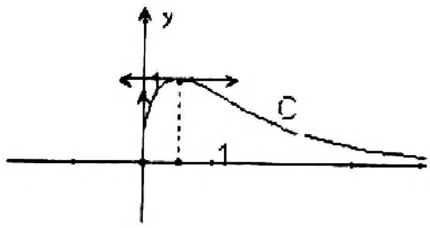
$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{1-x}}{\sqrt{x}} = +\infty$

$(\mathcal{C})$ admet une demie-tangente verticale au point d'abscisse 0

3)

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	↘	0

4)



$f(1) = 1$

5) $f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 0$

Soit $g(x) = f(x) - 1$

$g'(x) = f'(x)$

g est continue sur $[0,\frac{1}{2}]$

$g(0) \times g(\frac{1}{2}) = 1 - \sqrt{\frac{e}{2}} < 0$ d'ou l'équation

$g(x) = 0$ admet une solution α dans $]0,\frac{1}{2}[$

comme g est strictement croissante sur $[0,\frac{1}{2}]$ alors α est unique

* g est continue et strictement décroissante sur $]\frac{1}{2},+\infty[$

$g(]\frac{1}{2},+\infty[) =]-1,\sqrt{\frac{e}{2}} - 1[$

comme $0 \in\,]-1,\sqrt{\frac{e}{2}} - 1[$ alors il existe un unique réel $\beta \in\,]\frac{1}{2},+\infty[$ tel que $g(\beta)$

conclusion

α et β sont les seules solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans $[0,+\infty[$

* calculatrice $\Rightarrow 0{,}2 < \alpha < 0{,}21$

EXERCICE 34

Partie A

$g(x) = 2e^x - x - 2$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(2\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x - x - 2) = +\infty$

2) $g'(x) = 2e^x - 1$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\text{Ln}2$

x	$-\infty$		$-Ln2$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-1 + Ln2$	↗	$+\infty$

g est continue et strictemnt décte sur $]-\infty,-Ln2]$ elle réalise donc une bijection de $]-\infty,-Ln2]$ sur $[-1 + Ln2\ ,+\infty[$

Comme $0 \in [-1 + Ln2\ ,+\infty[$ alors il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty,-Ln2]$ tel que $g(\alpha) = 0$

$g(-1{,}6) \times g(-1{,}5) < 0$

$\Rightarrow (-1{,}6) < \alpha < (-1{,}5)$

sur $[-1 + Ln2\ ,+\infty[$ $g(0) = 0$

g est strictement croissante sur $]-Ln2,+\infty[$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet 0 comme unique solution dans $]-Ln2,+\infty[$

Conclusion l'équation $g(x) = 0$ admet 0 et α comme uniques solutions dans IR

4)

x	$-\infty$	α		0		$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	0	+	

Partie B

$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

1) * $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x(e^x - x - 1)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}) = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - xe^x - e^x = 0$

2) $f'(x) = 2e^{2x} - [e^x + (x+1)e^x]$

$f'(x) = 2e^{2x} - xe^x - 2e^x$

$f'(x) = e^x[2e^x - x - 2]$

$f'(x) = e^x g(x)$

$e^x > 0 d'ou\ f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe

x	$-\infty$	α		0		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) $g(\alpha) = 0 \Longrightarrow 2e^\alpha - \alpha - 2 = 0$

$\Longrightarrow \boxed{e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2}}$ d'où

$f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)e^\alpha$

$f(\alpha) = (\frac{\alpha+2}{2})^2 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$

$f(\alpha) = -\frac{(\alpha^2+2\alpha)}{4}$

* soit $h(x) = -\frac{(x^2+2x)}{4}$

$h'(x) = -\frac{1}{2}(x+1) \geq 0$

$\forall x \in [-1{,}6 ; -1{,}5]$

h est croissante sur $[-1{,}6 ; -1{,}5]$

$(-1{,}6) \leq \alpha \leq (-1{,}5)$

$\Longrightarrow h(-1{,}6) \leq h(\alpha) \leq h(-1{,}5)$

$\Longrightarrow 0{,}16 \leq f(\alpha) \leq 0{,}185$

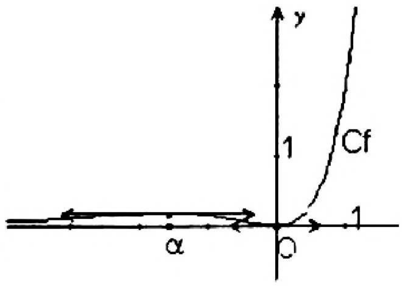
x	$-\infty$	α		0		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) * $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x} - (x+1)\frac{e^x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}(e^x - x - 1)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}) = +\infty$

Donc $(\mathcal{C})$ admet une B.I parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$



$\alpha \approx -1{,}5$

$f(\alpha) \approx 0{,}17$

6) $m < 0$

a) $\begin{cases} u'(x) = e^x & \longrightarrow u(x) = e^x \\ v(x) = x & \longrightarrow v'(x) = 1 \end{cases}$

$\int_m^0 xe^x\,dx = [xe^x]_m^0 - \int_m^0 e^x\,dx$

$= -\,m\,e^m - [e^x]_m^0 = (1-m)\,e^m - 1$

b) $\int_m^0 f(x)\,dx = \int_m^0 (e^{2x} - xe^x - e^x)dx$

$= \int_m^0 e^{2x}dx - \int_m^0 xe^x dx - \int_m^0 e^x dx$

$= [\frac{1}{2}e^{2x}]_m^0 - (1-m)\,e^m + 1 - [e^x]_m^0$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2m} - (1-m)\,e^m + 1 - 1 + e^m$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2m} + me^m$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_m^0 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

EXERCICE 35

Partie A

$\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1) * $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1 = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} - 1)$

On pose : $X = -x$

$\lim\limits_{X \to -\infty} (X^2 e^X + Xe^X + e^X - 1) = -1$

2) $\varphi'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x}$

$\varphi'(x) = (-x^2 + x)e^{-x}$

le signe de $\varphi'(x)$ est celui de $(-x^2 + x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{e}-1$	$\searrow$	-1

3) dans $]-\infty, 1[$ φ admet 0 comme minimum local

$\Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$; $\forall x \in]-\infty; 1[$

$\Rightarrow \varphi(x) > 0$; $\forall x \in]-\infty; 1[\setminus \{0\}$

d'où l'équation $\varphi(x) = 0$ admet 0 comme unique solution dans $]-\infty; 1[$

* dans $[1, +\infty[$ φ est continue et strictement décroissante $\Rightarrow$ φ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]-1, \frac{3}{e}-1]$

Comme $0 \in]-1, \frac{3}{e}-1]$ d'où il existe un unique réel $\alpha \in [1, +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$

conclusion

α et 0 sont les seules solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$ dans $[1,+\infty[$

* à la calculatrice $\alpha \approx$ ......

4)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Partie B

$f(x) = (2x + 1)e^{-x}$

$g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

1) $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$

d'où $A(0,1) \in (\mathcal{C}_f) \cap (\mathcal{C}_g)$

2) a) $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$

b) $x^2 + x + 1 > 0$; $\forall x \in IR$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		α		$+\infty$
$2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		α		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
P.R		$(\mathcal{C}_g)/(\mathcal{C}_f)$		$(\mathcal{C}_f)/(\mathcal{C}_g)$		$(\mathcal{C}_g)/(\mathcal{C}_f)$	

3) $F(x) = -(2x + 3)e^{-x}$

$F'(x) = -[2e^{-x} - (2x + 3)e^{-x}]$

$F'(x) = -[-(2x + 1)e^{-x}]$

$F'(x) = f(x)$

b) $h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$H(x) = F(x) - \mathrm{Ln}(x^2 + x + 1) + k$; $k \in IR$

$H(0) = 0 \Rightarrow F(0) + k = 0$

$\Rightarrow -3 + k = 0 \Rightarrow k = 3$

D'où

$H(x) = 3 - (2x + 3)e^{-x} - \mathrm{Ln}(x^2 + x + 1)$

EX36

$f(x) = e^{-x}\mathrm{Ln}(1+e^x)$

Partie A

1) $g(t) = \frac{t}{t+1} - \mathrm{Ln}(1+t)$, $t \in [0, +\infty[$

$$g'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1}$$

$$g'(t) = \frac{-t}{(t+1)^2} \leq 0 \ , \forall t \in [0, +\infty[$$

t	0		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$

$$g(t) \leq 0 \ , \forall t \in [0, +\infty[$$

2) a) la fonction $x \to e^{-x}$ est dérivable sur IR ,

La fonction $x \to 1+e^{x}$ est dérivable et strictement positive sur IR donc $x \to \ln(1+e^{x})$ est dérivable sur IR et par suite f est dérivable sur IR (produit de deux fonctions dérivables)

$$f'(x) = -e^{-x}\,\mathrm{Ln}(1+e^{x}) + e^{-x}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$f'(x) = e^{-x}\left[\mathrm{Ln}(1+e^{x}) - \frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right]$$

b) on a : $f'(x) = e^{-x}\, g(e^{x})$

pour $\boxed{t = e^{x}}$ ∈ [0, + ∞ [,on a g (t) ≤ 0 donc $f'(x) \le 0$ d'où f est strictement décroissante sur IR

3) a) $f(x) = e^{-x}\mathrm{Ln}(1+e^{x}) = e^{-x}\mathrm{Ln}[e^{x}(1+e^{-x})]$

$$= e^{-x}[\mathrm{Ln}\, e^{x} + \ln(1+e^{-x})]$$

$$= e^{-x}[x + \ln(1+e^{-x})]$$

$$= x\,e^{-x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1+e^{-x}) = 0$

c)) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{-x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$

on pose X= e^{-x} donc $x = -\mathrm{Ln}X$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} [-X\mathrm{Ln}X + X\ln(1+X)]$$

$$= \lim_{X\to-\infty} X[-\mathrm{Ln}X + \ln(1+X)]$$

$$= \lim_{X\to+\infty} X\left[\ln\left(\frac{1+X}{X}\right)\right]$$

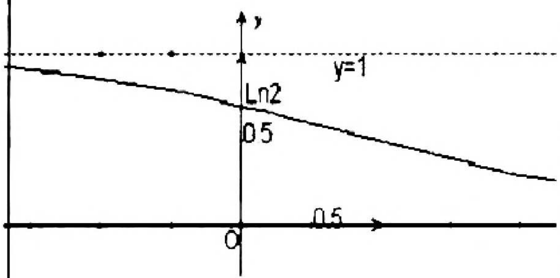
$$= \lim_{X\to+\infty} X\left[\ln\left(\frac{1+X}{X}\right)\right] = \lim_{X\to+\infty} X\left[\ln\left(1+\frac{1}{X}\right)\right]$$

On pose $t = \frac{1}{X}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

4)

t	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	1 ↘	0



Partie B

$$\begin{cases} U_0 = 0{,}5 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} .\ n \in \mathrm{IN}$$

1) a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

On pose $\varphi(x) = f(x) - x$

$\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $f'(x) \le 0$

φ est continue est strictement décroissante sur IR

⇒ φ réalise une bijection de IR sur IR comme 0 ∈ φ (IR) alors il existe un unique réel α tel que φ (α) = 0

φ (0,5). φ (0,6) < 0 ⇒ 0,5 ≤ α ≤ 0,6

b) $0,5 \le x \le 0,6 \Rightarrow f(0,6) \le f(x) \le f(0,5)$
car f est décroissante
Calculatrice.... $\Rightarrow 0,5 \le f(x) \le 0,6$
$f(x) \ge 0$ d'après 2°) a)
$f'(x) \ge -0,25$ (à vérifier)
$\Rightarrow -0,25 \le f'(x) \le 0 \le 0,25$
$\Rightarrow |f'(x)| \le 0,25$

2) On a f est continue sur $[0,5; 0,6]$
f est dérivable sur $]0,5; 0,6[$
et $|f'(x)| \le 0,25 \ \forall x \in]0,5; 0,6[$
α et $U_n \in [0,5; 0,6]$
(Remarque : pour $U_n \in [0,5; 0,6]$ par récurrence)
donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :
$|f(U_n) - f(\alpha)| \le (0,25)\,|U_n - \alpha|$
$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \le (0,25)\,|U_n - \alpha|$
*pour n = 0
On a : $|U_0 - \alpha| = |0,5 - \alpha| \le 0,1$
Car $0,5 \le \alpha \le 0,6$
$\Rightarrow |U_0 - \alpha| \le (0,25)^0 . 0,1$ (Vrai)
* supposons que : $|U_n - \alpha| \le (0,25)^n . 0,1$
et montrons que $|U_{n+1} - \alpha| \le (0,25)^{n+1} . 0,1$
en effet : $|U_{n+1} - \alpha| \le (0,25) . |U_n - \alpha|$
$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \le (0,25) . (0,25)^n . 0,1$
Car $|U_n - \alpha| \le (0,25)^n . 0,1$
Donc $|U_{n+1} - \alpha| \le (0,25)^{n+1} . 0,1$
Conclusion : $|U_n - \alpha| \le (0,25)^n . 0,1$; $n \in IN$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,25)^n . 0,1 = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - \alpha = 0$
et par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

c) $(0,25)^n . 0,1 \le 5 \times 10^{-4}$
$\Leftrightarrow (0,25)^n \le 5 \times 10^{-3}$
$\Leftrightarrow \mathrm{Ln}(0,25)^n \le \mathrm{Ln}(5 \times 10^{-3})$
(Ln croissante)
$\Leftrightarrow n.\mathrm{Ln}(0,25) \le \mathrm{Ln}(5 \times 10^{-3})$
($\mathrm{Ln}a^n = n\mathrm{Ln}a$)
$\Leftrightarrow n \ge \dfrac{Ln(5.10^{-3})}{Ln(0,25)}$ ($\mathrm{Ln}(0,25) \le 0$)
$\Leftrightarrow n \ge 3,83....$ Donc $n = 4$

Partie c

1) $f'(x) + f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

2) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - f'(x)$

D'où $F(x) = -\mathrm{Ln}(1+e^{-x}) - f(x)$

$F(x) = -\mathrm{Ln}(1+e^{-x}) - e^{-x}\,\mathrm{Ln}(1+e^{x})$

:est une primitive de f sur IR

EX37

Partie A

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) e^{-x} \qquad n \in IN^*$$

1) la fonction $x \to \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ est dérivable sur IR

En particulier sur $[0, +\infty[$,comme étant fonction polynôme

La fonction e^{-x} est dérivable sur $[0, +\infty[$

D'où f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$

$$*f_n'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right) e^{-x} - e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right) e^{-x} - e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$

$$= -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

b) $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}(x^k e^{-x})$

$$\lim_{x \to +\infty} x^k e^{-x} = \lim \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{e^x}{x^k}\right)}_{\to +\infty}} = 0$$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$

c) $f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \leq 0$, $\forall x \in [0, +\infty[$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$-$
$f_n(x)$	$1 \searrow 0$

2) a) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n \leq 1$

$-1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq e^{-x} \leq 1$

D'où : $0 \leq x^n e^{-x} \leq 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{n!} \leq -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \leq 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{n!} \leq f_n'(x) \leq 0$

b) On a: f est continue sur $[0, 1]$

f est dérivable sur $]0, 1[$

et $-\frac{1}{n!} \leq f_n'(x) \leq 0$, $\forall x \in]0, 1[$

Donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$-\frac{1}{n!}x \leq f_n(x) - f_n(0) \leq 0$, $\forall x \in]0, 1[$

Or $-\frac{1}{n!}x \geq -\frac{1}{n!}$

D'où $-\frac{1}{n!} \leq f_n(x) - 1 \leq 0$

3) pour $x \in [0, 1]$ on a :

$-\frac{1}{n!} \leq f_n(x) - 1 \leq 0$

Pour $x = 1$

$-\frac{1}{n!} \leq f_n(1) - 1 \leq 0$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n!} \leq f_n(1) \leq 1$

or $\lim 1 - \frac{1}{n!} = 1 \Rightarrow \lim f_n(1) = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)e^{-1} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

Partie B $n \geq 2$

$U_n = (1 - \frac{1}{n})^n$, $a_n = Ln(U_n)$

1) $a_n = Ln[(1 - \frac{1}{n})^n] = n\,Ln(1 - \frac{1}{n})$

$= \frac{Ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = -\frac{Ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$

2) $a_n = g(-\frac{1}{n})$ avec $g(x) = -\frac{Ln(1+x)}{x}$

$\lim_{n\to+\infty} (-\frac{1}{n}) = 0$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = -1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = -1$

3) $a_n = Ln(U_n) \Rightarrow U_n = e^{a_n}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} e^{a_n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

EX38

$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

Partie A

2) a) * pour $x \in Df = IR$ on a $(-x) \in Df$

$* f(x) + f(-x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$

$= \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1} = 2$

D'où $f(-x) = 2 - f(x)$

Et par suite A(1 , 0) est un centre de symétrie pour (ξ)

b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1} = -1$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x(3 - \frac{1}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3 - \frac{1}{e^x})}{(1 + \frac{1}{e^x})} = 3$

Interprétation graphique :

Les droites d'équations respectives $y = -1$ et $y = 3$ Sont des asymptotes à (ξ)

c) $f'(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$

Donc f est strictement croissante sur IR

2) a/ $f'(0) = 1$, $f(0) = 1$

D'où Δ : $y = x + 1$

b) $g(x) = f(x) - (x + 1)$

$g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{4e^x}{(e^x + 1)^2} - 1$

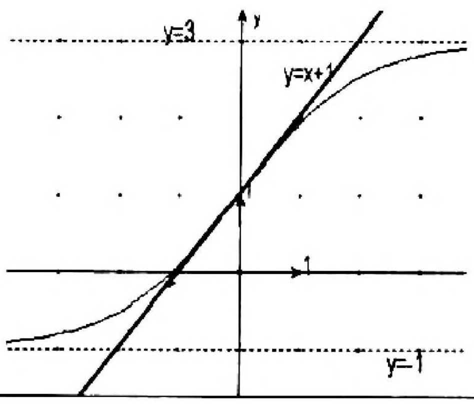
$= \dfrac{4e^x - (e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2} =$

$\dfrac{-(e^{2x} - 2e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = -\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1^2}\right)^2$

c) g est strictement décroissante sur IR et g(0)=0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+		−
Position relative	ξ_f au dessus de Δ		Δ au dessus de ξ_f

A(1,0)



Partie B I=[2 ;3]

1) a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow f(x) - (x + 1) = -1 \Leftrightarrow g(x) = -1$

b) $g'(x) < 0$; $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ et ; $\lim\limits_{-\infty} g = +\infty$

g est continue est strictement décroissante sur IR donc g réalise une bijection de IR sur IR

Comme $-1 \in g(IR)$ alors il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = -1$

$g(\alpha) = -1 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$

D'ou α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans IR

et par suite $\xi \cap D = \{B(\alpha,\alpha)\}$

$(g(2) + 1)(g(3) + 1) < 0$

$\Rightarrow 2 < \alpha < 3$

2) $|f(x) - f(x')| \le \frac{1}{2}.|x - x'|$, $\forall x, x' \in I$

Comme on a : $\alpha \in I$ on aura :

$|f(x) - f(\alpha)| \le \frac{1}{2}.|x - \alpha|$; $\forall x \in I$

3) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$. $n \in IN$

$U_n \in I$ (donnée)

a) d'après 2)

$|f(U_n) - f(\alpha)| \le \frac{1}{2}.|U_n - \alpha|$

$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}.|U_n - \alpha|$

Montrons par récurrence que :

$|U_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n.|3 - \alpha|$

*pour n=0

$|U_0 - \alpha| = |3 - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^0 |3 - \alpha|$

Donc la propriété est vraie pour n=0

* Supposons que $|U_n - \alpha| \le \frac{1}{2^n}.|3 - \alpha|$

et Montrons que : $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2^{n+1}}.|3 - \alpha|$

On a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq 1/2\,|U_n - \alpha|$

Or $|U_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}.|3 - \alpha|$

d'ou $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}.|3 - \alpha|$

Conclusion :

$|U_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}|3 - \alpha| \quad \forall\, n \in IN$

b) $\dfrac{1}{2^n}\,|3 - \alpha| \leq 10^{-3}$

On a . $|3 - \alpha| \leq 1$

Car : $2 < \alpha < 3$

$\dfrac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \iff 2^n \geq 1000$

$\iff n\mathrm{Ln}2 \geq \mathrm{Ln}(1000) \iff n \geq \dfrac{\mathrm{Ln}(1000)}{\mathrm{Ln}2}$

Calculatrice …⇒n≥10…⇒p=10……..

EX39

Partie A

$g(x) = e^x - \mathrm{Ln}(x) - x.e^x + 1$ pour $x \in \,]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

$(e^x \longrightarrow 1\ ;\ x.e^x \longrightarrow 0\ ;\ \mathrm{Ln}(x) \longrightarrow -\infty)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

$$\lim_{x \to +\infty} xe^x\left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{e^x}\right).\left(\underbrace{\frac{Ln(x)}{x}}_{0}\right) - 1\right] + 1 = -\infty$$

3) $g'(x) = e^x - 1/x - (e^x + xe^x)$

$g'(x) = -(1/x + xe^x) < 0 \quad \forall\, x \in \,]0, +\infty[$

x		$+\infty$
g'(x)	—	
g(x)	$+\infty$ ↘	$-\infty$

4) g est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur R.

Comme $0 \in R$ alors il existe un nombre réel $\alpha \in \,]0, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

5) $g(1{,}23) \times g(1{,}24) < 0$

calculatrice

$\Rightarrow \quad \alpha \in \,]1{,}23\ ;\ 1{,}24[$

6)

x	0		α		$+\infty$
g(x)		+	0	-	

Partie B

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{e^x - \ln x} = 0 = f(0)$

d'ou f est continue à droite en 0.

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{e^x - \ln x} = 0$

d'ou f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{\mathrm{Ln}x}{x}} = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à (C) au voisin de $(+\infty)$.

4) $f'(x) = \dfrac{(e^x - \mathrm{Ln}x) - x(e^x - 1/x)}{(e^x - \mathrm{Ln}x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - \mathrm{Ln}x)^2}$

f' et g sont de même signe.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

5) $g(\alpha) = 0 \Longrightarrow -\ln\alpha - \alpha e^{\alpha} + 1 = 0$
$\Longrightarrow -\ln\alpha = \alpha e^{\alpha} - 1$

d'ou
$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha e^{\alpha} - 1} = \frac{1}{e^{\alpha} - 1/\alpha}$$

Partie C

$x \in]0,+\infty[$

1) $h(x) = \dfrac{1}{e^x - 1/x}$

$h'(x) = \dfrac{-(e^x + 1/x^2)}{(e^x - 1/x)^2} < 0$

h est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

2) $f(\alpha) = h(\alpha)$

$1,23 < \alpha < 1,24 \Longrightarrow h(1,24) < h(\alpha) < h(1,23)$

(Car h est strictement décroissante)

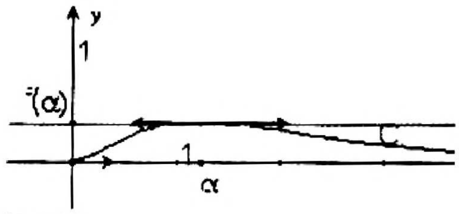
$\Rightarrow 0,377 < f(\alpha) < 0,383$ Donc 0,38 est une Valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2}

3) $\alpha \approx 1,23$; $f(\alpha) \approx 0,38$.

* $f'_d(0) = 0$

(C) admet demi tangente horizontale au point d'abscisse 0.

* $f'(\alpha) = 0$



EX40

Partie A

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \left(\frac{1-x}{2}\right).e^{2x}$$

1) a) * $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(x + e^{2x} - xe^{2x}) = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(x + e^{2x} - xe^{2x})$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^{2x}}{2}\left(\dfrac{1}{e^{2x}} + \dfrac{1}{x} - 1\right) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - \dfrac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2}[e^{2x} - xe^{2x}] = 0$

Δ: $y = \dfrac{1}{2}x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $(-\infty)$.

c) $f(x) - \dfrac{1}{2}x = \left(\dfrac{1-x}{2}\right).e^{2x}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - x/2$	+	0	-
Position.Relatve	(C) / Δ		Δ / (C)

(1, 1/2)

2) f est dérivable sur IR comme étant produit et somme des fonctions dérivables.

$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[-e^{2x} + 2(1-x)e^{2x}]$

$f'(x) = \frac{1}{2}[1 + (1-2x)e^{2x}]$

3) $U(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$

a) $U'(x) = -2e^{2x} + 2(1-2x)e^{2x}$

$U'(x) = -4x\, e^{2x}$

$U'(x) < 0$, pour $x \in IR^*_+$

$U'(x) > 0$, pour $x \in IR^*_-$

U est strictement décroissante sur IR_+

U est strictement croissante sur IR_-

b) U est continue sur [0,1]

U est strictement décroissante sur [0,1]

$U(0) \times U(1) = 2.(1-e^2) < 0$

d'ou l'équation $U(x) = 0$ admet une solution unique α dans [0,1]

c) Calculatrice $\Rightarrow$

$U(0,63) \approx 0,0831$; $U(0,64) \approx -0,007$

Donc une valeur approchée décimale de α par excès A 10^{-2} près est 0,64.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} U(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) = -\infty$

x	$-\infty$	0		α		$+\infty$
U'(x)	+	0	-		-	
U(x)	1 ↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
U(x)	+	0	-

4) $f'(x) = \dfrac{1}{2}U(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

Partie B

$(C') : y = e^x \qquad \Delta' : y = x$

1) $g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x$

$(Cg) = (C')$

$T : y = e^t.(x - t) + e^t$

Pour $x = 0 \longrightarrow \quad y = (1 - t)\,e^t$

d'ou $N_t\,(0, (1 - t)\,e^t)$

2) $P_t\,(t, t) \quad M_t\,(t, e^t)$

a) $M_{-2}\,(-2, e^{-2})$

$P_{-2}\,(-2, -2)$

$N_{-2}\,(0, 3e^{-2})$

$O\,(0, 0)$

$\overrightarrow{G_{-2}O} + \overrightarrow{G_{-2}M_{-2}} + \overrightarrow{G_{-2}P_{-2}} + \overrightarrow{G_{-2}N_{-2}} = \vec{0}$

$$x_{G-2} = \frac{0 + (-2) + (-2) + 0}{4} = -1$$

$$y_{G-2} = \frac{0 + e^{-2} - 2 + 3.e^{-2}}{4} = e^{-2} - \frac{1}{2}$$

b)

$$x_{G_t} = \frac{x_0 + x_{M_t} + x_{P_t} + x_{N_t}}{4}$$

$$x_{G_t} = \frac{t}{2}$$

$$y_{G_t} = \frac{y_0 + y_{M_t} + y_{P_t} + y_{N_t}}{4}$$

$$y_{G_t} = \frac{t + e^t + (1-t)e^t}{4} = \frac{t + (2-t)e^t}{4}$$

$$G_t = \left(\frac{t}{2}, \frac{t + (2-t)e^t}{4}\right) \Rightarrow G_t\left(\frac{t}{2}, f\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

L'ensemble des points G_t lorsque t varie dans IR est la courbe (C) de f.

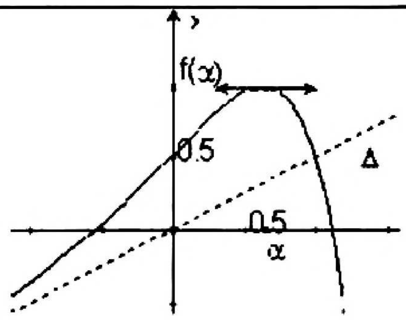
Partie C

1)

$\Delta : y = \frac{1}{2}x$ asymptote à (C) au voisin $(-\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} + \left(\frac{1-x}{2x}\right).e^{2x} = -\infty$$

B.I.parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage $(+\infty)$



2) (y=0 mal définie à éliminé)

$$A = \int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right)dx$$

$$A = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{2}\right)e^{2x}\,.\,dx$$

$$\begin{cases} U'(x) = e^{2x} \longrightarrow U(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \\ V(x) = \frac{1-x}{2} \longrightarrow V'(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = \left[\left(\frac{1-x}{4}\right)e^{2x}\right]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 e^{2x}.dx$$

$$A = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$A = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$A = \frac{e^2 - 3}{8} \text{ U.a}$$

$$A = 4\left(\frac{e^2 - 3}{8}\right)\text{cm}^2 = \frac{e^2 - 3}{2}\text{cm}^2$$

EX41 $\begin{cases} f(x) = (x+1)\,e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) pour $x \in \ ]0, +\infty[$ on a :

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(x+1)\,e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}}\,Q(x)$$

avec $Q(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} (1+t)e^{-t} = \lim\limits_{t \to +\infty} (t e^{-t} + e^{-t}) = 0$

$= \lim \left(\dfrac{1}{e^t} + \dfrac{1}{\dfrac{e^t}{t}}\right) = 0$

$+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(1+x)e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} (1+\dfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ on pose $t = \dfrac{1}{x}$

$= \lim\limits_{t \to +\infty} (1+t)e^{-t} = 0$

d'ou f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

c) pour $x \in \,]0,+\infty[$ on a :

$f'(x) = \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} > 0$

d'où f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\, e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$

(de la forme : $(+\infty) \times (1)$)

e) f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$

Comme $2 \in [0,+\infty[$ alors il existe un unique réel α ds $[0,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$

$f([2,3]) = \left[\dfrac{3}{\sqrt{e}}, \dfrac{4}{\sqrt[3]{e}}\right] = I$

$2 \in I$ donc $\alpha \in [2,3]$

2) $\varphi(t) = 1-(1+t)e^{-t}$

a) $\varphi'(t) = t e^{-t}$ (enoncé à rectifier ds M-S)

b) montrons que : $0 \le \varphi(t) \le \dfrac{t^2}{2}$ pour $t>0$

pour $u \in [0,t]$ on a

$0 \le \varphi'(u) = u e^{-u} \le u$

D'où $0 \le \displaystyle\int_0^t \varphi'(u)\,du \le \int_0^t u.du$

$\Rightarrow 0 \le [\varphi'(u)]_0^t \le \left[\dfrac{u^2}{2}\right]_0^t$

$\Rightarrow 0 \le \varphi(t) \le \dfrac{t^2}{2}$

3) pour $x > 0$

$x - f(x) = x - (x+1)\, e^{-\frac{1}{x}}$

$= x\left[1 - \left(1+\dfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}\right] = x \,.\, \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$

d'après 2) b) et pour $t = \dfrac{1}{x}$

$0 \le \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) \le \dfrac{1}{2x^2}$

$\Rightarrow 0 \le x..\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) \le \dfrac{1}{2x}$

$\Rightarrow 0 \le x - f(x) \le \dfrac{1}{2x}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$

d'où * $\lim\limits_{x\to+\infty} x - f(x) = 0$

ce qui prouve que la droite D d'équation : $y = x$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $+\infty$

et comme $x - f(x) \ge 0$ pour tout $x \ge 0$ donc (ξ) au dessus de D

4) T_a :la tgte à (C) au poit d'abscisse $\frac{1}{a}$

On a $f'(x)=(\frac{x^2+x+1}{x^2})e^{-\frac{1}{x}}$ donc

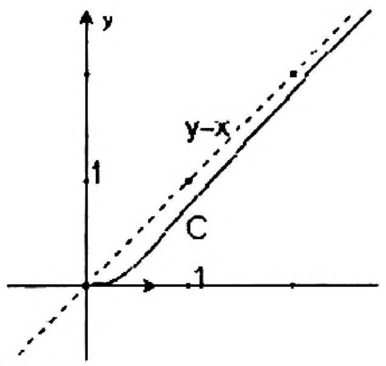
$f'(1/a)=(1+a+a^2)e^{-a}$

T_a : $y=(1+a+a^2)e^{-a}.(x-1/a)+(1+1/a).e^{-a}$

Donc T_a : $y=(1+a+a^2)e^{-a}.x-a.e^{-a}$

Pour $y=0 \Rightarrow x=\frac{a}{1+a+a^2}$

5)



EX42

$f_k(x)=\frac{kx+1}{x}e^x$ $x \in]0,+\infty[$ et $k \leq 0$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f_k(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{kx+1}{x}e^x=+\infty$

*pour k=0 $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

*pour k≠0 $k<0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{kx+1}{x}e^x=-\infty$

2) $f_k'(x)=-\frac{1}{x^2}e^x+\frac{kx+1}{x}e^x$

$f_k'(x)=\frac{kx^2+x+1}{x^2}e^x$

$f_k'(x)=0 \Leftrightarrow kx^2+x-1=0$

pour $k\neq 0$; $\Delta = 1+4k$

- Si $k \in]-\frac{1}{4},0[$ l'équation $f_k'(x)=0$ admet deux solutions
- Si $k=0$ ou $k=-\frac{1}{4}$

L'équation $f_k'(x)=0$ admet une seule solution

- Si $k<-\frac{1}{4}$: aucune solutions

3) $(\xi f_{-1})=(\xi_2)$

$(\xi f_{-\frac{1}{4}})=(\xi_3)$

$(\xi f_0)=(\xi_1)$

4) $A(a)=\int_a^{a+1} f_0(x).dx$

a) A (a) représente l'aire de la partie du plan limitée par (ξf_0) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations respective $x=a$ et $x=a+1$

b) $A(a)=\int_1^{a+1} f_0(x).dx-\int_1^{a} f_0(x).dx$

$A'(a)=f_0(a+1)-f_0(a)=\frac{e^{a+1}}{a+1}-\frac{e^a}{a}$

$A'(a)=(\frac{e}{a+1}-\frac{1}{a})e^a=\frac{(e-1)a-1}{a(a+1)}e^a$

x	0		$\frac{1}{e-1}$		$+\infty$
$A'(a)$		$-$	0	$+$	
$A(a)$		↘	$A(\frac{1}{e-1})$	↗	

A est décroissante sur $]0,\frac{1}{e-1}]$

A est croissante sur $[\frac{1}{e-1},+\infty[$

c) $A(a)$ est minimale pour $a=\frac{1}{e-1}$

EX43

Partie A

1) Soit $h(x) = x + \ln x$; $x \in \ ]0, +\infty[$

$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ sur $]0, +\infty[$

h est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $h(]0,+\infty[) = IR$

Comme $0 \in IR$ alors il existe un unique réel α de $]0,+\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$

Par suite l'équation (E) admet α comme unique solution dans $]0,+\infty[$

On a $h(\frac{1}{3}) \times h(\frac{2}{3}) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$

2) $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$

a) $\varphi(x) = x \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \ln x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \ln(\frac{1}{x}) = 0$

b) $\varphi(x) = x \Leftrightarrow h(\frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \alpha$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}$

c) $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow |\varphi'(x)| = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

On a : $\frac{3}{2} \le x \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{2}} \le e^{\frac{1}{x}} \le e^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{4} \le \frac{1}{x^2} \le \frac{4}{9} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow |\varphi'(x)| \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$

3) $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \varphi(V_n) \end{cases}$. $n \in IN$

a) * pour $n = 0$

$\frac{3}{2} \le V_0 \le 2$ (Vrai)

* supposons que : $\frac{3}{2} \le V_n \le 2$ et

montrons que : $\frac{3}{2} \le V_{n+1} \le 2$

$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0$ donc φ décroissante

sur l'intervalle $[\frac{3}{2}, 2]$

$\frac{3}{2} \le V_n \le 2 \Rightarrow \varphi(2) \le \varphi(V_n) \le \varphi(\frac{3}{2})$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}} \le V_{n+1} \le e^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \le V_{n+1} \le 2$

<u>Conclusion</u> : $\frac{3}{2} \le V_n \le 2$, pour tout $n \in IN$

b) On a φ est dérivable sur $[\frac{3}{2}, 2]$

et $|\varphi'(x)| \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{\alpha}$ et $V_n \in [\frac{3}{2}, 2]$

donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$|\varphi(V_n) - \varphi(\frac{1}{\alpha})| \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} |V_n - \frac{1}{\alpha}| \Rightarrow$

$|V_{n+1} - \frac{1}{\alpha}| \le \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} |V_n - \frac{1}{\alpha}|$

c) Montrons par récurrence que :

$|V_n - \frac{1}{\alpha}| \le (\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}})^n |2 - \frac{1}{\alpha}|$

$\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \in]-1, 1[$ Donc $\lim (\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}})^n = 0$

Et par suite $\lim V_n = \frac{1}{\alpha}$

Partie B

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x+\ln x} & \text{si } x>0 \text{ et } x \neq \alpha \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) * $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x+\ln x} = 0 = f(0)$

d'ou f est continue à droite en 0.

* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+\ln x} = 0$

d'ou f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) =$ 0.

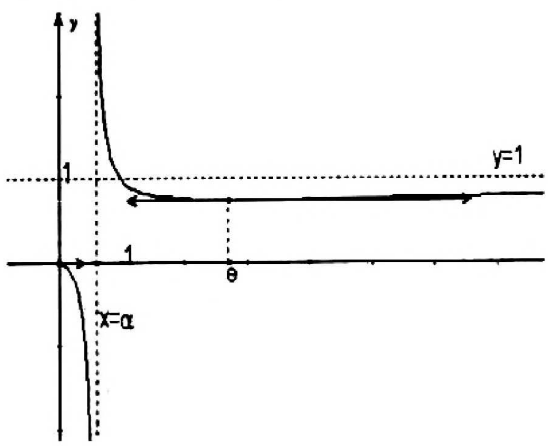
2) $f'(x) = \dfrac{(x+\ln x) - x(1+\frac{1}{x})}{(x+\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(x+\ln x)^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{\ln x}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1 = 1$$

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} \frac{x}{x+\ln x} = \frac{\alpha}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha^-} \frac{x}{x+\ln x} = \frac{\alpha}{0^-} = -\infty$$

x	$-\infty$		α		e		$+\infty$
f'(x)		−	||	−	0	+	
f(x)	0	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$\frac{e}{e+1}$	↗	1



Partie C

$n \in IN^*$, $U_n = \int_1^e (\frac{\ln x}{x})^n .dx$

1) $U_1 = \int_1^e \frac{1}{x}.\ln x.dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\text{Ln}2)^2$

2) $U_2 = \int_1^e \frac{1}{x^2}.(\ln x)^2.dx =$

$$\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x^2} \longrightarrow u(x) = -\dfrac{1}{x} \\ v(x) = (\text{Ln}(x))^2 \longrightarrow v'(x) = \dfrac{2}{x}\ln x \end{cases}$$

$U_2 = \left[-\frac{1}{x}(\ln x)^2\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{2}{x^2}.(\ln x).dx$

$= -\frac{1}{2}(\text{Ln}2)^2 + \int_1^2 \frac{2}{x^2}.(\ln x).dx$

$$\begin{cases} u'(x) = \dfrac{2}{x^2} \longrightarrow u(x) = -\dfrac{2}{x} \\ v(x) = \text{Ln}x \longrightarrow v'(x) = \dfrac{1}{x} \text{ d'où} \end{cases}$$

$U_2 = -\frac{1}{2}(\text{Ln}2)^2 + \left[-\frac{2}{x}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 (-\frac{2}{x^2}).dx$

$U_2 = -\frac{1}{2}(\text{Ln}2)^2 - \ln 2 - \left[\frac{2}{x}\right]_1^2$

$\boxed{U_2 = 1 - \ln 2 - \frac{1}{2}(\text{Ln}(2))^2}$

3) $S_n(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} + (\frac{\ln x}{x})^2 + \ldots + (-1)^n(\frac{\ln x}{x})^n$

Somme des (n + 1) termes d'une suite géométrique de raison $(-\frac{\ln x}{x})$

$$S_n(x) = \frac{1-\left(-\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{1+\frac{\ln x}{x}} = \frac{x}{x+\ln x}\left[1-(-1)^{n+1}.\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}\right]$$

4) $I_n = 1 - U_1 + U_2 - \ldots + (-1)^n U_n$

$I = \int_1^2 f(x).dx$

a) $S_n(x) = f(x)\left[1-(1)^{n+1}(\frac{\ln x}{x})^{n+1}\right]$

⇒ $f(x) - S_n(x) = (-1)^{n+1} f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}$

⇒ $\int_1^2 f(x).dx - \int_1^2 S_n(x).dx$

$= \int_1^2 (-1)^{n+1} f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

⇒ $\int_1^2 f(x).dx - \int_1^2 [\ 1 - \frac{\ln x}{x} + (\frac{\ln x}{x})^2 +$

$\ldots$

$\ldots + (-1)^n(\frac{\ln x}{x})^n\ ].dx =$

$\int_1^2 (-1)^{n+1} f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

⇒ $\int_1^2 f(x).dx - (1 - U_1 + U_2 - \ldots.. + (-1)^n U_n\ ) = \int_1^2 (-1)^{n+1} f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

⇒ $I - I_n = \int_1^2 (-1)^{n+1} f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

b) $k(x) = \frac{\ln x}{x}$; $x > 0$

$k'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

x	0		e		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)		↗	1/e	↘	

k admet $\frac{1}{e}$ comme maximum absolu sur $]0,+\infty[$

⇒ $k(x) \le \frac{1}{e}$, pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$

⇒ $\frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e}$, pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$

$|\ I - I_n\ | = |\ \int_1^2 (-1)^{n+1} f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx\ |$

$|\ \int_1^2 f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx\ | \le$

$\int_1^2 |f(x)|.(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

⇒ $\frac{2}{2+\ln 2} \le f(x) \le 1 \Rightarrow |\ f(x)\ | \le 1$

D'où $\int_1^2 |f(x)|.dx \le \int_1^2 dx = 1$

, et par suite : $|\ I - I_n\ | \le \frac{1}{e^{n+1}}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{n+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n - I = 0 \Rightarrow \lim I_n = I$

d) $|\ I - I_2\ | \le \frac{1}{e^3} \Rightarrow -\frac{1}{e^3} \le I - I_2 \le \frac{1}{e^3}$

$\Rightarrow I_2 - \frac{1}{e^3} \le I \le I_2 + \frac{1}{e^3}$

d'où $\boxed{I_2 - \frac{1}{e^3} \le I\ (1)}$

d'après 4°) a) :

$I - I_2 = \int_1^2 -f(x).(\frac{\ln x}{x})^3.dx \le 0$

car $-f(x)(\frac{\ln x}{x})^3 \le 0,\ \forall x \in [\ 1\ ,2\ ]$

d'où $\boxed{I \le I_2\ (2)}$

$(1) + (2) \Rightarrow\ I_2 - \frac{1}{e^3} \le I \le I_2$

<u>Partie D</u> $F(x) = \int^{e^x} f(t).dt$

1) la fonction $u : x \to e^x$ est dérivable sur IR_+

et $u(IR_+) = [1\ ,+\infty[$ et $1 \in [1\ ,+\infty[$

comme f est continue sur $[1\ ,+\infty[$

alors F est dérivable sur IR_+

et on a $F'(x) = u'(x).f(u(x)) = e^x f(e^x)$ $F'(x) = e^x$.

$\frac{e^x}{x + e^x} = \frac{e^{2x}}{x + e^x}$

2) f admet $\frac{e}{e+1}$ comme minimum absolu sur$[1,+\infty[$

$\Rightarrow f(t) \ge \frac{e}{e+1} \ge \frac{1}{2}, \forall\ t \in [1, +\infty[$

3) $f(t) \ge \frac{1}{2}$ $\forall\ t \in [\ 1\ ,+\infty[$

et $e^x \ge 1\ \forall x \in IR_+$

$\Rightarrow \quad |I - I_n| \le \int_1^2 |f(x)|.(\frac{1}{e})^{n+1}.dx$

$|I - I_n| \le (\frac{1}{e})^{n+1}. \int_1^2 |f(x)|.dx$

On a : $1 \le x \le 2$ donc

$f(2) \le f(x) \le f(1)$ (f est décrte sur [1 , 2]

$\Rightarrow F(x) \ge \int_1^{e^x} \frac{1}{2}.dt = \left[\frac{1}{2}t\right]_1^{e^x} \quad \forall x \in IR_+$

$\Rightarrow F(x) \ge \frac{1}{2}(e^x - 1) \quad \forall x \in IR_+$

Or. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(e^x - 1) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

* $\frac{F(x)}{x} \ge \frac{1}{2}(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x})$ pour $x > 1$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

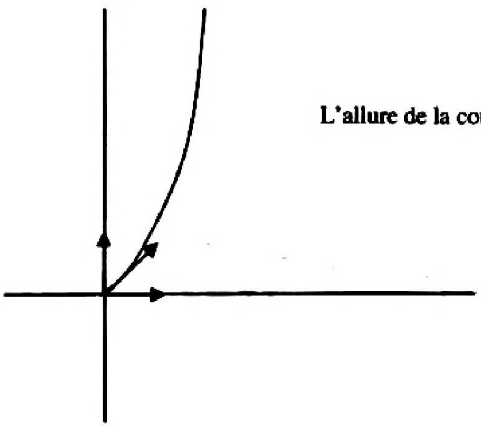
D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

4) $F'(x) = \frac{e^{2x}}{x + e^x} > 0 \quad \forall x \in IR_+$

$F(0) = \int_1^1 f(t).dt = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$: Branche infinie parabolique de direction$(O,\vec{j})$

$F'(0) = 1 \Rightarrow y = x$ tangente en O



L'allure de la courbe de F

D'où $\int_1^{e^x} f(t)dt \ge \int_1^{e^x} \frac{1}{2}.dt \quad \forall x \in IR_+$

QCM :

1) $y' = 2x$
2) parallèle à : $y = 2x$
3) f est positive
4) $y'' + y = 0$

Vrai ou faut :

1) faut

En effet : $f(x) = 2^x$

$f'(x) = 2^x.\text{Ln}2$

$f'(x) - \text{Ln}2 - f(x) \neq 0$

2) faut

$f(x) = e^{-2x}$ est une solution de l'équation

$y' = -2x$

$f'(x) = -2e^{-2x} \leq 0$; $\forall x \in IR$

f est décroissante sur IR

3) vrai

F est solution de $y' = 3y$

$\Rightarrow f'(x) = 3.f(x)$; $\forall x \in IR$

$\Rightarrow f'(1) = 3.f(1) = 3$

$\Rightarrow f(1) = 1$

4) vrai

Démonstration

$f''(x) + 2f(x) = 0$; $\forall x \in IR$

$\Rightarrow f''(x) = -2f(x)$; $\forall x \in IR$

f s'annule en $\frac{\pi}{4}$ et change de signe d'où

f'' s'annule et change de signe en $\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow (\mathcal{C}_f)$ admet le point $I(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$ comme Point d'inflexion.

EXERCICE 1 :

1) – a) $y' = -3y$

Les solutions sont les fonctions définies sur IR par : $f(x) = k.e^{-3x}$; $k \in IR$

b) $y' = -\sqrt{2}\,y$

les solutions sont les fonctions définies sur IR par : $f(x) = k.e^{-\sqrt{2}x}$; $k \in IR$

c) $y' = \frac{1}{5}y$

$f(x) = k.e^{\frac{x}{5}}$; $k \in IR$

2) – a) $y' = \frac{1}{2}y$ et $f(-1) = e$

La solution est : $f(x) = e.e^{\frac{1}{2}(x+1)} = e^{\frac{1}{2}(x+3)}$

b) $y' = -\frac{1}{3}y$ et $y(\text{Ln}8) = 1$

la solution est :

$f(x) = 1.e^{-\frac{1}{3}(x-\text{Ln}8)} = 2e^{-\frac{1}{3}x}$

c) $y' = 2y$ et $f(0)$ 1

la solution est :

$f(x) = e^{2x}$

EXERCICE 2 :

1) $\begin{cases} f'(x) = a\,f(x) & \forall x \in IR \\ f(0) = 1 \\ f(x+10) = 2f(x) \end{cases}$

f est la solution de l'équation différentielle :

$y' = ay$ et $f(0) = 1$

d'où : $f(x) = e^{ax}$

* $f(x+10) = 2f(x)$

$\Rightarrow e^{a(x+10)} = 2e^{ax}$

$\Rightarrow e^{ax}.e^{10a} = 2e^{ax} \Rightarrow e^{10a} = 2$

$\Rightarrow 10a = \text{Ln}2 \Rightarrow a = \frac{1}{10}\text{Ln}2$

D'où $f(x) = e^{\frac{x}{10}\text{Ln}2} = \sqrt[10]{2^x}$

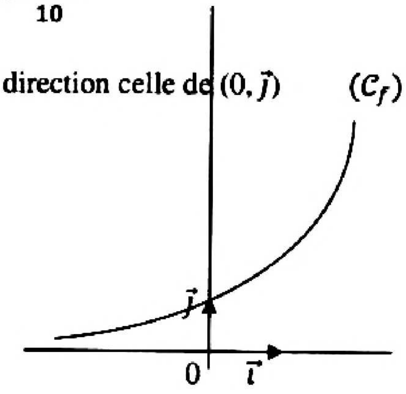
2) $f'(x) = \frac{\text{Ln}2}{10}e^{\frac{x}{10}\text{Ln}2} > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{Ln2}{10}\frac{e^{X}}{X} = +\infty$$

Avec $X = \frac{x Ln2}{10}$

B.P de direction celle de $(0, \vec{j})$



EXERCICE 3 :

1) – a) $y' = 2y - 1$

Les solutions sont les fonctions définies sur IR par : $f(x) = k.e^{2x} + \frac{1}{2}$; $\forall k \in IR$

b) $y' = \pi x - 3$

… $f(x) = k.e^{\pi x} + \frac{3}{\pi}$; $\forall k \in IR$

c) $y' = \frac{5}{2} y - \frac{1}{2}$

… $f(x) = k.e^{\frac{5}{2}x} + \frac{1}{5}$; $\forall k \in IR$

2) – a) $y' = y + 1$ et $y(2) = 0$

La solution est : $f(x) = e^{x-2} - 1$

b) $y' = -\frac{1}{2} y + \frac{3}{2}$ et $y(0) = 3$

$f(x) = (3 - 3)e^{-\frac{1}{2}x} + 3 = 3$

c) $y' = -3 y - \frac{3}{4}$ et $y(-1) = 0$

$f(x) = \frac{1}{4} e^{-3(x+1)} - \frac{1}{4}$

EXERCICE 4 :

1) $f'(t)$: vitesse instantanée

$f'(t)$ et $(f(t) - 25)$ sont proportionnelles

$\Longrightarrow f'(t) = a\,[f(t) - 25]$; $a \in IR$

* La température initiale est 100°c

$\Longrightarrow f(0) = 100$

* $f(t)$ prend la valeur 75 pour t = 15 mn

$\Longrightarrow f(15) = 75$

D'où $\begin{cases} f'(t) = a\,[f(t) - 25] \\ f(0) = 100 \\ f(15) = 75 \end{cases}$

2) f est solution de l'équation différentielle :

$y' = ay - 25a$ d'où

$f(t) = k.e^{at} + 25$; $k \in IR$

* $f(0) = 100 \Longrightarrow k + 25 = 100 \Longrightarrow k = 75$

d'où $f(t) = 75e^{at} + 25$

* $f(15) = 75 \Longrightarrow 75e^{15a} + 25 = 75$

$\Longrightarrow e^{15a} = \frac{2}{3} \Longrightarrow 15\,a = Ln(\frac{2}{3})$

$\Longrightarrow a = \frac{1}{15} Ln(\frac{2}{3})$ d'où

$f(t) = 75e^{\frac{t}{15}Ln(\frac{2}{3})} + 25$

3) $f(t) - 25 \leq 1 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{15}Ln(\frac{2}{3})} \leq \frac{1}{75}$

$\Leftrightarrow \frac{t}{15} Ln(\frac{2}{3}) \leq - Ln(75)$

$\Leftrightarrow t \geq \frac{-15Ln(75)}{Ln(\frac{2}{3})}$ à la calculatrice

$t \geq$…

EXERCICE 5 :

1) $\begin{cases} f'(t) = a\,(20 - f(t)) \\ f(5) = 10 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

f est une solution de l'équation différentielle : $y = - a\,y + 20a$ et $f(5) = 10$

d'où : $f(t) = (10 - \frac{20a}{a})e^{-a(t-5)} + \frac{20a}{a}$

$f(t) = - 10\,e^{-a(t-5)} + 20$

* $f(0) = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}\text{Ln}2$ d'où

$$f(t) = -10\, e^{-\frac{1}{5}\text{Ln}2\,(t-5)} + 20$$

$$f(t) = -20\, e^{-\frac{t}{5}\text{Ln}2} + 20$$

2) * $q(10) = 20 - f(10) = 20e^{-2\,\text{Ln}2}$

$$= \frac{20}{e^{\text{Ln}4}} = \frac{20}{4} = 5$$

$q(10) = 5g$

* $q(30) = 20 - f(30) = \frac{20}{64} = 0{,}312g$

* $q(60) = 20 - f(60) = \frac{5}{2^{10}} = 0{,}004g$

EXERCICE 6 :

1) $\begin{cases} C'(t) = -0{,}25\, C(t) \\ C(0) = 5 \end{cases}$

C est une solution de l'équation différentielle : $y'(t) = -0{,}25\, y(t)$

et $C(0) = 5$

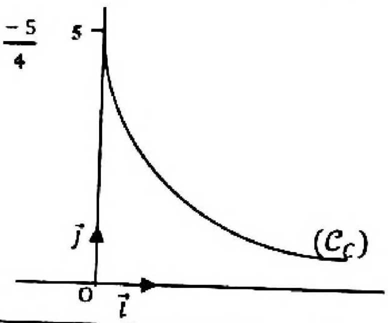
d'où : $C(t) = 5.e^{-0{,}25\,t}$

2)

$C(t) = 5\, e^{\frac{-t}{4}}$ alors $C'(t) = \frac{-5}{4} e^{\frac{-t}{4}} < 0$

x	0	$+\infty$
$C'(x)$	-	
$C(x)$	5 ↘	0

$C'(0) = \frac{-5}{4}$



3) $C(t) < 1 \Leftrightarrow e^{\frac{-t}{4}} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{-t}{4} < -\text{Ln}5$

$\Leftrightarrow t > 4\text{Ln}5$

A la calculatrice $\ldots \leq t \leq \ldots$

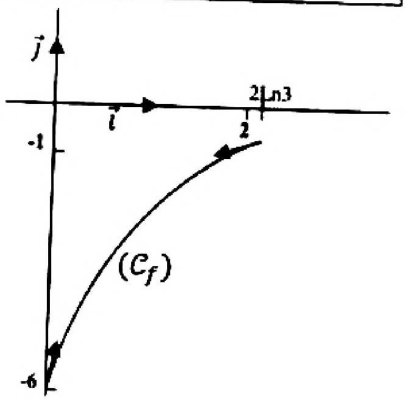
EXERCICE 7 :

1) $y' = -y$ et $f(\text{Ln}3) = -2$

$f(x) = -2\, e^{-(x-\text{Ln}3)} = -6\, e^{-x}$

2) $f'(x) = 6\, e^{-x}$

x	0	2Ln3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-6 ↗	$-\frac{2}{3}$



EXERCICE 8 :

1) $U(x) = 2$; $U'(x) = 0$

$U'(x) + 2\,U(x) = 4 = (U(x))^2$

D'où U est une solution de l'équation différentielle : $y' + 2y = y^2$

2) – a) $U \in (E)$ d'où $E \neq \phi$

b) $f \in (E) \Leftrightarrow f'(x) + 2\,f(x) = f^2(x)$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{2}{f(x)} = 1$

$\Leftrightarrow -(\frac{1}{f})'(x) + 2(\frac{1}{f})(x) = 1$

$\Leftrightarrow$ - g´(x) + 2g(x) = 1

$\Leftrightarrow$ g´(x) = 2g(x) - 1

$\Leftrightarrow$ g est une solution de l'équation différentielle : $y' = 2y - 1$

c)
g est une solution de l'équation différentielle : $y' = 2y - 1$

$\Rightarrow g(x) = ke^{2x} + \frac{1}{2}$ et $g(x) \neq 0$; $\forall x \in IR$

$\Rightarrow g(x) = ke^{2x} + \frac{1}{2}$ avec $k \in IR_+$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{2ke^{2x}+1}$ avec $k \in IR_+$

* Réciproquement

$f(x) = \frac{2}{2ke^{2x}+1}$; $k \in IR_+$

f est dérivable sur IR et ne s'annule pas sur IR

$f'(x) = \frac{-8ke^{2x}}{(2ke^{2x}+1)^2}$

$f'(x) + 2f(x) = \frac{4}{(2ke^{2x}+1)^2} = f^2(x)$

Conclusion : E est l'ensemble des fonctions définies sur IR par :

$f(x) = \frac{2}{2ke^{2x}+1}$; $k \in IR_+$

EXERCICE 9 :

1) $\begin{cases} y'(t) = k\,y(t) \;;\; k > 0 \\ y(0) = N \end{cases}$

d'où $y(t) = N\,e^{kt}$

2) $y(2) = 4y(0)$

$\Rightarrow N\,e^{2k} = 4N \Rightarrow e^{2k} = 4$

$\Rightarrow 2k = 2Ln2 \Rightarrow k = Ln2$ d'où

$y(t) = N\,e^{tLn2} = N \times 2^t$

d'où $y(3) = 8.N$

3) $y(5) = 6400$

$\Rightarrow N \times 2^5 = 6400 \Rightarrow N = 200$

EXERCICE 10 :

$f(x) = e^{-x}.\sin x$

1) – a) $f'(x) = (\cos x - \sin x)\,e^{-x}$

$\cos x - \sin x = r.\cos(x - \varphi)$

Avec $\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \varphi \equiv -\frac{\pi}{4}\,(2\pi)$

D'où : $f'(x) = [\sqrt{2}.\cos(x + \frac{\pi}{4})].e^{-x}$

$f'(x) = \sqrt{2}.e^{-x}.\cos(x + \frac{\pi}{4})$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$\cos(x + \frac{\pi}{4})$		+	0	-	0		+

$S_{[0,2\pi]} = [0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$

c) $f'(x) = \sqrt{2}.e^{-x}.\cos(x + \frac{\pi}{4})$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$	↗	0

$T_0 : y = x$

$T_{2\pi} : y = e^{-2\pi}(x - 2\pi)$

2) – a) * $(\mathcal{C}_1) \cap (\mathcal{C})$?

$\begin{cases} f(x) = e^{-x} \\ x \in [0,2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ x \in [0,2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ alors $(\mathcal{C}_1) \cap (\mathcal{C})$ est le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

* $(\mathcal{C}_2) \cap (\mathcal{C})$?

$$\begin{cases} f(x) = -e^{-x} \\ x \in [0,2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ x \in [0,2\pi] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

alors $(\mathcal{C}_2) \cap (\mathcal{C})$ est le point d'abscisse $\frac{3\pi}{2}$

b) $g(x) = e^{-x} \Longrightarrow g'(x) = -e^{-x}$

$g'(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$; $f'(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$

$f(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ d'où $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_1)$ ont la même tangente en $A(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}})$

* de même pour $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_1)$

3) – a) $f(x) = e^{-x}.\sin x$

$f'(x) = (\cos x - \sin x)\, e^{-x}$

$f''(x) = -2\, e^{-x}.\cos x$

vérifier que : $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) Rq : $f(x) \geq 0$; $\forall x \in [0,\pi]$

$\mathcal{A} = \int_0^{\pi} f(x)dx$

$\mathcal{A} = \int_0^{\pi}(-\frac{1}{2}f''(x) - f'(x))dx$

$\mathcal{A} = [-\frac{1}{2}f'(x) - f(x)]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$ u.a

$\mathcal{A} = 20\,[\frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})]$ cm^2

$\mathcal{A} = 10\,[\,(1 + e^{-\pi})]$ cm^2

EXERCICE 11 :

(E) : $y' + 2y = x^2$

1) (E_0) : $y' = -2y$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur IR par : $h(x) = ke^{-2x}$; $k \in$ IR

2) $g(x) = ax^2 + bx + c$

$g'(x) = 2ax + b$

$g'(x) + 2g(x) = x^2$

$\Leftrightarrow 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$

$\Leftrightarrow (2a-1)x^2 + 2(a+b)x + (b+2c) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 2(a+b) = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

d'où $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ est la solution de (E)

3) f solution de (E)

$\Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = x^2$

$\Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x)$

$\Leftrightarrow (f-g)'(x) + 2(f-g)(x) = 0$

$\Leftrightarrow (f-g)$ est une solution de (E_0)

4) f solution de (E)

$\Leftrightarrow (f-g)$ est une solution de (E_0)

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = ke^{-2x}$; $k \in$ IR

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + ke^{-2x}$; $k \in$ IR

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + ke^{-2x}$; $k \in$ IR

EXERCICE 12 :

(E) : $y' - y = 4\cos x$

1) (E_0) : $y' = y$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur IR par : $h(x) = k.e^x$; $k \in IR$

2) $g(x) = a\cos x + b\sin x$

$g'(x) = -a\sin x + b\cos x$

g est une solution de (E)

$\Leftrightarrow g'(x) - g(x) = 4\cos x$

$\Leftrightarrow (a - b + 4).\cos x + (a + b).\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 4 = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$

d'où : $g(x) = -2\cos x + 2\sin x$ est une solution de (E)

3) f est une solution de (E)

$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 4\cos x$

$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = g'(x) - g(x)$

$\Leftrightarrow (f - g)'(x) - (f - g)(x) = 0$

$\Leftrightarrow (f - g)$ est une solution de (E_0)

4) f est une solution de (E)

$\Leftrightarrow (f - g)$ est une solution de (E_0)

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = k.e^x$; $k \in IR$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + k.e^x$; $k \in IR$

$\Leftrightarrow f(x) = -2\cos x + 2\sin x + k.e^x$; $k \in IR$

EXERCICE 13 :

$L.y' + r.y = E$

1) $\begin{cases} (0,2)y' + 100.y = 10 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = -500y + 50 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

d'où : $i(t) = (\frac{-50}{500})e^{-500t} + \frac{50}{500}$

$i(t) = (\frac{-1}{10})e^{-500t} + \frac{1}{10}$

2) * $\lim\limits_{x \to +\infty} i(t) = \frac{1}{10} = 0,1$

* <u>interprétation :</u> La bobine s'oppose à L'établissement du courant dans le circuit Et ce conformément à la loi de LORENS Quant le régime permanent s'installe i devient constant : $i = I_{permanant}$ (=0,1 ici)

EXERCICE 14 :

1) $\begin{cases} y'' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \sqrt{2} \end{cases}$

la solution est la fonction définie sur IR par :
$f(x) = \sin(\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{2}x)$

2) $\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(\pi) = -1 \\ y'(\pi) = -2 \end{cases}$ $w = 4$

$f(x) = A\sin(4x) + B\cos(4x)$;
$(A,B) \in IR^2$

$f'(x) = 4A\cos(4x) - 4B\sin(4x)$

$\begin{cases} f(\pi) = -1 \\ f'(\pi) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ 4A = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = \frac{-1}{2} \end{cases}$

D'où la solution de est la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{-1}{2}\sin(4x) - \cos(4x)$

3) même travail que pour 2)

EXERCICE 15 :

(E) : $y'' = 2y'$

1) on pose $z = y'$

L'équation devient : $z' = 2z$

Les solutions sont : $h(x) = ae^{2x}$; $a \in IR$

D'où les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :

$$f(x) = \frac{a}{2}e^{2x} + b \ ; (a,b) \in IR^2$$

2) $f(x) = \frac{a}{2}e^{2x} + b$

$f'(x) = ae^{2x}$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

d'où : $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 3)$

EXERCICE 16 :

(E) : $y'' = -3y' + 1$

1) on pose $z = y'$

L'équation devient : (E') : $z' = 3z + 1$

Les solutions de (E') sont :

$h(x) = ae^{-3x} + \frac{1}{3}$; $a \in IR$

D'où les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :

$$f(x) = -\frac{a}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}x + b \ ; (a,b) \in IR^2$$

2) $f(x) = -\frac{a}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}x + b$

$f'(x) = a\,e^{-3x} + \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{3} + b = 0 \\ a + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-1}{9} \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

d'où : $f(x) = \frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$

EXERCICE 17 :

1) $y'' + 16y = 0$

les solutions sont les fonctions définies sur IR par :

$f(x) = A\sin(4x) + B\cos(4x)$;

$(A,B) \in IR^2$

2) $f(x) = \sin(4x) + \cos(4x)$

3) $f(t) = \cos(4t) + \sin(4t)$

$= \sqrt{2}.\cos(4t - \varphi)$

Avec $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}\,(2\pi)$

D'où : $f(t) = \sqrt{2}.\cos(4t - \frac{\pi}{4})$

($a = 4$; $b = \frac{\pi}{4}$)

4)

$$\bar{f} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(t)dt = \frac{8}{\pi}\left[\frac{\sqrt{2}}{4}.\sin(4t - \frac{\pi}{4})\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$= \frac{8}{\pi}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$; $\boxed{\bar{f} = \frac{4}{\pi}}$

EXERCICE 18 :

1) $y'' + y' = 0 \Leftrightarrow y'' = -y'$

on pose $z = y'$

L'équation devient : $z' = -z$

$z = a\,e^{-x}$; $a \in IR$

D'où : $y = -a\,e^{-x} + b$; $(a,b) \in IR^2$

les solutions sont les fonctions définies sur IR par :

$f(x) = -a\,e^{-x} + b$; $(a,b) \in IR^2$

2) les solutions de l'équation :

$y''' + y'' = 0$ sont les fonctions définies sur IR par :

$g(x) = a\,e^{-x} + b\,x + c$; $(a,b,c) \in IR^3$

EXERCICE 19:

1) $\text{Cos}^4(x)=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$

$=\dfrac{1}{16}.[e^{4ix}+4e^{i3x}.e^{-ix}+6e^{i2x}e^{-2ix}+4^{eix}e^{-3ix}+e^{-4ix}]$

$=\dfrac{1}{16}[(e^{4ix}+e^{-4ix})+4(e^{2ix}+e^{-2ix})+6]$

$=\dfrac{1}{16}[2\cos(4x)+8\cos(2x)+6]$

$\text{Cos}^4(x)=\dfrac{1}{8}\cos(4x)+\dfrac{1}{2}\cos(2x)+\dfrac{3}{8}$

2) (E) : $y''+y=\cos^4(x)$

$g(x)=a.\cos(4x)+b.\cos(2x)+c$

$g'(x)=-4a\sin(4x)-2b\sin(2x)$

$g''(x)=-16a\cos(4x)-4b\cos(2x)$

g est une solution de (E) $\Leftrightarrow$

$g''(x)+g(x)=\cos^4(x)\Leftrightarrow$

$-16a\cos(4x)-4b\cos(2x)+a\cos(4x)+b\cos(2x)+c=\cos(4x)$ $\Leftrightarrow$

$-15a\cos(4x)-3b\cos(2x)+c=\dfrac{1}{8}\cos(4x)+\dfrac{1}{2}\cos(2x)+\dfrac{3}{8}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}-15a=\dfrac{1}{8}\\ -3b=\dfrac{1}{2}\\ c=\dfrac{3}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{120}\\ b=-\dfrac{1}{6}\\ c=\dfrac{3}{8}\end{cases}$$

D'où $g(x)=-\dfrac{1}{120}\cos(4x)-\dfrac{1}{6}\cos(2x)+\dfrac{3}{8}$

3) f solution de (E)$\Leftrightarrow f''(x)+f(x)=\cos^4(x)$

$\Leftrightarrow f''(x)+f(x)=g''(x)+g(x)$

$\Leftrightarrow(f-g)''(x)+(f-g)(x)=0$

$\Leftrightarrow$f-g est une solution de l'éq : $y''+y=0$

4) *f solution de (E)$\Leftrightarrow$f-g solution de $y''+y=0$

$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=A.\sin(x)+B.\cos(x)$ AetB réels

$\Leftrightarrow f(x)=A.\sin(x)+B.\cos(x)+g(x)$

$\Leftrightarrow f(x)=A.\sin(x)+B.\cos(x)+-\dfrac{1}{120}\cos(4x)-\dfrac{1}{6}\cos(2x)+\dfrac{3}{8}$

* f solution de (E) et f(0)=1 et f'(0)=0

$f'(x)=A.\cos(x)-B.\sin(x)+\dfrac{1}{30}\sin(4x)+\dfrac{1}{3}\sin(2x)$

$$\begin{cases}f(0)=1\\ f'(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B-\dfrac{1}{120}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{8}=1\\ A=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\ B=\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

D'où

$f(x)=\dfrac{4}{5}\cos(x)-\dfrac{1}{120}\cos(4x)-\dfrac{1}{6}\cos(2x)+\dfrac{3}{8}$

EXERCICE 20 :

(E) : $4y''+\pi^2y=0$

1) (E) : $y'' + (\frac{\pi}{2})^2 y = 0$

Les solutions sont :

$f(x) = A\sin(\frac{\pi}{2}x) + B\cos(\frac{\pi}{2}x)$;

$(A,B) \in IR^2$

2) $\begin{cases} N(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in (\mathcal{C}_g) \\ T_N \,//\, (o,\vec{\imath}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ g'(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$

$g(x) = A\sin(\frac{\pi}{2}x) + B\cos(\frac{\pi}{2}x)$

$g'(x) = A\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x) - B\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)$

$\begin{cases} g(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ g'(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\frac{\sqrt{2}}{2} + B\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ A\frac{\pi\sqrt{2}}{4} - B\frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = \frac{1}{2}$

D'où : $g(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$

3) $g(x) = \frac{1}{2}[\sin(\frac{\pi}{2}x) + \cos(\frac{\pi}{2}x)]$

$g(x) = \frac{1}{2}[\sqrt{2}.\cos(\frac{\pi}{2}x - \varphi)]$

Avec $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}\,(2\pi)$

D'où : $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4})$

EXERCICE 21 :

$R.\,q'(t) + \frac{1}{c}q(t) = u$

$q(0) = 0$

1) (E) : $R.\,y' + \frac{1}{c}y = u$

2) (E) : $y' = -\frac{1}{Rc}y + \frac{u}{R}$

D'où :

$q(t) = k.e^{-\frac{t}{Rc}} + \frac{\frac{u}{R}}{\frac{1}{Rc}}$; $k \in IR$

$q(t) = k.e^{-\frac{t}{Rc}} + uc$; $k \in IR$

$q(0) = 0 \Longrightarrow k + cu = 0 \Longrightarrow k = -cu$

D'où :

$q(t) = -cu.e^{-\frac{t}{Rc}} + cu$

$q(t) = cu - cu.e^{-\frac{t}{Rc}}$

3)

$i(t) = q'(t) = \frac{u}{R}.\,e^{-\frac{t}{Rc}}$

EXERCICE 22 :

(E) : $f(x) = \int_0^x f(t)dt + x$

1) f est continue sur IR et $0 \in IR$

D'où la fonction : $x \longmapsto \int_0^x f(t)dt$ est dérivable sur IR et sa dérivée est la fonction : $x \longmapsto f(x)$

D'où la fonction : $f(x) = \int_0^x f(t)dt + x$ est dérivable sur IR comme étant somme de deux fonctions dérivables

2) – a) f solutions de (E)

$\Longrightarrow f(x) = \int_0^x f(t)dt + x$

$\Longrightarrow f'(x) = f(x) = 1$

$\Longrightarrow$ f est solution de l'équation :

(E') : $y' = y + 1$

b) réciproquement :
g est solution de (E´) $\Rightarrow$ g´(t) = g(t) + 1
$\Rightarrow \int_0^x g'(t)dt = \int_0^x g(t)dt + \int_0^x dt$

$\Rightarrow [g(t)]_0^x = \int_0^x g(t)dt + x$

$\Rightarrow g(x) - g(0) = \int_0^x g(t)dt + x$

g est solution de(E) lorsque $\boxed{g(0) = 0}$

3) les solutions de (E) sont celles de (E´) vérifiant f(0) = 0
d'où : $f(x) = e^x - 1$
est la seule solution de (E)

EXERCICE 23 :

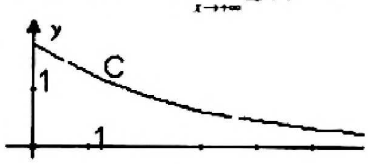
$Q'(t) = -\alpha\, Q(t)$
1) – a) Q est solution de l'équation différentielle : $y' = -\alpha y$ et $Q(0) = 1,8$
D'où :

$Q(t) = 1,8\, e^{-\alpha t}$

b) $Q(1) = 1,8 - \frac{30}{100}(1,8)$
$Q(1) = 1,26$
$\Rightarrow 1,8\, e^{-\alpha t} = 1,26$
$\Rightarrow \boxed{e^{-\alpha t} = 0,7}$

c) $f(x) = e^{-x}$; $f'(x) = -e^{-x} < 0$
f est continue et strictement décroissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur IR
Comme (0,7) ∈ IR alors il existe un unique réel α tel que f(α) = 0,7 $\Leftrightarrow e^{-\alpha} = 0,7$

* $g(x) = e^{-x} - 0,7$
$g(0) \times g(1) < 0 \Rightarrow 0 < \alpha < 1$
calculatrice $\Rightarrow 0,3566 < \alpha < 0,3567$
2) $\alpha \approx 0,35665$
$Q(t) = 1,8\, e^{-0,35665t}$
$Q'(t) = -0,35665 \times 1,8 e^{-0,35665t} < 0 \Rightarrow$ Q est décroissante et $\lim_{x\to+\infty} Q(t) = 0$



3) – a) $R_1 = 1,8 + Q(1)$
$= 1,8 + (1,8).e^{-\alpha} = 3,06$

$R_1 = 1,8 + (1,8)\times(0,7)$

b) $R_2 = 1,8 + R_1.e^{-\alpha}$
$R_2 = (1,8) + (0,7)\, R_1 = 3,942$

c) $R_{n+1} = 1,8 + (0,7)\, R_n$

d) Démonstration par récurrence :
* pour n = 0
$R_0 = (1,8) = 6 \times (0,3) = 6[1 - (0,7)^1]$

(Vrai)
* supposons que : $R_n = 6[1 - (0,7)^{n+1}]$

Montrons que : $R_{n+1} = 6[1 - (0,7)^{n+2}]$

$R_{n+1} = 1,8 + (0,7)\, R_n$
$R_{n+1} = 1,8 + 6.(0,7)\,[1 - (0,7)^{n+1}]$
$= 1,8 + 6[(0,7) - (0,7)^{n+2}]$
$= 6[0,3 + (0,7) - (0,7)^{n+2}]$
$= 6[1 - (0,7)^{n+2}]$
* conclusion
$R_n = 6[1 - (0,7)^{n+1}] \quad \forall n \in IN$

e) $\lim_{x\to+\infty} (0,7)^{n+1} = 0$
d'où :
$\lim_{x\to+\infty} Rn = 6$

EXERCICE 24 :

(I) : $y' = 2y$
(II) : $y' = y$
1) * les solutions de l'équation (I) sont les fonctions définies sur IR par :
$g(x) = k.e^{2x}$; $\forall k \in IR$

* les solutions de l'équation (II) sont les fonctions définies sur IR par :
$h(x) = k'.e^x$; $\forall k' \in IR$
2) $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$
a) f(0) = 1 car A(0,1) ∈ ($\mathcal{C}_f$)

f ´(0) = 3 (coefficient directeur de T)

b) $f(x) = k.e^{2x} - k'.e^{x}$

$f'(x) = 2k.e^{2x} - k'.e^{x}$

$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - k' = 1 \\ 2k - k' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k' = 1 \end{cases}$

d'où $f(x) = 2e^{2x} - e^{x}$

$f_1(x) = 2e^{2x}$; $f_2(x) = e^{x}$

c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2e^{2x} - e^{x}) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x}(2e^{x} - 1) = +\infty$

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x}(2e^{x} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2e^{x} - 1 = 0$ car $e^{x} \neq 0$

$\Leftrightarrow e^{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\text{Ln}2$

$(\mathcal{C}_f) \cap (o,\vec{i})$ est le point d'abscisse $(-\text{Ln}2)$

3) $t < -\text{Ln}2$

a) $\mathcal{A}(t) = -\int_t^{-\text{Ln}2} f(x)dx = \int_{-\text{Ln}2}^{t} f(x)dx$
$= [e^{2x} - e^{x}]_{-Ln2}^{t}$

$\mathcal{A}(t) = (e^{2t} - e^{t} + \frac{1}{4})$ u.a

b) * $\lim_{x \to -\infty} \mathcal{A}(t) = \frac{1}{4}$

* $\int_{-\text{Ln}2}^{0} f(t)dt = [e^{2t} - e^{t}]_{-Ln2}^{0} = \frac{1}{4}$

D'où : $\lim_{x \to -\infty} \mathcal{A}(t) = \int_{-\text{Ln}2}^{0} f(t)dt$

* $B = \int_{-\text{Ln}2}^{0} f(t)dt$: représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\text{Ln}2$ et $x = 0$

lorsque $t \longrightarrow -\infty$, $\mathcal{A}(t) \longrightarrow B$

EXERCICE 25 :

1) – a) $(E) : y' = -\frac{3}{4}y$

Les solutions sont les fonctions définies sur IR par : $h(x) = k.e^{-\frac{3}{4}x}$; $k \in$ IR

b) $f(x) = k.e^{-\frac{3}{4}x}$; $k \in$ IR

$f'(x) = -\frac{3}{4}k.e^{-\frac{3}{4}x}$; $k \in$ IR

$f'(0) = -6 \Rightarrow -\frac{3}{4}k = -6 \Rightarrow k = 8$

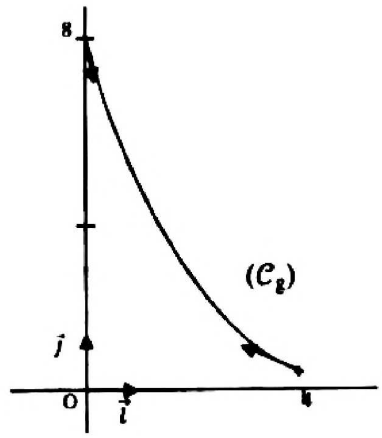
d'où :

$f(x) = 8\,e^{-\frac{3}{4}x}$

2) – a) $g(x) = 8\,e^{-\frac{3}{4}x}$; $x \in [0,4]$

$g'(x) = -6\,e^{-\frac{3}{4}x}$

x	0	4
$g'(x)$	-	
$g(x)$	8 ↘	$\frac{8}{e^3}$



b) $V = \pi.\int_0^4 g^2(x)dx$

$V = \pi.\int_0^4 64.\,e^{-\frac{3}{2}x}dx = 64.\pi\,[-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x}]_0^4$

$V = \frac{128}{3}(1 - \frac{1}{e^6})\pi$ (u.v)

<u>Remarque :</u> lorsque : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm

$V = \frac{128}{3}(1 - \frac{1}{e^6})\pi$ cm^3

EXERCICE 26 :

$m(0) = 300$

$(E) : y' = -\frac{1}{5} y$

1) – a) les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par : $f(x) = k.e^{-\frac{1}{5}x}$; $k \in IR$

b) $m(t) = k.e^{-\frac{t}{5}}$; $k \in IR$

$m(0) = 300 \Rightarrow k = 300$

d'où $m(t) = 300\, e^{-\frac{t}{5}} = 300\, e^{-0,2\,t}$

2) $m(t_0) = 150 \Leftrightarrow 300\, e^{-\frac{t_0}{5}} = 150$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{t_0}{5}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{t_0}{5} = -\text{Ln}2$

$\Leftrightarrow \boxed{t_0 = 5\,\text{Ln}2}$

3) $m(t) \leq 10^{-2} \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{5}} \leq \frac{1}{30000}$

$\Leftrightarrow -\frac{t}{5} \leq -\text{Ln}(30000) \Leftrightarrow t \geq 5\text{Ln}(30000)$

EXERCICE 27 :

$g(x) = \cos x - \sin x$

1) $g'(x) = -\sin x - \cos x$

$= -\sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$

$= \cos(\pi - x) - \sin(\pi - x)$

$= g(\pi - x)$

2) $f'(x) = f(\pi - x)$

a) * la fonction : $x \longmapsto \pi - x$ est dérivable sur IR , comme f est dérivable sur IR , la fonction : $x \longmapsto f(\pi - x)$est dérivable sur IR par suite f ´ est dérivable sur IR d'où f est deux fois dérivable sur IR

* $f'(x) = f(\pi - x) \Rightarrow f''(x) = -f'(\pi - x)$

$\Rightarrow f''(x) = -f[\pi - (\pi - x)]$

$\Rightarrow f''(x) = -f(x)$

$\Rightarrow f''(x) + f(x) = 0$

D'où f est solution de l'équation :$y'' + y = 0$

b) $f(x) = A \sin x + B \cos x$

$(A,B) \in IR^2$

EXERCICE 28 :

Partie A

$(E) : y' - 2y = -\frac{2}{1 + e^{-2x}}$

1) la solution de l'équation : $y' = 2y$ qui prend la valeur 1 en 0 est $h(x) = e^{2x}$

2) $f(0) = \text{Ln}2$

$f(x) = e^{2x}.\, g(x)$

a) $f(0) = e^0.\, g(0) \Rightarrow g(0) = f(0) = \text{Ln}2$

b) $f'(x) = 2e^{2x}.\, g(x) + e^{2x}.\, g'(x)$

$f'(x) = e^{2x}.[\,2g(x) + g'(x)]$

c) f est solution de (E)

$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow 2e^{2x}.\, g(x) + e^{2x}.\, g'(x) - 2e^{2x}.\, g(x) = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow e^{2x}.\, g'(x) = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow g(x) = \text{Ln}(1 + e^{-2x}) + k$; $k \in IR$

$g(0) = \text{Ln}2 \Rightarrow k = 0$

d'où : $g(x) = \text{Ln}(1 + e^{-2x})$

et $f(x) = e^{2x}\, \text{Ln}(1 + e^{-2x})$

Partie B

$f(x) = e^{2x}\, \text{Ln}(1 + e^{-2x})$

1) $h(x) = \text{Ln}(1 + e^{-2x}) - \frac{1}{e^{2x} + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \text{Ln}(1 + \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}) - \underbrace{\frac{1}{e^{2x} + 1}}_{\to 0}$

$= \text{Ln}\, 1 = 0$

b) $h'(x) = \frac{-2}{(e^{2x} + 1)^2} < 0$

h est strictement décroissante sur IR

c) $\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

h est strictement décroissante sur IR
d'où : $h(IR) =]\lim_{x \to +\infty} h(x), \lim_{x \to -\infty} h(x)[$

$=]0, +\infty[$

d'où : $h(x) > 0$; $\forall x \in IR$

2) $f'(x) = 2e^{2x}\ h(x)$
D'où f ´ et h sont de même signe.

3) * $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{Ln(1+e^{-2x})}{e^{-2x}}$

On pose : $X = e^{-2x}$ alors $\lim_{X \to 0} \frac{Ln(1+X)}{X} = 1$

* $f(x) = e^{2x}.\ Ln[e^{-2x}(1 + e^{2x})]$

$= e^{2x}.\ [Lne^{-2x} + Ln(1 + e^{2x})]$

$= e^{2x}.\ [-2x + Ln(1 + e^{2x})]$

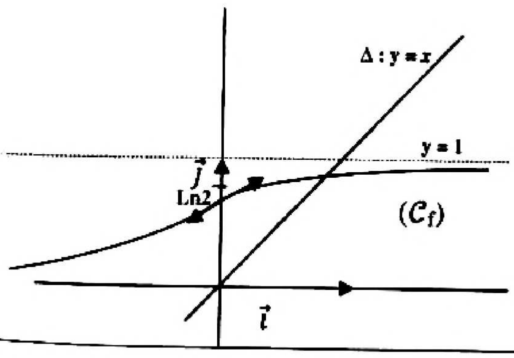
* $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$
$= \lim_{x \to -\infty} (-2xe^{2x} + e^{2x}Ln(1 + e^{2x})) = 0$

4) $f'(x) = 2e^{2x}\ h(x) > 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 $\nearrow$ 1

5) T : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

T : $y = (2Ln2 - 1)x + Ln2$



Partie C

1) $u(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

Une primitive de u sur IR est :
$U(x) = \frac{1}{2}Ln(1 + e^{2x})$

2) $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} f(x)dx$
$= \int_{-1}^{0} e^{2x}Ln(1 + e^{-2x})dx$

$e^{2x} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}e^{2x}$

$Ln(1 + e^{-2x}) \xrightarrow{d} \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$\mathcal{A} =$
$[\frac{1}{2}e^{2x}Ln(1 + e^{-2x})]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+e^{-2x}}dx$

$= \frac{Ln2}{2} - \frac{1}{2e^2}Ln(1 + e^2) + \left[\frac{1}{2}Ln(1 + e^{2x})\right]_{-1}^{0}$

$= Ln2 - \frac{1}{2e^2}Ln(1 + e^2) - \frac{1}{2}Ln(1 + e^{-2})$
u.a

$\mathcal{A} = 25[Ln2 - \frac{1}{2e^2}Ln(1 + e^2) - \frac{1}{2}Ln(1 + e^{-2})$
cm^2

$\mathcal{A} =$ …calculatrice

Partie D

$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) f est continue et strictement croissante sur [0,1] d'où :
$f([0,1]) = [f(0), f(1)]$
$= [Ln2, e^2Ln(1 + e^{-2})]$

$Ln2 \geq 0$ et $f(1) \leq 1$ d'où :
$f([0,1]) \subset [0,1]$
* Démonstration par récurrence

* $U_0 = 0 \in [0,1]$ (vrai)

* supposons que : $U_n \in [0,1]$
montrons que : $U_{n+1} \in [0,1]$
$U_n \in [0,1] \Rightarrow f(U_n) \in f([0,1])$
$\Rightarrow f(U_n) \in [0,1]$
$\Rightarrow U_{n+1} \in [0,1]$

Car $f([0,1]) \subset [0,1]$

Conclusion : $U_n \in [0,1]$; $\forall n \in IN$

2) * $U_0 = 0$ et $U_1 = f(U_0) = Ln2$

$U_0 \leq U_1$ (vrai)

* supposons que : $U_n \leq U_{n+1}$

montrons que : $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

$U_n \leq U_{n+1} \Rightarrow f(U_n) \leq f(U_{n+1})$ car f est croissante

$\Rightarrow U_{n+1} \leq U_{n+2}$

Conclusion :

(U_n) est croissante

* (U_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers un réel α

3) $U_{n+1} = f(U_n)$; $U_n \in [0,1]$

f est continue sur $[0,1]$ d'où : $\alpha = f(\alpha)$

$U_n \in [0,1] \Rightarrow \alpha \in [0,1]$

$f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1 \Rightarrow \alpha \in]0,1[$

4) $\Delta : y = x$

$(\mathcal{C}_f) \cap \Delta = \{ A(\alpha , \alpha)\}$; $\alpha \approx 0,8$ (gr[t])

EXERCICE 29 :

$\theta_0 = 30°C$

$\theta'(t) = k[T - \theta(t)]$

$k = 0,1$; $\theta(0) = 30$

1) θ vérifie l'équation différentielle :

$y' = (0,1) [T - y]$ et $\theta(0) = 30$

2) $T = 100$

a) (E) : $y' = (0,1) [100 - y]$

(E) : $y' = - (0,1) . y + 10$ et $\theta(0) = 30$

D'où :

$$\theta(t) = (30 - \frac{10}{0,1})e^{-0,1t} + \frac{10}{0,1}$$

$$\boxed{\theta(t) = - 70\, e^{-0,1t} + 100}$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta(t) = 100$

Interprétation :

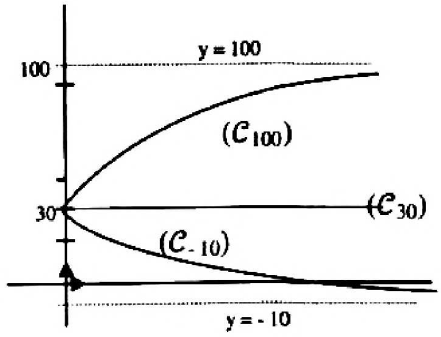
Lorsque le corps reste beaucoup de temps sa température sera 100°C

3)

$\theta(t) = - 70\, e^{-0,1t} + 100$

$\theta'(t) = 7\, e^{-0,1t} > 0$

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\theta'(t)$	+
$\theta(t)$	30 $\nearrow$ 100



b) $T = 30$

$\theta(t) = 30$ constante

c) $T = - 10$

$\theta(t) = (30 + 10)e^{-0,1t} - 10$

$\theta(t) = 40\, e^{-0,1t} + \frac{10}{0,1}$

$\theta'(t) = - 4\, e^{-0,1t} < 0$

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\theta'(t)$	-
$\theta(t)$	30 $\searrow$ - 10

EXERCICE 30 :

$\theta(0) = 0$

$\theta'(t) + (0,1)\theta(t) = 2$

1) θ est une solution de l'équation différentielle : $y' = -(0,1).y + 2$ et $\theta(0) = 0$

D'où :

$$\theta(t) = -20\,e^{-0,1t} + 20$$

2) – a) $\theta(10) = (20 - \frac{20}{e})$ °C

$\theta(60) = (20 - \frac{20}{e^6})$ °C

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \theta(t) = 20$$

Pour t assez grand , la température du conducteur tend vers 20°C

EXERCICE 31 :

Partie A

$$f(x) = \frac{3e^{x/5}}{e^{x/5}+2}$$

1)

$$f'(x) = \frac{\frac{6}{5}e^{x/5}}{(e^{x/5}+2)^2} > 0$$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} = \frac{3}{1+\frac{2}{e^{x/5}}} = 3$ $\quad \frac{2}{e^{x/5}} \to 0$

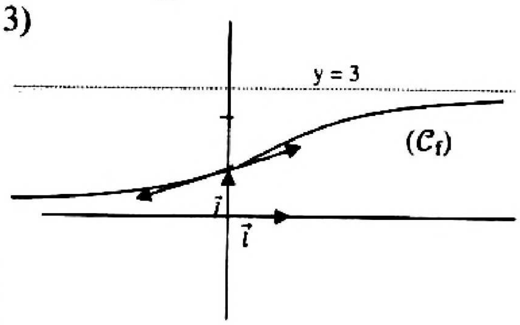
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 $\nearrow$ 3

Les droites d'équations respectives : Y = 0 et y = 3 sont des assymptôtes à $(\mathcal{C})$

2) T : y = f ´(0).(x - 0) + f(0)

$T : y = \frac{2}{15}x + 1$

3)



4) – a) $F(x) = 15.\text{Ln}(2 + e^{\frac{x}{5}}) + k$; $k \in \mathbb{R}$

$F(0) = 0 \Rightarrow k = -15\text{Ln}3$

D'où : $F(x) = 15.\text{Ln}(2 + e^{\frac{x}{5}}) - 15\text{Ln}3$

$$F(x) = 15.\text{Ln}\left(\frac{2+e^{x/5}}{3}\right)$$

b) $\mathcal{A} = \int_0^5 f(x)dx = [F(x)]_0^5$

$= F(5) - F(0)$

$\boxed{\mathcal{A} = 15\,\text{Ln}(\frac{2+e}{3})}$ u.a

Partie B

1) (I) : $g' = \frac{1}{5}g$

a) les solutions de (I) sont les fonctions définies sur IR par : $g(x) = k\,e^{x/5}$; $k \in \mathbb{R}$

b) $g(0) = 1 \Rightarrow k = 1$

d'où : $g(t) = e^{t/5}$; $t \in [0,+\infty[$

2) (II) : $g' = \frac{g}{5} - \frac{g^2}{15}$

a) $h = \frac{g}{3-g}$ h solution de (I) $\Leftrightarrow h' = \frac{h}{5}$

$\Leftrightarrow (\frac{g}{3-g})' = \frac{g}{5(3-g)}$

$\Leftrightarrow \frac{g'(3-g)+g'g}{(3-g)^2} = \frac{g}{5(3-g)} \Leftrightarrow \frac{3g'}{3-g} = \frac{g}{5}$

$\Leftrightarrow 3g' = \frac{3}{5}g - \frac{g^2}{5} \Leftrightarrow g' = \frac{g}{5} - \frac{g^2}{15}$

$\Leftrightarrow$ g est solution de (II)

b) $h(x) = ke^{\frac{x}{5}}$; $k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{g(x)}{3-g(x)} = ke^{\frac{x}{5}}$

$\Leftrightarrow g(x) = \frac{3e^{\frac{x}{5}}}{1-ke^{\frac{x}{5}}}$; $k \in \mathbb{R}$

c) $g(0) = 1 \Rightarrow \frac{3k}{1+k} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

d'où : $g(x) = \frac{3e^{\frac{x}{5}}}{2-e^{\frac{x}{5}}} = f(x)$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$ la population tend vers 3 milliers.

EXERCICE 32 :

(E) : $y'' + \frac{1}{Lc} y = 0$

$C = 1{,}25 \times 10^{-3}$
$L = 0{,}5 \times 10^{-2}$

1) les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :
$f(x) = A\cos(\frac{x}{\sqrt{Lc}}) + B\sin(\frac{x}{\sqrt{Lc}})$; $(A,B) \in IR^2$

$Lc = (0{,}0625) \times 10^{-4}$

$\sqrt{Lc} = (0{,}25) \times 10^{-2}$

$\frac{1}{\sqrt{Lc}} = 400$; d'où :

$f(x) = A\cos(400x) + B\sin(400x)$; $(A,B) \in IR^2$

2) $q(0) = 6\times 10^{-3}$

$q'(0) = 0$

d'où : $q(t) = 6\times 10^{-3}\cos(400t)$; $t\in[0,+\infty[$

$q(t) = (0{,}006).\cos(400t)$

3) $i(t) = -q'(t)$

a) $q(t) = (0{,}006).\cos(400t)$

d'où : $i(t) = -q'(t)$

$$\boxed{i(t) = (2{,}4).\sin(400t)}$$

b) $J = \frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}} \cos(800t)\,dt$

$J = \frac{400}{\pi}\left[\frac{1}{800}\sin(800t)\right]_0^{\frac{\pi}{400}}$

$J = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi)$; $\boxed{J = 0}$

c)

$(I_e)^2 = \frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}} i^2(t)\,dt$

$i^2(t) = 5{,}76\sin^2(400t)$

$i^2(t) = 5{,}76.(\frac{1-\cos(800t)}{2})$

$i^2(t) = 2{,}88\,(1 - \cos(800t))$

D'où :

$(I_e)^2 = (\frac{400}{\pi})(2{,}88).\int_0^{\frac{\pi}{400}}(1 - \cos(800t))\,dt$

$= \frac{1152}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{400}} 1\,dt - J\right)$

$= \frac{1152}{\pi}[t]_0^{\frac{\pi}{400}} = 2{,}88$

D'où :

$I_e = \sqrt{2{,}88} = 1{,}697$ Ampères

QCM :

1) h (I,-4) est une similitude directe de rapport 4 d'angle π.

2) h(I,2) oh(J,$\frac{1}{2}$) est une translation.

3) L'image par une similitude de rapport ½ d'un triangle d'aire A est un triangle d'aire $\frac{A}{4}$.

4) r(Ω,$\frac{\pi}{6}$) oh(Ω,-2) = r(Ω, -$\frac{5\pi}{6}$) oh(Ω ,2)

5) fof = h(I,4)

VRAI-FAUX :

1) Vrai :en effet : une similitude directe qui fixe deux points distincts est un déplacement.
Un déplacement qui fixe deux points distincts est l'identité du plan.

2) Vrai : en effet : un antidéplacement est une similitude indirecte de rapport 1.
* la composée d'une S.d de rapport 2 est une S.I de rapport 1 est une similitude indirecte de rapport 2×1=2.

3) Faux : la composée d'une S.D de rapport 4 est d'une S.I de rapport $\frac{1}{4}$ est une similitude indirecte de rapport 4× $\frac{1}{4}$= 1 d'où c'est un antidéplacement.

4) Faux : si f es une similitude de rapport 3 alors f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{3}$.

5) Vrai : $S_{(AC)}$ est une S.I de rapport 1$\Longrightarrow$ f_0 $S_{(AC)}$ est S. directe de même rapport que f.et on a : f_0 $S_{(AC)}(A)=B$
f_0 $S_{(AC)}(C)=D$

EXERCICE 1 :

a) $\begin{cases} f(B)=B \\ f(A)=C \end{cases}$

f est de rapport $\frac{BC}{BA}$=1 d'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = -\frac{\pi}{3}(2\pi)$

$\Longrightarrow f$ = rot(B, $-\frac{\pi}{3}$)

b) $\begin{cases} f(B)=B \\ f(C)=G \end{cases}$ soit $I = A * C$ f est de rapport k= $\frac{BG}{BC} = \frac{2}{3}\frac{BI}{BC}$ ⇒k= 2/3cos $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
d'angle $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG}}) = \frac{\pi}{6}(2\pi)$

$\Longrightarrow f$ = s(B,$\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\pi}{6}$)

c) $\begin{cases} f(G)=G \\ f(B)=C \end{cases}$

k=$\frac{GC}{GB}$=1, θ=$(\widehat{\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}})$ (2π)

θ= $\frac{2\pi}{3}$ (2π)

$f = rot(G,\frac{2\pi}{3})$

EXERCICE 2:

1) Soit k: le rapport de S et θ son angle
S^{-1} est une S.d de rapport $\frac{1}{k}$ d'angle $-\theta$.

a) f = t $\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$
S o f est une similitude diecte de rapport k × 1= k d'angle θ.
$\Longrightarrow$ S o foS^{-1} est une S. directe de rapport $\frac{1}{k}$ × k=1 d'angle nul d'où S ofoS^{-1} est une translation.

b) f est rotation d'angle ∝ non nul.
S o f est S.d de rapport k d'angle (∝+θ).
$\Longrightarrow$ S o f o S^{-1} est une S.d de rapport 1 d'angle θ+∝ $-\theta$=∝(2π) d'où S o foS^{-1} est une rotation d'angle ∝.

c) f : homothétie de rapport λ≠ 1

1er cas λ=-1⟶ f= symétrie centrale
⟶ f est une rotation d'angle π d'où S o f o S^{-1} est une rotation d'angle π
S o f o S^{-1} : symétrie centrale.

$2^{ème}$ cas : λ≠-1 f est une S. directe de rapport |λ |d'angle nul ou π.

$S \circ f \circ S^{-1}$ est une S. directe de rapport $|\lambda|$de même angle que f.

$\Longrightarrow$ $S \circ f \circ S^{-1}$ est une homothétie de même rapport que f.

d) $f = S_{\Delta}$ avec Δ passe par le centre wde S.

$S \circ f \circ S^{-1}$ est un antidéplacement qui fixe w.

$\Longrightarrow$ $S \circ f \circ S^{-1}$ est une symétrie orthogonale d'axe passant par w.

2) S : Similitude indirecte de rapport k.

a) f : translation de vecteur non nul.

$S \circ f$ est une S.indirecte de rapport k.1=k

$\Longrightarrow$ $S \circ f \circ S^{-1}$ est une S.directe de rapport $k.\frac{1}{k}=1$

$\Longrightarrow$ $S \circ f \circ S^{-1}$: déplacement

b) f = rotation d'angle $\alpha \neq 0\ (2\pi)$

$S \circ f$ est une similitude indirecte de rapport $k \times 1 = k$.

$\Longrightarrow$ $S \circ f \circ S^{-1}$ est une S. directe de rapport $k \times \frac{1}{k} = 1$.

$\Longrightarrow$ $S \circ f \circ S^{-1}$ est un déplacement

c) f = homothétie de rapport $\lambda \neq 1$

$S \circ f \circ S^{-1}$ est une homothétie de même rapport.

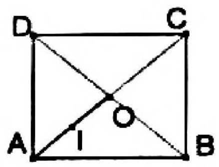
d) $f = S_{\Delta}$, $w \in \Delta$.

$S \circ f \circ S^{-1}$ est un anti-déplacement.

$S \circ f \circ S^{-1}(w) = w$

$S \circ f \circ S^{-1}$ est une symétrie orthogonale.

EXERCICE 3 :



1)a) AB≠0 et OI≠0 d'où il existe une unique similitude directe S tels que S(A)=0 et S(B)=I

b) $\frac{OI}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AO}{AB} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OI}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) + (\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OI}})\ (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{4} + \pi\ (2\pi)$

$\equiv -3\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

S est de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et d'angle $(-3\frac{\pi}{4})$

2) a) $R=(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

$z_A=0$ $\qquad z_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$z_B=1$ $\qquad z_I=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

L'écriture complexe de S est de la forme z'=az+b

$\begin{cases} S_{(A)} = 0 \\ S_{(B)} = I \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z_0 = a.z_A + b \\ z_I = a.z_B + b \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ a + b = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\begin{cases} b = \frac{1}{2}(1+i) \\ a = -\frac{1}{4}(1+i) \end{cases}$

D'où $S : M_{(z)} \longrightarrow M'_{(z')}$

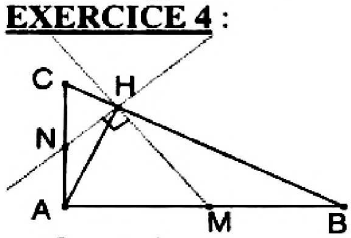
Tels que : $z' = -\frac{1}{4}(1+i).z + \frac{1}{2}(1+i)$

b) Soit Ω : le centre de S ;$S_{(\Omega)} = \Omega$

$\Longrightarrow z_\Omega = -\frac{1}{4}(1+i).z_\Omega + \frac{1}{2}(1+i)$

$\Longrightarrow z_\Omega = \frac{2}{13}(3+2i)$

EXERCICE 4 :



1) $\begin{cases} f_{(B)} = A \\ f_{(A)} = C \end{cases}$

f est de rapport $k=\frac{AC}{AB}$ d'angle

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \pi(2\pi)$

$= \frac{\pi}{2} + \pi(2\pi)$

$= -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

Soit w son centre

- f(B)=A $\Longrightarrow$ w appartenant à (C_1) : cercle de diamètre $[BA]$(car f est d'angle $(-\frac{\pi}{2})$.)
- f(A)=C $\Longrightarrow$ $w \in (C_2)$: cercle de diamètre $[AC]$

  d'où $w \in (C_1) \cap (C_2) = \{A, H\}$

  et Comme f(A)≠A alors w=H

Conclusion :

$\boxed{f \text{ de rapport } \frac{AC}{AB} \text{ d'angle } -\frac{\pi}{2} \text{ de centre H.}}$

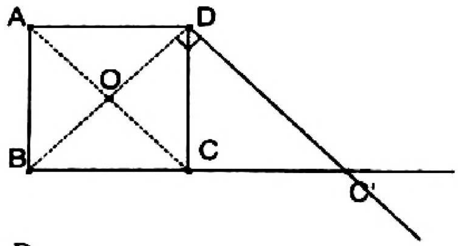
2) $f_{(M)} = N$

$\Longrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{HN}$

$\Longrightarrow$ H $\in$ Cercle de diamètre $[MN]$

de même : A $\in$ cercle de diamètre $[MN]$.

EXERCICE 5 :



$\begin{cases} S_{(D)} = D \\ S_{(O)} = C \end{cases}$

1) $\frac{DC}{Do} = \frac{1}{cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$

$(\widehat{\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DC}}) = \frac{\pi}{4}\,(2\pi)$

S est de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$

2) S(A)=B car $\begin{cases} DB = \sqrt{2}\,DA \\ (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) = \frac{\pi}{4}\,(2\pi) \end{cases}$

3) soit $C' = S_{(C)}$

O=A*C $\Longrightarrow$ S(O)=S(A)*S(C)

$\Longrightarrow$ C=B*C'

$\Longrightarrow$ C'=S_C (B)

EXERCICE 6:

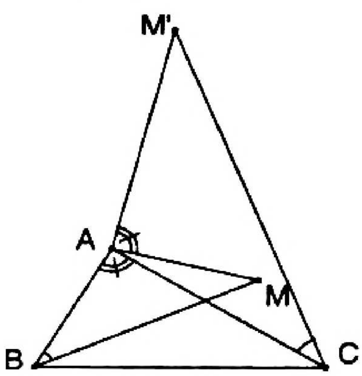
1) M $\notin$ (AB)

S Conserve les mesures des angles orientés d'où

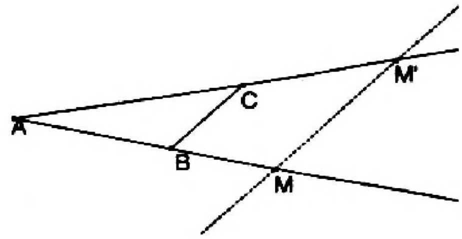
$(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM'}})\ (2\pi)$

Et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}})\ (2\pi)$

Voir figure:

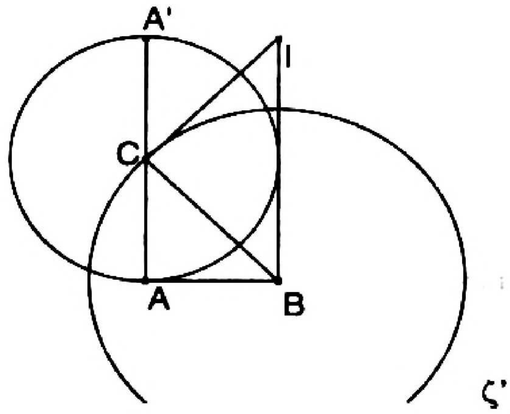


2) M$\in$ (AB)\ $\{A, B\}$



(MM') // (BC) et M' $\in$ (AC)

EXERCICE 7



1) a) $\begin{cases} S_{(A')} = C \\ S_{(C)} = B \end{cases}$

$\frac{CB}{A'C} = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$

$(\widehat{\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})\ (2\pi)$

$= \frac{\pi}{4}\,(2\pi)$

D'où S est de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$

b) S(AC)= S(A'C)=(BC)

2) a)

$S_{(C)}$= B $\Longleftrightarrow \begin{cases} IB = \sqrt{2}.IC \\ (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{4}\,(2\pi) \end{cases}$

D'après le théorème d'ELKASHI

$BC^2 = IC^2 + IB^2 - 2IB.IC.\cos \hat{I}$

$BC^2 = IC^2 + (\sqrt{2}.IC)^2 - 2(\sqrt{2}).IC^2 . \cos\frac{\pi}{4}$

$\Longrightarrow BC^2 = IC^2 + 2IC^2 - 2\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.IC^2$

$\Longrightarrow BC^2 = IC^2 + 2IC^2 - 2IC^2 \Rightarrow CB = CI$

Or $C\hat{I}B = \frac{\pi}{4}$

D'où $C\hat{B}I = \frac{\pi}{4}$ Par suite $I\hat{C}B = \frac{\pi}{2}$

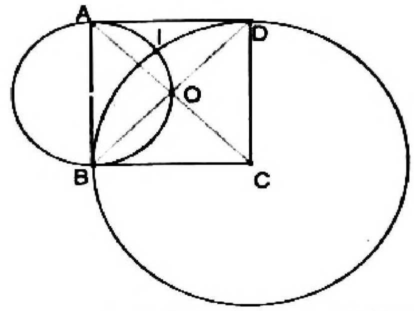
Conclusion : le triangle ICB est rectangle et isocèle en C

b) ICB isocèle rectangle en C et direct

(C) : le cercle de centre C passant par A'

D'où son image pour S est le cercle de centre $S_{(C)} = B$ et passant par $S_{(A')}$=C.

EXERCICE 8



1) a) $\begin{cases} S_{(A)} = o \\ S_{(B)} = D \end{cases}$

$\frac{OD}{AB}=\frac{Ao}{AB}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\overrightarrow{AB},\widehat{\ }\overrightarrow{OD})= (\overrightarrow{AB},\widehat{\ }\overrightarrow{Bo})\ (2\pi)$

$= (\overrightarrow{BA},\widehat{\ }\overrightarrow{Bo})+ \pi\ (2\pi)$

$=-\frac{\pi}{4}+\pi\ (2\pi)$

$=\frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

D'où S est de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'angle $\frac{3\pi}{4}$

b) Soit I son centre

$S_{(B)} = D \Longrightarrow (\overrightarrow{IB},\widehat{\ }\overrightarrow{ID}) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

$\Longrightarrow$ I$\in$ l'arc $[\overset{\frown}{DB}]$ du cercle de centre C et passant par B

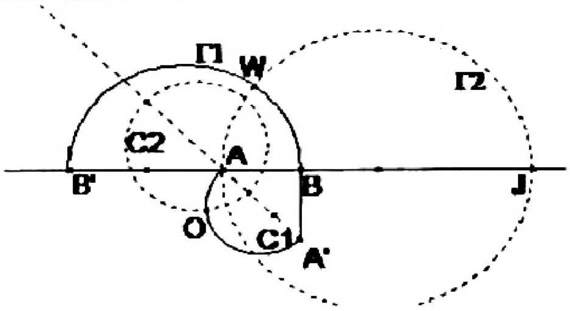
De même S(A)=O $\Longrightarrow$ I$\in$ l'arc $[\overset{\frown}{OA}]$ du cercle de diamètre [AB]

c) soit D'= $S_{(D)}$ le triangle ABD est rectangle et isocèle en A de sens direct d'où son image ODD' est rectangle et isocèle en S(A)=0 et direct $\Longrightarrow$ D'=A

Par suite $S(D) = A$

2) ABD est direct d'où son image pour une similitude directe est un triangle de sens direct comme ODC est indirect Alors il n'existe aucune similitude directe f tel que f(A)=O ;f(B)=D et f(D)=C.

EXERCICE 9 :



1) $h = h_{(A,-2)}$; $r = r_{(B,\frac{\pi}{2})}$

* h est une similitude directe de centre A de rapport 2 d'angle π.

* r est une similitude directe de centre B de rapport 1 d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Comme étant composée de deux similitudes directes $S = r\ o\ h$ est une similitude directe de rapport $1 \times 2 = 2$ d'angle $\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

2) $A' = r(A)$ O : le centre de S

a) $S_{(A)} = r\ o\ h_{(A)} = r_{(A)} = A'$

$S_{(A)} = A' \Longleftrightarrow \begin{cases} OA' = 2OA \\ (\overrightarrow{OA},\widehat{\ }\overrightarrow{OA'}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

b) * $(\overrightarrow{OA},\widehat{\ }\overrightarrow{OA'})= -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ d'où

O $\in (C_1)$: demi-cercle de diamètre $[AA']$ ne contenant pas le point B.

*$\frac{OA'}{OA} = 2$ d'où O $\in (C_2)$: cercle de diamètre $[GG']$

G : Le barycentre des points pondérés (A', 1) e (A, 2)

G' : Le barycentre des points pondérés (A', 1) et (A,-2)

$(C_1) \cap (C_2) = \{0\}$

3) B'=h(B) ; S'=hor

S' est une similitude directe de rapport 2 d'angle $(-\frac{\pi}{2})$

Soit w son centre

$S'_{(B)} = h\ o\ r(B) = h(B) = B'$

S'(B)=B' $\Longleftrightarrow \begin{cases} wB' = 2wB \\ (\overrightarrow{wB},\widehat{\ }\overrightarrow{wB'}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

w $\in (\Gamma_1)$: demi-cercle de diamètre$[BB']$.

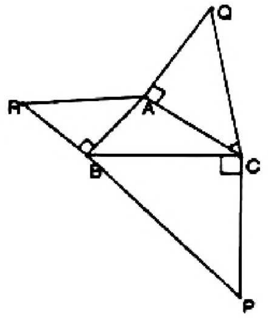
w $\in (\Gamma_2)$: Cercle de diamètre $[II']$ avec

I: b.p.p (B',1) et (B,2) $\longrightarrow I = A$

I':b.p.p (B',1) et (B,-2) $\longrightarrow j = S_B$(B')

$(\Gamma_1) \cap (\Gamma_2) = \{w\}$

EXERCICE 10 :



$f = S_R \circ S_P \circ S_Q$

1) $f_{(A)} = S_R \circ S_P \circ S_Q(A)$
$= S_R \circ S_P\ (C)$
$= S_R\ (B)$
$=$ A

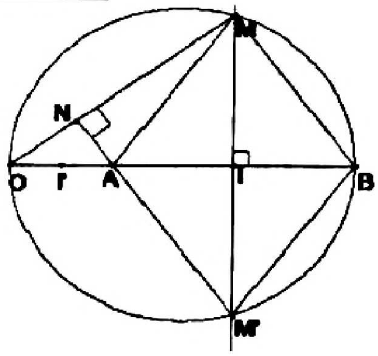
2) $f = S_R \circ (S_P \circ S_Q)$

$S_P \circ S_Q$ est une similitude directe de rapport $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

D'angle $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} (2\pi)$

D'ou f est une similitude directe de rapport $2\sqrt{2}$ d'angle $\frac{3\pi}{4}$ de centre A.

EXERCICE 11 :



1) a) $S_{(AB)}(M) = M'$ $\Longrightarrow$ I=M*M'
Or I=A*B

D'ou AMBM' est un parallélogue

M∈ med $[AB]$ $\Longrightarrow$ MA=MB

Par suite la quadrilatère AMBM' est un losange.

b) *M est un point de (C) cercle de diamètre $[OB]$ d'où $(OM) \perp (BM)$ (1)

*A MBM' est un # $\Longrightarrow$ $(BM)//(AM')$ (2)

(1) +(2) $\Longrightarrow$ $(OM) \perp (AM')$

* (AN) ⊥(OM) et(AM') ⊥ (OM)

D'où (AN) //(AM')

Par suite A,N et M' sont soulignés

2) S: similitude directe tel Que : $\begin{cases} S(N) = N \\ S(M) = A \end{cases}$

a) $(\overrightarrow{NM}, \widehat{\ \ } \overrightarrow{NA}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

d'ou S est d'angle $(-\frac{\pi}{2})$

b) * L'image de la droite (MI) par S est la droite passant par $S(M) = A$ et qui lui est perpendiculaire(Car S est d'angle $(-\frac{\pi}{2})$)

D'où $S((MI)) = (AB)$

* De même $S((NA)) = (NM)$

c) (MI) ∩ (NA) = $\{M'\}$

d'où $S_{((MI))} \cap S_{((NA))} = \{S_{(M')}\}$

$\Longrightarrow \{S_{(M')}\} = (AB) \cap (NM)$

$\Longrightarrow S_{(M')}$=O

d) I= M*M' $\Longrightarrow$ $S_{(I)} = S_{(M)} * S_{(M')}$

$\Longrightarrow$ I'=A*O

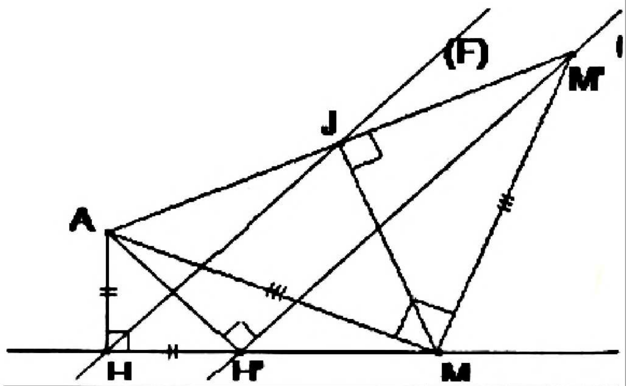
e) (NO) ⊥ (NA) d'ou N∈ (Γ) : cercle de diamètre $[OA]$

$S_{(I)} = I'$ $\Longrightarrow (\overrightarrow{NI}, \widehat{\ \ } \overrightarrow{NI'}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

$\Longrightarrow$ (NI) ⊥ (NI')

D'où (NI) est tangente à (Γ) en N

EXERCICE 12 :



1) S : similitude directe de centre A tel que $S(M) = M'$

$(\overrightarrow{AM}, \widehat{\ \ } \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$

AM'=$\sqrt{2}$.AM

D'où S est de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$

2)M' = S(M) D'où

(E) est la droite image de (HH') par S

$S_{(H)}$=H'

(E) : la droite passant par H' et perpendiculaire à (AH')

3) AMM' est rectangle et isocèle en M et J=A*M' D'où JA=JM'=JM

et (JM)⊥(AM')

Parsuite le triangle AJM est rectangle et isocèle en J

$\Longrightarrow \frac{AJ}{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(\overrightarrow{AM},\widehat{\overrightarrow{AJ}}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

4) $\begin{cases} AJ = \frac{\sqrt{2}}{2} AM \\ (\overrightarrow{AM},\widehat{\overrightarrow{AJ}}) = \frac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases}$

D'où J=f(M) avec f : la similitude directe de centre A de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dangle $\frac{\pi}{4}$

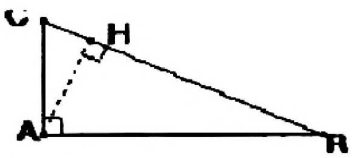
$\Longrightarrow (F) = f((HH'))$

(Ou bien : $h_{(A,\frac{1}{2})}(M') = j \Rightarrow (F) = h_{(A,\frac{1}{2})}(E)$)

Conclusion :

(F) est la droite passant par H et perpendiculaire à (AH')

EXERCICE 13 :



1) Soit S : la similitude directe de centre H tel que $S_{(C)} = A$

Montrons que $S_{(A)} = B$

S est d'angle $(\overrightarrow{HC},\widehat{\overrightarrow{HA}}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

*l'image de la droite (CA) par S est la droite passant par $S_{(C)} = A$

Et qui lui est perpendiculaire

$\Longrightarrow S_{((CA))} = (AB)$

De même : $S_{((HA))} = (HB)$

(CA)∩(HA)={A}

$\Longrightarrow S_{((CA))} \cap S_{((HA))} = \{S_{(A)}\}$

$\Longrightarrow \{S_{(A)}\} = (AB) \cap (HB)$

$\Longrightarrow S_{(A)} = B$

D'où l'image du triangle CAH par S est le triangle ABH

2) soit f : la similitude indirecte de centre C tel que : $f_{(B)} = A$

Montrons que : $f_{(A)} = H$

Soit k le rapport de f $\left(k = \frac{CA}{CB}\right)$

et soit A' = f(A).

$f_o f = h_{(C,k^2)}$

$f_o f_{(B)} = f_{(A)}$=A'

$\Longrightarrow h_{(C,k^2)}(B)$=A' ⇒A'∈ (CB) (1)

(CA) ⊥(AB) $\Longrightarrow f_{(CA)} \perp f_{(AB)}$

$\Longrightarrow$ (CA') ⊥ (AA') (2)

(1) + (2) $\Longrightarrow$ A': la projection orthogonale de A sur (BC)⇒A'= H

$\Longrightarrow f_{(A)} = H$

D'ou f transforme le triangle ABC en le triangle HAC.

*Soit Δ :l'axe de f

$f_{(B)} = A$ et f de centre C $\Longrightarrow$

Δ : porte la biscentrice intérieure de $[CB, CA]$

$f = h_{(C,k)} o\, S_\Delta = S_\Delta o\, h_{(C,k)}$

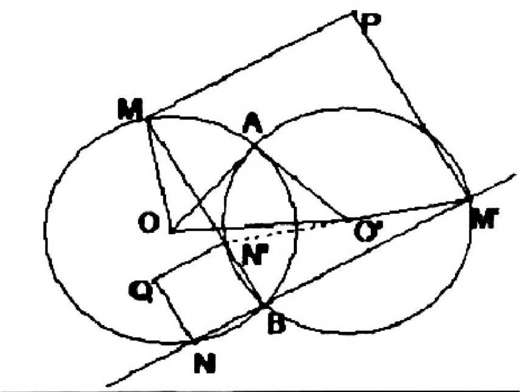
3) S o f(A)=S(H)=H

S o f(B)=S(A)=B

S o f(C)=S(C)=A

S o f transforme le triangle ABC en le triangle HBA.

EXERCICE 14:



$(\overrightarrow{OM},\widehat{\overrightarrow{O'M'}}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

1) soit f la similitude directe tels que : $f_{(O)} = o'$ et $f_{(M)} = M'$

f est une similitude directe de rapport $\frac{o'M'}{OM} = 1$ d'angle $(\overrightarrow{OM},\widehat{\overrightarrow{O'M'}}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$\Longrightarrow f$ est une rotation d'angle $(-\frac{\pi}{2})$

$f_{(O)} = o'$ et on a :

$\begin{cases} Bo' = Bo \\ (Bo,\widehat{Bo'}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi) \end{cases}$

D'où f est de centre B ⇒ $f = r_{(B,-\frac{\pi}{2})}$

2) f((BM))=(BM') D'où

(BM)⊥ (BM') car f est d'angle $(-\frac{\pi}{2})$

$\Longrightarrow f(BM') = (BM)$ et $f(\zeta) = \zeta'$

(BM') ∩ (ζ) = $\{B, N\}$

$\Longrightarrow (BM) \cap (\zeta') = \{f_{(B)}, f_{(N)}\}$
$= \{B, f_{(N)}\}$

D'où $f_{(N)} = N'$

$\Longrightarrow \begin{cases} BN' = BN \\ (\overrightarrow{BN}, \widehat{\overrightarrow{BN'}}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

D'où BN'=BN et (BN) ⊥(BN')

3) a) $\begin{cases} BP = \sqrt{2}\,BM \\ (\overrightarrow{BM}, \widehat{\overrightarrow{BP}}) = -\frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

D'où P=$S_{(M)}$ avec S : la similitude directe de centre B de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $-\frac{\pi}{4}$ d'où l'ensemble des points P est le cercle (Γ) image du cercle (ζ) par S.

On a $S(O) = A$ et $S(B) = B$

D'où (Γ) est le cercle de centre A passant par B

De même : $S(N) = Q \Longrightarrow$ Q ∈ (Γ)

b) B, P et Q appartiennent à (Γ)

$(\overrightarrow{BQ}, \widehat{\overrightarrow{BP}}) = (\overrightarrow{BQ}, \widehat{\overrightarrow{BM}}) + (\overrightarrow{BM}, \widehat{\overrightarrow{BP}})\ (2\pi)$
$= -\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)(2\pi)$
$= -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

$\overrightarrow{BQ} \perp \overrightarrow{BP}$

D'où B appartient au cercle de diamètre $[PQ]$

Comme B, P et Q ∈ (Γ)

Alors $[PQ]$ est un diamètre de (Γ)

$\Longrightarrow$ P∗ Q=A $\Longrightarrow$ A∈ (PQ)

EXERCICE 15 :

F : $M_{(z)} \longrightarrow M'_{(z')}$

Avec z'=2i.z +3-i

1) $z_B = i$; $z_c = -1$

$z_{B'} = 2i\, z_B + 3 - i = 2i\,(i) + 3 - i$

$z_{B'} = 1 - i$

$z_{c'} = -2i + 3 - i = 3 - 3i$

$*(\overrightarrow{BC}, \widehat{\overrightarrow{B'C'}}) = \text{Arg}\left(\frac{z_{c'} - z_{B'}}{z_c - z_B}\right)(2\pi)$
$= \text{Arg}\left(\frac{2-2i}{(-1)-i}\right)(2\pi)$
$= \text{Arg}\,(2i)\,(2\pi)$
$= \frac{\pi}{2}(2\pi)$

$*\ BC = |z_C - z_B| = |-1 - i| = \sqrt{2}$

$B'C' = |z_{c'} - z_{B'}| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2}$

B'C'=2BC

2) $z' = 2iz + 3 - i$

$|a| = |2i| = 2$

Arg a= Arg (2i) (2π)
$= \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$\frac{b}{1-a} = \frac{3-i}{1-2i} = 1 + i$

D'ou f est la similitude directe de centre I d'affixe 1+i de rapport 2 d'angle $\frac{\pi}{2}$

EXERCICE 16 :

$z_A = 3 - i$

$z_{B=2i}$

h=$h_{(A,-\sqrt{2})}$

r=$r_{(B,\frac{3\pi}{4})}$

t=$t_{\overrightarrow{BO}}$

1) a) t o r est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Soit w son centre

t o r(B)= $t_{(B)}$=O

$\Longrightarrow \begin{cases} w\,o = wB \\ (\overrightarrow{wB}, \widehat{\overrightarrow{wo}}) = \frac{3\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_w| = |z_w - z_B| \\ Arg\left(\frac{-z_w}{z_B - z_w}\right) = \frac{3\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{-z_w}{z_B - z_w} = e^{3i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow -z_w = (z_B - z_w)e^{3i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow -z_w = z_B . e^{3i\frac{\pi}{4}} - z_w . e^{3i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z_w = \frac{e^{3i\frac{\pi}{4}} z_B}{e^{3i\frac{\pi}{4}} - 1}$

$$z_w = \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2i)}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}$$

$$z_w = \frac{(-1+i)2i}{-1+i-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{-2-2i}{-1-\sqrt{2}+i}=\frac{2+2i}{(1+\sqrt{2})-i}$$

$$z_w=\frac{(2+2i)[(1+\sqrt{2})+i]}{(1+\sqrt{2})^2+1}$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{2}+i+(1+\sqrt{2})i-1)}{4+2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+i(2+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}$$

$$z_w=(\sqrt{2}-1)+i$$

b) $f=r_{(w,\frac{3\pi}{4})}\circ h_{(A,-\sqrt{2})}$

f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{3\pi}{4}+\pi=-\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$$f_{(A)}=r_{(w,\frac{3\pi}{4})}(A)=A'$$

Avec $z_{A'}=e^{3i\frac{\pi}{4}}(z_A-z_w)+z_w$

$z_{A'}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(3-i-\sqrt{2}+1-i)+\sqrt{2}-1+i$

$z_{A'}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)(4-\sqrt{2}-2i)+\sqrt{2}-1+i$

$z_{A'}=3i\sqrt{2}$

- Soit I le centre de f

$$f_{(A)}=A'\iff\begin{cases}IA'=\sqrt{2}\,IA\\(\overrightarrow{IA},\widehat{\overrightarrow{IA'}})=-\frac{\pi}{4}(2\pi)\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\left|\frac{z_{A'}-z_I}{z_A-z_I}\right|=\sqrt{2}\\Arg\left(\frac{z_{A'}-z_I}{z_A-z_I}\right)=-\frac{\pi}{4}(2\pi)\end{cases}$$

$\iff\frac{z_{A'}-z_I}{z_A-z_I}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=$ 1-i

$\iff z_{A'}-z_I=(1-i)(z_A-z_I)$

$\iff -iz_I=(1-i)(z_A)-z_{A'}$

$\iff -iz_I=(1-i)(3-i)-3i\sqrt{2}$

$\iff -iz_I=2-i(4+3\sqrt{2})$

$z_I=(4+3\sqrt{2})+2i$

c) $f: M(z)\longrightarrow$ M'(z') tels que

$z'=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z-z_I)+z_I$

$z'=(1-i)z-2+i(4+3\sqrt{2})$

2) $f_{(K)}=0 \iff$

(1-i)$z_K-2+i(4+3\sqrt{2})=0$

$$z_K=\frac{6+3\sqrt{2}-i(2+3\sqrt{2})}{2}$$

EXERCICE 17:

1) AC=$|z_c-z_A|=|4+2i|=2\sqrt{5}$

$BD=|z_D-z_B|=|-2+4i|=2\sqrt{5}$

$(\overrightarrow{AC},\widehat{\overrightarrow{BD}})=Arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_c-z_A}\right)(2\pi)$

$=Arg\left(\frac{-2+4i}{4+2i}\right)(2\pi)$

$=Arg(i)(2\pi)$

$=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

AC=BD et AC≠0 d'où il existe un unique déplacement r tels que r(A)=B et r(C)=D

r est d'angle $\frac{\pi}{2}$

D'où r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

*soit w son centre

r(A)=B $\begin{cases}wA=wB\\(\overrightarrow{wA},\widehat{\overrightarrow{wB}})=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)\end{cases}$

$$\iff\begin{cases}|z_B-z_w|=|z_A-z_w|\\Arg\left(\frac{z_B-z_w}{z_A-z_w}\right)=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\left|\frac{z_B-z_w}{z_A-z_w}\right|=1\\Arg\left(\frac{z_B-z_w}{z_A-z_w}\right)=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)\end{cases}$$

$\iff\frac{z_B-z_w}{z_A-z_w}=e^{i\frac{\pi}{2}}=$i

$\iff z_B-z_w=i(z_A-z_w)$

$\iff$ (1-i) $z_w=z_B-iz_A$

$\iff$ (1-i) $z_w=2$

$\iff z_w=\frac{2}{1-i}=1+i=z_I$

Conclusion: $\boxed{r=r_{(I,\frac{\pi}{2})}}$

2) $z_j = 3 + 5i$

$r' = r_{(J,-\frac{\pi}{2})}$

$JA = |z_A - z_j| = |-1-4i| = \sqrt{17}$

$JD = |z_D - z_j| = |-4+i| = \sqrt{17}$

D'où JA=JD (1)

$(\overrightarrow{JA},\widehat{\ }\overrightarrow{JD}) = \text{Arg}\left(\frac{z_D - z_j}{z_A - z_j}\right)(2\pi)$

$= \text{Arg}\left(\frac{-4+i}{-1-4i}\right)(2\pi)$

$= \text{Arg}(-i)\ (2\pi)$

$(\overrightarrow{JA},\widehat{\ }\overrightarrow{JD}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$ (2)

(1)+(2) $\rightarrow$ $r'(A) = D$

De même: $r'(C) = B$

3) $z_I = 1 + i$

M=A*C $\longrightarrow$ $z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = 4+2i$

N=B*D $\longrightarrow$ $z_N = 4i$

*Aff($\overrightarrow{IM}$)= $z_M - z_I = 3 + i$

Aff ($\overrightarrow{NJ}$)= $z_j - z_N = 3 + i$

D'où $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{NJ}$ Par suite

IMJN est un parallélogramme. (1)

$*IM = |z_M - z_I| = \sqrt{10}$

$IN = |z_j - z_N| = \sqrt{10}$

D'où IM=IN (2)

$* (\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IN}}) \equiv Arg\left(\frac{z_N - z_I}{z_M - z_I}\right)$ (2π)

$\equiv Arg\left(\frac{-1+3i}{3+i}\right)$ (2π)

$\equiv Arg(i)$ (2π)

$\equiv \frac{\pi}{2}$ (2π) (3)

(1) +(2) +(3) $\Longrightarrow$ IMJN est un carré

4) a/• IAPB carré

$\Rightarrow$ aff ($\overrightarrow{AP}$)=aff($\overrightarrow{IB}$)

$\Rightarrow z_P - z_A = z_B - z_I \Rightarrow z_P = z_B - z_I + z_A$

$\Rightarrow$ $\boxed{z_P = 2+2i}$

•ICQD carré $\Rightarrow$ aff ($\overrightarrow{CQ}$)=aff($\overrightarrow{ID}$)

$\Rightarrow z_Q - z_C = z_D - z_I \Rightarrow z_Q = z_D - z_I + z_C$

$\Rightarrow$ $\boxed{z_Q = 4+8i}$

b/

$\frac{IP}{IA} = \frac{|Z_P - Z_I|}{|Z_A - Z_I|} = \frac{|1+i|}{|1|} = \sqrt{2}$

$(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IP}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ *car IAPB est un carré dire*

$\frac{IQ}{IC} = \sqrt{2}$

$(\widehat{\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IQ}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

g est la similitude directe de centre I de rapport $\sqrt{2}$ *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$

c/ d'après 3) IMJN est un carré direct

d'où $IJ = \sqrt{2}IM$ *et* $(\widehat{\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IJ}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Rightarrow$g(M)=J

M=A*C$\Rightarrow$g(M)=g(A)*g(C)

$\Rightarrow$ J= P*Q

EX 18:

1) $k=B*C \Rightarrow z_k=\frac{z_B+z_C}{2}$

$\Rightarrow k=\frac{b+c}{2}$

- $r_{(A,\frac{\pi}{2})}(C)=C' \Rightarrow z_{C'}=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_A)+z_A$

$\Rightarrow c'=i(c-0)+0 \Rightarrow c'=i.c$

- $r_{(A,-\frac{\pi}{2})}(B)=B' \Rightarrow b'=e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-0)+0$

$\Rightarrow b'=-i.b$

2) $AK\neq 0$ et $B'C'\neq 0$ d'où il existe une unique similitude directe f tels que :

f(A)=B' et f(K)=C'

3) a) $f: M(z)\mapsto M'(z')$

tel que : $z'=\alpha.z+\beta \qquad (\alpha,\beta)\in \mathbb{C}^2$

$f(A)=B' \Rightarrow z_{B'}=\alpha.z_A+\beta \Rightarrow \beta=b' \Rightarrow \beta=-i.b$

$f(K)=C' \Rightarrow c'=\alpha.k+\beta \Rightarrow \alpha.k=ic+ib$

$\Rightarrow \alpha\left(\frac{b+c}{2}\right)=i(b+c) \Rightarrow \alpha=2i$

la forme complexe de f :

$z'=2i.z-i.b$

$|2i|=2$, $\mathrm{Arg}(2i)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$

$\frac{-ib}{1-2i}=(2-i)\frac{b}{5}$

f est la similitude directe de centre ω d'affixe $(2-i)\frac{b}{5}$

de rapport 2 d'angle $\frac{\pi}{2}$

$f=h_{(\omega,2)}\circ r_{(\omega,\frac{\pi}{2})}=r\circ h$

b) f(A)=B' et f(K)=C' $\Rightarrow \left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{B'C'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$

d'où $(AK)\perp(B'C')$

EX19 :

1) • $1+\frac{1}{\varphi}=1+\frac{2}{\sqrt{5}+1}=1+\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1}$

$=1+\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$

- $\frac{CF}{CD}=\frac{BC-BF}{CD}=\frac{BC}{CD}-\frac{BF}{CD}=\varphi-\frac{AB}{CD}$

$=\varphi-1=\frac{1}{\varphi}$ d'où $\frac{CD}{CF}=\varphi$

2) $\begin{cases} f(A)=D \\ f(D)=C \end{cases}$

$\frac{DC}{AD}=\frac{1}{\varphi}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)+\pi(2\pi)$

$\equiv\frac{\pi}{2}+\pi(2\pi)\equiv\frac{-\pi}{2}$

d'où f est de rapport $\frac{1}{\varphi}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ d'angle $(-\frac{\pi}{2})$

3) soit C'=f(C) on a C=f(D)

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C'C}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}(2\pi)$ et $CC'=\frac{1}{\varphi}.CD$

$\Rightarrow\begin{cases}\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C'C}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}(2\pi)\\ \frac{CD}{CC'}=\varphi\end{cases} \Rightarrow\begin{cases}C'\in[CB]\\ \frac{CD}{CC'}=\varphi\end{cases}$

$\Rightarrow$ C'=F d'où f(C)=F

4) soit Ω le centre de f .

$f\circ f$ est une similitude directe de centre Ω

de rapport $\frac{1}{\varphi^2}$ d'angle π

$\Rightarrow$ $f\circ f$ est une homothétie de centre Ω

$f\circ f(A)=f(D)=C \Rightarrow \Omega\in(AC)$

$f\circ f(D)=f(C)=F \Rightarrow \Omega\in(DF)$

d'où $\{\Omega\}=(AC)\cap(DF) \Rightarrow \Omega=O$

d'où f est de centre O

5) f(A)=D et f(C)=F $\Rightarrow (AC)\perp(DF)$ car

f est d'angle $\frac{-\pi}{2}$

□ montrons que f(F)=G

l'image de la droite (CF) par f est la droite passant par f(C)=F et qui lui est perpendiculaire

$\Rightarrow$ f((CF))=(FE)

□ de meme f((DF))=(CA)

$(CF)\cap(DF)=\{F\}$

$\Rightarrow (FE)\cap(CA)=\{f(F)\}$

$\Rightarrow$ f(F)=G

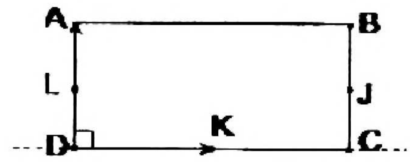
$\begin{cases} f(C)=F \\ f(F)=G \end{cases} \Rightarrow GF=\dfrac{1}{\varphi}.CF$

or $\dfrac{EF}{CF}=\varphi$

$EG=EF-GF=\varphi.CF-\dfrac{1}{\varphi}.CF$

$=(\varphi-\dfrac{1}{\varphi}).CF=1.CF \ = \ ED$

EX20 :



1) $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{DB} \neq \vec{0}$

d'où il existe une unique similitude indirecte f tels que: $f(A)=D$ et $f(C)=B$,

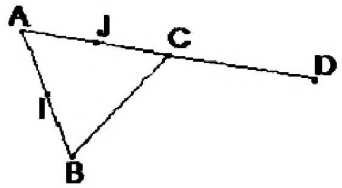
le rapport de f est $\dfrac{DB}{AC}=1$

$\Rightarrow$ f est un antidéplacement

$med[AD]=med[CB]=(LJ)$, d'où $f=S_{(LJ)}$

$f(L)=L$ et $f(J)=J$

EX21 :



1) $\begin{cases} f(C)=A \\ f(A)=B \end{cases}$

$f \circ f(C)=f(A)=B \Rightarrow f \circ f \neq id$

d'où f n'est pas une symétrie orthogonale par suite f est une symétrie glissante.

□soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

$f \circ f=t_{2\vec{u}}$

$f \circ f(C)=B \Leftrightarrow t_{2\vec{u}}(C)=B \Leftrightarrow 2\vec{u}=\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \vec{u}=\overrightarrow{JI}$

$f(C)=A \Rightarrow C*A=J \in \Delta$

$f(A)=B \Rightarrow A*B=I \in \Delta$

d'où $\Delta=(IJ)$

2) $\begin{cases} g(B)=D \\ g(I)=C \end{cases}$

$I=B*A \Rightarrow g(I)=g(B)*g(A) \Rightarrow C=D*g(A)$

$\Rightarrow g(A)=S_C(D)=A$ d'où $g(A)=A$

□g est de rapport $\dfrac{AC}{AI}=\dfrac{AB}{AI}=2$, d'angle

$\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}(2\pi)$, de centre A

3) $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KI}=\vec{0}$

a) Comme étant composée d'une similitud indirectede rapport 1 et d'une similitude directe de rapport 2 :

$f \circ g$ est une similitude indirecte de rapport

b) $f \circ g(I)=f(C)=A$

$f \circ g(A)=f(A)=B$

c) $\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KA}=(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IA})$

$=(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KI})+(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{IA})=\vec{0}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})$

$=\vec{0}$ car $I=A*B$

□soit $f \circ g(K)=K'$, on a aussi

$f \circ g(I)=A$ et $f \circ g(A)=B$

$\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KI}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{K'B}+2\overrightarrow{K'A}=\vec{0}$ car f conserve le barycentre

d'où $\overrightarrow{K'B}+2\overrightarrow{K'A}=\vec{0}$ or on a $\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KA}=\vec{0}$

d'où $K'=K$ par suite $f \circ g(K)=K$

d) $f \circ g$ est de rapport 2 . (d'aprés 3) a))

e) $f \circ g(K)=K$ d'où $f \circ g$ est une similitude indirecte de rapport 2 de centre K.

soit Δ son axe

$f(A)=B$, d'où Δ porte la bissectrice intérieure de $\left[\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}\right]$ or $K \in [AB]$

d'où Δ est la perpendiculaire à (AB) en K.

EX 22 :

$f: M(z) \mapsto M'(z')$

tq : $z'=(1+i).\overline{z}+i$

f est de rapport $|1+i|=\sqrt{2}$ de centre I d'affixe :

$$z_I=\frac{(1+i).\overline{i}+i}{1-|1+i|^2}=\frac{-i(1+i)+i}{1-2}=i(1+i)-i=i-1-i$$

$z_I=-1$

soit Δ son axe.

$\Delta=\left\{M(z)/\overrightarrow{IM'}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{IM}\right\}$

$\overrightarrow{IM'}=\sqrt{2}.\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow z'+1=\sqrt{2}.(z+1)$

$\Leftrightarrow (1+i).\overline{z}+i+1=\sqrt{2}(z+1)$, on pose z=x+iy

$\Leftrightarrow (1+i)(x-iy)+1+i=\sqrt{2}(x+iy+1)$

$\Leftrightarrow (x+y+1)+i(x-y+1)=(\sqrt{2}.x+\sqrt{2})+i\sqrt{2}.y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=\sqrt{2}.x+\sqrt{2} \\ x-y+1=\sqrt{2}.y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x-(1+\sqrt{2})y+1=0$

d'où Δ est la droite d'équation : $x-(1+\sqrt{2})y+1=0$

EX 23 :

$z'=-5i.\overline{z}+1+i$

1) f est de rapport $|-5i|=5$ de centre J d'affixe :

$$z_J=\frac{-5i(\overline{1+i})+1+i}{1-|-5i|^2}=\frac{1+i}{6}$$

soit Δ son axe

$\Delta=\left\{M(z)/\overrightarrow{JM'}=5\overrightarrow{JM}\right\}$, soit z=x+iy

$\overrightarrow{JM'}=5\overrightarrow{JM} \Leftrightarrow z'-\frac{1+i}{6}=5.(z-\frac{1+i}{6})$

$\Leftrightarrow 6z'-1-i=5(6z-1-i)$

$\Leftrightarrow 6.[-5i.\overline{z}+1+i]-1-i=30z-5-5i$

$\Leftrightarrow -30i.\overline{z}+6+6i-1-i=30z-5-5i$

$\Leftrightarrow 30(z+i.\overline{z})=10+10i \Leftrightarrow 3[x+iy+ix+y]=1+i$

$\Leftrightarrow 3(x+y)+3i.(x+y)=1+i \Leftrightarrow 3(x+y)=1$

$\Leftrightarrow 3x+3y-1=0$

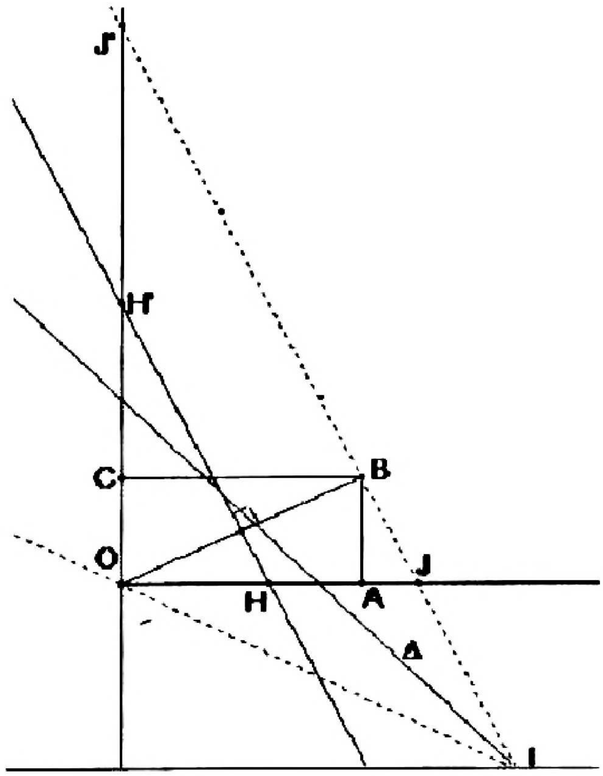
d'où Δ: $3x+3y-1=0$

2) soit $I'=f(I)$

$z_{I'}=-5.i.\overline{z}_I+1+i=-5i(3-i)+1+i=-4-14i$

$f(\zeta)=(\zeta')$ avec (ζ') est le cercle de centre I' de rayon $5\sqrt{5}$

EX 24 :



1) a) dans le triangle OBJ on a : $H=O*J$

HO=HB car $H \in D$, d'où HO=HB=HJ

$\Rightarrow$ H : le centre du cercle (ζ) circonscrit au triangleOBJ

$H=O*J \Rightarrow [OJ]$ diamétre de (ζ)

d'où OBJ est rectangle en B

de meme : OBJ' est rectangle en B

b) $(BJ') \perp (BO)$ et$(BJ) \perp (BO)$

$\Rightarrow (BJ')//(BJ)$ d'où B,J et J' sont alignés

2) $\begin{cases} f(J)=O \\ f(O)=J' \end{cases}$

a) f est d'angle $\left(\overrightarrow{JO},\overrightarrow{OJ'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OJ'}\right)+\pi(2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2}+\pi(2\pi) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

b) l'image de la droite (BJ) par f est la droite passant par f(J)=O et qui lui est $\perp$

$\Rightarrow f\left((BJ)\right)=(OB)$

de meme $f\left((BO)\right)=(BJ')$

$(BJ)\cap(BO)=\{B\} \Rightarrow (OB)\cap(BJ')=\{f(B)\}$

$\Rightarrow f(B)=B$

f est de rapport $\frac{BO}{BJ}=\text{cotg}\widehat{BOJ}=\text{cotg}\widehat{BOA}$

$=\frac{OA}{AB}=2$

de centre B

3) $\begin{cases} g(J)=O \\ g(O)=J' \end{cases}$

a) g est de rapport $\frac{OJ'}{OJ}=2$ car f(J)=Oet f(O)=J'

b) g est de rapport différent de 1 , d'où g admet un unique point invariant I

c) $g\circ g(J)=g(O)=J'$

$g\circ g=h_{(I,4)}$

$g\circ g(J)=J' \Rightarrow h_{(I,4)}(J)=J' \Rightarrow I\in(JJ')$

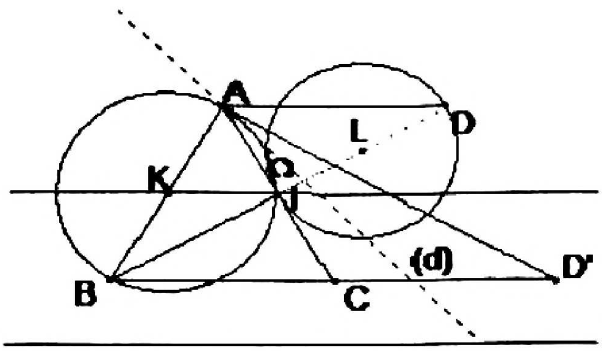
d) $h_{(I,4)}(J)=J' \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ'}=4\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IJ}-\overrightarrow{IJ'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JI}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{JJ'}$ (voir figure)

□soit Δ son axe

$g(I)=O \Rightarrow \Delta$ porte la bissectrice intérieure de $\left[\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IO}\right]$

EX 25 :



1) a) BA=AC et BA $\neq$ 0 d'où il existe un unique antidéplacement f tels que : f(B)=A et f(A)=C

b) $f\circ f(B)=f(A)=C\neq B$

$f\circ f\neq id \Rightarrow$ f n'est pas une symétrie ortogonale par suite f est une symétrie glissante.

□soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

$f\circ f=t_{2\vec{u}}$

$f\circ f(B)=C \Rightarrow 2\vec{u}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{KI}$

□$f(B)=A \Rightarrow K=A*B\in\Delta$

$f(A)=C \Rightarrow I=A*C\in\Delta$

d'où $\Delta=(IK)$

c) soit C'=f(C)

$f\circ f=t_{\overrightarrow{BC}}$

$f\circ f(A)=f(C)=C' \Rightarrow t_{\overrightarrow{BC}}(A)=C'$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AD}$ car ABCD est un parallélogramme

$\Rightarrow$ C'=D d'où f(C)=D

d) D'=f(D) $\Rightarrow f\circ f(C)=D' \Rightarrow t_{\overrightarrow{BC}}(C)=D'$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD'} \Rightarrow C=B*D' \Rightarrow D'=S_C(B)$

2) $\begin{cases} S(A) = B \\ S(I) = D \end{cases}$

$\dfrac{BD}{AI} = 2\dfrac{BI}{AI} = 2.\text{cotg}\widehat{ABI} = 2\text{cotg}\dfrac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}}\right)(2\pi) \equiv \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$

d'où S est de rapport $2.\sqrt{3}$ d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

b) (ζ) est de centre K

(ζ') de centre $I * D = L$

K,I et L ne sont pa alignés et $I \in (\zeta) \cap (\zeta')$

d'où (ζ) et (ζ') ne sont pa tangents en I

par suite (ζ)et(ζ') se recoupent en un 2ème point Ω

soit ω : le centre de S

$S(A)=B \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow \omega \in (\zeta)$

$S(I) = D \Rightarrow \omega \in (\zeta')$

$\omega \in (\zeta) \cap (\zeta') \Rightarrow \omega \in \{I, \Omega\}$

$S(I) \neq I \Rightarrow \omega \neq I$ d'où $\omega = \Omega$

S est de centre Ω

3) $g = f \circ S$

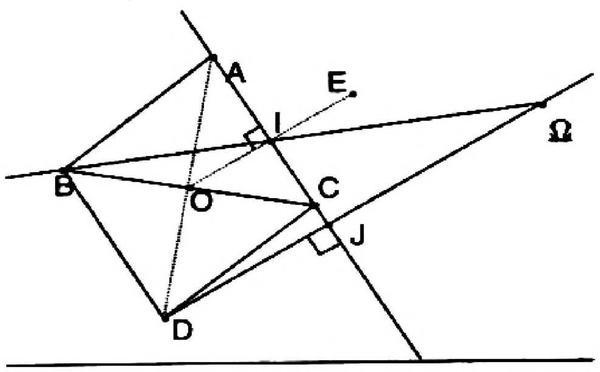
g similitude indirecte de rapport $1 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$g(A) = f \circ S(A) = f(B) = A$, g de centre A

$g(I) = f \circ S(I) = f(D) = D'$,

l'axe de g est la droite (d) qui porte la bissectrice intérieure de $\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD'}\right]$

EX 26 :



1) $\begin{cases} f(O) = I \\ f(D) = J \end{cases}$

$\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{IJ}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI}}\right)(2\pi)$

$\equiv \alpha(2\pi)$

$\dfrac{IJ}{OD} = \dfrac{AI}{AO}$ car $I = A * J$

$= \cos(\alpha)$

f est de rapport $\cos\alpha$ d'angle α

$O = A * D \Rightarrow f(O) = F(A) * f(D)$

$\Rightarrow I = J * f(A) \Rightarrow f(A) = S_I(J) \Rightarrow f(A) = A$

2) f est de centre A.

on a : $\cos\widehat{BAO} = \cos\alpha = \dfrac{AO}{AB}$

d'où $AO = (\cos\alpha).AB$ et

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}\right) \equiv \alpha(2\pi)$

d'où $f(B) = O$

$O = B * C \Rightarrow f(O) = f(B) * f(C)$

$\Rightarrow I = O * f(C) \Rightarrow f(C) = S_I(O)$

$\Rightarrow f(C) = E$

$\begin{cases} f(B) = O \\ f(C) = E \end{cases} \Rightarrow \dfrac{OE}{BC} = \cos\alpha$

3) $\begin{cases} g(B) = O \\ g(C) = E \end{cases}$

a) g est de rapport $\dfrac{OE}{BC} = \cos\alpha$

$O = B * C \Rightarrow g(O) = g(B) * g(C) \Rightarrow g(O) = O * E$

$\Rightarrow g(O) = I$

b) g et $S_{(OE)} \circ f$ sont deux similitudes indirectes

$S_{(OE)} \circ f(B) = S_{(OE)}(O) = O = g(B)$

$S_{(OE)} \circ f(O) = S_{(OE)}(I) = I = g(O)$

g et $S_{(OE)} \circ f$ coincident sur deux point distincts

d'où $g = S_{(OE)} \circ f$

4) a) $g(D)=S_{(OE)}\circ f(D)$

$=S_{(OE)}(J)=A$ car $(OE)=\text{med}[AJ]$

$g(A)=S_{(OE)}\circ f(D)=S_{(OE)}(A)=J$

d'où $g\circ g(D)=J$

□ $g\circ g=h_{(\Omega,\cos^2\alpha)}$

$g\circ g(D)=J \Rightarrow h_{(\Omega,\cos^2\alpha)}(D)=J \Rightarrow \Omega\in(DJ)$

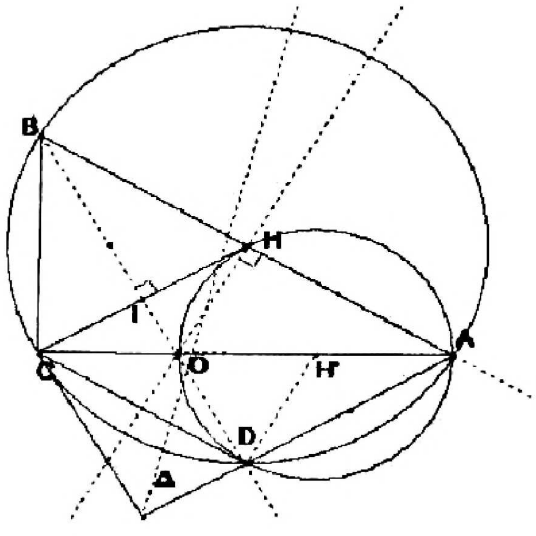
b) $g\circ g(B)=g(O)=I \Rightarrow h_{(\Omega,\cos^2\alpha)}(B)=I$

$\Rightarrow \Omega\in(BI)$

c) $\{\Omega\}=(DJ)\cap(BI)$

EX 27 :

1) a)



Ω

b) $[BO)$: bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$

et $\widehat{ABC}\equiv\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\widehat{OBA}=\dfrac{\pi}{6}}$ (1)

□ $\widehat{BCA}+\widehat{CBA}+\widehat{BAC}=\pi \Rightarrow \pi+\dfrac{\pi}{3}+\widehat{BAO}=\pi$

$\Rightarrow \boxed{\widehat{BAO}=\dfrac{\pi}{6}}$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ le triangle OBA est isocéle en O

$(OH)\perp(AB) \Rightarrow (OH)=\text{med}[AB]$

comme $H\in(AB)$ alors $H=A*B$

2) $\begin{cases} f(B)=O \\ f(H)=H' \end{cases}$

a) $\dfrac{OH'}{BH}=\dfrac{\frac{1}{2}AO}{AH}=\dfrac{1}{2}\dfrac{AO}{AH}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos\widehat{A}}$

$=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\left(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{OH'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{H'A}\right)(2\pi)$

$\equiv\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AH'}\right)(2\pi)$

$\equiv\dfrac{\pi}{6}(2\pi)$

d'où f est de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ d'angle $\dfrac{\pi}{6}$

b) $H=B*A \Rightarrow f(H)=f(B)*f(A) \Rightarrow H'=O*f(A)$

$H'=O*f(A) \Rightarrow f(A)=S_{H'}(O) \Rightarrow f(A)=A$

d'où f est de centre A

3) $D\in(\Gamma') \Rightarrow (OD)\perp(AD)$

$D\in(\Gamma) \Rightarrow (BD)\perp(AD)$

d'où $(OD)\parallel(BD)$ $\Rightarrow$ O,B et D sont alignés

b) ABC rectangle en C

$H=A*B \Rightarrow HB=HC=HA \Rightarrow HB=HC$

$\widehat{CBH}=\dfrac{\pi}{3}$, le triangle BCH est isocéle en H et $\widehat{B}=\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \widehat{C}=\dfrac{\pi}{3}$ d'où BCH est équilatéral

• $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OH'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)(2\pi)\equiv\dfrac{\pi}{3}(2\pi)$ (1)

le triangle ODA est rectangle en D et $H'=O*A$

$\Rightarrow$ H'O=H'D (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ ODH est équilatéral

□ soit C'=f(C) le triangle BCH est équilatéral direct

donc son image OC'H' est équilatéral direct

comme ODH' est équilatéral direct alor C'=D

par suite f(C)=D

c) soit $I=C*H$, $I\in(BO)$ car BCH est équilatéral

$[BO)$: bissectrice de $\widehat{CBH}$

on a : $(AD)\perp(OD) \Rightarrow (AD)\perp(BD)$ or $(BO)\perp(CH)$

d'où $\boxed{(AD)\parallel(CH)}$ (1)

dans le triangle ABD on a : H=B * A et (AD) □ (HI)

d'où AD=2HI d'où $\boxed{AD=CH}$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ ADCH est un parallélogramme

or : HA=HC d'où ADCH est un losange

4) $g=S_{(DH)} \circ f$

a) $g(A)=S_{(DH)} \circ f(A)=S_{(DH)}(A)=C$

$g(C)=S_{(DH)} \circ f(C)=S_{(DH)}(D) = D$

b) comme étant la composée d'une

similitude directede rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et d'une

similitude indirecte de rapport 1 :

g est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $g \circ g=h_{\left(\Omega,\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}=h_{\left(\Omega,\frac{1}{3}\right)}$

$g \circ g(A)=g(C)=D \Rightarrow h_{\left(\Omega,\frac{1}{3}\right)}(A)=D \Rightarrow \overrightarrow{\Omega D}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$

□ $\overrightarrow{\Omega A}-3\overrightarrow{\Omega D}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{A\Omega}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

□ $g(A)=C$

$\Rightarrow$ Δ porte la bissectrice interieur de $\left[\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega C}\right]$

QCM

1) $y^2 = 4x$

2) $I(1,-1)$

3) $\varnothing$

4) la réunion de deux hyperboles

5) $e = 5/4$

Vrai ou faux:

1) faux $\quad P : x = \frac{1}{2}y^2 \Leftrightarrow P : y^2 = 2x$

(P) est une parabole de sommet O, de foyer $F(\frac{1}{2},0)$, de directrice $D: x = -\frac{1}{2}$

2) vrai

$(P) : x^2 = 4y$ et $(P') : y^2 = 4x$

$S_\Delta : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

$tq : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

$M(x,y) \in (P) \Leftrightarrow M'(y,x) \in (P')$

3) vrai

$(H) : -\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$

H est une hyperbole de centre O, de sommet $S(0,\sqrt{5})$ et $S'(0,-\sqrt{5})$

4) faux $\quad (H) : \frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

soit $w(-2,1)$ $\quad$ dans $R' = (w,\vec{i},\vec{j})$ $\quad (H) : \frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1$

$\Delta_1 : Y = \frac{2}{3}X$ et $\Delta_2 : Y = \frac{-2}{X}$ dans $R' = (w,\vec{i},\vec{j})$

5) faux

$(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad e = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$ car $b = 3 \rangle a = 2 \quad (c = \sqrt{b^2 - a^2})$

Exercice 1

1) Soit K : le projeté orthogonale de I sur D on a K(1,0)

(Π) est de foyer $F=S_I(K)$ I=F*K ⇒F(3,0)

Soit M(x,y) et H son projeté orthogonal sur D ⇒H(1,y)

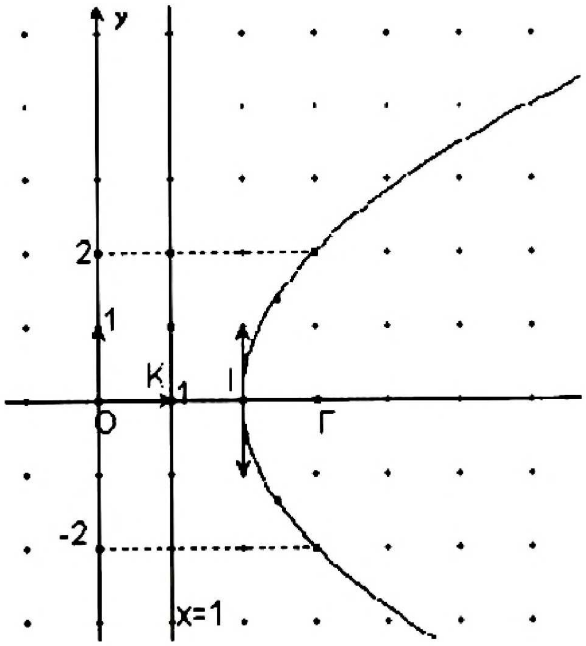
M∈ (Π) ⇔ MF=MH

⇔$(x-3)^2 + y^2 = (x-1)^2$

⇔ $y^2 = 4.(x-2)^2$

D'où (Π) a pour équation : $y^2 = 4.(x-2)$

2)



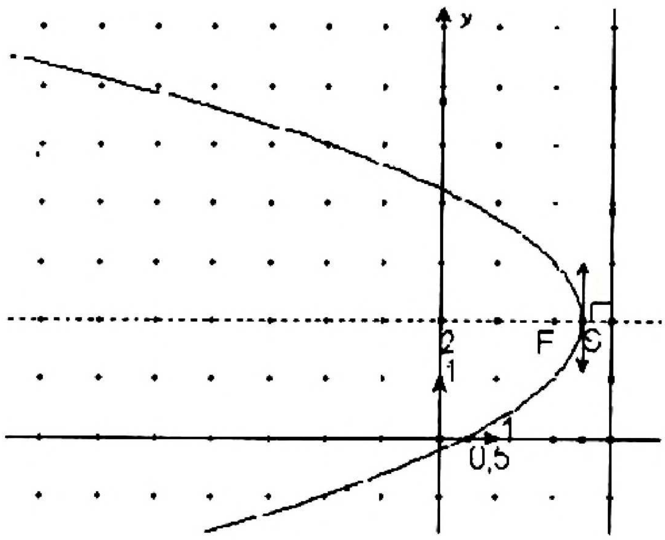
Exercice2

1) Soit M(x,y) et H son projeté orthogonal sur D H(3,y)

M∈ (Π) ⇔ MF =MH

⇔ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2$ ⇔$(y-2)^2 = -2(x-5/2)$

2) (Π) est de sommet S(5/2,2)



Exercice 3

1) $(\Pi) : y^2 = 4x$ F(1,0) et D : x= -1

2) $(\Pi') : y^2 = -4(x-2)$

On pose $\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y \end{cases}$ $S'(2,0)$

Dans le repère R'$=\left(S';\vec{i};\vec{j}\right)$

$(\Pi') : Y^2 = -4.X$ parabole de foyer $F'(-1,0)_{R'}$ de directrice D' : X=1

a/ Dans le repère R=$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ F' a pour coordonnées (1,0) d'où F' =F

b/ D': x = 3

c/ Soient K et K' les projetés orthogonaux de F sur D et D' $\Rightarrow$K(-1,0) et K'(3,0)

$$\Rightarrow \overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{FK'}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{FK} = -\overrightarrow{FK'}$$

$\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{FK'}$ sont de sens contraires ⇒ F est compris entre D et D'.

3) $M(x,y) \in (\Pi)\cap(\Pi') \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y^2 = -4x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ 4x = -4x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$(\Pi)\cap(\Pi')=\{A(1,2) ; B(1,-2)\}$

4) $(\Pi'') : y^2 = 8x+8$

$(\Pi'') : y^2 = 8(x+1)$

On pose $\begin{cases} X=x+1 \\ Y=y \end{cases}$ S'' (-1,0)

Dans le repère R''=(S'', $\vec{i},\vec{j}$) $(\Pi'') : Y^2 = 8.X$ donc Π'') est une Parabole de foyer $F''(2,0)_{R''}$ et de directrice D'' : X = -2

a/ dans le repère R=$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

F'' a pour coordonnées (1,0) D'où F'' = F b/ D'' : x = -3

c/ Soit K'' :le projeté orthogonale de F sur D''$\Rightarrow$ K''(-3 ,0)

$\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FK''}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \overrightarrow{FK''} = 2\overrightarrow{FK}$

$\overrightarrow{FK''}$ et $\overrightarrow{FK}$ *sont de meme sens D'où F* n'est pas compris entre D et D"

d/

$$M(x,y)\in(\Pi)\cap(\Pi'')\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=4x\\y^2=8x+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=4x\\4x=8x+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y^2=-8\end{cases}\quad impossible$$

D'où $(\Pi)\cap(\Pi'')=\varnothing$

Exercice 4

a) (P_1): $y^2 = 10x$ S = O

$F_1(\frac{5}{2},0)$ $D_1 : x = -\frac{5}{2}$

b) (P_2): $x^2 = 12y$ S = O

$F_2(0,3)$ $D_2 : y = -3$

c) (P_3): $y^2 = -10x$ S = O

$F_3(-\frac{5}{2},0)$ $D_3 : x = \frac{5}{2}$

$(P_3) = S_O(P_1) = S_{Oy}(P_1)$

d) (P_4) : $x^2 = -12y$ S = O

$F_4(0,-3)$ $D_4 : y = 3$

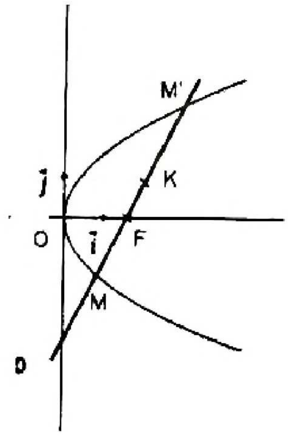
$(P_4) = S_O(P_2) = S_{Oy}(P_2)$

Exercice5

1) F(-2,0) S(0,0) (P): $y^2 = -8x$

2) S(0,0) D: y = -3 (P): $x^2 = 12y$

Exercice 6



(P) : $y^2 = 6x$

D'où $F(\frac{3}{2}, 0)$

$\vec{u}\binom{1}{m}$: Vecteur directeur de D

F ∈ D

D'où D a pour équation :

$$y = m\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

M et M' ∈ (P)∩D

Les coordonnées de M et M' sont solution du système :

$$\begin{cases} y = m\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ y^2 = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m(x - \frac{3}{2}) \\ m^2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 6x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = m(x - \frac{3}{2} \\ m^2x^2 - 3(m^2 + 2)x + \frac{9}{4}m^2 = 0 \end{cases}$$

$(E): m^2x^2 - 3(m^2 + 2)x + \frac{9}{4}m^2 = 0$

$\Delta = 36(m^2 + 1) > 0$

Désignons par x' et x'' les solutions de (E)

x' et x'' sont les abscisses de M et M'

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{3(m^2+2)}{m^2} = 3 + \frac{6}{m^2}$

$K = M*M' \rightarrow x_K = \frac{x'+x''}{2}$

D'où

$x_K = \frac{3}{2} + \frac{3}{m^2}$

$K \in D$ d'où $y_K = m(x_K - \frac{3}{2})$

$y_K = \frac{3}{m}$ $\qquad$ d'où $\qquad K\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{m^2}, \frac{3}{m}\right)$

2) K(x , y) où $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{3}{m^2} \\ y = \frac{3}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{3} = \frac{1}{m} \\ x - \frac{3}{2} = 3 \times \frac{1}{m^2} \end{cases}$

D'où $x - \frac{3}{2} = 3.\left(\frac{y}{3}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 3.\left(x - \frac{3}{2}\right)$: (r)

F(3/2 ;0) $\qquad$ On pose $\begin{cases} X = x - \frac{3}{2} \\ Y = y \end{cases}$

Dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$

(r) : $Y^2 = 3X$

Lorsque m varie dans $\mathbb{R}^*$ le point K varie sur une parabole de sommet F, de foyer $F_1\ \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ de directrice $\Delta: X = -\frac{3}{4}$ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$

3) d'après 1)

$$x_M = \frac{3(m^2+2) + 6\sqrt{1+m^2}}{2m^2}$$

$$x_{M'} = \frac{3(m^2+2) - 6\sqrt{1+m^2}}{2m^2}$$

$$y_M = \frac{3}{m}\left(1 + \sqrt{1+m^2}\right)$$

$$y_{M'} = \frac{3}{m}\left(1 - \sqrt{1+m^2}\right)$$

Soient (Δ) et (Δ') les tangentes à (P) respectivement en M et M'.

(Δ): $y_M . y = 3(x + x_M)$

(Δ'): $y_{M'} . y = 3(x + x_{M'})$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{y_M} \end{pmatrix}$: vecteur directeur de (Δ)

$\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{y_{M'}}\end{pmatrix}$: vecteur directeur de (Δ')

$\vec{u}.\vec{u'} = 1 + \frac{9}{y_M y_{M'}} = 0$ D'où (Δ)⊥(Δ')

(*) soit (d) : la directrice de (P)

(d) : $x = -\frac{3}{2}$

$(\Delta)\cap(d) = \left\{A\left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{m}\right)\right\}$

A ∈ (Δ') d'où (Δ)∩(Δ') = {A} avec A ∈ (d)

Exercice 7

a) $(H): -\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$

$F(0,\sqrt{34})$; $F'(0,-\sqrt{34})$ $S(0,3)$; $S'(0,-3)$

$D: y = \frac{9}{\sqrt{34}}$; $D': y = \frac{-9}{\sqrt{34}}$ $e = \frac{\sqrt{34}}{3}$

b) $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

$F(\sqrt{34}, 0)$; $F'(-\sqrt{34}, 0)$ $S(5,0)$; $S'(-5,0)$

$D: x = \frac{25}{\sqrt{34}}$; $D': x = \frac{-25}{\sqrt{34}}$ $e = \frac{\sqrt{34}}{5}$

c) $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

$F(2\sqrt{5}, 0)$; $F'(-2\sqrt{5}, 0)$ $S(4,0)$; $S'(-4,0)$

$D: x = \frac{16}{2\sqrt{5}}$; $D': x = \frac{-8}{\sqrt{5}}$ $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Exercice 8

1) F(12 , 0) ; S(4 , 0) ; a = 4 ; c = 12 ; $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 8\sqrt{2}$

D'où $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{128} = 1$

2) F(0 , 5) ; F'(0 , -5) ; $e = \sqrt{3}$

$c = 5$; $e = \frac{c}{b}$ $\Rightarrow b = \frac{c}{e} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$$

D'où $(H): -\frac{x^2}{\frac{50}{3}} + \frac{y^2}{\frac{25}{3}} = 1$

3) F(0 , 2) ; D : y = -3 ; $e = \sqrt{3}$

Soit M(x , y) et H son projeté orthogonal sur D ; H(x , -3)

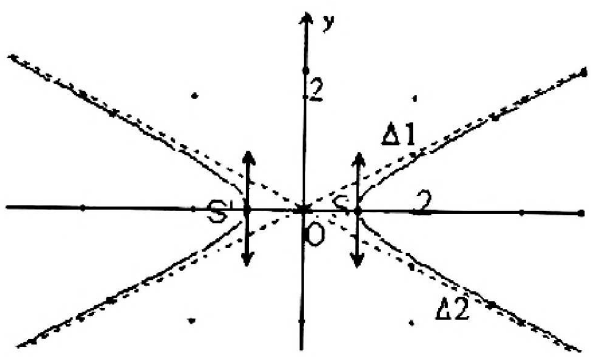
$$M(x\,,y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = e \Leftrightarrow MF^2 = e^2 . MH^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 3(y+3)^2 \Leftrightarrow (H): -\frac{x^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{\frac{9}{2}} = 1$$

Exercice 9

$(\mathcal{P})$: $x^2 - \frac{y}{(\frac{1}{2})^2} = 1$ $(\mathcal{P})$ est de centre O , de foyers F($\frac{\sqrt{5}}{2}$,0) et F'(-$\frac{\sqrt{5}}{2}$,0)

De sommets S(1, 0)et S'(-1, 0) et d'asymptotes Δ_1 :y=$\frac{1}{2}$ x et Δ_2 :y=-$\frac{1}{2}$ x



Exercice 10 :

$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Les asymptotes sont $\Delta_1 : y = \frac{b}{a}\,x$ et $\Delta_2 : y = \frac{-b}{a}\,x$

$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{-b}{a}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a = b$$

D'où $C = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$

Exercice 11

$(H): xy = 1$

$(H): y = \frac{1}{x}$

$(H) = (C_f)$ $avec$ $f(x) = \frac{1}{x}$

A(1 ,1) ; $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$; $C\left(\frac{-1}{2}, -2\right)$

1) La tangente (T) à (H) en A a pour coefficient directeur *f'(1)*

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \to f'(1) = -1$

La droite (BC) a pour coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = 1$

$(1)\ .(-1) = -1 \Rightarrow (T) \perp (BC)$

2) $F\left(3, \frac{1}{3}\right)$ $\quad \overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$

Δ : la hauteur issue de A au triangle ABF

$M(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BF}$

$\Leftrightarrow 1(x-1) + \frac{-1}{6}(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{1}{6}y - \frac{5}{6} = 0$

D'où $\Delta: y = 6x - 5$

3) Δ' : la hauteur issue de F

$\Delta': y = 2x - \frac{17}{3}$

$\Delta \cap \Delta' = \left\{H\left(-\frac{1}{6}, -6\right)\right\}$

$\frac{-1}{6} \times (-6) = 1 \quad \Rightarrow \quad H \in (H)$

Exercice 12

a) $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$\left(a = 3\ ;\ b = 2\ ;\ c = \sqrt{5}\ ;\ e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

D'où $F(\sqrt{5}, 0)$; $F'(-\sqrt{5}, 0)$

$D: x = \frac{9}{\sqrt{5}}$; $D': x = \frac{-9}{\sqrt{5}}$

De sommets A(3 , 0) ; A'(-3 , 0)

B(0 , 2) ; B'(0 , -2)

b) $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$b > a$

$F(0, \sqrt{5})$; $F'(0, -\sqrt{5})$

$D: y = \frac{9}{\sqrt{5}}$; $D': y = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ $\quad , e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

De sommets B(0 , 3) ; B'(0 , -3) ; A(2 , 0) ; A'(-2 , 0)

c) $(E): x^2 + \frac{y^2}{25/9} = 1$

$a = 1$; $b = \frac{5}{3}$; $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{4}{3}$

$e = \frac{4}{5}$

$F\left(0, \frac{4}{3}\right)$; $F'\left(0, -\frac{4}{3}\right)$

$D: y = \frac{25}{12}$; $D': y = -\frac{25}{12}$

De sommets principaux $B\left(0, \frac{5}{3}\right)$; $B'\left(0, -\frac{5}{3}\right)$

De sommets secondaires A(1 , 0) ; A'(-1 , 0)

Exercice 13

$M(z) \to M'(z') avec\ z' = \frac{1}{z}$

1) $I = M * M'$

$z_I = \frac{z + z'}{2} = \frac{1}{2}\left[R.e^{i\theta} + \frac{1}{R}.e^{-i\theta}\right]$

$z_I = \frac{1}{2}\left[R(\cos\theta + sin\theta) + \frac{1}{R}(cos\theta - sin\theta)\right]$

$z_I = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right).cos\theta + \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)sin\theta.$i

$$\begin{cases} Re(z_I) = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right).\cos\theta \\ Jm(z_I) = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right).\sin\theta \end{cases}$$

2) $I(x,y)$ tel que $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)\sin\theta \end{cases}$ $\quad\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left[\frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)\right]^2} = 1$$

Equation cartésienne d'une ellipse (E)

3) $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$ $\quad b = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$

$a > b$ $\quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$

(E) est une ellipse de centre O, de foyer F(1 , 0) et F'(-1 , 0)

De sommets A(a , 0) ; A'(-a , 0)

B(0 , b) ; B'(0 , -b)

Exercice 14

1) $R = (o, \vec{i}, \vec{j})$

$$(\mathcal{C}): \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

On pose $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y \end{cases}$ $\quad w(-1, 0)$

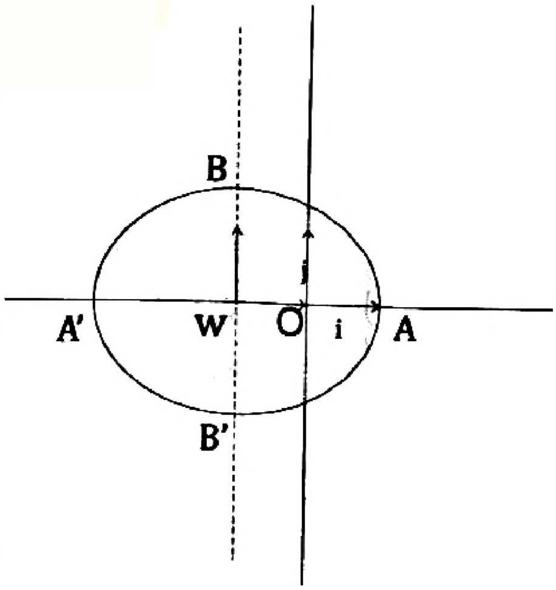
Dans le repère $R' = (w, \vec{i}, \vec{j})$

$$(\mathcal{C}): \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{3} = 1$$

($\mathcal{C}$) est une ellipse de centre w, de foyers $F(-1 , 0)_{R'}$; $F'(-1 , 0)_{R'}$; de sommets principaux $A(2 , 0)_{R'}$ et $A'(-2 , 0)_{R'}$

de sommets secondaires $B\left(0, \sqrt{3}\right)_{R'}$ et $B'\left(0, -\sqrt{3}\right)_{R'}$

De directrices D : X= 4 et D' : X= -4



2) $z = z_M = re^{i\theta}$; $M \in (\mathcal{C})$

a) $M(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$

$(\mathcal{C}): 3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$

$(\mathcal{C}): 4(x^2 + y^2) = x^2 - 6x + 9$

$(\mathcal{C}): 4(x^2 + y^2) = (x - 3)^2$

$M \in (\mathcal{C}) \Rightarrow 4(r^2.\cos^2\theta + r^2.\sin^2\theta = (r.\cos\theta - 3)^2$

$\Rightarrow 4r^2 = (3 - r.\cos\theta)^2$

$\Rightarrow 2r = |3 - r.\cos\theta|$ $\quad$ *avec* $r \leq 3$

D'où $2r = 3 - r.\cos\theta \Rightarrow r = \frac{3}{2+\cos\theta}$

b) $M' = S_O(M)$

$MM' = 2OM = 2r$

$$MM' = \frac{6}{2 + \cos\theta}$$

c) $\theta \equiv \pi \quad (2\pi) \rightarrow MM' = 6$

d) $\theta \equiv 0 \quad (2\pi) \rightarrow MM' = 2$

Exercice 15

1) $(\mathcal{C}): 25(x^2 + y^2) = (3x - 16)^2$

$$(\mathcal{C}): \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$(\mathcal{C})$ est une ellipse $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

2) on pose $r = OM$; $M(r.\cos a\,,\, r.\sin a)$

$M \in (\mathcal{C}) \Rightarrow 25(r^2.\cos^2 a + r^2.\sin^2 a) = (3r.\cos a - 16)^2$

$\Rightarrow 25\,r^2 = (16 - 3\,r.\cos a)^2$

$$\Rightarrow 5\,r = |16 - 3r.\cos a| \Rightarrow \begin{cases} 5r = 16 - 3r.\cos a \\ ou \\ 5r = -16 + 3r.\cos a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{16}{5+3\cos a} \\ ou \\ r = \frac{-16}{5-3\cos a} < 0 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{r = OM = \frac{16}{5+3\cos a}}$$

3)a) $(OM) \cap (\mathcal{C}) = \{M', M\}$

Soit $OM' = r'$; $M'(r'\cos(a+\pi)\,, r'.\sin(a+\pi))$

D'après 2)

$$r' = OM' = \frac{16}{5 + 3\cos(a+\pi)}$$

$$r' = OM' = \frac{16}{5 - 3\cos a}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{5+3\cos a}{16} + \frac{5-3\cos a}{16}$$

$$\boxed{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}}$$

b) $(\mathcal{C}) : \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$w(-3\,,0)$ $(\mathcal{C}) : \frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$ $dans\ R' = (w, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$D : X = \frac{25}{3}$ $dans\ R'$ $D : x = \frac{16}{3}$ $dans\ R = (o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$\cos(a) = \frac{\frac{8}{3}}{\overline{OI}} \Rightarrow \overline{OI} = \frac{8}{3\cos(a)}$$

$$\frac{1}{\overline{OM}} + \frac{1}{\overline{OM'}} = \frac{5 + 3\cos a - 5 + 3\cos a}{16} \quad car\ O \in [MM']$$

$$= \frac{3\cos a}{8} = \frac{1}{\overline{OI}}$$

Exercice 16

$a > b \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$(T): \frac{x\, x_0}{a^2} + \frac{y\, y_0}{b^2} = 1$

$\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{-y_0}{b^2} \\ \frac{x_0}{a^2} \end{pmatrix}$: *vecteur directeur de* (T)

$\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{x_0}{a^2} \\ \frac{y_0}{b^2} \end{pmatrix}$: *vecteur directeur de* (T')

$(T'): \frac{y_0}{b^2} .x - \frac{x_0}{a^2} .y + p = 0$

$M_0 \in (T') \Rightarrow p = \frac{-c^2}{a^2 b^2} x_0\, y_0$

d'où

$(T'): a^2\, y_0\, x - b^2\, x_0\, y - c^2 y_0\, x_0 = 0$

pour $y = 0 \longrightarrow x = \frac{c^2\, x_0}{a^2}$ *d'où* $N\left(\frac{c^2 x_0}{a^2}, 0\right)$

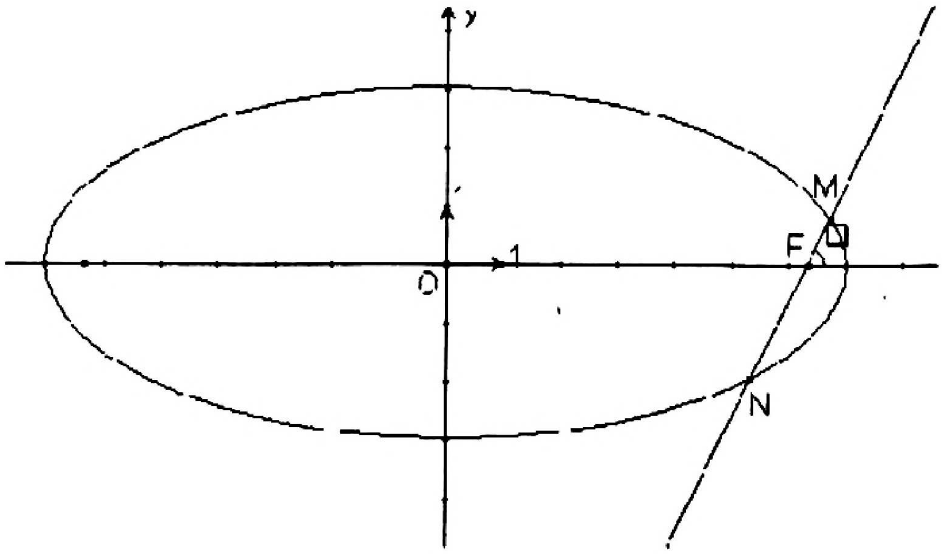
pour $x = 0 \longrightarrow y = -\frac{c^2 y_0}{b^2}$ *d'où* $P\left(0, \frac{-c^2 y_0}{b^2}\right)$

$M_0N = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} {x_0}^2 + {y_0}^2}$

$M_0P = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{a^2}{b^2} {y_0}^2}$

$\frac{M_0N}{M_0P} = \frac{b}{a}$

Exercice 17



F(c , 0) $a^2 = b^2 + c^2$

dans le repère $(F,\vec{i},\vec{j})$

$$(E): \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$(E): b^2(x+c)^2 + a^2.y^2 = a^2.b^2$$
$$(E): a^2(x^2+y^2) = (b^2 - cx)^2$$

soit $r = FM$; $\theta = \left(\vec{i};\overrightarrow{FM}\right)[2\pi]$ et $r' = FN$; $\left(\vec{i};\overrightarrow{FN}\right) \equiv \theta + \pi [2\pi]$

Dans le repère $(F,\vec{i},\vec{j})$:
$$M(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$$
$$N(r'.\cos(\theta+\pi), r'.\sin(\theta+\pi))$$
$$M \in (E) \Rightarrow a^2(r^2.\cos^2\theta + r^2.\sin^2\theta) = (b^2 - cr.\cos\theta)^2$$
$$\Rightarrow a^2r^2 = (b^2 - cr.\cos\theta)^2$$

$$\Rightarrow ar = b^2 - cr.\cos\theta \quad \text{ou} \quad ar = -b^2 + cr.\cos\theta$$

$$\Rightarrow r = \frac{b^2}{a + c.\cos\theta} \quad \text{ou} \quad r = \frac{-b^2}{a - c.\cos\theta} < 0$$

d'où

$$\boxed{r = FM = \frac{b^2}{a + c.\cos\theta}}$$
$$r' = FN = \frac{b^2}{a + c.\cos(\theta+\pi)} = \frac{b^2}{a - c.\cos\theta}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{2a}{b^2}$$

Exercice 18

1) $f: M(x,y) \longmapsto M'(X,Y)$

$$tq \begin{cases} X = \sqrt{2}(x+y) \\ Y = \sqrt{2}(x-y) \end{cases} \quad (*)$$

$M(z) \longmapsto M'(Z)$

$z = x + iy \quad ; \qquad Z = X + iY$

avec $Z = \sqrt{2}(x+y) + i\sqrt{2}(x-y) = \sqrt{2}(1+i).\bar{z}$

d'où f est une similitude indirecte de centre O, de rapport $|\sqrt{2}(1+i)| = 2$

soit Δ son axe. $\quad \Delta = \{M \in P / \ \overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}\ \}$

$\overrightarrow{OM'} = 2\,\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow Z = 2z \Leftrightarrow \sqrt{2}(1+i).\bar{z} = 2z$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(1+i)(x-iy) = 2(x+iy)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt{2}x \\ x - y = \sqrt{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \quad y = (\sqrt{2}-1)x$$

d'où

$$\boxed{\Delta : y = (\sqrt{2}-1)x}$$
$$f = h_{(0,2)} o S_\Delta = S_\Delta o h_{(0,2)}$$

2) a) $(C'): 5X^2 + 5Y^2 + 5XY - 64 = 0$

D'après (*), $(C): 5\left(\sqrt{2}(x+y)\right)^2 + 5\left(\sqrt{2}(x-y)\right)^2 + \ 12(x^2 - y^2) - 64 = 0$

………………………………

………………………………

$$(C): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$$

(C) est une ellipse de centre O, de foyers $F(0, \sqrt{6})$; $F'(0, -\sqrt{6})$

$$D: y = \frac{8}{\sqrt{6}} \quad ; \quad D': y = \frac{-8}{\sqrt{6}}$$

b) $(C') = f(C)$

(C ') est une ellipse de centre $f(0) = 0$; de foyers $\quad K(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}) = f(F)$

$K'(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) = f(F')$

De directrices $\Delta = f(D)$ *et* $\Delta' = f(D')$

Exercice 19

1) $f: M(x,y) \longmapsto M'(X,Y)$

$$tq \begin{cases} X = \frac{1}{4}(x+\sqrt{3}y) \\ Y = \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x+y) \end{cases}$$

$f: M(z) \longmapsto M'(Z)$; $z = x + iy$; $Z = X + iY$

tq: $Z = \frac{1}{4}(x+\sqrt{3}y) + \frac{1}{4}i(-\sqrt{3}x+y)$

$Z = \frac{1}{4}\left[(x+iy) - i\sqrt{3}(x+iy)\right]$

$$Z = \frac{1-i\sqrt{3}}{4}.z$$

D'où f est une similitude directe de centre O ; de rapport $\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}$ d'angle $Arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}$

2) a) $\begin{cases} X = \frac{1}{4}(x+\sqrt{3}y) \\ Y = \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - \sqrt{3}.Y \\ y = \sqrt{3}X + Y \end{cases}$

D'où $(\mathcal{C}')$: $15(X-\sqrt{3}Y)^2 + 13(\sqrt{3}X+Y)^2 - 2\sqrt{3}(X-\sqrt{3}Y).(\sqrt{3}X+Y) - 768 = 0$

$(\mathcal{C}')$: $48X^2 + 64Y^2 - 768 = 0$

$(\mathcal{C}')$: $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{12} = 1$

b) $(\mathcal{C}')$ est une ellipse de centre O, de foyers $F(2,0)$ et $F'(-2,0)$

de sommets $A(4,0)$; $A'(-4,0)$; $B(0,2\sqrt{3})$; $B'(0,-2\sqrt{3})$

De directrices $D: X = 8$; $D': X = -8$ $d'excentricité$ $e = \frac{1}{2}$

(*) $(\mathcal{C})$est une ellipse image de $(\mathcal{C}')$ par f^{-1}

$(\mathcal{C})$: ellipse de centre O, de foyers $K(2,2\sqrt{3})$; $K'(-2,-2\sqrt{3})$

De sommets $S(4,4\sqrt{3})$; $S'(-4,-4\sqrt{3})$

$L(-6,2\sqrt{3})$; $L'(6,-2\sqrt{3})$

$$e = \frac{1}{2}$$

Exercice 20

1) (E) : $x^2+\frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2}=1$ (E) est une ellipse de centre O

de foyers $F(\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ et $F'(-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$

de directrices $\Delta : x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\Delta' : x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ d'excentricité $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

de sommets $A(1,0)$; $A'(-1,0)$; $B(0,\frac{1}{2})$ et $B'(0,-\frac{1}{2})$

2) D : x=1 ; D' : x=-1 ; $F(\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ $M_0(\cos(\theta),\frac{1}{2}.\sin(\theta))$ $\theta\neq k.\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

a/ $x_{M_0}^2+4.y_{M_0}^2=\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1 \Rightarrow M_0\in(E)$.

b/ **T:** $x.\cos(\theta)+2y.\sin(\theta)=1$

c/ $K(x,y)\in T\cap D\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=1 \\ x.\cos(\theta)+2y.\sin(\theta)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1-\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)} \end{cases} \Rightarrow K(1,\frac{1-\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)}) \text{ de meme } K'(-1,\frac{1+\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{FK}\begin{pmatrix} 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1-\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)} \end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{FK'}\begin{pmatrix} -1-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1+\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FK}.\overrightarrow{FK'}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1-\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)}\right).\left(\frac{1+\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)}\right)=-1+\frac{3}{4}+\frac{\sin^2(\theta)}{4.\sin^2(\theta)}=0$$

d'où Le triangle KFK' est rectangle en F

Exercice 21

1) $(E): x^2+4y^2+6y=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{4}}+\frac{\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{9}{16}}=1$

On pose $\begin{cases} X=x \\ Y=y+\frac{3}{4} \end{cases}$ $w\left(0,\frac{-3}{4}\right)$

Dans le repère $R'=(w,\vec{i},\vec{j})$ $(E): \frac{x^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{16}}=1$

(E) est une ellipse de centre w, de foyers $F\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},0\right)$ $F'\left(\frac{-3\sqrt{3}}{4},0\right)$

De sommets $A\left(\frac{3}{2},0\right)$; $A'\left(-\frac{3}{2},0\right)$; $B\left(0,\frac{3}{4}\right)$ et $B'\left(0,\frac{-3}{4}\right)$ Dans le repère R'

2) $(E): (3x+5y)^2=(16x-1)(5y+2)$

$$(E): \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{\left(y+\frac{1}{10}\right)^2}{\frac{9}{100}} = 1$$

Dans $R' = (w, \vec{i}, \vec{j})$ avec $w\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{10}\right)$

$$(E): \frac{X^2}{\frac{1}{4}} + \frac{Y^2}{\frac{9}{100}} = 1$$

ellipse…

3) $(P): x^2 - y = 3x - 1$

$(P): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{5}{4}$

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{3}{2} \\ Y = y + \dfrac{5}{4} \end{cases} \qquad S\left(\frac{3}{2}, \frac{-5}{4}\right)$$

dans le repère $R' = (S, \vec{i}, \vec{j})$

$(P): X^2 = Y$

(P) est une parabole de sommet S de foyer $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$; de directrice $Y = -\frac{1}{4}$ dans le repère R'

Exercice 22

soit (C) cet ensemble

$(H): 4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0$

$$(H): \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

$R_1 = (w, \vec{i}, \vec{j})$ *avec* $w(-1, 3)$

Dans R_1 :

$$(H): \frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

(H) est une hyperbole de foyers $F(\sqrt{13}, 0)_{R_1}$; $F'(-\sqrt{13}, 0)_{R_1}$

de sommets $S(3, 0)_{R_1}$; $S'(-3, 0)_{R_1}$

d'asymptotes $\quad \Delta_1: Y = \frac{2}{3}X \qquad \Delta_2: Y = \frac{-2}{3}X$

soit

$$(E): 16x^2+9y^2+12y^2+12x-54y-47=0 \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}{\frac{621}{64}}+\frac{(y-3)^2}{\frac{621}{36}}=1$$

dans $R_2=(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ *avec* $\Omega\left(\frac{-3}{8},3\right)$ $(E): \frac{X^2}{\frac{521}{64}}+\frac{Y^2}{\frac{521}{36}}=1$ $b>a$

(E)est une ellipse de centre Ω de foyers $F\left(0,\frac{\sqrt{57}}{3}\right)$; $F'\left(0,-\frac{\sqrt{57}}{3}\right)$

de sommets $A\left(\frac{\sqrt{521}}{8},0\right)$; $A'\left(-\frac{\sqrt{521}}{8},0\right).B\left(0,\frac{\sqrt{521}}{6}\right)$ *et* $B'\left(0,\frac{-\sqrt{521}}{6}\right)$

D'où $(C)=(E)\cup(H)$

Exercice 23

$(C): \left(\frac{y^2}{4}\right)^2=(x^2-1)^2$

$(C): \frac{y^2}{4}=x^2-1$ *ou* $\frac{y^2}{4}=-x^2+1$

$(*)$ $(E): \frac{y^2}{4}=-x^2+1$

$(E): x^2+\frac{y^2}{4}=1$

ellipse de centre O, de foyers $F(0,\sqrt{3})$ $F'(0,-\sqrt{3})$

de sommets $B(0,2)$ $B'(0,-2)$ $A(1,0)$ $A'(-1,0)$

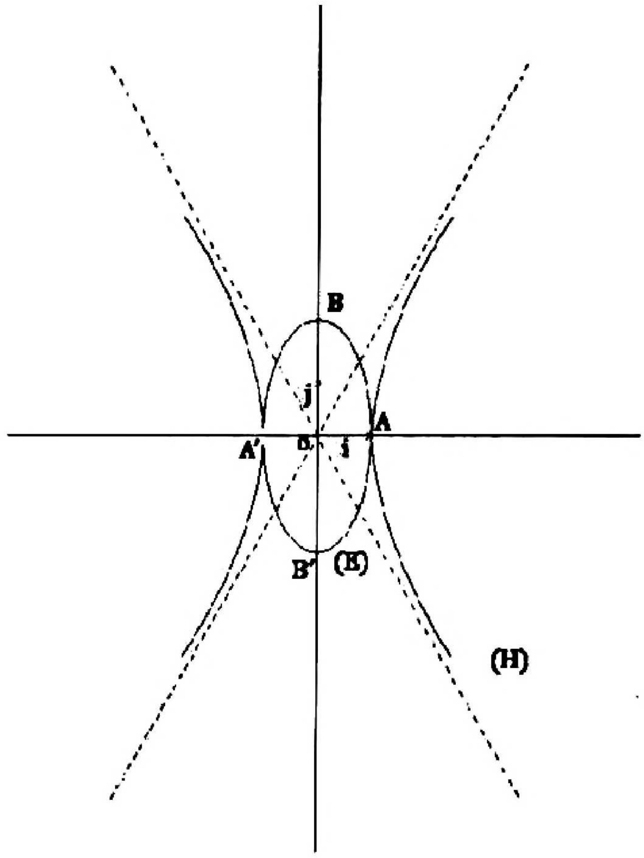
$(*)$ $(H): \frac{y^2}{4}=x^2-1$

$(H): x^2-\frac{y^2}{4}=1$

(H) est une hyperbole de centre O, de foyers $F(\sqrt{5},0)$ $F'(-\sqrt{5},0)$

de sommets $A(1,0)$ $A'(-1,0)$ et d'asymptotes $\Delta_1: y=2x$ $\Delta_2: y=-2x$

$(C)=(E)\cup(\mathcal{H})$



Exercice 24

$(\mathcal{C}_m): mx^2 + (1+m^2)y^2 - 2my = 0$

$(\mathcal{C}_m): mx^2 + (1+m^2)\left(y - \dfrac{m}{1+m^2}\right)^2 = \dfrac{m^2}{1+m^2}$

<u>1^er^cas</u> : $m = 0$ $(\mathcal{C}_0): y = 0$ droite

<u>2^ème^cas</u> : $m \neq 0$ $(\mathcal{C}_m): \dfrac{x^2}{\left(\frac{m}{1+m^2}\right)} + \dfrac{\left(y - \frac{m}{1+m^2}\right)^2}{\frac{m^2}{1+m^2}} = 1$

$\dfrac{m}{1+m^2} = \dfrac{m^2}{1+m^2} \Leftrightarrow m = 1$

1. pour m=1 ➔ $(\mathcal{C}_1)$ est un cercle
2. m<0 ➔ $(\mathcal{C}_m)$: hyperbole
3. m>0 et m≠1 ➔ $(\mathcal{C}_m)$ est une ellipse

Exercice 25

1)et 2)

1. pour $x \geq 0$

$(\mathcal{C}): 4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \iff \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$

w(2 , 0) dans le repère $R_1 = (w, \vec{i}, \vec{j})$ $(\mathcal{C}): \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{36} = 1$

ellipse de centre w, de foyer $F(0\,,3\sqrt{3})$ $F'(0\,,3\sqrt{3})$

de sommets $A(3\,,0)$ $A'(-3\,,0)$ $B(0\,,6)$ $B'(0\,,-6)$

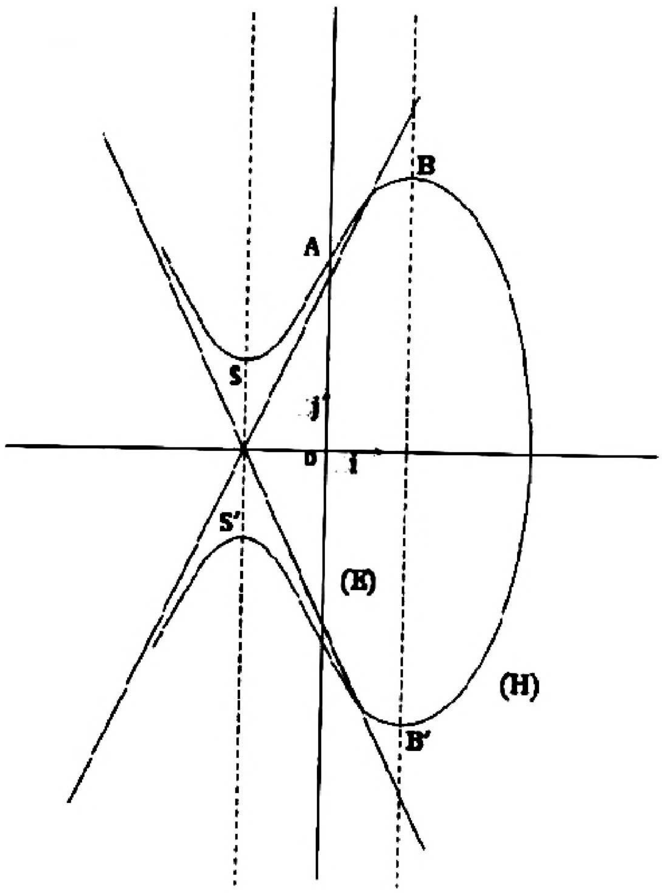
2. pour $x \leq 0$

$(\mathcal{C}): -4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \iff -(x+2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

dans le repère $R_1 = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$; $\Omega(-2\,,0)$ $(\mathcal{C}): -X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1$

hyperbole de centre Ω ; de foyers $F_1(0\,,\sqrt{5})$ $F_2(0\,,-\sqrt{5})$

de sommets $S(0\,,2)$; $S'(0\,,-2)$ d'asymptotes $\Delta_1 : Y = 2X$; $\Delta_2 = -2X$



3) $x = 0 \rightarrow y = 2\sqrt{5}$ *ou* $y = -2\sqrt{5}$

$(\mathcal{C}) \cap (Oy) = \{A(0\,,2\sqrt{5}); A'(0\,,-2\sqrt{5})\}$

(*) (T_1) : la tangente à (E) en A

$A(0\,,2\sqrt{5})_R \;\longrightarrow\; A(-2\,,2\sqrt{5})_{R_1}$

$$(T_1): \frac{-2X}{9} + \frac{2\sqrt{5}.Y}{36} = 1$$

$(T_1): 4X - \sqrt{5}Y + 18 = 0$

dans le repère $R = (o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ $\quad (T_1): 4x - \sqrt{5}y + 10 = 0$

(*) (T_2) : la tangente a (H) a A

$A(0\,,2\sqrt{5})_R \longrightarrow A(2\,,2\sqrt{5})_{R_2}$

$$(T_2): -2X + \frac{2\sqrt{5}Y}{4} = 1$$

$(T_2): -4X - \sqrt{5}Y + 2 = 0$

dans le repère $R = (o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ $\quad (T_2): 4x - \sqrt{5}y + 10 = 0$

$(T_1) = (T_2)$

Exercice 26

$(\mathcal{C}): y^2 = |x^2 - 6x + 5|$ avec $y > 0$

x		1		5	
$x^2 - 6x + 5$	+	0	-	0	+

*pour $x \in [1\,,5]$ $\quad (\mathcal{C}): y^2 = -x^2 + 6x - 5 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4$

cercle de centre $I(3\,,0)$ de rayon 2

*pour $x \in \,]-\infty\,,1] \cup [5\,,+\infty[$ $\quad (\mathcal{C}): y^2 = x^2 - 6x + 5 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

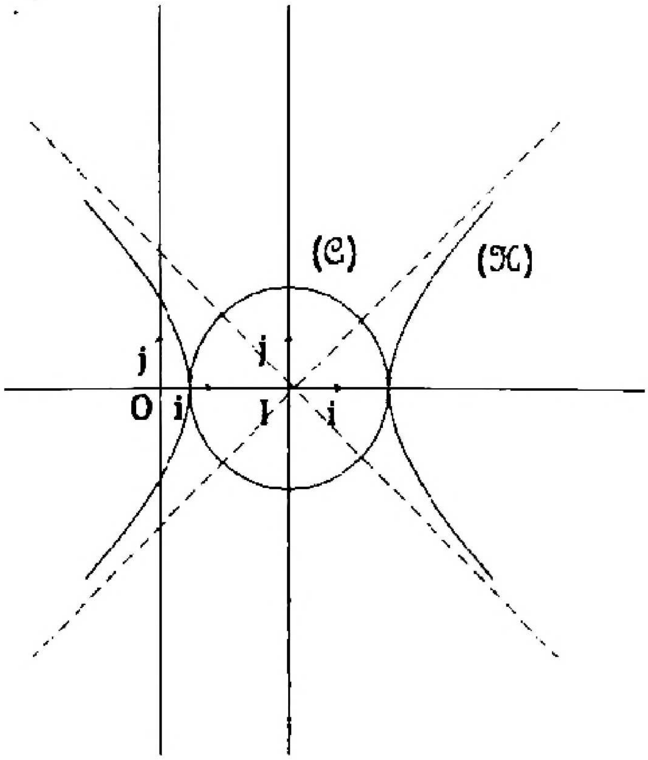
$I(3\,,0)$ $\quad R' = (I, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ hyperbole équilatère de sommets $S(2{,}0)_{R'}$ et $S'(-2{,}0)_{R'}$

d'asymptotes $Y = X$ *et* $Y = -X$

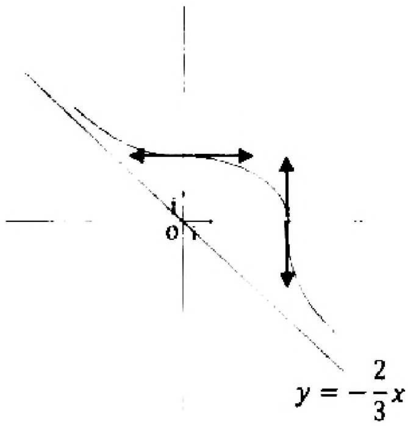
Soit $(\mathcal{C}_1')$: Le demi-cercle de $(\mathcal{C}_1)$ situé dans le demi plan $y \geq 0$

$(\mathcal{H}')$: La partie de $(\mathcal{H})$ situé dans le demi plan $y \geq 0$

$$(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}'_1) \cup (\mathcal{H}')$$



Exercice 27



1. $x \geq 0$ *et* $y \geq 0 (\mathcal{C}): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipse

2. $x \geq 0$ *et* $y \leq 0$

$(\mathcal{C}): \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$ hyperbole

3. $x \leq 0$ *et* $y \leq 0$

$(\mathcal{C}): -\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ hyperbole

4. $x \leq 0$ *et* $y \leq 0$

$(\mathcal{C}): -(16x^2 + 36y^2) = 576$ ensemble vide

Exercice 28

$A_1(a\,,0)$ $\quad A_2(-a\,,0)$ $\quad T_1 : x = a$ $\quad T_2 : x = -a$

$P(x_0\,,y_0) \in (E) \iff \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

$T: \frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} = 1$

$T_1 \cap T = \left\{P_1\left(a, \frac{b^2}{y_0}\left(1-\frac{x_0}{a}\right)\right)\right\}$ $\qquad$ $T_2 \cap T = \left\{P_2\left(-a, \frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x_0}{a}\right)\right)\right\}$

$\overrightarrow{A_1P_1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b^2}{y_0}\left(1-\frac{x_0}{a}\right)\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{A_2P_2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x_0}{a}\right)\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{A_1P_1}\cdot\overrightarrow{A_2P_2} = \frac{b^4}{y_0^2}\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{y_0^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2}\right) = b^2$$

Exercice 29

$$(\mathcal{C}): \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{8}} + \frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{4}} = 1$$

on pose $\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y + \frac{1}{2} \end{cases}$

$w\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ $\qquad$ $dans\ R' = (w, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$(\mathcal{C}): \frac{X^2}{\frac{7}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{7}{4}} = 1$$

$I(2,3)_R \longrightarrow I\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)_{R'}$

T: une tangente à (C) en $M_0(X_0, Y_0)_{R'}$

$$T: \frac{X\,X_0}{\frac{7}{8}} + \frac{Y\,Y_0}{\frac{7}{4}} = 1$$

$$T: 2\,X\,X_0 + Y\,Y_0 = \frac{7}{4}$$

$$I\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \in T \implies \boxed{3X_0 + \frac{7}{2}Y_0 = \frac{7}{4}}$$

$$\frac{X_0^2}{\frac{7}{8}} + \frac{Y_0^2}{\frac{7}{4}} = 1 \quad \boxed{\implies \quad 2\,X_0^2 + Y_0^2 = \frac{7}{4}}$$

déterminons les coordonnées de M_0

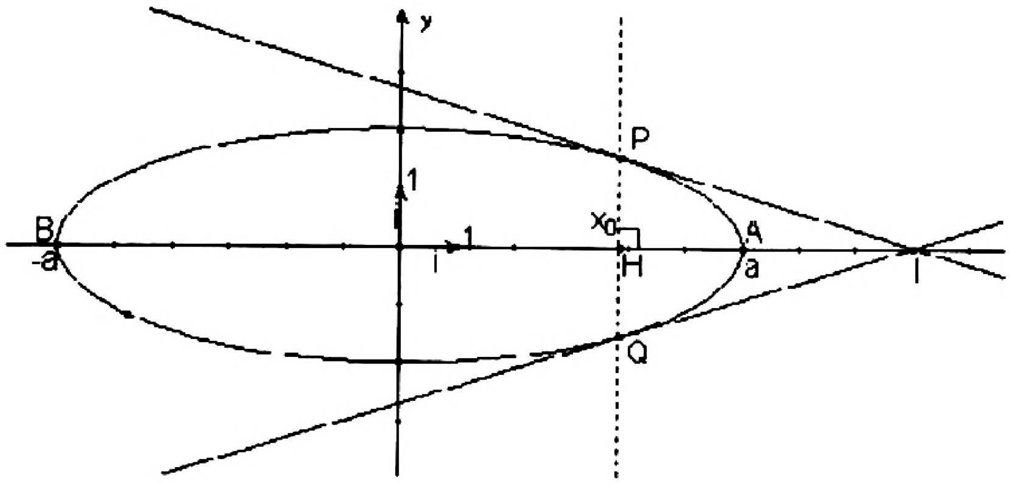
$\begin{cases} 3\,X_0 + \frac{7}{2}Y_0 = \frac{7}{4} \\ 2\,X_0^2 + Y_0^2 = \frac{7}{4} \end{cases}$ ……compléter les calculs…

Exercice 30

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1$$

d'où A(a , 0) ; B(-a , 0)

$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AO} \Leftrightarrow A = O * I \implies I(2a, 0)$



$P(x_0, y_0) \qquad Q(x_0, -y_0)$

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} = 1$$

(T): la tangente à (E) en P

$$(T): \frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{4\,y\,y_0}{a^2} = 1$$

$$I(2a, 0) \in (T) \implies \frac{2a\,x_0}{a^2} + 0 = 1 \qquad \boxed{\implies x_0 = \frac{a}{2}}$$

$$\boxed{y_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}a}$$

$$H = P * Q \implies H\left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$tg\left(\frac{1}{2}P\hat{I}Q\right) = tg(P\hat{I}H) = \frac{PH}{IH} = \frac{|y_0|}{|x_0 - 2a|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a}{3\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\implies P\hat{I}H = 16{,}1 \quad P\hat{I}Q = 32{,}2$

Q.C.M :

1) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan ABC

2) $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\right\|$

3) a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{EG} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{FH} = 0$

d) $V = \frac{1}{6}$

VRAI – FAUX

1) a) (vrai)

en effet $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{v}$ d'où $\vec{v} = \vec{0}$

b) (faux)

contr exemple : dans le cube précédent on a :

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ mais $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AD}$

c) (faux)

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{w} \Leftrightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}) - (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{w} \wedge \vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{w}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{w}$ colinéaires

2) (vrai)

en effet : l'image d'un cube d'arrete a pour une hométhétie de rapport a est un cube d'arrete $a \times a = a^2$ d'où son volume est $(a^2)^3 = a^6$

3) (vrai)

soit I : le centre de S

et I' : le centre de S'

□ la transaltion de vecteur $\overrightarrow{II'}$ est la seule transformation qui trabsforme S et S'

□ soit $J = I \times I'$

$S_J(S) = S'$

l'homothétie de centre J de rapport -1 est la seule qui transforme S en S'

EX 1 :

on a : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

d'où $\overrightarrow{JA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{JB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

1)

$3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 3(\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JA}) + (\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JB}) + (\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{KI}$

$= 4\overrightarrow{KJ} + 3\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{KI} + \underbrace{(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})}_{\vec{0}}$

$= 4\overrightarrow{KJ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{KI}$

$= 4\overrightarrow{KJ} + 2\overrightarrow{KI}$

2)

$3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 3\overrightarrow{KA} + (\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{G}$

$= 3\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KG} + \underbrace{(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})}_{\vec{0}}$

$= 3(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KG})$ car $K = A * G$

$= \vec{0}$

d'où $4\overrightarrow{KJ} + 2\overrightarrow{KI} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{KI} = -2\overrightarrow{KJ} \Rightarrow \overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ colinéaires

d'où I,K et J sont alignés

EX 2 :

1) la droite (AE) est perpendiculaire au plan (EFGH)

d'où $(AE) \perp (FH) \Rightarrow \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FH} = 0$

□ EFGH est un carré d'où $(EG) \perp (FH)$

$\Rightarrow \overrightarrow{EG}.\overrightarrow{FH} = 0$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FH} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}).\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{EG}.\overrightarrow{FH} = 0 + 0 = 0$

de meme $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{HC} = 0$

2) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FH} = 0 \Rightarrow$ (AG) est orthogonale à (FH)

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{HC} = 0 \Rightarrow$ (AG) est orthogonale à (HC)

la droite (AG) est orthogonale à deux droites sécante contenues dans le plan (FHC)

d'où $(AG) \perp (FHC)$

EX 3 :

1)

désignons par $\{w\}=(EG)\cap(FH)$

on a : w=H * F=E * G

dans le triangle FGH :(FI) et (GW) sont deux médianes

$(FI)\cap(GW)=\{P\}$

d'où P est le centre de gravité du triangle FGH

de meme Q est le centre de gravité du triangle BFG

on a donc : $\overrightarrow{GP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GW}=\frac{1}{3}\overrightarrow{GE}$

d'où $\boxed{3\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{EG}}$

de meme : $\overrightarrow{GQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GJ}$

$3.\overrightarrow{GQ}=2\overrightarrow{GJ} \Rightarrow \boxed{3.\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GF}}$ car J=F * B

par suite : $3\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{PG}+3\overrightarrow{GQ}$

$3\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GF}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GF}-\overrightarrow{GE}$

2) $3\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{EG}$

$3\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{EG}=(\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}).(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG})$

$=\overrightarrow{GF}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GF}.\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FB}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}.\overrightarrow{FG}$

$=0-GF^2+0+0=-GF^2$

$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EF}.(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG})=EF^2+\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FG}=EF^2$

d'où $3\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{EG}=(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{EF}).\overrightarrow{EG}$

$=\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}=-GF^2+EF^2=0$

d'où $3\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{EG}=0$

de meme $3\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{FC}=0$

3) $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{EG}=0 \Rightarrow (PQ)\perp(EG)$

$\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{FC}=0 \Rightarrow (PQ)\perp(FC)$

EX 4 :

1) * $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BJ}$ d'où ABJI est un parallélogramme (1)

* $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{LH}$

d'où ALHI est un parallélogramme (2)

* $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LH}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GK}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$

$=\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}$

d'où ABKL est un parallélogramme (3)

(1)+(2)+(3) $\Rightarrow$ ABKLIJGH est un parallélepipède

2) A(0,0,0) B(1,0,0)

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \Rightarrow I(0,\frac{1}{3},0)$

$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EL}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

d'où $L(0,\frac{2}{3},1)$

par suite : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\1/3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\2/3\\1\end{pmatrix}$

b) $V=\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}).\overrightarrow{AL}\right|$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&\frac{1}{3}\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{vmatrix}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}).\overrightarrow{AL}=0+0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

d'où $V=\frac{1}{3}$ *unité de volume*

EX 5 :

$O = A*G = B*H = C*E = D*F$

$I = A*B$

$J = A*F = B*E$

$K = A*C = B*D$

1) on rapporte l'espace au R.o.n $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

avec $\vec{i}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$; $\vec{j}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$; $\vec{k}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$

A(0,0,0) B(a,0,0)

D(0,a,0) E(0,0,a)

G(a,a,a) C(a,a,0)

d'où $I(\frac{a}{2},0,0)$ $O(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2})$

$J(\frac{a}{2},0,\frac{a}{2})$ $K(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0)$

$\overrightarrow{IO}\begin{pmatrix}0\\ \frac{a}{2}\\ \frac{a}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{a}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\ \frac{a}{2}\\ 0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}$

d'où les vecteurs $\overrightarrow{IO}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires

par suite : O,I,J et K sont coplanaires

2) $\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}$ d'où OKIJ est un parallélogramme

$IJ=IK=\left|\frac{a}{2}\right|=\frac{a}{2}$

$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}=0$

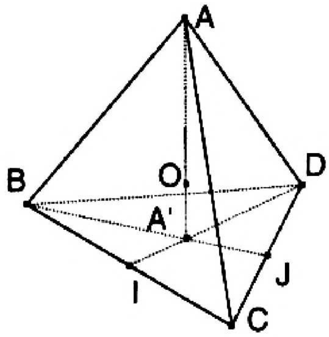
d'où OKIJ est un carré

3) $V=\frac{1}{3}\left|(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IB}\right|$

$\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{a^2}{4}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

$V=\frac{1}{3}\left|\frac{a^3}{8}\right|=\frac{a^3}{24}$

EX 6



ABC, ABD, ACD et BCD sont des triangles équilatéraux

1) a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB\times AD.\cos\widehat{BAD} = AB^2.\cos\frac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}AB^2$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}AB^2$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ d'où $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$

de meme : $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

2) BCD équilatéral et A' son centre de garvité d'où A' est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD

AB=AC=AD d'où A appartient à l'axe de ce cercle par suite (AA') est l'axe du cercle circonscrit au triangle BCD $\Rightarrow$ (AA') est perpendiculaire au plan (BCD)

3) $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OA'}=\vec{0}$

$\Rightarrow$ $OA=\frac{3}{4}AA'$ et $OA'=\frac{1}{4}AA'$

$O\in(AA')$: l'axe du cercle BCD

$\Rightarrow$ OB=OC=OD

* soit $J=C*D$

$BJ=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=a\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(a = AB = AC = AD = BC)$

$BA'=\frac{2}{3}BJ \Rightarrow BA'=\frac{a}{\sqrt{3}}$

BA'A est rectangle en A' d'où $AB^2=BA'^2+AA'^2$

$\Rightarrow a^2=\frac{a^2}{3}+AA'^2 \Rightarrow AA'=a.\frac{\sqrt{6}}{3}$

$OA=\frac{3}{4}AA' \Rightarrow OA=a\frac{\sqrt{6}}{4}$

$OB^2=BA'^2+OA'^2 \Rightarrow OB^2=\frac{a^2}{3}+(\frac{1}{4}AA')^2$

$\Rightarrow OB^2=\frac{a^2}{3}+(\frac{a\sqrt{6}}{12})^2 \Rightarrow OB^2=\frac{9}{24}a^2$

$\Rightarrow OB=a.\frac{\sqrt{6}}{4}$

conclusion : OA=OB=OC=OD

d'où O est le centre de la sphère passant par A,B,C et D

4) a) $DI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$DA'=\frac{2}{3}DI=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$AA'=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ (d'aprés 3))

b) $R=OA=\frac{a\sqrt{6}}{4}$

$V=\frac{1}{3}.\left[\frac{1}{2}(CD.BJ).AA'\right]$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}.a.a.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}\right]=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

c) en appliquant la formule d'elkashi dans le triangle AOB , on aura :

$AB^2=OA^2+OB^2-2OA.OB.\cos\widehat{AOB}$

$\Rightarrow a^2=R^2+R^2-2R^2.\cos\widehat{AOB}$

$a^2=2\left(a\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2-2\left(a\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2.\cos\widehat{AOB}$

$\Rightarrow 1=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}.\cos\widehat{AOB}$

$\frac{3}{4}\cos\widehat{AOB}=-\frac{1}{4} \Rightarrow \cos\widehat{AOB}=\frac{-1}{3}$ d'où $\widehat{AOB}\approx 109,5^0$

* de meme : $AD^2=AI^2+DI^2-2AI.DI.\cos\widehat{AID}$

$\Rightarrow a^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\cos\widehat{AID}$

$\Rightarrow 1=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos\widehat{AID} \Rightarrow \cos\widehat{AID}=\frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{AID}\approx 70,5^0$

EX 7 :

$\|\vec{u}\|=1$; $\|\vec{v}\|=4$

$\vec{u}.\vec{v}=2$; $\vec{w}=2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v}$

* $\vec{u}.\vec{w}=\vec{u}.(2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v})=2\vec{u}.(\vec{u}\wedge\vec{v})-3\vec{u}.\vec{v}$

$=0-3\vec{u}.\vec{v}=-6$

$\vec{u}.(\vec{u}\wedge\vec{v})=0$ car $\vec{u}\perp(\vec{u}\wedge\vec{v})$

* $\vec{v}.\vec{w}=2\vec{v}.(\vec{u}\wedge\vec{v})-3\vec{v}.\vec{v}=0-3\|\vec{v}\|^2=-3(4)^2=-48$

* $\|\vec{w}\|^2=(2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v})^2$

$=4\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+9\|\vec{v}\|^2-12(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{v}$

$=4\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+9(4)^2-0=144+4\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2$

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

$\Rightarrow 2=1\times4\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow |\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|=1\times4.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

d'où $\|w\|^2=144+4(2\sqrt{3})^2=192$

$\Rightarrow \|w\|=\sqrt{192}=8.\sqrt{3}$

EX 8 :

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}$

1) $\vec{u}.\vec{w}=6+(-4)+(-2)=0$

d'où $\vec{u}\perp\vec{w}$

2) $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&b\\1&c\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&a\\1&c\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&a\\1&b\end{vmatrix}\end{pmatrix}$; $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}c-b\\a-2c\\2b-a\end{pmatrix}$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases}c-b=3\\a-2c=-4\\2b-a=-2\end{cases}$

a) le systéme admet une infinité de solutions

pour a=0 on aura : b=-1 et c=2

d'où $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ vérifie $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$

b) $\begin{cases}c-b=3\\a-2c=-4\\2b-a=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2+2b\\b=b\\c=3+b\end{cases}$

$\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tq : $\begin{cases}x=2+2b\\y=b\\z=3+b\end{cases}$ $(b\in \mathbb{R})$

3) $\begin{cases}\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}\\\vec{u}.\vec{v}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+2b\\y=b\\z=3+b\\2x+y+z=1\end{cases}$

$2(2+2b)+b+(3+b)=1 \Leftrightarrow b=-1$

d'où $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

EX 9 :

$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$; $\vec{u}\perp\vec{v}$

$\vec{w}\wedge\vec{v}=\vec{u}-\vec{w}$

1) * $\vec{v}\perp(\vec{w}\wedge\vec{v}) \Rightarrow \vec{v}.(\vec{u}-\vec{w})=0$

$\Rightarrow \vec{v}.\vec{u}-\vec{v}.\vec{w}=0 \Rightarrow \vec{v}.\vec{w}=0$ car $\vec{v}.\vec{u}=0$

$\Rightarrow \vec{w}\perp\vec{v}$

* on a: $\vec{u}=\vec{w}+\vec{w}\wedge\vec{v}$

$\|\vec{u}\|^2=\|\vec{w}+\vec{w}\wedge\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow 1=\|\vec{w}\|^2+\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|^2+2\vec{w}.(\vec{w}\wedge\vec{v})$

$\Leftrightarrow 1=\|\vec{w}\|^2+\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|^2$

$\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{w}\|.\|\vec{v}\|.|\sin(\vec{w},\vec{v})|$ $(\vec{w}\perp\vec{v}\Rightarrow \sin(\vec{w},\vec{v})=1)$

d'où $\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{w}\|.\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|$

on aura donc : $1=\|\vec{w}\|^2+\|\vec{w}\|^2=2\|\vec{w}\|^2$

$\Rightarrow \|\vec{w}\|^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \|\vec{w}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) en général, lorsque : $\|\vec{i}\|=\|\vec{k}\|=1$ et $\vec{i}\perp\vec{k}$

on a : $(\vec{i},\vec{k},\vec{i}\wedge\vec{k})$:R.o.n direct

et on a aussi : $\vec{k}\wedge(\vec{i}\wedge\vec{k})=\vec{i}$; $(\vec{i}\wedge\vec{k})\wedge\vec{i}=\vec{k}$

on a : $\vec{w}\perp\vec{v}$, $\|\vec{v}\|=1$, $\|\vec{w}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

d'où $\left(\sqrt{2}\vec{w},\vec{v},\sqrt{2}(\vec{w}\wedge\vec{v})\right)$ est un repère orthonormé direct

$\Rightarrow \vec{v}\wedge\sqrt{2}(\vec{w}\wedge\vec{v})=\sqrt{2}\vec{w} \Rightarrow \vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{v})=\vec{w}$

comme : $\vec{w}\wedge\vec{v}=\vec{u}-\vec{w} \Rightarrow \vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{v})=\vec{v}\wedge(\vec{u}-\vec{w})$

$\Rightarrow \vec{w}=\vec{v}\wedge\vec{u}-\vec{v}\wedge\vec{w} \Rightarrow \vec{w}=\vec{v}\wedge\vec{u}+\vec{w}\wedge\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{w}=-\vec{u}\wedge\vec{v}+(\vec{u}-\vec{w}) \Rightarrow 2\vec{w}=\vec{u}-\vec{u}\wedge\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{w}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}\wedge\vec{v}$

EX 10 :

1) $a=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$a=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

$a=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD})$

$a=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})+\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})$

$a=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}(\underbrace{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}}_{\vec{0}})$

$a=0$

2) par exemple, lorsque: $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}$

on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$

$\Rightarrow 0+0+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$

(de meme pour les autres cas)

EX 11 :

1) A(1,1,-1) B(3,3,2) C(3,-1,-2)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}2&2\\2&-2\end{vmatrix}=-4-4=-8\neq 0$

d'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

par suites A,B et C ne sont pas alignés

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & -2\\3 & -1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & -1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2 & 2\\2 & -2\end{vmatrix}\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\8\\-8\end{pmatrix}$$

$\vec{N}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal à (ABC)

3) (ABC) : $x+2y-2z+d=0$

$A\in(ABC) \Rightarrow 1+2+2+d=0 \Rightarrow d=-5$

d'où (ABC) : $x+2y-2z-5=0$

4) $d_{(O,P)}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{9}}=\dfrac{5}{3}$

EX 12 :

$P_1: x+y-2z-5=0$

$P_2: 3x-6y+3z-2=0$

$P_3: 2x+2y+2z+1=0$

$P_4: x-2y+z-7=0$

1) * $\overrightarrow{N_2}\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$: vecteur normal à P_2

$\overrightarrow{N_4}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$: vecteur normal à P_4

$\overrightarrow{N_2}=3.\overrightarrow{N_4}$ d'où $\overrightarrow{N_2}$ et $\overrightarrow{N_4}$ sont colinéaires

par suite : $P_2 \parallel P_4$

* $A_4(1,-3,0)\in P_4$

$d_{(A_4,P_2)}=\dfrac{|3+18+0-2|}{\sqrt{9+36+9}}=\dfrac{|19|}{\sqrt{54}}=\dfrac{19}{3\sqrt{6}}$ est la distance entre P_2 et P_4

2) $\overrightarrow{N_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$: vecteur normal à P_1

$\overrightarrow{N_3}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$: vecteur normal à P_3

$\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_3}=2+2-4=0$ d'où $P_1\perp P_3$

EX 13 :

$P: x-y+5z-2007=0$

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$: vecteur normal à P

$\vec{v}$ et $\vec{N}$ ne sont pas colinéaires

$\vec{v}\wedge\vec{N}\begin{pmatrix}7\\-8\\-3\end{pmatrix}$ est vecteur directeur de P

et orthogonal à $\vec{v}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}7\alpha\\-8\alpha\\-3\alpha\end{pmatrix}$ avec $\|\vec{u}\|=1$ convient

$\|\vec{u}\|=1 \Rightarrow 49\alpha^2+64\alpha^2+9\alpha^2=1$

$\Rightarrow 122\alpha^2=1 \Rightarrow \alpha^2=\dfrac{1}{122}$

il suffit de prendre $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{122}}$

d'où $\vec{u}\begin{pmatrix}7/\sqrt{122}\\-8/\sqrt{122}\\-3/\sqrt{122}\end{pmatrix}$ convient

EX 14 :

$$\vec{u}=\vec{i}+\vec{j} \rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}=\vec{j}+\vec{k} \rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$P=P(A,\vec{u},\vec{v})$

$\vec{N}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur normal à P

$$\vec{N}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

d'où P: x-y+z+d=0

$A(2,0,0)\in P \Rightarrow 2+d=0 \Rightarrow d=-2$

d'où P: x-y+z-2=0

EX 15 :

A(0,0,0) ; B(2,0,0) ; D(0,1,0)

E(0,0,1) ; G(2,1,1) ; H(0,1,1)

$I=B*D \rightarrow I(1,\frac{1}{2},0)$

1) $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$ H(0,1,1)

d'où

$$(HI):\begin{cases}x=\alpha\\ y=1-\frac{1}{2}\alpha\\ z=1-\alpha\end{cases} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

2) $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DE}\wedge\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ est vecteur normal au plan (DEG)

d'où : (DEG): -x+2y+2z+d=0

$D(0,1,0)\in(DEG) \Rightarrow 2+d=0 \Rightarrow d=-2$

d'où (DEG) : -x+2y+2z-2=0

3) $M(x,y,z)\in(HI)\cap(DEG)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha\\ y=1-\frac{1}{2}\alpha\\ z=1-\alpha\\ -x+2y+2z-2=0\end{cases}$$

$$-\alpha+2(1-\frac{1}{2}\alpha)+2(1-\alpha)-2=0 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

d'où $M(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{1}{2})$ et par suite M=H∗I

EX 16 :

A(a,0,0) B(0,b,0) C(0,0,c)

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-a\\b\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-a\\0\\c\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}bc\\ac\\ab\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC)

(ABC) : (bc).x+(ac).y+(ab).z+d=0

$A(a,0,0)\in(ABC) \Rightarrow abc+d=0 \Rightarrow d=-abc$

d'où (ABC):(bc).x+(ac).y+(ab).z-abc=0

b) $OH=d_{(O,(ABC))}$

$$OH=\frac{abc}{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}}$$

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$$

2) a) soit A : l'aire du triangle ABC

$$A=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$$

d'où : $A=\frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}$

b) $A_1=aire(OAB)=\frac{ab}{2}$

$A_2=aire(OAC)=\frac{ac}{2}$

$A_3=aire(OBC)=\frac{bc}{2}$

$$A^2=\frac{1}{4}\left[(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2\right]$$

$$A^2=A_1^2+A_2^2+A_3^2$$

EX 17 :

$BM = \alpha = CN$

1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \alpha.\overrightarrow{BF} = 1.\overrightarrow{AB} + \alpha.\overrightarrow{AE}$

d'où $M(1,0,\alpha)$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.\overrightarrow{CH}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG})$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE})$

$= (1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}).\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.\overrightarrow{AE}$

d'où $N(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, 1, \frac{\alpha}{\sqrt{2}})$

2) a) $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \alpha(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \alpha(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)\overrightarrow{AE}$

$= \alpha.\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{BA} + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1).\overrightarrow{AE}\right] + \overrightarrow{AD}$

d'où $\overrightarrow{MN} = \alpha\vec{u} + \overrightarrow{AD}$ avec

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{BA} + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1).\overrightarrow{AE}$ ($\vec{u}$ *vecteur fixe*)

b) $\overrightarrow{MN} = \alpha\vec{u} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{MN}$ *est un vecteur du plan* $P(A;\vec{u};\overrightarrow{AD}) \Rightarrow (MN)$ *reste //à* $P(A;\vec{u};\overrightarrow{AD})$

3) $B(1,0,0)$ $C(1,1,0)$

soit $I = B * C \rightarrow I(1, \frac{1}{2}, 0)$

$J = M * N \rightarrow J(1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}))$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\alpha}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

* $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{BC} = 0+0+0 = 0$ d'où $(IJ) \perp (BC)$

* $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MN} = \frac{\alpha^2}{4} + 0 + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right).\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)$

$= \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right).$

$= \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

D'où $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{MN}$ d'où $(IJ) \perp (MN)$

EX 18 :

$A(0,4,-1)$; $B(-2,4,-5)$

$C(1,1,-5)$; $D(1,0,-4)$

1) P,Q et R les plans médiateurs respactifs de $[AB]$,$[BC]$ et $[AD]$

* $M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = (x+2)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2$

$\Leftrightarrow 2z + 1 = 4x + 4 + 10z + 25 \Leftrightarrow x + 2z + 7 = 0$

d'où $P: x + 2z + 7 = 0$

* soit $J = B * C$; $J(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -5)$

Q passe par J et de vecteur directeur normal $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Q : 3x - 3y + d = 0$

$J \in Q \Rightarrow -\frac{3}{2} - \frac{15}{2} + d = 0 \Rightarrow d = 9$

d'où $Q : 3x - 3y + 9 = 0$

$Q : x - y + 3 = 0$

de meme : $R: x - 4y - 3z = 0$

2) $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$: vecteur normal à P

$\overrightarrow{NQ}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; vecteur normal à Q

$\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$

$\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{NQ}$ non colinéaires

d'où P et Q se coupent suivant une droite Δ

$\Delta:\begin{cases}x+2z+7=0\\x-y+3=0\end{cases}$

on pose $x=\alpha$, on a : $\begin{cases}x=\alpha\\y=3+\alpha\\z=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\alpha\end{cases}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

(représentation paramétrique de Δ)

* $\Delta\cap R$?

$M(x,y,z)\in\Delta\cap R \Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha\\y=3+\alpha\\z=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\alpha\\x-4y-3z=0\end{cases}$

$\alpha-4(3+\alpha)-3(-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\alpha)=0 \Rightarrow \alpha=-1$

d'où $\begin{cases}x=-1\\y=2\\z=-3\end{cases}$

$\Delta\cap R=\{I(-1,2,-3)\}$

cclusion : I(-1,2,-3) est un point commun de P,Q et R

* $I\in P\cap Q\cap R \Rightarrow IA=IB=IC=ID$

d'où I est le centre de (S):la sphère circonscrite au tétraède ABCD

(S) est de rayon IA=3

d'où (S) : $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$

EX 19 :

Partie A :

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Rightarrow \vec{v}=\alpha.\vec{u}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\vec{w}\wedge\vec{0}=\vec{0}$

$(\vec{w}.\vec{v})\vec{u}-(\vec{w}.\vec{u})\vec{v}=(\vec{w}.\alpha\vec{u})\vec{u}-(\vec{w}.\vec{u})\alpha\vec{u}$

$=\alpha(\vec{w}.\vec{u})\vec{u}-\alpha(\vec{w}.\vec{u})\vec{u}=\vec{0}$

d'où l'égalité : $\vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=(\vec{w}.\vec{v})\vec{u}-(\vec{w}.\vec{u})\vec{v}$

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$

$\vec{i}=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$ $(O,\vec{i},\vec{j})$ R.o.n de (OAB)

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: R.o.n direct

a) * $\overrightarrow{OA}=\|\overrightarrow{OA}\|.\vec{i}$ $(\alpha=\|\overrightarrow{OA}\|)$

* $B\in p(OAB)$, d'où il existe $(\beta,\delta)\in\mathbb{R}^2$

tq: $\overrightarrow{OB}=\beta\vec{i}+\delta\vec{j}$ (car $(O,\vec{i},\vec{j})$ repère de (OAB))

* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base

d'où il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, tq : $\vec{w}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$ car $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$

$\vec{v}\begin{pmatrix}\beta\\\delta\\0\end{pmatrix}$ car $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

* $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&\delta\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}\alpha&\beta\\0&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}\alpha&\beta\\0&\delta\end{vmatrix}\end{pmatrix}$; $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\delta\end{pmatrix}$

$\vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}b&0\\c&\alpha\delta\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}b&0\\c&\alpha\delta\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a&0\\b&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$ d'où $\boxed{\vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})\begin{pmatrix}b\alpha\delta\\-a\alpha\delta\\0\end{pmatrix}}$ (1)

. . -

* $\vec{w}.\vec{v}=a\beta+b\delta$

$(\vec{w}.\vec{v})\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha(a\beta+b\delta)\\0\\0\end{pmatrix}$

$\vec{w}.\vec{u}=a\alpha$

$(\vec{w}.\vec{u})\vec{v}\begin{pmatrix}a\alpha\beta\\a\alpha\delta\\0\end{pmatrix}$

$\boxed{(\vec{w}.\vec{v})\vec{u}-(\vec{w}.\vec{u})\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\beta\delta\\-a\alpha\delta\\0\end{pmatrix}}$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow \vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=(\vec{w}.\vec{v})\vec{u}-(\vec{w}.\vec{u})\vec{v}$

Partie B :

Application1:

$\vec{u}\perp\vec{v}$ et $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$; $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$

d'après la partie A:

* $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=(\vec{u}.\vec{v})\vec{u}-(\vec{u}.\vec{u})\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{w}=0.\vec{u}-\|\vec{u}\|^2\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{w}=-\vec{v}$ (car $\|\vec{u}\|=1$)

* $\vec{v}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=(\vec{v}.\vec{v})\vec{u}-(\vec{v}.\vec{u})\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{v}\wedge\vec{w}=\|\vec{v}\|^2\vec{u}-0.\vec{v} \Rightarrow \vec{v}\wedge\vec{w}=\vec{u}$ (car $\|\vec{v}\|=1$)

Application2:

$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$

$\Leftrightarrow \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=-\vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$

$\Leftrightarrow (\vec{u}.\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}.\vec{v})\vec{w}=-(\vec{w}.\vec{v})\vec{u}+(\vec{w}.\vec{u})\vec{v}$

$\Leftrightarrow (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}=(\vec{w}.\vec{v})\vec{u}$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

Application3:

* d'après la partie A :

* $\vec{v}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=(\vec{v}.\vec{v})\vec{u}-(\vec{v}.\vec{u})\vec{v}$

$\Rightarrow (\vec{v}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})).\vec{u}=(\vec{v}.\vec{v})\vec{u}.\vec{u}-(\vec{v}.\vec{u})\vec{v}.\vec{u}$

$\Rightarrow \boxed{(\vec{v}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})).\vec{u}=\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2-(\vec{u}.\vec{v})^2}$ (1)

* pour $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$

on a : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2=\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2-(\vec{u}.\vec{v})^2$ (tous nuls)

pour $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$

on a : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{v}\|.\|\vec{u}\|.|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|$

$\Rightarrow \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2=\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2.\sin^2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

$=\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2.(1-\cos^2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}))$

$=\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2\cos^2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

$=\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2-(\vec{u}.\vec{v})^2$

$\Rightarrow \boxed{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2=\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2-(\vec{u}.\vec{v})^2}$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow$ le résultat

EX 20 :

A(0,6,0) ; B(0,0,8) ; C(4,0,8)

1) a) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}0\\6\\-8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=0+0+0=0$ d'où $(BC)\perp(BA)$

b) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=0+0+0=0$

d'où $(OA)\perp(OC)$

c) $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OB}=0$ d'où $(BC)\perp(OB)$

$\left.\begin{array}{l}(BC)\perp(BA)\\(BC)\perp(OB)\end{array}\right\}\Rightarrow$ (OB) est perpendiculaire au plan (OAB)

2) $V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC}\right|$

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}48\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$

$V=\frac{1}{6}|192|=32$

3) O,A,B et C ne sont pas coplanaires d'où O,A,B et C appartiennent à une meme sphère (S)

(S): $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+d=0$

$O\in(S)\Rightarrow d=0$

(S): $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z=0$

$A\in(S)\Rightarrow 36+6\beta=0\Rightarrow\beta=-6$

(S): $x^2+y^2+z^2+\alpha x-6y+\gamma z=0$

$B\in(S)\Rightarrow 64+8\gamma=0\Rightarrow\gamma=-8$

(S): $x^2+y^2+z^2+\alpha x-6y-8z=0$

$C\in(S)\Rightarrow 16+64+4\alpha-64=0\Rightarrow\alpha=-4$

d'où (S): $x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z=0$

(S) : $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=29$

d'où (S) est de centre I(2,3,4) de rayon $\sqrt{29}$

(Rq: on pourra considérer comme dans l'ex:18)

4) $M(0,0,\alpha)$

a) le plan P contenant M et perpendiculaire à (OB) a pour équation : $\boxed{z=\alpha}$

la droite (OC) passe par O et de vecteur directeur

$(OC):\begin{cases}x=4k\\y=0\\z=8k\end{cases},k\in\mathbb{R}$

$P\cap(OC):\begin{cases}x=4k\\y=0\\z=8k\\z=\alpha\end{cases}$

$k=\frac{\alpha}{8}$

d'où $N(\frac{\alpha}{2},0,\alpha)$

de meme : $P(\frac{\alpha}{2},6-\frac{3\alpha}{4},\alpha)$ et $Q(0,6-\frac{3\alpha}{4},\alpha)$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ d'où MNPQ est un parallélogramme

$\overrightarrow{MQ}\begin{pmatrix}0\\6-\frac{3\alpha}{4}\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MQ}=0$ d'où $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{MQ}$

<u>conclusion:</u> MNPQ est un rectangle

b) * (OB) perpendiculaire au plan (MNPQ) d'où $(OB)\perp(MP)$

* $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}\alpha/2\\6-\frac{3\alpha}{4}\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix}$

$(MP)\perp(AC)\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 4(\frac{\alpha}{2})-6(6-\frac{3\alpha}{4})=0\Leftrightarrow 2\alpha-36+\frac{9}{2}\alpha=0$

$\Leftrightarrow\alpha=\frac{72}{13}$

c) $MP^2=\dfrac{\alpha^2}{4}+(6-\dfrac{3\alpha}{4})^2$

on pose : $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+(6-\dfrac{3x}{4})^2$

$f'(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2}(6-\dfrac{3x}{4})=\dfrac{13x}{8}-\dfrac{18}{2}$

x	0		72/13		8
f'(x)		-	0	+	
f(x)		↘	f(72/13)	↗	

MP est minimale pour $\alpha=\dfrac{72}{13}$

EX 21 :

$J(0,1,0)$

$\overrightarrow{OM}=\alpha.\vec{k}$

$\overrightarrow{AN}=\beta.\vec{i}$

1) $S: x^2+(y-1)^2+z^2=1$

2) $M(0,0,\alpha)$ et $N(\beta,2,0)$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\beta\\2\\-\alpha\end{pmatrix}$

$(MN):\begin{cases}x=k\beta\\y=2k\\z=\alpha-k\alpha\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$

3) a) (MN) tangente à (S) ssi la distance de J à la droite (MN) est égale R=1

$\Leftrightarrow \dfrac{\|\overrightarrow{JM}\wedge\overrightarrow{MN}\|}{\|\overrightarrow{MN}\|}=1$

$\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}0\\-1\\\alpha\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\beta\\2\\-\alpha\end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{MN}\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+4}$

$\overrightarrow{JM}\wedge\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\beta\\\beta\end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{JM}\wedge\overrightarrow{MN}\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2}$

(MN) tangente à (S) $\Leftrightarrow \|\overrightarrow{JM}\wedge\overrightarrow{MN}\|=\|\overrightarrow{MN}\|$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+4=\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2$

$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2=4$

b) $\{Q\}=(MN)\cap S$

$Q(x,y,z)$ tq : $\begin{cases}x=k\beta\\y=2k\\z=\alpha-k\alpha\\x^2+(y-1)^2+z^2=1\end{cases}$ d'où

$k^2\beta^2+(2k-1)^2+\alpha^2(1-k)^2=1$

$\Leftrightarrow k^2\beta^2+4k^2-4k+1+\alpha^2(1-2k+k)^2=1$

$\Leftrightarrow k^2\beta^2+4k^2-4k+\alpha^2-2\alpha^2k+\alpha^2.k^2=0$

$\Leftrightarrow (\alpha^2+\beta^2+4).k^2-(4+2\alpha^2)k+\alpha^2=0$

$\Delta'=(2+\alpha^2)^2-\alpha^2(\alpha^2+\beta^2=4)$

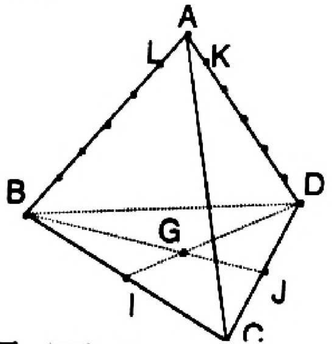
$\Delta'=4+4\alpha^2-\alpha^2\beta^2-4\alpha^2=4-(\alpha^2\beta^2)$

$\Delta'=4-4=0$

d'où : $k=\dfrac{2+\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2+4}$

$Q\left(\dfrac{(2+\alpha^2)\beta}{\alpha^2+\beta^2+4},\dfrac{2(2+\alpha^2)}{\alpha^2+\beta^2+4},\dfrac{2+\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+4}\right)$

EX 22 :



$5\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AL}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

$(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$: repère de (ξ)

1) A(0,0,0) ; B(1,0,0) ; c(0,1,0) ; D(0,0,1)

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Rightarrow(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD})=\vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

d'où $G(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$I=B*C \Rightarrow I(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

$J=C*D \Rightarrow J(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

* $5\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}=\vec{0} \Rightarrow 5\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

$\Rightarrow 6\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

d'où $K(0,0,\frac{1}{6})$

* $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \Rightarrow L(\frac{1}{6},0,0)$

2)* $K(0,0,\frac{1}{6})$; $\overrightarrow{KI}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/6\end{pmatrix}$ d'où (IK): $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\alpha\\ y=\frac{1}{2}\alpha\\ z=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\alpha\end{cases}$ $\alpha\in$ □

*

$L(\frac{1}{6},0,0)$; $\overrightarrow{LJ}\begin{pmatrix}\frac{-1}{6}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $d'ou\,(LJ):\begin{cases}x=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\beta\\ y=\frac{1}{2}\beta\\ z=\frac{1}{2}\beta\end{cases}$ $\beta\in IR$

* (AG) : $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\gamma\\ y=\frac{1}{3}\gamma\\ z=\frac{1}{3}\gamma\end{cases}$ ($\gamma\in IR$)

3) $M(x,y,z)\in(LJ)\cap(AG) \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{3}\gamma\\ y=\frac{1}{3}\gamma\\ z=\frac{1}{3}\gamma\\ \frac{1}{6}-\frac{1}{6}\beta=\frac{1}{3}\gamma\\ \frac{1}{2}\beta=\frac{1}{3}\gamma\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{3}\gamma\\ y=\frac{1}{3}\gamma\\ z=\frac{1}{3}\gamma\\ \gamma=\frac{3}{8}\\ \beta=\frac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{8}\\ y=\frac{1}{8}\\ z=\frac{1}{8}\end{cases}$

Conclusion : $(LJ)\cap(AG)=\{Q(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8})\}$

Pour vérifier que le point $Q\in(IK)$; il suffit de signaler qu'en remplaçant α par ¼ dans l'équation de (IK) on obtient x=y=z=1/8
Alors on peut conclure que les droites (IK),(JL) et (AG) sont concourantes en $Q(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8})$.

Exercice 23 :

$\overrightarrow{DM} = x.\overrightarrow{DF}$

1)a) $\begin{cases}FB = FG = 1\\ DB = DG = \sqrt{2}\end{cases}$

D'où F et D appartiennent au plan P1 médiateur du segment [BG]$\Rightarrow$(FD)$\subset$P1

et comme $M\in$ (FD) alors $M\in$ P1 et par suite $\boxed{MB=MG}$ (1)

De même : $\begin{cases}DB = DE\\ FB = FE\end{cases}$ $\Rightarrow$ (DF)$\subset$P2 : plan médiateur de [BE]

$M \in (D\Gamma) \Rightarrow M \in P_2$ par suite $MD = ME$ (2)

(1)+(2)⇒MB=MG=ME

b) $BE = \sqrt{2}$ car $ABFE$ est un carré de coté 1

de même $EG = BC = \sqrt{2}$

BE=BG=EG d'où le triangle BEG est équilatéral.

(Rque :On pourra utiliser les coordonnées des points)

2)On muni l'espace d'un R.o.n $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

a) B(1,0,0) F(1,0,1) ; D(0,1,0)

$\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF} \Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = x(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}) \Rightarrow$

$\overrightarrow{AM} = (1-x)\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AM} = (1-x)\overrightarrow{AD} + x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE})$

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{AE}$

D'où M(x, 1-x , x)

$MB^2 = (x-1)^2 + (1-x)^2 + x^2$

$BM^2 = 3x^2 - 4x + 2$

Soit $g(x) = 3x^2 - 4x + 2$

$g'(x) = 6x - 4$

x	$-\infty$		2/3		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	2/3	↗	$+\infty$

b) MB = MG=ME d'où M appartient à Δ: l'axe de (ζ) : Cercle circonscrit au triangle BEG

MB² est minimale pour x=2/3

⇒M(2/3,1/3,2/3)

Donc w(2/3,1/3,2/3) est le centre de (ζ)

3) $E\widehat{M}B = B\widehat{M}G = G\widehat{M}E = \alpha$

a)dans le triangle isocèle BME . On a :

$BE^2 = MB^2 + ME^2 - 2MB.ME.\cos\alpha$

(formule dElkashi)

$\Rightarrow (\sqrt{2})^2 = 2MB^2 - 2MB^2.\cos\alpha$

$\Rightarrow 2MB^2.\cos\alpha = 2MB^2 - 2$

$\Rightarrow \cos\alpha = 1 - \dfrac{2}{2MB^2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = 1 - \dfrac{1}{3x^2 - 4x + 2} = f(x)$

$D_f = IR$ car $\Delta < 0$

b)

$f'(x) = \dfrac{6x-4}{(3x^2-4x+2)^2}$

x	$-\infty$		2/3		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	1	↘	-1/2	↗	1

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$

a +b +c=0 $\Leftrightarrow x' = 1$ et $x'' = \frac{1}{3}$

$S_{IR} = \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$

c) $f(x) = \cos\alpha$

$\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ou $x = 1$

$\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{ME} \text{ et} \\ \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG} \text{ et} \\ \overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{MG} \end{cases}$

Pour x=1 → $MB^2 = 1$

Pour $x=\frac{1}{3}$ → $MB^2 = 1$

⇒MB=ME=MG d'où $(M,\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MG},\overrightarrow{ME})$ est orthonormé.

$\overrightarrow{DM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$ et $M_2 = F$

d) $x \in [0,1]$ pour $M \in [DF]$

$f(x) = \cos\alpha$

x	0		2/3		1
f'(x)		-	0	+	
f(x)	½	↘	-1/2	↗	0

$\cos\alpha \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \Rightarrow \alpha \in \left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow M=D$

Conclusion : α *est minim pour* $M = D$

Ex 24 :

B(1,1,0)

P : x+y-a=0 ; $a \in]0,1[$

1) A(1,0,0) C(0,1,0) S(0,0,1)

$\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

D'où

$(SA) : \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 0 \\ z = -\alpha \end{cases} ; (\alpha \in IR)$

$\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

D'où $(SB) : \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta \\ z = 1-\beta \end{cases} ; (\beta \in IR)$

$\overrightarrow{SC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

D' où $(SC) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1+\delta . (\delta \in IR) \\ z = -\delta \end{cases}$

$(OC) : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} . (t \in IR)$

$(OA) : \begin{cases} x = k \\ y = 0 . (k \in IR) \\ z = 0 \end{cases}$

2) $\{I\} = P \cap (SA)$

I(x ,y ,z) tel que :

$\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 0 \\ z = -\alpha \\ x+y = a \end{cases}$

$(1+\alpha) + 0 = a \Rightarrow \alpha = a-1$

D'où I(a,0,1-a)

$*\{J\} = (SB) \cap P$

J(x ,y ,z) tq :

$\begin{cases} x = \beta \\ y = \beta \\ z = 1-\beta \\ x+y = a \end{cases}$

$\beta + \beta = a \Rightarrow \beta = \frac{a}{2}$

D'où $J\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},1-\frac{a}{2}\right)$

De même :

K(0, a , 1-a) ; L(0,a,0) ; M(a,0,0)

b) $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-a\\a\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-a\\a\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}0\\0\\a-1\end{pmatrix}$

on a :

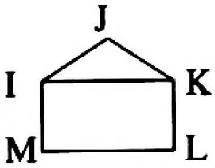
$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{ML}$ *d'où IKLM est un parallélogramme*

$\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{IM} = 0 \rightarrow \overrightarrow{IK} \perp \overrightarrow{IM}$

D'où IKLM est un rectangle

c)A= aire (IKLM)+aire (IJK)

$= A_1+A_2$



A_1=IK x IM car IKLM est un rectangle.

$A_1 = \sqrt{2a^2}.\sqrt{(a-1)^2} = a.\sqrt{2}.|a-1|$

$A_1 = \sqrt{2}.a(1-a)$

$A_2 = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}\|$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{-\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{a^2}{2} \\ \frac{a^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$A_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{4}}$

$A_2 = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

D'où $A = A_1 + A_2 = \frac{a\sqrt{2}}{4}.(4-3a)$

3)$f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{4}(4-3x)$

a)$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-3x)$

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

f *admet* $\frac{\sqrt{2}}{3}$ *comme maxime absolu en* $\frac{2}{3}$

$A = f(a)$ D'où A est maximale Pour $a = \frac{2}{3}$

*soit G le centre de gravité de OAC

$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 0 \Rightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ $d'où G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

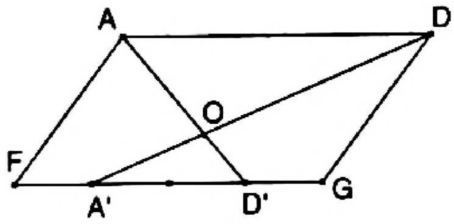
Pour $a = \frac{2}{3}$

$P: x + y = \frac{2}{3}$

On a : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow G \in P$

Ex 25

1) ADGF et un parallélogramme



$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'G}$

$\overrightarrow{FG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{A'D'} + \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$

$\Rightarrow \overrightarrow{FG} = 2.\overrightarrow{A'D'}$

D'après Thalès :

$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{DA}}$

$\Rightarrow \frac{\overline{OA'}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{GF}} = -\frac{1}{2}$

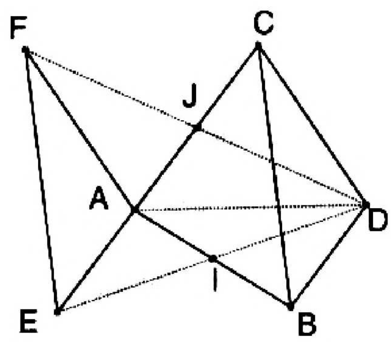
$\Rightarrow OA' = -\frac{1}{2}\overline{OD} \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{1}{2}\overline{OD}$

D'où h est de rapport $(-\frac{1}{2})$

2) (AD) et (EF) ne sont pas parallèles.

D'où il n'y a aucune homothétie qui transforme (HD) en (EF) .

Ex 26



I = A*B = D*E

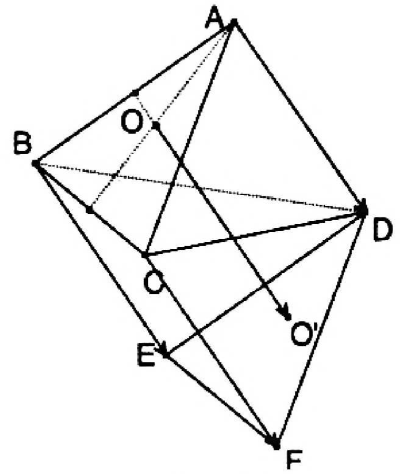
ADBE est un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BE}$

de même ADCF est un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CF}$

D'où $\begin{cases} t_{\overrightarrow{DA}}(D) = A \\ t_{\overrightarrow{DA}}(B) = E \\ t_{\overrightarrow{DA}}(C) = F \end{cases}$

Par suite la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$ transforme le triangle BCD en le triangle EFA.

Ex 27



$t_{\overrightarrow{AB}}(D) = E \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$

$\Rightarrow$ ABED est un parallélogramme $\Rightarrow$ (AD) // (BE)

$t_{\overrightarrow{AC}}(D) = F \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$

$\Rightarrow$ ACFD est un parallélogramme $\Rightarrow$ (CF) // (AD)

L'image du triangle ABC par $t_{\overrightarrow{AD}}$ est le triangle DEF

O : le centre de cercle circulant le triangle ABC

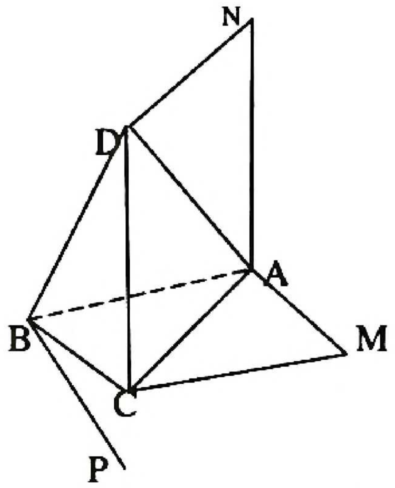
$\Rightarrow t_{\overrightarrow{AD}}$(O) est le centre du cercle circulant au triangle DEF

$\Rightarrow t_{\overrightarrow{AD}}(O) = O' \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OO'} \Rightarrow$(AD) // (OO')

D'où

(OO') // (AD) // (BE) // (CF) .

Ex 28 :



$t_{\overrightarrow{BA}}(C) = M \Longrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$

$\Longrightarrow$ ABCM est un parallélogramme

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MA} \Longrightarrow \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AM}$

$t_{\overrightarrow{CA}}(D) = N \Longrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DN}$

$\Longrightarrow$ ACDN est un parallélogramme

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{NA} \Longrightarrow \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AN}$

De même : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{DB} \Longrightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont coplanaires

et par suite les points A ,M, N et P sont coplanaires

Ex 29 :

D : $\begin{cases} X = 1 - \alpha \\ y = 2 + \alpha \,; \\ Z = -1 - \alpha \end{cases}$ D' : $\begin{cases} x = 1 + 2\beta \\ y = 2 - 2\beta \\ z = -1 + 2\beta \end{cases}$

$\vec{V}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: vecteur directeur de D

$\vec{V'}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$: vecteur directeur de D'

$\vec{v'} = -2\vec{v} \Longrightarrow \vec{V}$ et $\vec{V'}$ colinéaire

d'où D//D'

$A(1,2,-1) \in D \cap D'$

D'où D et D' sont confondues

$\vec{U} = -\vec{V}$: vecteur de D

D'où $t_{\vec{u}}(D) = D = D'$

Ex 30 :

$S = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z = \frac{1}{2}$

$P = x + 2y + 2z - 1 = 0$

$S = (x-1)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = 4$

S et de centre $I(1, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2})$ de rayon R =2

$d(I,P) = \frac{|1-3+1-1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2}{3}$

$d(I,P) = \frac{2}{3} < R = 2$

d'où $S \cap P$ est un cercle de rayon $r = \sqrt{4 - \frac{4}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ de centre W : le Project orthogonal de I sur P.

soit W(x,y,z)

$\vec{N}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $u\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: vecteur normal à P

On a $\begin{cases} \overrightarrow{IW} = \alpha \vec{N} \\ W \in P \end{cases}$ $\alpha \in R$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -\frac{3}{2} + 2\alpha \\ z = \frac{1}{2} + 2\alpha \\ x + 2y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$(1+\alpha) + 2(-\frac{3}{2} + 2\alpha) + 2(\frac{1}{2} + 2\alpha) - 1 = 0$

$\Longrightarrow \alpha = \frac{2}{9}$

D'où $w(\frac{11}{9}, -\frac{19}{18}, \frac{17}{18})$

2) l'image d'un plan par une translation est un plan qui lui est parallèle.

Il ya deux plan Q et R tangentes a S et parallèle a P.

Déterminons leurs points de contact avec S

$$\Delta : \begin{cases} x=1+£ \\ Y=-3/2+2£ \\ Z=1/2+2£ \end{cases}$$

Δ est la perpendiculaire à P passant par I

$S \cap \Delta = ?$

$$\begin{cases} X=1+\lambda \\ y=-3/2+2\lambda \\ z=1/2+2\lambda \\ (x-1)^2+(+3/2)^2+(z-1/2)^2=4 \end{cases}$$

$\lambda^2+4\lambda^2+4\lambda^2=4$

$\lambda = 2/3$ ou $\lambda = -2/3$

Soit A (5/3,-1/6,11/6)

B (1/3,-17/6,-5/6)

$S \cap \Delta = \{A,B\}$

Q//P et tgt à (S) en A

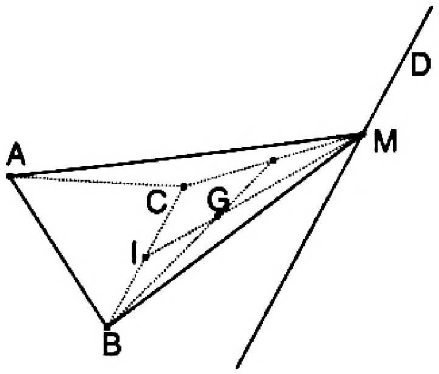
R//p et tgt à (S) en B

Il ya une infinité de translation qui transforme P en Q

De même P en R

Par exemple : $t_{\overrightarrow{WA}}(P) = Q$ et $t_{\overrightarrow{WB}}(P) = R$

EX 31 :



Soit G : le centre de gravite du triangle BCM

$I=B*C \Rightarrow \overrightarrow{IG} = 1/3\ \overrightarrow{IM} \Rightarrow h\,(\mathbf{I,1/3})\,(M) = G$

Lorsque M décrit la droite D

G décrit la droite D' image de D par l'homothétie de centre I de rapport 1/3.

*soit J le centre de gravite du tétraèdre ABCM $\Rightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JM} = \vec{0}$

soit K le centre de gravite du triangle ABC

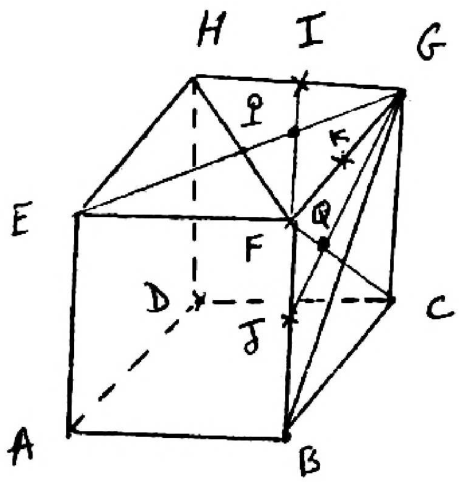
$\Rightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JM} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KM} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{KJ} = 1/4\ \overrightarrow{KM}$

$\Rightarrow h\,(k,1/4)(M)=J$

J décrit la droite $D'' = h(\mathbf{K,1/4})(D)$

EX 32 :



1) la droite (DH) est perpendiculaire au palan(ABCD)

$(DH)\perp(AC)$ ⇨

$\Rightarrow \quad \vec{AC}.\vec{DH} = 0$

ABCD est un carré $\Rightarrow$ $(AC)\perp(BD) \Rightarrow \vec{AC}.\vec{BD}=0$

$\vec{AC}.\vec{BH} = \vec{AC}.(\vec{BD}+\vec{DH})$

$=\vec{AC}.\vec{BD}+\vec{AC}.\vec{DH}$

$= \quad 0 \quad + \quad 0 = 0$

D'où $(BH)\perp(AC)$

De même $(BH)\perp(AF)$

D'oú (BH) est perpendiculaire au plan (ACF)

2) K = F * G

a) P le centre de gravité du triangle FGH et K= F*G

$\Rightarrow \vec{KP}=1/3\,\vec{KH}$ D'où **h(k,1/3)(H) = P**

De même **h(k,1/3)(B) = Q**

b)

$\left.\begin{array}{l} h(k,1/3)(H)=P \\ \\ h(k,1/3)(B)=Q \end{array}\right\} \Longrightarrow (PQ)//(BH)$

$\left\{\begin{array}{l} (HB)\perp(AC) \\ \\ (AC)\ //\ (EG) \end{array}\right.$ ⇨ $(HB)\perp(EG)$

D'où $(PQ)\perp(EG)$

De même $(PQ)\perp(FC)$

EX33 :

1) soit I=B*C

$\vec{AG} = 2/3\,\vec{AI}$

D'où l'homothétie de centre A de rapport 2/3

transforme le plan(BCD) en P

* soit J = C * D **h(A, 2/3)** (J) ∈ P

⇨le centre de gravité du triangle ACD appartient à P

de même pour les autres points

2)a) **h(A2/3)** (M)=N

D'où l'ensemble des points N et le carré image du

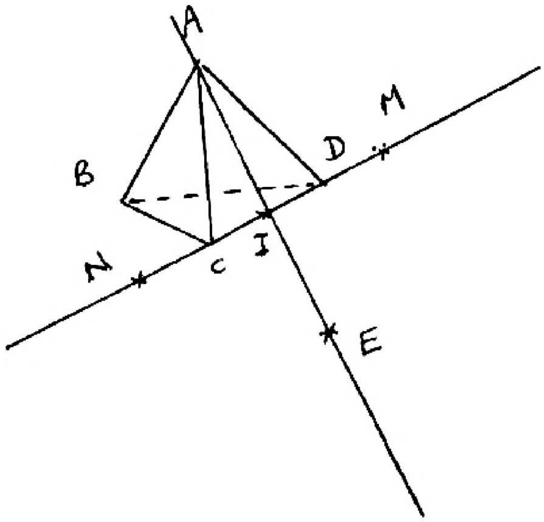
carré BCDE par h

Γ est un carré de coté 2/3.BC d'où p=8/3.BC

c)$V = (2/3)^3 . v' = 8/27 .V'$

V' : le volume de la pyramide ABCDE

EX 34 :



$$\begin{cases} h(I)=I \\ h(A)=E \end{cases}$$

1) a) l'image du plan (ABC) par h est le plan passant par $h(A) = E$ qui lui est parallèle

$\Rightarrow h[(ABC)]=P \Rightarrow h(C) \in P$

or I,C et h(C) sont alignés

d' ou $\{h(C)\}= P \cap (IC) \Rightarrow h(C)=M$

b) de même $h(D) = N$

$I = C * D \Rightarrow h(I)=M*N \Rightarrow I=M*N$

2)a) P//(ABC)

Q//(ABD)

(ABC) et (ABD) ne sont pas parallèles.

d'ou P et Q ne sont pas parallèles

$P \cap Q$ est une droite Δ

b) $(ABC) \cap (ABD) = (AB)$ d'où

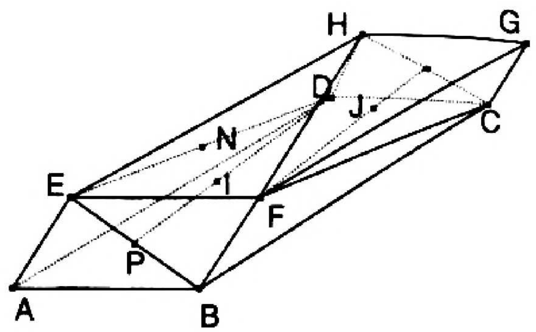
$\Delta = h((AB))$

Soit $B'=h(B)$ alors $B' \in \Delta$ et $B' \in (IB)$

Δ et (IB) sont sécantes en B'

par suite Δ et (IB) sont coplanaires

Ex 35:



1) (BE) // (CH) et (BD) // (FH)

les plans (BED) et (CFH) contiennent deux droites parallèles deux a deux et sécantes d'ou ils sont parallèles

2)a) $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AE}= \vec{AI}+\vec{IB}+\vec{AI}+\vec{ID}+\vec{AI}+\vec{IE}$

$= 3\vec{AI} + \vec{IB} + \vec{ID} + \vec{IE}$

$= 3\vec{AI}$

$\vec{AG}= \vec{AB}+\vec{BG} = \vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CG}$

$= \vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AE} = 3\vec{AI}$

b) $\vec{AC}+\vec{AF}+\vec{AH}=3\vec{AJ}$ (1)

$\vec{AC}+\vec{AF}+\vec{AH}=(\vec{AB}+\vec{AD})+(\vec{AB}+\vec{AE})+(\vec{AD}+\vec{AE})$

$\vec{AC}+\vec{AF}+\vec{AH}= 2(\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AE}) = 6\vec{AI}$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow 3\vec{AJ}=6\vec{AI} \Rightarrow \vec{AJ}=2\vec{AI}$

d'ou $J=h(A,2)(I)$

c) $\vec{AJ}=2\vec{AI} \Rightarrow I=A*J \Rightarrow AI=IJ$

$\vec{AG}= 3\vec{AI} \Rightarrow \vec{AJ}+\vec{JG}= 3\vec{AI}$

or on a $\vec{AJ}=2\vec{AI}$ d'où $\vec{JG}= \vec{AI}$

D'ou AI= IJ =JG

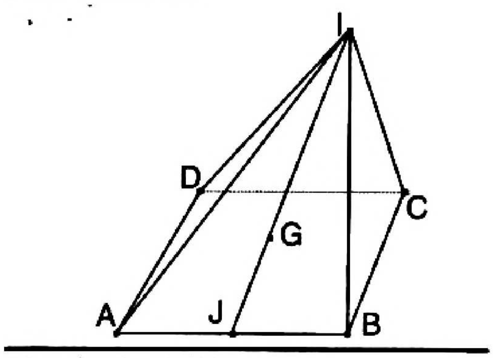
3) $M=B*D$; $N= D*E$; $P= B*E$

$M=B*D \Rightarrow M=A*C \Rightarrow \vec{AC}=2\vec{AM} \Rightarrow h(M)=C$

$N= D*E \Rightarrow N=A*H \Rightarrow \vec{AH}=2\vec{AN} \Rightarrow h(N)=H$

$P=A*F \Rightarrow \vec{AF}=2\vec{AP} \Rightarrow h(P)=F$

Exercice 36:



1) soit J= A*B

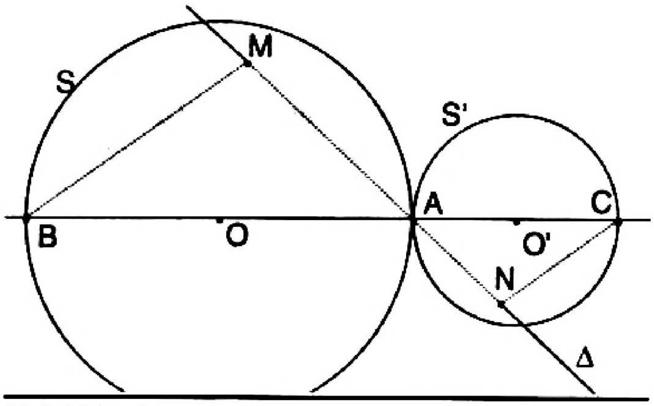
G_1 : le centre de gravite du triangle IAB

$\Rightarrow \vec{IG_1} = 2/3\,\vec{IJ} \Rightarrow h(J)=G_1$

J appartient au plan (ABCD) donc $G_1 \in P$
De même P contient les centres de gravité de I BC, ICD et I DA.

2)a) (Γ) est le carre image de ABCD par h
b) $V= (2/3)^3$. V' avec V' le volume du pyramide IABCD

Exercice 37:



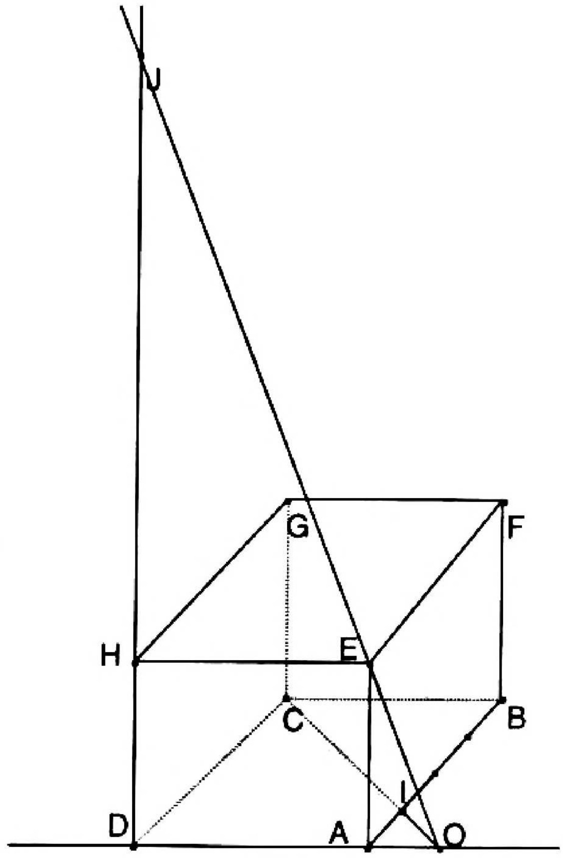
1) $\left.\begin{array}{l} h(A)=A \\ h(B)=C \end{array}\right\} \Rightarrow h([AB])= [AC]$

$\Rightarrow$ h transforme la sphère de diamètre [AB] en la sphère de diamètre [AC]$\Rightarrow$h(S)= S'.

2) $\Delta \cap S = \{A , M\}$
on a $h(\Delta)=\Delta$ et h(s)=s'
d'ou $\Delta \cap S' = \{h(A) , h(M)\} = \{A , h(M)\}$
or $\Delta \cap S' = \{A , N\} \Rightarrow h(M)=N$

$\left.\begin{array}{l} h(B)=C \\ h(M)=N \end{array}\right\} \Rightarrow$ (BM)//(CN)

Exercice 38:



$3\vec{IA}+\vec{IB}=\vec{0} \Rightarrow \vec{AI} = ¼\,\vec{AB}$

1) on a: h(A)=D$\Rightarrow$H((AI)) est la droite passant par D et // à (AI)$\Rightarrow$ H((AI))=(AC)
D'autre part h de centre O$\Rightarrow$h((OI))=(OI)
$\Rightarrow$h(I)=h[(OI)$\cap$(AI)]=(AC)$\cap$(OI)=C
h(A)=D et h(I)=C $\Rightarrow$h est de rapport k=DC/AI= AB/AI= 4

2) $(OE)\cap$ plan(CDHG)= {J}

soit $E' = h(E) \Rightarrow E' \in (OE)$

l'image du plan(ABFE) par h est le plan passant par h(A)=D et qui lui est parallèle.

D'où L'image du (ABFE) par h est le plan (CDHG)

$E\in$ plan(ABFE)$\Rightarrow E'\in$ plan(CDHG)

D'où E' = (OE) $\cap$ le plan (CDHG) $\Rightarrow$E'=J

Conclusion : h(E)=J

$\left.\begin{array}{l} h(A) = D \\ h(E) = J \end{array}\right\} \Rightarrow (DJ)//(AE)$ or $(AE)//(DH)$

D'où (DJ)//(DH) Par suite D, H et J sont alignés.

3) P//(IED) et J$\in$P

L'image du plan (IED) par h est le plan passant par h(E) =J et qui lui est parallèle. D'ou H((IED))=P

La droite (AD) perce le plan (IED) en D d'où (AD) perce P en le point k=h(D) Car h ((AD)) = (AD)

$\left\{\begin{array}{l} h(A) = D \\ h(D) = K \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{OK} = 4\overrightarrow{OD} \\ \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OA} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ OK=4.OD et OD= 4.OA

$\Rightarrow OD^2 = OA.OK$

<u>Exercice 39</u> :(figure sur manuel s)

$\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IA}$

$h_{(I,\frac{1}{3})}(E) = M$

$h_{(I,\frac{1}{3})}(H) = N$

$\left.\begin{array}{l} 1)\overrightarrow{IA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB} \Rightarrow h(B) = A \\ h(E)=M \text{ et } h(H)=N \end{array}\right\} \Longrightarrow$

h(BEH)= (AMN) or (BEH)=(BCE)

d'où $h((BCE)) = (AMN)$

2) Soit C'=h(C)

On a : $C' \in (AMN)$ et $C' \in (IC)$ d'où $C' = P$

$\Rightarrow$h(C) =P

$\Rightarrow \overrightarrow{IP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IP}}$

L'image de la droite (BC) par h est la droite passant par h(B)=A et parallèle à (BC)

$\Rightarrow h((BC)) = (AD)$

$C \in (BC) \Rightarrow h(C) \in (AD) \Rightarrow P \in (AD)$

3) Dans le repère o.n.d $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB};\frac{1}{a}\overrightarrow{AD};\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right.$

$\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}a \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}a \\ 0 \\ \frac{1}{3}a \end{pmatrix}; \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V = \frac{1}{3}\left\|(\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AM}).\overrightarrow{AI}\right\| = \frac{1}{54}a^3$

Exercice N° 40 :

$$\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' - 3y - 3 \\ z' = 3z - 4 \end{cases}$$

1) M(x,y,z) est un point invariant par f ssi

$$\begin{cases} x=3x-2 \\ y=3y-3 \\ z=3z-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3/2 \\ z=2 \end{cases}$$

f est l'homothétie et de centre I $\left(1, \frac{3}{2}, 2\right)$ et de

rapport k=3

2) Pour x=0, y=0 , z=0 on obtient

x'=-2 ; y'=-3 et z'=-4

D'où J(-2,-3,-4)

3) P : x-y + z = 0

Q=f(P) ⇒ Q//P (f : homothétie)

$O \in P \rightarrow J \in Q$

D'où :

Q est le plan passant par J et parallèle à P.

Q : x – y + z + d = 0

$J \in Q \rightarrow -2 + 3 - 4 + d = 0 \rightarrow d = 3$

D'où Q : x-y + z+3 = 0

Q C M

1. a/ La probabilité de B sachant A est 0,1

   b/ La probabilité de $\overline{A}\cap\overline{B}$ est égale à 0,1x0,1 = 0,01

   c/ La probabilité de A sachant B

est : $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B\cap A)}{P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})}=\dfrac{0,09}{0,09+0,09}=0,5$

2. Si X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,1
   Alors $P(X>10)=e^{-0,1\times10}=e^{-1}\approx 0,37$

3. $P(X>2)=P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0=\left(\frac{1}{3}\right)^3$

VRAI-FAUX

1. Faux
   Justification : si A et B sont indépendants alors $P(A\cap B)=P(A).P(B)$
   Or $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\neq P(A)+P(B)$ dès que P(A) et P(B) non nuls
   (contre exemple pour $A=B=\Omega$)
2. Faux justification : contre exemple pour $A=B=C=\Omega$
3. Faux en effet $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-(0,8)^8$
4. Faux (justification : les épreuves ne sont pas identiques)
5. vrai $\forall\, c\in[0\,;\,0{,}0000001]\quad p(c)=0$

EX 1 :

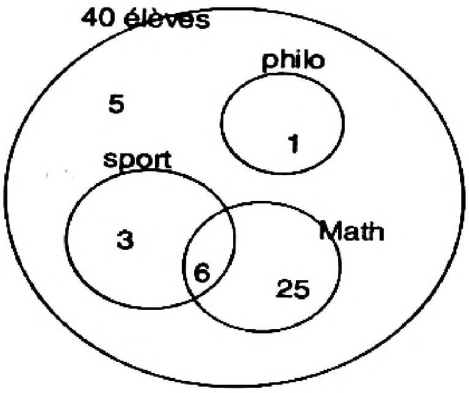
1. *Le nombre des boules est : 1+2+ 3+…+9=9.$\frac{1+9}{2}$ =45 (somme de 9 termes Consécutifs d'une suite arithmétique)*
2. *a/ Le nombre des boules de numéros pair est 2+4+6+8=20*

   La probabilité que les deux numéros soient pairs est : $\frac{C_{20}^{2}}{C_{45}^{2}}=\frac{190}{990}=\frac{19}{99}$

   b/ P(la somme de deux numéros obtenus ≥3) = 1 (événement certain)

   c/ $P(S\leq 15)=1-P(S>15)=1-\left(\frac{7\times 9}{990}+\frac{C_{17}^{2}}{990}\right)$
3. $P(1983)=\frac{1}{45}.\frac{9}{44}.\frac{8}{43}.\frac{3}{42}$ *et* $P(1389)=\frac{1}{45}.\frac{3}{44}.\frac{8}{43}.\frac{9}{42}$ donc P(1983)=P(1389)
4. $P(1983)=\frac{1}{45}.\frac{9}{45}.\frac{8}{45}.\frac{3}{45}$ *et* $P(1389)=\frac{1}{45}.\frac{3}{45}.\frac{8}{45}.\frac{9}{45}$ donc P(1983)=P(1389)

EX 2 :



1. P(l'élève aime les trois matières)=0
2. P(l'élève aime les math et n'aime pas le sport)=$\frac{25}{40}$
3. P(l'élève n'aime pas la philo et les math)=$\frac{8}{40}$
4. P(l'élève n'aime pas les trois matières)=$\frac{5}{40}$
5. P(l'élève aime au moins une matière)= 1- P(l'élève n'aime pas les trois matières)=1-$\frac{5}{40}$

EX 3 :

1. $\frac{C_{80}^{3}}{C_{100}^{3}}=\frac{82160}{161700}=\frac{4108}{8085}\approx 0,5$
2. $\frac{C_{80}^{2}.C_{20}^{1}}{C_{100}^{3}}=\frac{3160.20}{161700}=\frac{632}{1617}$
3. $\frac{C_{80}^{1}.C_{20}^{2}}{C_{100}^{3}}$
4. $\frac{C_{20}^{3}}{C_{100}^{3}}$
5. $1-\frac{C_{20}^{3}}{C_{100}^{3}}$

EX 4:

P(M)= 80% =0,8 ; P(S/M)=75%=0,75 ; $P(S/\overline{M})$=40%=0,4
P(S) = P(S/M).P(M)+$P(S/\overline{M}).P(\overline{M})$= 0,75 x 0,8 + 0,4 x 0,2 =0,68

EX 5:

1. a/ P(interroger une femme ingénieur)=P(F∩I)=P(F/I).P(I)=40% .10%=0,04
   b/ P(interroger un homme tec)=P(H∩T)=P(H/T).P(T)=10% . 80% =0,08
   c/ P(interroger une femme administratif)=P(F∩A)
   On a P(F)= P(F∩I)+ P(F∩T)+ P(F∩A)⇒ P(F∩A)= P(F)- P(F∩I)- P(F∩T)
   (P(F∩T)=P(F/T).P(T)=90% . 80% =0,72) =0,8 - 0,04 - 0,72 = 0,04

2. a/ P(T/F) = $\frac{P(T\cap F)}{P(F)}=\frac{0,72}{0,8}$=0,9
   b/ P(I/F) = $\frac{P(I\cap F)}{P(F)}=\frac{0,04}{0,8}=0,05$
3. a/ P(F/I) = $\frac{P(F\cap I)}{P(I)}=\frac{0,04}{0,1}=0,4$
   b/ P(H/I) = 1- P(F/I) = 1- 0,4 =0,6

EX 6 :

1. $P(S)=\frac{1200}{2000}=\frac{3}{5}=0{,}6$
2. a/ $P(C\cap S)=P(C/S).P(S)=0{,}32\,.\,0{,}6=0{,}192$

   b/ $P(C)=P(C\cap S)+P(C\cap\overline{S}) \Rightarrow P(C\cap\overline{S})=P(C)-P(C\cap S)$

   $\Rightarrow P(C\cap\overline{S})=\frac{960}{2000}-0{,}192=0{,}48-0{,}192=0{,}288$

   La probabilité pour que le client ait acheté le modèle B et choisi l'abonnement II est : $P(\overline{C}\cap\overline{S})=P(\overline{S})-P(C\cap\overline{S})=0{,}4-0{,}288=0{,}112$

EX 7 :

1. $p(C/P)=\frac{C_6^2+C_2^2}{C_8^2}=\frac{15+1}{28}=\frac{4}{7}$; $p(D/P)=\frac{C_4^2+C_4^2}{C_8^2}=\frac{6+6}{28}=\frac{3}{7}$

   $p(B/P)=p(C\cap D/P)=\frac{C_3^2+C_3^2}{C_8^2}=\frac{3+3}{28}=\frac{3}{14}$

   $p(A/P)=p(C\cup D/P)=p(C/P)+p(D/P)-p(C\cap D/P)=\frac{11}{14}$

2. $p(A/F)=p(C\cup D/F)=p(C/F)+p(D/F)-p(C\cap D/F)$

   $=p(C/F)+p(D/F)-p(B/F)$

   Or $p(C/F)=\frac{A_6^2+A_2^2}{A_8^2}=\frac{30+2}{56}=\frac{4}{7}$; $p(D/F)=\frac{A_4^2+A_4^2}{A_8^2}=\frac{12+12}{56}=\frac{3}{7}$

   et $p(B/F)=\frac{A_3^2+A_3^2}{A_8^2}=\frac{6+6}{56}=\frac{3}{14}$ Donc $p(A/F)=\frac{11}{14}$

   $p(A)=p(A/F).p(F)+p(A/P).p(P)=\frac{11}{14}.\frac{8}{15}+\frac{11}{14}.\frac{7}{15}=\frac{11}{14}$

EX 8 :

Désignons par A l'événement : << la cible est atteinte>>

$$P(Y/A)=\frac{P(Y\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A\cap Y)}{P(A)}=\frac{P(A/Y).P(Y)}{P(A/Y).P(Y)+P(A/X).P(X)}$$

$$=\frac{\frac{4}{10}.\frac{2}{3}}{\frac{4}{10}.\frac{2}{3}+\frac{9}{10}.\frac{1}{3}}=\frac{8}{17}$$

EX 9 :

Soit I l'évènement :<< le total des points obtenues est≤7>> $\Rightarrow P(I)=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$

1. Désignons par E l'évènement <<Obtenir 2 boules blanches et 2 b rouges>>

$$P(E)=P(E/I).P(I)+P(E/\bar{I}).P(\bar{I})=\frac{A_3^2 \cdot A_5^2}{A_8^4}.\frac{4!}{2!2!}.\frac{7}{12}+\frac{A_7^2 \cdot A_5^2}{A_{12}^4}.\frac{4!}{2!2!}.\frac{5}{12}=\frac{1}{4}+\frac{35}{198}=\frac{169}{396}$$

2. Désignons par R l'évènement <<n'obtenir que des boules rouges>>

$$P(R)=P(R/I).P(I)+P(R/\bar{I}).P(\bar{I})=\frac{A_5^4}{A_8^4}.\frac{7}{12}+\frac{A_5^4}{A_{12}^4}.\frac{5}{12}=\frac{109}{2376}$$

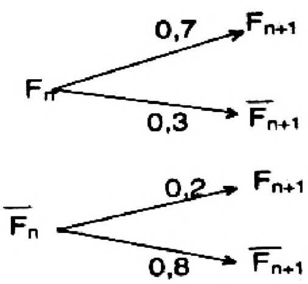
3. $P(\bar{I}/R)=\frac{P(\bar{I}\cap R)}{P(R)}=)\frac{P(R\cap\bar{I})}{P(R)}=\frac{2376}{109}.P(R/\bar{I}).P(\bar{I})=\frac{2376}{109}.\frac{A_5^4}{A_{12}^4}.\frac{5}{12}=\frac{10}{109}$

EX 10 : P_n :<<les deux amies arrivent avec n jours d'écart>>

1. P(les deux amies arrivent le même jour) $=P_0=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$.
2. P(les deux amies arrivent avec un jour d'écart)$=P_1=\frac{14}{64}=\frac{7}{32}$
3. P(les deux amies puissent se rencontrer)$=P(R)=P_0+P_1+P_2$
$$=\frac{1}{8}+\frac{7}{32}+\frac{12}{64}=\frac{34}{64}=\frac{17}{32}$$
4. P(les deux amies passent ensembles au moins 2 jours/ R)$=\frac{P_0+P_1}{P(R)}=\frac{11}{17}$

EX11 :

1.

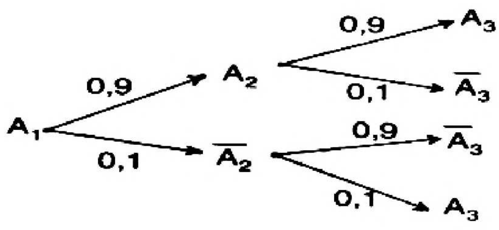


$P(F_{n+1}/F_n)=0,7$; $P(\overline{F_{n+1}}/F_n)=0,3$; $P(F_{n+1}/\overline{F_n})=0,2$; $P(\overline{F_{n+1}}/F_n)=0,8$

2. $P_{n+1}=P(F_{n+1})=P(F_{n+1}/F_n).P(F_n)+P(F_{n+1}/\overline{F_n}).P(\overline{F_n})$ (P .P. Totale)
$$= 0,7 \,.\, p_n + 0,2 \,.\, (1-p_n)$$
$$=0,5.p_n+0,2$$
3. a. $a_{n+1}=p_{n+1}-0,4=0,5p_n+0,2-0,4=0,5p_n-0,2=0,5(p_n-0,4)=0,5.a_n$
Donc a_n est une suite géométrique de raison 0,5 donc de limite 0
b. Lim $a_n=0$ (car sa raison $\in$]-1,1[ )
$\Longrightarrow$ Lim $p_n=0,4$ interprétation: La probabilitée pour que cet individu Reste enfin un fumeur est 0,4

EX 12 :

1. $P_1=P(A_1)=1$; $P_2=P(A_2)=0,9$
2.



$P_3=P(A_3)=P(A_3/A_2).P(A_2)+P(A_3/\overline{A_2}).P(\overline{A_2})=0,9\times0,9+0,1\times0,1=0,82$

3. $P_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_{n+1}/A_n).P(A_n)+P(A_{n+1}/\overline{A_n}).P(\overline{A_n})=0,9\times P_n+0,1\times(1-P_n)$
$=0,8\times P_n+0,1$
4. Considérons la suite $a_n = p_n +\alpha$
$a_{n+1}=p_{n+1} +\alpha =0,8\times p_n+0,1+\alpha=0,8.(p_n+\dfrac{0,1+\alpha}{0,8})$ si on choisi α de sorte que
$\dfrac{0,1+\alpha}{0,8}=\alpha$ on aura a_n suite géométrique de raison 0,8
Donc pour $\alpha=-1/2$ a_n suite géométrique de raison 0,8 $a_n=a_1\times(0,8)^{n-1}$
$a_n=1/2\times(0,8)^{n-1}$ $p_n=a_n-\alpha$ $p_n= 1/2\times(0,8)^{n-1}+1/2$
Conclusion : $p_n= 1/2\times(0,8)^{n-1}+1/2$ ☺
5. $P_{20}= 1/2\times(0,8)^{19}+1/2$
6. $\lim P_n=\lim 1/2\times(0,8)^{n-1}+1/2=1/2$

EX 13:

1.

	1	1	1	2	2	3
1	2	2	2	3	3	4
1	2	2	2	3	3	4
1	2	2	2	3	3	4
2	3	3	3	4	4	5
2	3	3	3	4	4	5
3	4	4	4	5	5	6

$X(\Omega)=\{2,3,4,5,6\}$

Loi de probabilité de X:

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	9/36	12/36	10/36	4/36	1/36

2. $E(X)=\sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i P(X=x_i)=10/3$ $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1,1111$

3. Pour $x\in]-\infty\ ;2[$ $F(x)=0$
   Pour $x\in [2\ ;3[$ $F(x)=9/36$
   Pour $x\in [3\ ;4[$ $F(x)=21/36$
   Pour $x\in [4\ ;5[$ $F(x)=31/36$
   Pour $x\in [5\ ;6[$ $F(x)=35/36$
   Pour $x\in [6\ ;+\infty[$ $F(x)=1$
   (courbe de f en escalier : très simple)

EX 14 :

$X(\Omega)=\{1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;5\ ;6\ ;7\}$

$P(X=1)=4/10$; $P(X=2)=\frac{6}{10}.\frac{4}{9}$; $P(X=3)=\frac{6}{10}.\frac{5}{9}.\frac{4}{8}$; $P(X=4)=\frac{6}{10}.\frac{5}{9}.\frac{4}{8}.\frac{4}{7}$

$P(X=5)=\frac{6}{10}.\frac{5}{9}.\frac{4}{8}.\frac{3}{7}.\frac{4}{6}$; $P(X=6)=\frac{6}{10}.\frac{5}{9}.\frac{4}{8}.\frac{3}{7}.\frac{2}{6}.\frac{4}{5}$; $P(X=7)=\frac{6}{10}.\frac{5}{9}.\frac{4}{8}.\frac{3}{7}.\frac{2}{6}.\frac{1}{5}.\frac{4}{4}$

Loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	84/210	56/210	35/210	20/210	10/210	4/210	1/210

$E(X)=\sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i P(X=x_i)=2,2$; $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1,76$

EX 15 :

$X(\Omega)=Y(\Omega)=\{1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;5\ ;6\}$

Loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Loi de probabilité de Y :

y_i	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y_i)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

$E(X)=\sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i P(X=x_i)\approx 4,472222$ $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2\approx 1,97145$

$E(Y)=\sum_{y_i\in Y(\Omega)} y_i P(Y=y_i)\approx 2,52777$ $V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2\approx 1,97145$

EX 16 : Désignons par X la variable Aléatoire égal au nombre de fois où on obtient face. X suit une loi binomiale de paramètres n=20 et p=1/2

1. Le nombre moyen de faces obtenus est :E(X)=n.p=20×1/2=10
2. P(X=10)= $C_{20}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10}=C_{20}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}=\frac{184756}{1048576}=\frac{46189}{262144}$
3. P(9≤X≤11)= $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}.\left[C_{20}^{9}+C_{20}^{10}+C_{20}^{11}\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^{20}.\left[2.C_{20}^{9}+C_{20}^{10}\right]$
4. P(8≤X≤12)= $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left[C_{20}^{8}+C_{20}^{9}+C_{20}^{10}+C_{20}^{11}+C_{20}^{12}\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left[2C_{20}^{8}+2.C_{20}^{9}+C_{20}^{10}\right]$
5. P(7≤X≤13)= $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left[2.C_{20}^{7}+2C_{20}^{8}+2.C_{20}^{9}+C_{20}^{10}\right]$

EX 17 :

La moyenne E= 0,1×400=40

L'écart type $\sigma=\sqrt{(0,1)\times(400)\times(0,9)}=\sqrt{36}=6$

EX 18 :

1. P(aucune face rouge ne soit visible)=0
2. P(aucune face bleue ne soit visible)= $\left(\frac{1}{4}\right)^{3}$
3. P(A)= $\left(\frac{2}{4}\right)^{3}=\frac{1}{8}$
4. $p_n=C_n^1.\frac{1}{8}.\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}=n.\frac{7^{n-1}}{8^n}$

EX 19 :

1. $p(A_2)$=p(pair ;pair)+p(impair ;impair)= $\frac{3}{6}.\frac{3}{6}+\frac{3}{6}.\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
2. $p(A_3)=p(A_2$;pair)+p($\overline{A_2}$;impair)= $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
3. Supposons que $p(A_n)=1/2$ et montrons que $p(A_{n+1})=1/2$

   $P(A_{n+1})=p(A_n$;pair)+p($\overline{A_n}$;impair)= $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

   Conclusion : $p(A_n)=½$ pour tout entier naturel non nul n

EX 20 :

1. a/ $p(\ll AA \gg) = p(A,A) = \frac{2}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

   b/ $p(\ll Aa \gg) = p(A,a) = \frac{2}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2. a/ $p(\ll AA \gg) = p(A,A) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

   b/ $p(\ll Aa \gg) = p(A,a) + p(a,A) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

   c/ $p(\ll aa \gg) = p(a,a) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3.

	$n^{ième}$ génération		$(n+1)^{ième}$ génération
Père mère	AA AA	1	AA → $1.p_n.p_n = p_n^2$
Père mère	AA Aa	1/2 1/2	AA → $\frac{1}{2}.p_n.q_n$ Aa → $\frac{1}{2}.p_n.q_n$
Père mère	Aa AA	1/2 1/2	AA → $\frac{1}{2}.p_n.q_n$ Aa → $\frac{1}{2}.p_n.q_n$
Père mère	AA aa	1	Aa → $1.p_n.r_n$
Père mère	aa AA	1	Aa → $1.p_n.r_n$
Père mère	Aa Aa	1/4 1/2 1/4	AA → $\frac{1}{4}.q_n^2$ Aa → $\frac{1}{2}q_n^2$ aa → $\frac{1}{4}.q_n^2$
Père mère	Aa aa	1/2 1/2	Aa → $\frac{1}{2}.r_n.q_n$ aa → $\frac{1}{2}.r_n.q_n$
Père mère	aa Aa	1/2 1/2	Aa → $\frac{1}{2}.r_n.q_n$ aa → $\frac{1}{2}.r_n.q_n$
Père mère	aa aa	1	aa → $1.r_n.r_n$

a/ $p_{n+1}=p(AA)=p_n^2+1/2.p_n.q_n+1/2.p_n.q_n+1/4.q_n^2=\left(p_n+\frac{q_n}{2}\right)^2$

b/ $r_{n+1}=p(aa)=r_n^2+1/2.r_n.q_n+1/2.r_n.q_n+1/4.r_n^2=\left(r_n+\frac{q_n}{2}\right)^2$

c/ On a $p_{n+1}+q_{n+1}+r_{n+1}=1$ $q_{n+1}=1-p_{n+1}-r_{n+1}=1-\left(p_n+\frac{q_n}{2}\right)^2-\left(r_n+\frac{q_n}{2}\right)^2$

4. a/ (Par recurrence)

<u>Soit $n\in\mathbb{N}$:</u> supposons que et montrons que $p_{n+1}-r_{n+1}=\alpha$

$$p_{n+1}-r_{n+1}=\left(p_n+\frac{q_n}{2}\right)^2-\left(r_n+\frac{q_n}{2}\right)^2=p_n^2-r_n^2+p_nq_n-r_nq_n=(p_n-r_n).(p_n+r_n+q_n)$$

$$=(p_n-r_n).1=\alpha$$

Conclusion : pour tout n on a $\boxed{p_n-r_n=\alpha}$

b/ $2r_n+q_n=r_n+1-p_n=1+(r_n-p_n)=1-\alpha$

c/ $2r_n+q_n=1-\alpha$ $q_n=1-\alpha-2r_n$ $r_{n+1}=\left(r_n+\frac{1-\alpha-2r_n}{2}\right)^2=\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$

r_n est constante p_n est constante (car $p_n=\alpha+r_n$)

et q_n est constante (car $q_n=1-\alpha-2r_n$)

EX 21 :

1. P(au moins un billet gagnant)=1-P(aucun billet gagnant)

$$=1-\frac{C_{50}^2}{C_{100}^2}=1-\frac{1225}{4950}=\frac{149}{198}$$

2. a/ p_n=1-P(aucun billet gagnant)

$$=1-\frac{C_n^2}{C_{2n}^2}=1-\frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}}=1-\frac{\frac{n.(n-1)}{2}}{\frac{(2n-1).2n}{2}}=1-\frac{n-1}{4n-2}=\frac{3n-1}{4n-2}$$

b/ $p_1=\frac{3-1}{4-2}=1$ explication : si 2 billets seulement sont mises en vente et qu'un promeneur achète les deux billets alors il est certain qu'il ait au moins un billet gagnant.

c/ pour tout entier n non nul on a :

$$\left.\begin{array}{l} p_n-\frac{3}{4}=\frac{3n-1}{4n-2}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4.(2n-1)}\geq 0\Rightarrow p_n\geq\frac{3}{4} \\ p_n-1=\frac{3n-1}{4n-2}-1=\frac{-n+1}{4n-2}\leq 0\Rightarrow p_n\leq 1\end{array}\right\rangle\Rightarrow \frac{3}{4}\leq p_n\leq 1$$

3. a/ Soit X l'aléa numérique égale au nombre de fois où il obtient au moins un billet gagnant.

X suit une loi binomiale de paramètres n=3 et p=p_n=$\frac{3n-1}{4n-2}$

q_n =p(X≥1)=1-p(X=0)=1-$C_3^0\left(\frac{3n-1}{4n-2}\right)^0\left(1-\frac{3n-1}{4n-2}\right)^3=1-\left(\frac{n-1}{4n-2}\right)^3$

b/ $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{n-1}{4n-2}\right)^3=1-\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{63}{64}$

EX 22 :

1. Soit X l'aléa numérique égale au nombre de billets gagnants .

X suit une loi binomiale de paramètres n=n et p=0,01.

P(A)=P(X≥1)=1-P(X=0)=1- $C_n^0(0,01)^0.(0,99)^n=1-(0,99)^n$

2. P(A)>0,5⇔1-$(0,99)^n$>0,5⇔$(0,99)^n$<0,5 ⇔Ln($(0,99)^n$) <Ln(1/2)

⇔n.Ln(0,99)<-Ln(2) ⇔n. >-$\frac{Ln(2)}{Ln(0,99)}\approx 68,96$

Conclusion : il faut qu'il achète au moins 69 billets

EX 23 :

1. p_n=$\frac{C_n^1.C_{2n}^2}{C_{3n}^3}=\frac{n.\frac{2n!}{2!(2n-2)!}}{\frac{3n!}{3!(3n-3)!}}=\frac{n.(2n-1).n}{\frac{(3n-2).(3n-1).n}{2}}=\frac{2n.(2n-1)}{(3n-2).(3n-1)}$

Lim p_n=4/9 donc p=4/9

2. q_n=1-P(aucune boule rouge)

=1-$\frac{C_{2n}^3}{C_{3n}^3}=1-\frac{\frac{2n!}{3!(2n-3)!}}{\frac{3n!}{3!(3n-3)!}}=1-\frac{\frac{(2n-2).(2n-1).2n}{6}}{\frac{(3n-2).(3n-1).3n}{6}}=1-\frac{(2n-2).(2n-1).2}{(3n-2).(3n-1).3}$

Limq_n =Lim1-$\frac{2.(2n-1).(2n-2)}{3.(3n-1).(3n-2)}=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}\Rightarrow q=\frac{19}{27}$

3. a/

P(obtenir une seule b rouge)=$\left(\frac{n}{3n}.\frac{2n}{3n}.\frac{2n}{3n}\right).3=\frac{4}{9}=p$

P(obtenir une seule boule rouge)=p

b/ P(obtenir au moins une boule rouge)=1-P(n'obtenir aucune b rouge)

=1-$\left(\frac{2n}{3n}\right)^3=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$= q

EX 24 :

1. a/ P(X=1)=1/n

b/ P(X=2)=$\frac{n-1}{n}.\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$

c/ Loi de probabilité de X :

x_i	1	2	...	i	......	n
$P(X=x_i)$	1/n	1/n	...	1/n	....	1/n

d/ E(X)= (1+2+...+n).1/n $=\frac{1+n}{2}$

V(X)= E(X²)-[E(X)]²

$$=\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{(1+n)^2}{4}=\frac{1}{n}.\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(1+n)^2}{4}=\frac{.(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(1+n)^2}{4}=\frac{n^2-1}{12}$$

2. a/ P(Y=1)=1/n

b/ P(Y=n-1)=$\frac{n-1}{n}.\frac{n-2}{n-1}.\frac{n-3}{n-2}....\frac{2}{3}.\frac{2}{2}=\frac{2}{n}$

c/ Loi de probabilité de Y :

y_i	1	2	...	i	......	n-1
$P(Y=y_i)$	1/n	1/n	...	1/n	....	2/n

d/ E(Y)= (1+2+...+(n-2)).1/n +(n-1).2/n $=\frac{(n-1)(n+2)}{2n}$

V(Y)= E(Y²)-[E(Y)]²= $\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\frac{(n-1)^2}{n}-\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2n}\right]^2=$

$$=\frac{n^4+24n^3-61n^2+48n-12}{12n^2}$$

EX 25 :

1. Soit p le nombre de fois où face apparaît p+2 est le nombre de fois Où pile apparaît le nombre des lancers est p+p+2=2.(p+1) pair

2. P(le joueur gagne au plus au bout de 2 lancers)=P(pile ;pile)=$\frac{5}{12}.\frac{5}{12}=\frac{25}{144}$

3. P(le joueur gagne au plus au bout de 4 lancers)=
p(gagne au bout de 2 lancers)+P(gagne au bout de 4 lancers)=

$$\frac{25}{144}\qquad +C_4^1.\left(\frac{5}{12}\right)^3.\left(\frac{7}{12}\right)^1$$

4. Soit n un entier naturel pair alors n=2p

P(le joueur gagne au plus au bout de n lancers)=$\sum_{k=1}^{p}C_{2k}^{k+1}.\left(\frac{5}{12}\right)^{k+1}.\left(\frac{7}{12}\right)^{k-1}$

5. P(le joueur gagne au plus au bout de 20 lancers)=$\sum_{k=1}^{10}C_{2k}^{k+1}.\left(\frac{5}{12}\right)^{k+1}.\left(\frac{7}{12}\right)^{k-1}$

EX 26 :

1. P(x=0,1)=P(x=0,0005)=P(x=0,99999)=0
2. P(x∈ [0,5 ;1]= $\frac{1-0,5}{1-0}=0,5$ (Loi uniforme)
3. P(x∈ [0,001 ;0,002]= $\frac{0,002-0,001}{1-0}=0,001$
4. P(x<0,99999)= $\frac{0,99999-0}{1-0}=0,99999$
5. P(x>0,99999)=1- P(x<0,99999) =0,00001

EX 27 :

1. P(2<X<5)= $\frac{5-2}{20-0}=\frac{3}{20}$ (Loi uniforme)
2. P(10<X<13)= $\frac{13-10}{20-0}=\frac{3}{20}$
3. P(x= 3)=0
4. P(X<3)=P(0<X<3)= $\frac{3-0}{20}=\frac{3}{20}$
5. P(X>3)=1- P(X<3)=1-P(0<X<3)=1- $\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$

EX 28 :

1. a/ P(X=10)=0
   b/ P(X<10)=1-$e^{-0,2\times10}$=1-e^{-2}
   c/ P(X>10)=1-P(X<10)=e^{-2}
2. P(X≤c)=P(X≥c)⟺1-$e^{-0,2\times c}$= $e^{-0,2\times c}$⟺ $e^{-0,2\times c}$ =1/2⟺-0,2.c=-Ln(2)⟺c=5.Ln(2)

EX 29 :

1. P(5<d .d.vie<8)=$e^{-0,0005\times5}$ −$e^{-0,0005\times8}$ =$e^{-0,0025}$ −$e^{-0,004}$
2. P(d.d.vie>5)= $e^{-0,0005\times5}$ =$e^{-0,0025}$
3. P(d.d.vie>8)= $e^{-0,0005\times8}$ =$e^{-0,004}$

EX 30 :

1. P(X≤1)=1-$e^{-1,5\times1}$ =1-$e^{-1,5}$=0,777
   P(X≥2)=$e^{-1,5\times2}$ =e^{-3} =0,050
   P(1≤X≤2)= $e^{-1,5\times1}$- $e^{-1,5\times2}$= $e^{-1,5}$- e^{-3}=0,173
2. Désignons par A l'évènement :<<Le cylindre est accepté>>
   a/ P(A)=P(A/X≤1). P(X≤1)+P(A/1≤X≤2). P(1≤X≤2)
   = 1 . 0,777 + 0,8 . 0,173=0,9154
   b/ P(R/A)=P(1≤X≤2/A)= $\frac{P(R\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A\cap R)}{0,9154}=\frac{P(A/R).P(R)}{0,9154}$
   $=\frac{0,8\times P(1\le X\le 2)}{0,9154}=\frac{0,8\times0,173}{0,9154}=0,151$

EX 31:

1. $P(X>6)=0,3 \Leftrightarrow e^{-\lambda\times 6}=0,3 \Leftrightarrow -6\lambda=Ln(0,3) \Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{Ln(0,3)}{6}=0,2$

2. 1 mois≈0,8 Année

   $P(t<X<t+0,08)=0,5 \Leftrightarrow e^{-0,2t}-e^{-0,2(t+0,08)}=0,5$

   $\Leftrightarrow e^{-0,2t}.(1-e^{-0,016})=0,5$

   $\Leftrightarrow e^{-0,2t}=\dfrac{0,5}{1-e^{-0,016}}$

   $\Leftrightarrow -0,2t=Ln(\dfrac{0,5}{1-e^{-0,016}})$

   $\Leftrightarrow t=-5.Ln(\dfrac{0,5}{1-e^{-0,016}})\approx 17,25$

   t=dix-sept ans et trios mois

3. La probabilité qu'une machine n'ait pas de panne au cours de deux Premières années de sa vie est : $P(X>2)=e^{-0,2\times 2}=e^{-0,4}$

4. Soit Y l'aléa numérique égal au nombre des machines ayant une durée de vie supérieure à deux ans .

   Y suit une loi binomiale de paramètres n=5 et $p=e^{-0,4}$

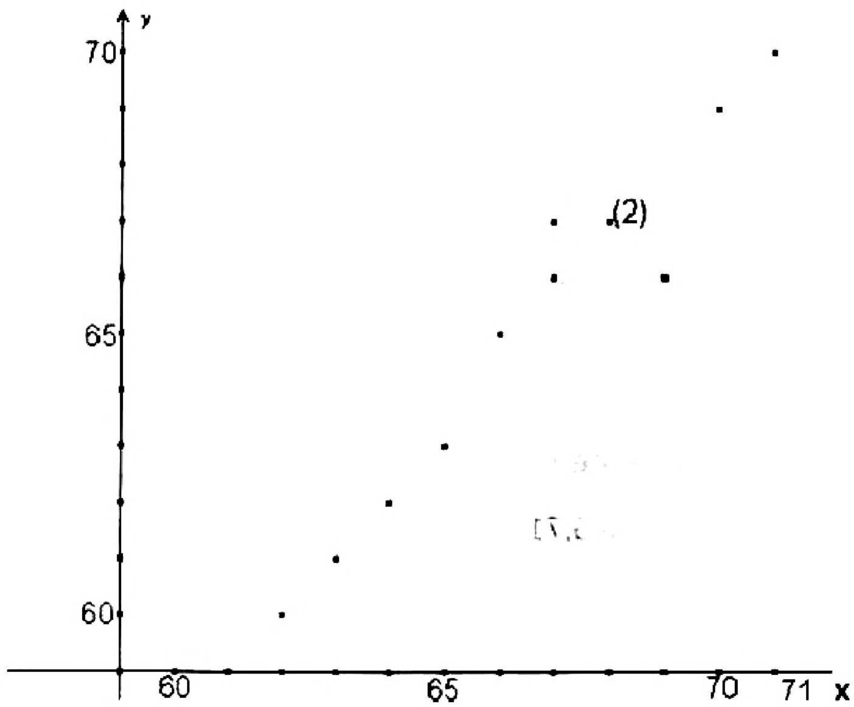
   La probabilité que dans ce lot il ait au moins une machine qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est :

   $P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-(e^{-0,4})^5=1-e^{-2}\approx 0,864$

EX 1 :

1. Le nuage de point ne justifie pas la recherche d'un ajustement affine.
2. Le nuage de point justifie la recherche d'un ajustement affine.
3. Le nuage de point justifie la recherche d'un ajustement affine.
4. Le nuage de point ne justifie pas la recherche d'un ajustement affine.

EX 2 : 1.



X_1	65	63	67	64	68	62
Y_1	63	61	66	62	67	60

X_2	70	66	68	67	69	71
Y_2	69	65	67	67	66	70

2. $\overline{X_1} = 64,833333$ $\qquad$ $\overline{X_2} = 68,5$

$\overline{Y_1} = 63,1666667$ $\qquad$ $\overline{Y_2} = 67,333333$

$$a = \frac{\overline{Y_2} - \overline{Y_1}}{\overline{X_2} - \overline{X_1}} = \frac{67,33333 - 63,166667}{68,5 - 64,83333} \approx 1,13636$$

67,33333=a.68,5+b $\qquad$ b=67,33333 - 1,13636 × 68,5≈-10,50757

D : y=1,13636.x -10,50757

3. X=77 $\quad$ y=1,13636.77 -10,50757=76,992

Conclusion : Le fils ainé d'un homme qui pèse 77Kg devrait avoir 77Kg

EX 3 :

1. Nuage de la série (X,Y) .
2. G(7,5 ; 6325,92857)
3.

X_1	1	2	3	4	5	6	7
Y_1	4425	4500	5099	5257	5344	5965	6177

$G_1(4;5252,42857)$

X_2	8	9	10	11	12	13	14
Y_2	6464	6819	7149	7444	7767	7964	8189

G_2(11 ;7399 ,42857)

$$a = \frac{7399,42857 - 5252,42857}{11-4} \approx 306,71428$$

5252,42857=a.4+b b=5252,42857 – 4.a≈ 4025,57142

D : y=306,71428.x + 4025,57142

4. Année 2010→x=21 y=306,71428×21 + 4025,57142≈10466,57

Conclusion :Le nombre des médecins estimés en 2010 est : 10467médecins

EX 4 : **(voir exercice résolu page 213)**

1. $a/\quad \overline{X} = 2,81 \qquad \sigma(X) \approx 0,924$

   $b/\quad \overline{Y} = 1,92 \qquad \sigma(Y) \approx 1,129$

2. a/ r≈0,618

   b/ on a : $|r| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc un ajustement affine de la série (X, Y) n'est pas justifier

EX 5 :

1. a/ Nuage des points

   b/ r= - 0,96

   c/ D : y=-0,07.x+1,89

   d/ x=23→ y=a.23+b≈0,32

EX 6 :

1. Nuage des points
2. $r \approx 0,896$
3. D : $y = 0,9.x + 49,1$
4. a/ $x=35 \rightarrow y=0,9.35+49,1=80,6$

   Une clinique possédant 35 lits doit embaucher 81 personnes

   b/ 81-60=21

EX 7 :

A/

Année	Rang (X)	Y	Z=Ln(Y)
1999	0	600	6,396
2000	1	690	6,537
2001	2	794	6,677
2002	3	913	6,817
2003	4	1045	6,952
2004	5	1207	7,096
2005	6	1380	7,230

1. a/ $r=0,99997 > \frac{\sqrt{3}}{2}$ Donc on peut réaliser un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de la série (X, Z)

   $Z=0,139.X+6,3976$

   b/ $2006 \rightarrow X=7 \rightarrow Z=0,139.7+6,3976 \approx 7,371428565 \rightarrow Y=1590$

   Une prévision du nombre d'adhérents en 2006 est : 1590 adhérents
2. On a $Z=0,139.X+6,3976$ $\quad Ln(Y)=0,139.X+6,3976$

   $Y = e^{0,139.X+6,3976} = e^{6,3976}.(e^{0,139})^X$

   $Y \approx 602 \times (1,15)^X$

B/

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3600}{1+0,5e^{-n}} = \frac{3600}{1+0} = 3600$
2. a/

Année	2007	2008	2009	2010	2011
n	1	2	3	4	5
f(n)	3040	3372	3512	3567	3587

b/ M=3415,6

3.

$$\overline{f}=\frac{1}{5,5-0,5}\int_{0,5}^{5,5}\frac{3600}{1+0,5.e^{-x}}dx=\frac{1}{5}\int_{0,5}^{5,5}\frac{3600e^{x}}{e^{x}+0,5.}dx=\frac{3600}{5}\int_{0,5}^{5,5}\frac{e^{x}}{e^{x}+0,5.}dx$$

$$=720.\left[Ln\left(e^{x}+0,5\right)\right]_{0,5}^{5,5}$$

≈720.(5,502 -0,765)≈3410,64

EX 8 :

1. a/ Nuage de points de la série (X,Y)

   b/ Un ajustement affine n'est pas justifier

2. a/ r≈0,7878

   b/ D : Y=0,3173 X -1,884

   c/ X=180→Y=0,3173 .180 -1,884≈55,235Kg

   La masse d'une jeune fille mesurant 180cm est estimé : 55,235Kg

3. a/ M= (180-100)- (180-130)/2 =55Kg

   b/ Le résultat de 2. c/ justifie la loi de Lorentz

EX 9 :

1. $\frac{12}{2}\neq\frac{20}{2,5}$ Donc les deux séries ne sont pas proportionnelles

2.

X	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
Y	12	20	28	38	50	64	78	95	113	133	154
Z= $\sqrt{Y}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{20}$									

a/ Nuage des points de la série (X,Z)

b/ ρ_{XZ}=0,999945 est très proche de 1

Donc Z est presque proportionnelle à X on peut faire donc un très bon ajustement affine entre Z et X

c/ D : Z=1,8.X

d/ Nous savons que : Aire= π.r²⇒ Y=π.X²⇒Z= $\sqrt{\pi}.X$

Z=1,8.X et Z= $\sqrt{\pi}.X$ ⇒π≈(1,8)² =3,24

EX 10 :

1. $\rho_{XY} \approx -0{,}9822$
2. $y = -0{,}3\,x + 226{,}5$
3. a/ $r(x)= y(x).x=(-0{,}3\,x + 226{,}5).x=(226{,}5-0{,}3x).x =- 0{,}3.x^2 +226{,}5.x$

   b/ $f(x) = - 0{,}3.x^2 +226{,}5.x \Rightarrow f'(x)=-0{,}6x +226{,}5$

x	0		377,5		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	$\nearrow$	42751,875	$\searrow$	$-\infty$

Le prix de vente pour lequel la recette est maximale est 377,5 DT

La recette maximale est : 42751,875 DT

EX 11 :

A/ 1 . r=0,989

2. a/ D : y=1,064.x +15,75

   b/ Tracer la droite D

   c/ 2008→x=33 →y=1,064x33+15,75=50,871⇒Une estimation de la population en 2008 à un millier prés est :51

B/ 1. $f(x)=a.e^{bx}$

$f(0)=18 \Rightarrow a=18$

$f(b)=50 \Rightarrow 18.e^{b.30} =50 \Rightarrow 30.b= \mathrm{Ln}(\frac{50}{18}) \Rightarrow b\approx 0{,}034$

2. $18.e^{0{,}034.33} \approx 55{,}2778 \Rightarrow$ Une estimation de la population en 2008 à un millier prés est :55

3. Courbe de f sur le même graphique

4. L'ajustement par la fonction exponentielle est plus pertinent.

Puisqu'il a donner une estimation plus proche de la réalité(en plus l'allure de la nuage permet de conclure que l'ajustement exponentielle est plus pertinent que l'ajustement affine)

C/ 1. $f(x)= 18.e^{0,034.x}$

$$\overline{f} = \frac{1}{30}.\int_0^{30} 18.e^{0.034.x}dx = \frac{18}{30}\left[\frac{1}{0,034}e^{0,034.x}\right]_0^{30} \approx 31,29158824 \approx 31,3$$

2 . Lecture graphique→X=16,2→L'Année 1991

EX 12 :

A/ 1. Nuage de points de (T,P)

2. a/ $\rho_{TY} \approx 0,999$

b/ $y=0,021.t+2,081$

c/ $y=0,021.t+2,081 \Rightarrow Ln(P)= 0,021.t+2,081 \Rightarrow P=e^{0,021.t+2,081} = e^{2,081}.e^{0,021.t}$

$$\Rightarrow P= 8.e^{0,021.t}$$

B/ $f(t)= 8.e^{0,02.t}$ sur [0,35]

1. $f'(t)= 0,16.e^{0,02.t} > 0$ sur [0,35]

t	0	35
f'(t)	+	
f(t)	8 ↗	f(35)≈16,11

3. a/

$$I = \int_0^{35} f(t)dt = \int_0^{35} 8.e^{0,02.t}dt = \left[400.e^{0,02.t}\right]_0^{35} = 400.(e^{0.7}-1) \approx 405,50$$

b/ $m= \frac{1}{35-0}.I = \frac{405,5}{35} \approx 11,586$

4. $$\frac{f(t+1)-f(t)}{f(t)} = \frac{8.e^{0.02(t+1)}-8.e^{0.02t}}{8.e^{0.02t}} = \frac{8.e^{0.02t}.(e^{0.02}-1)}{8.e^{0.02t}} = e^{0.02}-1 \approx 0,02$$

Interprétation en terme de pourcentage : Le tau d'accroissement de la population est :2%

5. f(t)>19 ⇔ $8.e^{0,02.t}$ >19 ⇔ 0,02.t > Ln(19/8)

⇔ t > 50.[Ln(19)-Ln(8)] ≈43,25

La population aurait dépassé les 19 millions d'habitants en 2009

EX 15 :

1. Nuage de points
2.

T	0	2	6	8	10	12
D	0,4	1,2	5,4	5 ,8	6,4	6,9
U	Ln(19)	Ln(17/3)	Ln(13/27)	Ln(11/27)	Ln(1/4)	Ln(11/69)

a/ $\rho_{TU} \approx -0,9679$

b/ u = -0,39974.t +2,503

c/

$$U = Ln\left(\frac{8}{D}-1\right) \Leftrightarrow \frac{8}{D}-1 = e^{U} \Leftrightarrow \frac{8}{D} = 1+e^{U}$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{8}{1+e^{U}} = \frac{8}{1+e^{-0,399.t+2,503}} = \frac{8}{1+e^{2,503}.e^{-0,399t}}$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{8}{1+c.e^{-a.t}} \qquad avec \quad c = e^{2,503} \ et \ a = 0,399$$

3. a/

b/ $\lim\limits_{t \to +\infty} D(t) = \frac{8}{1+0} = 8$

Donc le diamètre de la plante ne dépassera pas 8cm

BAC 2008 (session principale)

EX 1 :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1+e^{-x})=+\infty$

2) f est une solution de l'équation : y'=2y+2

3) $p(x\geq 10)=e^{-1}$

EX 2 :

$f(x)=\ln^3 x-3\ln x$

1) *a)* f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{e},e\right]$ elle réalise donc une bijection de $\left[\frac{1}{e},e\right]$ sur $f\left(\left[\frac{1}{e},e\right]\right)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),f(e)\right]=[-2,2]$

b) $(\zeta')=S_\Delta(\zeta)$ avec Δ:y=x

2) $a_n=\int_1^e(\ln x)^n dx$; $n\in\mathbb{N}^*$

a) $a_1=\int_1^e \ln x.dx=[x\ln x-x]_1^e=1$

b) $a_{n+1}=\int_1^e(\ln x)^{n+1}.dx$

soit

$U'(x)=1\rightarrow U(x)=x$

$V(x)=(\ln x)^{n+1}\rightarrow V'(x)=\frac{n+1}{x}(\ln x)^n$

$a_{n+1}=\left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^e-(n+1).\int_1^e(\ln x)^n dx$

$a_{n+1}=e-(n+1).a_n$

c) $a_3=e-3.a_2$

$a_2=e-2.a_1=e-2$

d'où $a_3=e-3(e-2)=6-2e$

3) A:l'aire de la partie du plan limitée par (ζ') et les droites d'équations x=-2 ,x=0 et y=0

a) $\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left((\ln x)^3-3\ln x\right)dx$

$=\int_1^e(\ln x)^3 dx-3\int_1^e\ln x.dx=a_3-3a_1=3-2e$

b) A représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (ζ) et les droites d'équations y=-2 , y=0 et x=0

d'où $A=2e+\int_1^e f(x).dx=2e+(3-2e)=3\ u.a$

EX 3 :

1) (E):3x-8y=5

(-1,-1) est une solution particulière de (E)

d'où (E) $\Leftrightarrow$ 3x-8y=3.(-1)-8.(-1)

$\Leftrightarrow$ 3(x+1)=8.(y+1) *

8 divise 3(x+1) et $8\wedge 3=1$

$\Rightarrow$ 8 divise x+1 $\Rightarrow$ x+1=8k ; $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ x=8k-1 ;$k\in\mathbb{Z}$

remplaçons dans (*) : 3(8k)=8(y+1) $\Rightarrow$ y+1=3k

$\Rightarrow$ y=3k-1 ;$k\in\mathbb{Z}$

vérification : 3(8k-1)-8(3k-1)=24k-3-24k+8=5

conclusion : les solutions de (E) sont :

les couples (x,y) telsque :

x=8k-1 et y=3k-1 avec $k\in\mathbb{Z}$

2) a) $\begin{cases}n=3x+2 & (1)\\ n=8y+7 & (2)\end{cases}$

$(1)-(2)\Rightarrow 3x+2-8y-7=0\Rightarrow 3x-8y=5$

d'où (x,y) est solution de (E)

b) * $\begin{cases}n\equiv 2[\text{mod}3]\\ n\equiv 7[\text{mod}8]\end{cases}$ $n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ il existe $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ tel que: $\begin{cases}n=2+3x\\ n=7+8y\end{cases}$

$\Rightarrow$ (x,y) est solution de (E)

d'aprés 2)a)

$\Rightarrow\begin{cases}n=2+3(8k-1)\\ n=7+8(3k-1)\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow n=-1+24k$

$\Rightarrow n\equiv -1[\text{mod}\,24]$ or $(-1)\equiv 23[\text{mod}\,24]$

d'où $n\equiv 23[\text{mod}\,24]$

*réciproquement :

$n\equiv 23[\text{mod}\,24]\Rightarrow n=23+24p$

$\Rightarrow n=2+21+24p$ et n=7+16+24p

$\Rightarrow\begin{cases}n=2+3(7+8p)\\ n=7+8(2+3p)\end{cases}$ $p\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases}n-2 \text{ est un multiple de } 3\\ \text{et}\\ n-7 \text{ est un multiple de } 8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n\equiv 2[\text{mod}3]\\ n\equiv 7[\text{mod}8]\end{cases}$

$\Rightarrow$ *n* est solution de (S)

conclusion : n est solutione de (S) ssi : $n\equiv 23[\text{mod}\,24]$

3) a) $k\in\mathbb{N}$

$2\equiv -1[\text{mod}3]\Rightarrow 2^{2k}\equiv(-1)^{2k}[\text{mod}3]\Rightarrow 2^{2k}\equiv 1[\text{mod}3]$

d'où le reste modulo 3 de 2^{2k} est 1

$* \ 7 \equiv -1[mod8] \Rightarrow 7^{2k} \equiv (-1)^{2k}[mod8]$

$\Rightarrow 7^{2k} \equiv 1[mod8]$

d'où le reste modulo 8 de 7^{2k} est égal à 1

b) $1991-2=1989=3\times 663$

$1991=3\times 663+2$ d'où $1991 \equiv 2[mod3]$

$* \ 1991 = 8\times 248 + 7 \Rightarrow 1991 \equiv 7[mod 8]$

par suite 1991 est une solution de (S)

* 1991 est solution de (S) $\Rightarrow 1991 \equiv 23[mod24]$

or $23 \equiv -1[mod24] \Rightarrow 1991 \equiv -1[mod24]$

$\Rightarrow 1991^{2008} \equiv (-1)^{2008}[mod24] \Rightarrow 1991^{2008} \equiv 1[mod24]$

$\Rightarrow 1991^{2008} - 1 \equiv 0[mod24]$

d'où $1991^{2008} - 1$ est divisible par 24

EX 4 :

$\begin{cases} f(A) = D \\ f(O) = C \end{cases}$

1) f est de rapport $\frac{DC}{AO} = \frac{2OB}{OA} = 2$

d'angle $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{DC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AO}, 2\overrightarrow{BO}\right)[2\pi]$

$\equiv \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}\right)[2\pi] \equiv \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

2) a) * OAB est isocéle en O et I=A * B

$\Rightarrow (OI) \perp (AB) \Rightarrow (OI) \perp (AD) \Rightarrow (CO) \perp (AD)$ (1)

* $(AO) \perp (OB)$ et (OB)//(CD) $\Rightarrow (AO) \perp (CD)$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ O est l'orthocentre du triangle ACD

b) * l'image de la droite (OJ) par f est la droite passant par f(O)=C et qui lui est perpendiculaire (car f d'angle $\frac{\pi}{2}$)

d'où $f((OJ)) = (AC)$

de meme : $f((AJ)) = (DO)$ car $(DO) \perp (AC)$ d'aprés2)a)

$(OJ) \cap (AJ)=\{J\} \Rightarrow f((OJ)) \cap f((AJ))=\{f(J)\}$

$\Rightarrow (AC) \cap (DO)=\{f(J)\} \Rightarrow f(J) = J$

d'où f est de centre J

3) $\begin{cases} g(I)=I \\ g(A)=D \end{cases}$

a) *g de rapport $\frac{DI}{AI} = \frac{2BI}{AI} = 2$

*g est de centre I et g(A)=D

d'où l'axe de g est la droite passant par I

et porte la bissectrice intérieure de $\left[\overline{IA}, \overline{ID}\right]$

comme $I \in [AD]$ alors l'axe de g est la perpendiculaire à (AD) en I

$\Rightarrow$ (IC) est l'axe de g

* $g=h_{(I,2)} \circ S_{(IC)}$

$g(O) = h_{(I,2)} \circ S_{(IC)}(O) = h_{(I,2)}(O) = C$

b) $g \circ f^{-1}(C)=g(O)=C$

$g \circ f^{-1}(D)=g(A)=D$

$g \circ f^{-1}$ est une similitude indirecte qui fixe deux points distincts d'où $g \circ f^{-1}$ est la symétrie orthogonale d'axe (CI

4) I'=f(I) et J'=g(J)

a) $g \circ f^{-1}(J)=g(J)=J'$

$g \circ f^{-1}(I')=g(I)=I$

b) $g \circ f^{-1}=S_{(CD)}$

$g \circ f^{-1}(J)=J' \Rightarrow S_{(CD)}(J)=J'$

$g \circ f^{-1}(I')=I \Rightarrow S_{(CD)}(I')=I \Rightarrow S_{(CD)}(I)=I'$

d'où $S_{(CD)}((IJ))=(I'J')$

(IJ) et (CD) ne sont pas paralléles

soit $\{\omega\}=(CD) \cap (IJ)$

$\omega \in (CD) \cap (IJ) \Rightarrow S_{(CD)}(\omega) \in (CD) \cap (I'J')$

$\Rightarrow \{\omega\}=(CD) \cap (I'J')$

d'où les droites (IJ) ; (I'J') et (CD) sont concourantes en ω

EX 5 :

A(1,0,2) ; B(0,0,1) ; C(0,-1,3)

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}0 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-1 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix}-1 & -1\\0 & -1\end{vmatrix}.\vec{k}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}x_E - x_A = -1\\ y_E - y_A = 2\\ z_E - z_A = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_E = x_A - 1\\ y_E = y_A + 2 \Rightarrow E(0,2,3)\\ z_E = z_A + 1\end{cases}$

b) $V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AE}\right| = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}\right| = \frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{AE}\right\|^2$

$V = \frac{1}{6}\left[(-1)^2 + 2^2 + 1^2\right] = 1$

2) P:x-2y-z+5=0

a) $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$: vecteur normal à P

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$: vecteur normal au plan (ABC)

$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{N}$

$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{N}$ sont colinéaires

d'où les plans P et (ABC) sont paralléles

b) $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

$\begin{cases}2(x_E - x_K) + (x_C - x_K) = 0\\ 2(y_E - y_K) + (y_C - y_K) = 0\\ 2(z_E - z_K) + (z_C - z_K) = 0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}-2x_K + 0 - x_K = 0\\ 2(2 - y_K) + -1 - y_K = 0\\ 2(3 - z_K) + 3 - z_K = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_K = 0\\ y_K = 1\\ z_K = 3\end{cases}$

$K(0,1,3)$

$*P : x - 2y - z + 5 = 0$

$0 - 2\times1 - 3 + 5 = -2 - 3 + 5 = 0$ d'où $K \in P$

3) $\begin{cases}h(E) = E\\ h(C) = K\end{cases}$

a) $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ d'où h est de rapport $\frac{1}{3}$

b) l'image du plan (ABC) par h est le plan passant par h(C)=K et qui lui est parallèle

d'où $h\left((ABC)\right)$=P

l'image du tetraèdre EABC par h est le tetraèdre EIJK

d'où volume(EIJK)=$\left(\frac{1}{3}\right)^3$.V(EABC)

$V' = \frac{1}{27}.V = \frac{1}{27}$

BAC 2008 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 :

1.
$$I=\int_1^e \frac{(Ln(x))^3}{x}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}(Ln(x))^4\right]_1^e=\frac{1}{4}$$

2. $I=+\infty$
3. $n\equiv 0 \pmod 7$.

EXERCICE 2 :

(E) : $z^3+(5+i)z^2+(10+2i)z+8=0$

1. a/ Soit $\alpha\in IR$;

α est une solution de (E) ssi

$\alpha^3+(5+i)\alpha^2+(10+2i)\alpha+8=0\Leftrightarrow$

$(\alpha^3+5\alpha^2+10\alpha+8)+i(\alpha^2+2\alpha)=0\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\alpha^3+5\alpha^2+10\alpha+8=0 & (1)\\ \alpha^2+2\alpha=0 & (2)\Rightarrow\alpha=0 \text{ ou } \alpha=-2\end{cases}$

Or $\alpha=0$ ne vérifie pas (1) et $\alpha=-2$ vérifie bien (1) Donc -2 est une solution réelle de l'équation(E).

b/ Soit $P(z)=z^3+(5+i)z^2+(10+2i)z+8$

on a $P(-2)=0$ donc

$P(z)=(z+2)(z^2+bz+c)$

$=z^3+(b+2)z^2+(c+2b)z+2c$

Par identification on aura :

$\begin{cases}b+2=5+i\\ c+2b=10+2i\\ 2c=8\end{cases}\Leftrightarrow b=3+i \quad \text{et } c=4$

$\Rightarrow P(z)=(z+2)(z^2+(3+i)z+4)$

(E)$\Leftrightarrow z+2=0$ ou $z^2+(3+i)z+4=0$

$z^2+(3+i)z+4=0$

$\Delta=-8+6i=(1+3i)^2\Rightarrow\delta=1+3i$

$Z'=-2-2i$ et $z''=-1+i$

$S_{\mathbb{C}}=\{-2;-2-2i;-1+i\}$

2. $f:M(z)\mapsto M'(z')/\ z'=(1+i).z$

a/ f est une similitude directe de rapport $|1+i|=\sqrt{2}$

d'angle $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

et de centre le point O.

b/ $M\neq O$

$*MM'=|z'-z|=|(1+i)z-z|=|iz|=|z|=OM$

Donc: $MM'=MO$ (1)

$*(\overrightarrow{MM'};\overrightarrow{MO})\equiv Arg\left(\frac{-z}{z'-z}\right)[2\pi]$

$\equiv Arg\left(\frac{-z}{i.z}\right)[2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{2}$

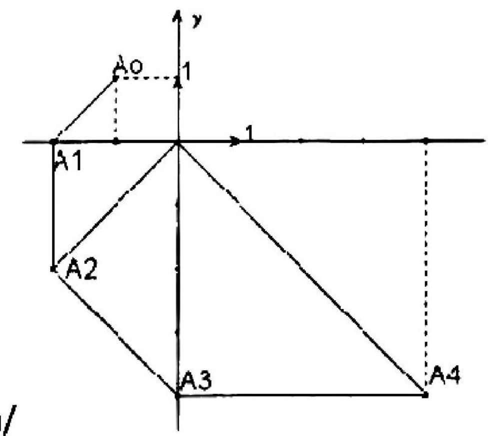
$\Rightarrow \overrightarrow{MM'}\perp\overrightarrow{MO}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$OMM' est un triangle

Rectangle et isocèle en M.

Construction de M' : $M'=R_{(M\,;\,-\frac{\pi}{2})}(O)$

3) $z_{A_0}=-1+i$; $A_{n+1}=f(A_n)$



a/

$Z_O = 0$; $Z_{A_0} = -1+i$; $Z_{A_n} = (1+i)^n . Z_{A_0}$

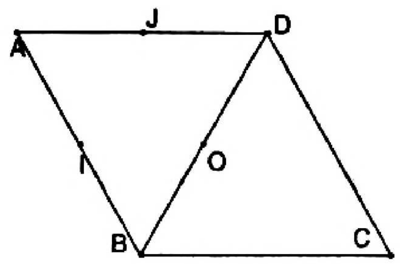
$O ; A_0$ et A_n sont alignées ssi $\frac{Z_{A_n}}{Z_{A_0}}$ réel

Ssi $(1+i)^n$ réel $\Leftrightarrow Arg((1+i)^n) \equiv k.\pi$

$\Leftrightarrow n.\frac{\pi}{4} = k.\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 4k$

Conclusion : $O ; A_0$ et A_n sont alignées ssi n est un entier naturel multiple de 4.

EXERCICE 3 :



1) a/ Le triangle ABD est équilateral car $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB = AD$

On a donc AB=BD et AB≠0 donc il existe un unique antidéplacement f

Qui transforme A en B et B en D

b/fof(A)=f(B)=D

fof(A)≠A⇒fof≠id_P ⇒f n'est pas une symétrie orthogonale et par suite f est une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$

fof=$t_{2\vec{u}}$ et fof(A)=D⇒

$2\vec{u} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ}$

f(A)=B⇒A*B=I∈ Δ

f(B)=D⇒B*D=O∈ Δ

D'où Δ=(OI)

Conclusion: f est la symetrie glissante d'axe (OI) et de vecteur $\overrightarrow{AJ}$

c/ Soit D'=f(D)⇒D'=f[f(B)]

$\Rightarrow fof(B) = D' \Rightarrow \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{AD}$

Or $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BC}$

⇒D'=C =f(D)⇒l'image du triangle ABD par f est le triangle BDC.

2) S({A,B,D})={B,C,D} et S(A)=C

⇒S({B,D})={B,D}⇒ l'image du segment [BD] par f est lui-même.

b/S([BD])=[BD]

Deux cas se présentent :

1^{er} cas : $\begin{cases} S(B)=B \\ S(D)=D \end{cases}$

S est un antidéplacement qui fixe deux points distincts B et D d'où S est une sytrie orthogle d'axe (BD).

2^{ieme}cas : $\begin{cases} S(B)=D \\ S(D)=B \end{cases}$

*<u>1^{er}methode</u>

SoS(B)=S(D)=B et SoS(D)=S(B)=D

SoS est un déplacement qui fixe les points B et D d'où SoS=id_P⇒ S est une symétrie orthogonale d'axe (AC)

La médiatrice de [BD].$\Rightarrow$S(A)=A or

S(A)=C D'où le 2ieme cas n'est pas possible

2ieme method $\begin{cases} S(A)=C \\ S(B)=D \\ S(D)=B \end{cases}$ ABD et CDB sont deux triangles directs ,d'où il n'existe aucun antidéplacement qui transforme   A en C ;B en D et D en B d'où le 2ieme cas n'est pas possible .

Conclusion : ***$S=S_{(BD)}$***

3) g ({A,B,D})={B,C,D} et g(A)=D

a/ on a donc g(D)=B ou g(D)=C

Supposons que g(D)=C on aura

G(A)=D ; g(D)=C et g(B)=B

G est un antidéplacement fixant le point B donc g est unt symetrie orthogonale or med[AD]$\neq$med[DC]

Absurde car G(A)=D et g(D)=C

Et par suite g(D)=B.

b/ gog(A)=g(D)=B$\neq$A$\Rightarrow$gog$\neq id_P$

$\Rightarrow$g n'est pas une symétrie orthogonale , donc g est une symétrie glissante d'axe δ et de vecteur $\vec{v}$.

gog(A)=B$\Rightarrow$2. $\vec{v}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}$

δ passe par A*D=J et D*B=O

$\Rightarrow\delta$=(OJ)

Conclusion : g est symétrie glissante d'axe (OJ) et de vecteur $\overrightarrow{AI}$

EXERCICE 4 :

1) $\begin{cases} f(x)=(x+2).Ln(x+2) & \text{si } x\in\,]-2\,;2] \\ f(-2)=0 \end{cases}$

a/ $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^+} (x+2).Ln(x+2)$

$= \lim\limits_{X\to0^+} X.Ln(X) = 0 = f(-2)$

$\Rightarrow$ f est continue à droite en (-2).

b/

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to-2^+} Ln(x+2) = -\infty$$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à dte en (-2)

c/ f est dérivable sur]-2 ;2]

et f'(x)=1+Ln(x+2)

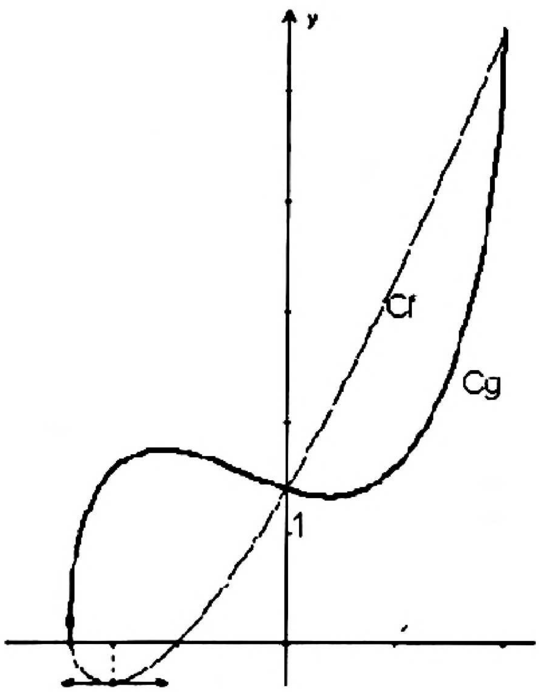
f'(x)>0$\Leftrightarrow$Ln(x+2)>-1$\Leftrightarrow$ x >-2 + 1/e

x	-2		-2+1/e		2
f'(x)		-	0	+	
f(x)	0	$\searrow$	-1/e	$\nearrow$	4Ln(4)

2) g(x)= f(x)- x.$\sqrt{4-x^2}$

a/ f(x)-g(x)= x.$\sqrt{4-x^2}$

X	-2		0		2
f(x)-g(x)	0	-	0	+	0
Position R		C'/C		C/C'	



3) a/ 1^{er}cas: $\alpha>0$

$$A_\alpha = \int_0^\alpha (f(x)-g(x))dx = \int_0^\alpha x.\sqrt{4-x^2}\,dx$$

2^{eme}cas: $\alpha<0$

$$A_\alpha = \int_\alpha^0 (g(x)-f(x))dx \;= \int_0^\alpha (f(x)-g(x))dx$$
$$= \int_0^\alpha x.\sqrt{4-x^2}\,dx$$

D'où $A_\alpha = \int_0^\alpha x.\sqrt{4-x^2}\,dx \quad \forall x\in[-2,2]$

b/

$$A_\alpha = -\frac{1}{2}\int_0^\alpha -2.x.\sqrt{4-x^2}\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(4-x^2\right).\sqrt{4-x^2}\right]_0^\alpha$$
$$= -\frac{1}{3}.\left(\left(4-\alpha^2\right).\sqrt{4-\alpha^2}-8\right)$$
$$= \frac{1}{3}.\left(8-\left(\sqrt{4-\alpha^2}\right)^3\right)u.a$$

c/

$$@ = \int_{-2}^0 (g(x)-f(x))dx \;+ \int_0^2 (f(x)-g(x))dx$$
$$= A_{-2}+A_2 \;= \frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\,u.a$$

EXERCICE 5: $n\in IN^*$

$f_n(x)=e^{-x}-x^{2n+1}$; $x\in[0,1]$

1) $f_n'(x)=-e^{-x}-(2n+1).x^{2n}$

$=-[e^{-x}+(2n+1).x^{2n}]<0$

$\forall x\in[0,1]$

x	0	1
$f_n'(x)$	—	
$f_n(x)$	1 ↘	$-1+1/e$

2) f_n est continue sur $[0,1]$

$f_n(0).f_n(1)=-1+1/e<0$ d'où l'équation $f_n(x)=0$ admet au moins une solution $U_n\in[0,1]$ et comme f_n

est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors U_n est unique.

3) a/ $f_{n+1}(x)-f_n(x)=x^{2n+1}-x^{2n+3}$

$=x^{2n+1}.(1-x^2)>0$ sur$]0,1[$

$\Rightarrow f_{n+1}(x)>f_n(x) \;\; \forall x\in]0,1[$

b/ D'après la question précédente

$f_{n+1}(U_{n+1})>f_n(U_{n+1})$ or $f_{n+1}(U_{n+1})=0$

$\Rightarrow f_n(U_{n+1})<0$

c/ $f_n(U_{n+1})<0 \Rightarrow f_n(U_{n+1})<f_n(U_n)=0$

$\Rightarrow U_{n+1}>U_n$ car f strictmnt décroissante sur [0,1]

D'où U_n est croissante et comme U_n est majorée par 1 donc U_n est une suite convergente.

4) a/ $f_n(U_n)=0 \Leftrightarrow e^{-U_n} - (U_n)^{2n+1} = 0$

$\Leftrightarrow e^{-U_n} = (U_n)^{2n+1}$

$\Leftrightarrow -U_n = Ln((U_n)^{2n+1}) = (2n+1).Ln(U_n)$

$\Leftrightarrow Ln(U_n) = -\frac{U_n}{2n+1}$

b/ Soit $l = \lim(U_n)$

on a $Ln(U_n) = -\frac{U_n}{2n+1}$ par passage aux limites on aura : $Ln(l)=0 \Rightarrow l=1$

Conclusion : $Lim(U_n) = 1$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2008	NOUVEAU REGIME SESSION PRINCIPALE	
SECTION :	MATHEMATIQUES	
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4 h — COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3. La page 3/3 est à rendre avec la copie.

Exercice n°1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) La limite de ($x+1+e^{-x}$) quand x tend vers $-\infty$ est égale à
   a) $-\infty$. b) 0. c) $+\infty$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-1$.
   Alors f est une solution de l'équation différentielle
   a) $2y' = y+2$. b) $y' = 2y+2$. c) $y' = -2y-2$.

3) La durée de vie X, exprimée en années, d'une machine automatique suit une loi exponentielle de paramètre 0,4.
   La probabilité que la machine ne tombe pas en panne avant 10 ans est égale à
   a) e^{-4}. b) $1-0{,}4e^{-4}$. c) $1-e^{-4}$.

Exercice n° 2 (5 points)

1) Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1 page 3), on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{e},e\right]$ par $f(x) = \ln^3(x)-3\ln x$ et les demi- tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{e}$ et e.

   a) En utilisant le graphique :
   Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e},e\right]$ sur $[-2,2]$. (On note f^{-1} la fonction réciproque de f et $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$).

   b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ et les demi-tangentes à $(\mathscr{C}')$ aux points d'abscisses respectives -2 et 2.

2) Soit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

   a) Calculer a_1.
   b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier $n\geq 1$; $a_{n+1} = e-(n+1)\,a_n$.
   c) En déduire que $a_3 = 6-2e$.

3) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $x=-2$ et $x=0$.

   a) Calculer $\int_1^e f(x)dx$.

   b) En déduire $\mathscr{A}$.

Exercice n°3 (4 points)

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x - 8y = 5$.
Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 8k - 1$ et $y = 3k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) a) Soit n, x et y trois entiers tels que
$$\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$$
Montrer que (x, y) est une solution de (E).

b) On considère le système $(S)\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$ où n est un entier .
Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23 \pmod{24}$.

3) a) Soit k un entier naturel.
Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice n°4 (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2 page 3), OAB est un triangle rectangle isocèle tel que $OA = OB$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu du segment [AB] et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.
b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).
Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude f.

3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D .
a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire g(O).
b) Déterminer les images de C et D par gof^{-1}. En déduire la nature de gof^{-1}.

4) Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$
a) Déterminer les images des points J et I' par gof^{-1} .
b) Montrer que les droites (I J), (I'J') et (CD) sont concourantes.

Exercice n°5 (4 points)

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le tétraèdre ABCE tel que A(1, 0, 2) , B(0, 0, 1) , C(0, -1, 3) et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1) a) Vérifier que E a pour coordonnées (0, 2, 3).
b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE .

2) a) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation : $x - 2y - z + 5 = 0$. Montrer que $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC) .

b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan $\mathscr{P}$.

3) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K .
a) Déterminer le rapport de h .
b) Le plan $\mathscr{P}$ coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J .
Calculer le volume du tétraèdre EIJK

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des Surveillants

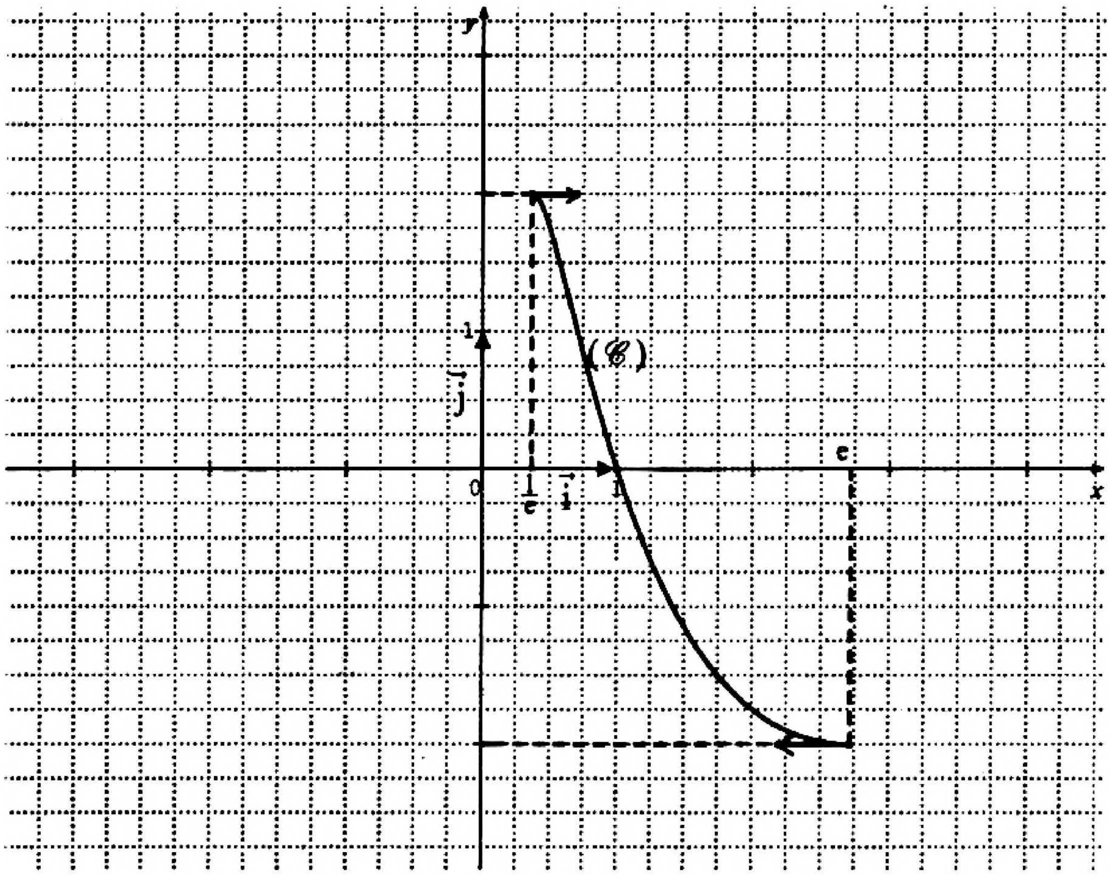
....

....

Annexe à rendre avec la copie

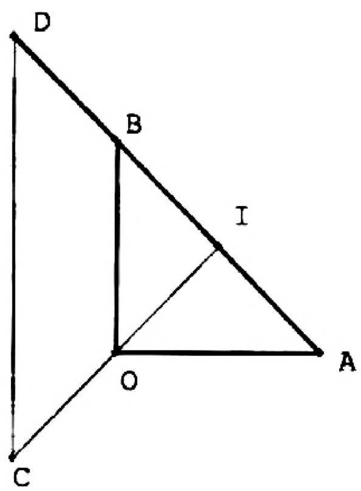
Exercice 2

Figure 1



Exercice 4

Figure 2



SECTION :	MATHEMATIQUES		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4 h	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice n°1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$.

Alors I est égale à

a) 3 . b) $\frac{1}{4}$. c) $-\frac{1}{4}$.

2) Soit $\ell = \lim_{x \to 1^-} \left[\ln(1-x) + \frac{1}{1-x} \right]$, alors

a) $\ell = 1$. b) $\ell = 0$. c) $\ell = +\infty$.

3) Soit n un entier non nul tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 35$.

Alors

a) $n \equiv 0 \pmod 3$. b) $n \equiv 0 \pmod 5$. c) $n \equiv 0 \pmod 7$.

Exercice 2 : (4 points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E) : z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0.$$

1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
   b) Résoudre l'équation (E).

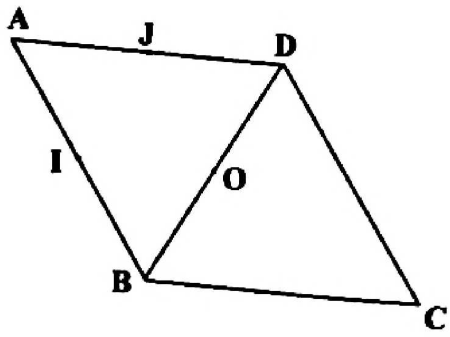
2) Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
   b) Soit M un point du plan distinct de O et soit M' son image par f.
   Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle et en déduire un procédé de construction du point M'.

3) On considère les points A_n définis par :

   A_0 le point d'affixe (-1+i) et pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = f(A_n)$.

   a) Placer les points A_0, A_1 , A_2 , A_3 et A_4.
   b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

Exercice 3 : (4 points)



Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre , ABCD est un losange de centre O , I est le milieu du segment [AB] , J est le milieu du segment [AD] et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D.

b) caractériser f .

c) Déterminer l'image du triangle ABD par f .

2) Soit s un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $s(A) = C$.

a) Déterminer l'image du segment [BD] par s .

b) En déduire que s est la symétrie orthogonale d'axe (BD) .

3) Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $g(A) = D$.

a) Montrer que $g(D) = B$.

b) Caractériser alors g .

Exercice 4 : (5 points)

1) Soit f la fonction définie sur [-2, 2] par $\begin{cases} f(x) = (x+2)\ln(x+2) & \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) = 0. \end{cases}$

et ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à droite en (-2).

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-2).

c) Donner le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur [-2, 2] par $g(x) = f(x) - x\sqrt{4 - x^2}$

et ($\mathscr{C}'$) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer la position relative des courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).

b) Dans l'annexe ci-jointe (page 4), on a tracé la courbe ($\mathscr{C}'$) de g. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) dans le même repère.

3) Soit α un réel non nul appartenant à [-2, 2].
On désigne par $\mathscr{A}_\alpha$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

a) Montrer que $\mathscr{A}_\alpha = \left|\int_0^\alpha x\sqrt{4 - x^2}\, dx\right|$. (On distinguera les deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$).

b) Calculer $\mathscr{A}_\alpha$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).

Exercice 5 : (4 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

1) Etudier les variations de f_n.

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et que $u_n \in]0,1[$.

   On définit ainsi sur $\mathbb{N}^*$, une suite (u_n).

3) a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle $]0,1[$. Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_{n+1}) < 0$.

   c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n+1}$.

   b) Calculer la limite de la suite u_n.

Nom et prénom : ....

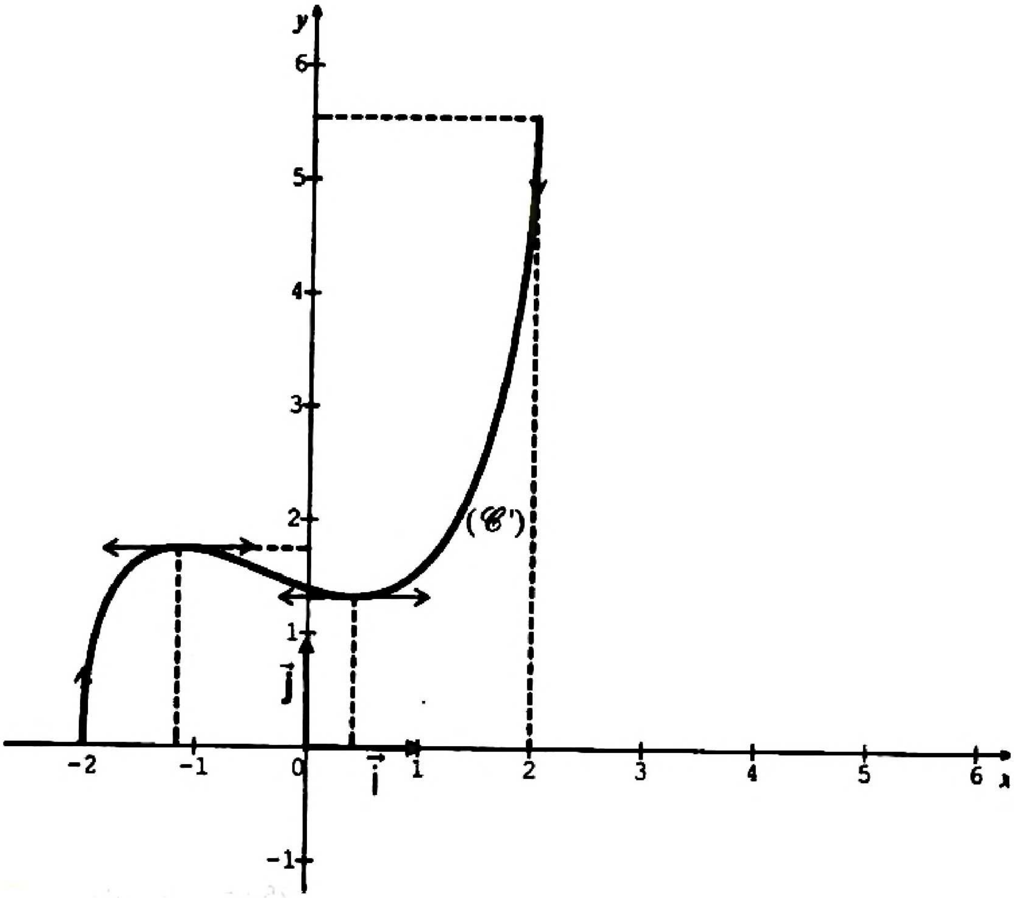
Date et lieu de naissance : ....

....

....

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4



Examen du Baccalauréat (Juin 2008) **Epreuve : MATHÉMATIQUES**

Section : MATHEMATIQUES **Nouveau régime : Session principale**

CORRIGE & BAREME DE NOTATION

Exercice 1 : 3 points

QUESTIONS	CORRIGE	BAREME	COMMENTAIRES
1)	C	1	
2)	B	1	
3)	a	1	

Exercice 2 : 5 points

QUESTIONS		CORRIGE	BAREME	COMMENTAIRES
1)	a)	f est une bijection de $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ sur $[-2,2]$	0,5	0,25 pour strict monotone au lieu de strict décr
	b)	Représentation de f^{-1}	1	0,25 ----les 2 demi-tgtes 2x0,25---- pour les 2pts d'inter 0,25---pour l'allure
2)	a)	$a_1 = 1$	0,5	0,25 pour une primitive de ln
	b)	$a_{n+1} = e - (n+1)a_n$	1	0,5 pour l'intégration par parties (2x0,25 choix et formule) 0,5 pour le reste
	c)	$a_3 = 6 - 2e$	0,5	0 ,25 pour a_2
3)	a)	$\int_1^e f(x)dx = a_3 - 3a_1 = 3 - 2e$	1	0,5 pour $\int_1^e f(x)dx = a_3 - 3a_1$
	b)	$A = 2e + \left(a_{3-3_{a_1}}\right) = 3$	0,5	0,25 pour conservation de l'aire par symétrie 0,25 pour le reste

Exercice 3 : 4 points

QUESTIONS		CORRIGE	BAREME	COMMENTAIRES
1)		X = 8 k-1 ; y = 3 k – 1	1	0,25 pour une solution particulière 0,75 pour le reste (0,5 pour toute autre forme de solution) (0 ,25 pour une simple vérification)
2)	a)	(x,y) est une solution de E	0,5	
	b)	N solution de (S) ⇔ n ≡ 23 (mod 24)	1	0,5 pour chaque implication
3)	a)	$2^{2k} \equiv 1(mod3)$ $7^{2k} \equiv 1(mod8)$	0,5	$2^{2k} \equiv 1(mod3)$ → 0,25 $7^{2k} \equiv 1(mod8)$ → 0 ,25
	b)		1	0,25 pour 1991 est solution de (S) 0,75 pour le reste (div)

Exercice 4 : 4 points

QUESTIONS		CORRIGE	BAREME	COMMENTAIRES
1)		$k = 2$ et $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$	0,5	0,25 pour le rapport (justifié) 0,25 pour l'angle (justifié)
2)	a)	O est l'orthocentre de ACD	0,25	0,25
	b)	$f\big((OJ)\big) = (AJ)$; $f\big((AJ)\big) = (DJ)$; $f(J) = J$	0,75	3 x 0,25
3)	a)	$k = 2$; $\Delta = (IC)$; $g(O) = C$	0,75	3 x 0,25
	b)	$(gof^{-1})(C) = C$; $(gof^{-1})(D)$; $gof^{-1} = S_{(CD)}$	0,75	3 x 0,25
4)	a)	$(gof^{-1})(J) = J'$; $gof^{-1}(I') = I$	0,5	2 x 0,25
	b)	(IJ) ; (I'J') et (CD) sont concourantes	0,5	Enlever 0,25 pour « (IJ) et (CD) sécantes » non justifié.

Exercice 5 : 4 points

QUESTIONS		CORRIGE	BAREME	COMMENTAIRES
1)	a)	$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ E(0, 2, 3)	0,75	0,5 0,25
	b)	V(ABCE)) 1	0,75	0,25 pour la formule 0,5 pour le reste
2)	a)	P // (ABC)	0,5	« indivisible »
	b)	K (0,1,3) ; $K \in P$	0,5	2 x 0,25
3)	a)	$\overrightarrow{EK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$, $\quad k\frac{1}{3}$	0,75	0,5 + 0,25
	b)	$V(EIJK) = \frac{1}{27}V(ABCD) = \frac{1}{27}$	0,75	0,25 pour h(ABC) = P 0,25 pour h(EABC) = (EIJK) 0,25 pour le reste

- CORRIGEES DETAILLEES DE TOUT LES EXERCICES DU MANUEL SCOLAIRE

- SUJET BAC 2008 SESSION PRINCIPALE
- BAREME DETAILLE DU SUJET BAC 2008 S-P
- SUJET BAC 2008 SESSION DE CONTROLE
- CORRIGEES DETAILLEES DE BAC 2008 S-P
- CORRIGEES DETAILLEES DE BAC 2008 S-C