Carthage
قرطاج
للنشر و التوزيع

Collection«Pilote»

MATHEMATIQUES

Algèbre & Géométrie

Section

MATHEMATIQUES

Rappels de cours

Recueil d'exercices corrigés

Extraits de devoirs corrigés

4 ème année

TOME 2

Elaboré par :

Lamloumi Maâmmar

INTRODUCTION

Ce manuel est destiné aux élèves de 4$^{\text{ième}}$ année secondaire section mathématiques, il fait partie de la « **Collection Pilote** ». Ce livre comporte :

• Des résumés de cours complets.

• Des QCM qui permettent à l'élève de faire son auto-évaluation.

• Des Vrai / Faux qui permettent l'apprentissage progressif des règles logiques.

• Des lectures graphiques.

• Des exercices et des problèmes permettant aux élèves d'assimiler le cours, d'approfondir leurs compréhensions des concepts mathématiques, d'apprendre des techniques et des astuces pour la résolution des problèmes. Ils sont organisés par ordre croissant de difficultés :

• Les exercices désignés par une étoile sont des exercices d'applications immédiates.

• Ceux désignés par deux, trois ou quatre étoiles demandent plus de recherches et de synthèses.

• Des devoirs de contrôle et de synthèse :En utilisant des procédés diversifiés de genre QCM, Vrai / Faux , tableaux à remplir, lectures graphiques, exercices intégratifs, ce livre permet aux élèves de viser la mention au Bac et une bonne préparation aux grandes écoles supérieures (facultés de Mathématiques, circuit préparatoire, polytechniques, etc.………)Je tiens à remercier vivement : ma famille pour leur patience et monsieur : Mr. Aouaoui Sami, , Mr. Mbarki Jamel; Mr. Zairi Lotfi pour leurs remarques et critiques.

Sommaire

RESUME DU COURS

Définition : La fonction logarithme népérien, noté ln, est la primitive sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1, de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$. On donc, pour tout réel x >0, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Conséquence : ln est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout réel strictement positive on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ de plus $\ln(1) = 0$.

Propriétés algébriques : pour tous réels a et b strictement positifs, on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b, \ln(a^n) = n\ln a\,(n \in \mathbb{Z}),\ \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a,\ \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\ln a$$

Limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$ $\lim\limits_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ Pour tous entiers naturels non nuls n et m, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^n(x)}{x^m} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^m \ln^n(x) = 0$

Equations et inéquations : Pour tous réels x et x′ strictement positifs, on a :
$\ln x = \ln x' \Leftrightarrow x = x'$ $\ln x < \ln x' \Leftrightarrow x < x'$ En particulier : $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Dérivée de ln(u) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$, pour tout réel x dans I alors ln(u) est dérivable sur I et in a : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ pour tout réel x dans I

Théorème : Si u est une fonction dérivable pour tout réel x dans I telle que $u(x) \neq 0$, alors la fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivables sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Corollaire : Si u est une fonction dérivable pour tout réel x dans I telle que $u(x) \neq 0$, alors la fonction $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $\ln(|u|) + c$ où c est une constante réelle.

LES EXERCICES

Exercice N°1 :

Pour chacune des questions suivantes indiquer la bonne réponse :

1.L'ensemble de définition de l'équation : $\ln(x+3) = \ln(x^2 - 9)$ est :

a. {-3 ;3 } b. $]3,+\infty[$ c.]-3 ;3[d. $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - x) =$ a. 0 b. $+\infty$ c. $-\infty$

3. $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| =$ a. 0 b. 1 c. $+\infty$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{3x-1}{6x+2}\right) =$ a. $-\ln 2$ b. 0 c. $+\infty$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(\ln x)}{x} =$ a. 1 b. $+\infty$ c. 0

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) =$ a. $+\infty$ b. 0 c. 1

7. $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}dx =$ a. $\dfrac{1}{2}$ b. 1 c. e

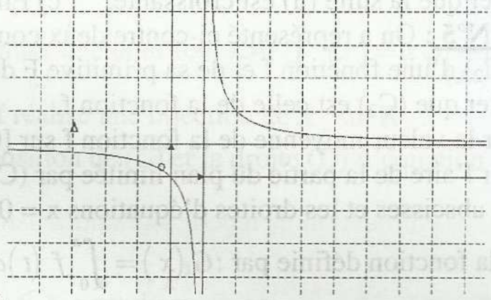
8. $\int_2^3 \dfrac{t}{t^2-1}dt =$ a. $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{8}{3}\right)$ b. $\dfrac{3}{2}$ c. 1

9. $\int_1^e \dfrac{1}{x.\ln^3(x)}dx =$ a. 1 b. $-\dfrac{1}{2}$ c. e

10. f est la fonction définie sur IR par $f(x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est une fonction :

a. Paire. b. impaire c. Ni paire, ni impaire.

Exercice N°2 : La courbe ci-contre est la représentation graphique, dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et Δ la droite d'équation y = 1



1. Dresser le tableau de variation de f.
2. On pose g(x) = ln(f(x)).
   a. Déterminer le domaine de définition de g.
   b. Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$.
   c. Dresser le tableau de variation de g et tracer sa courbe.

Exercice N°3 : Soit la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) & si\ x\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]0,+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$

1. Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x)=-\dfrac{2}{x+2}+\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$. Dresser le tableau de variation de φ puis en déduire le signe de φ(x).
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
3. Dresser le tableau de variation de f et construire $\left(\zeta_f\right)$ dans un repère orthonormé.
4. Soit la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\begin{cases} x-2\ln(x+2)+\dfrac{1}{2}x^2\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) & si\ x\in\,]0,+\infty[\\ g(0)=0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à droite en 0. b) Montrer que g est une primitive de f sur $[0,+\infty[$.
c) Dresser le tableau de variation de g.

5. Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n+1}$. a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\ln(u_n)=f(n)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$

b) Montrer que la suite (u) est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°4 : Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{\ln x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Montrer que f est continue sur $[1,+\infty[$.

2.a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Soit Δ la droite d'équation y = x. Déterminer $(C)\cap\Delta$. b) Tracer (C) et Δ.

4.a)Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0,+\infty[$.

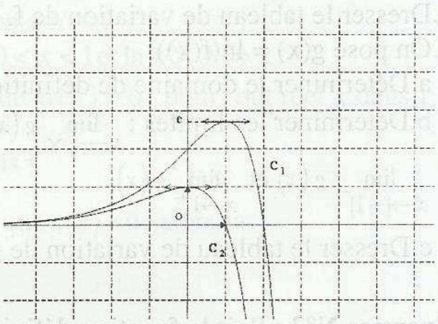
b) Tracer la courbe (C') de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5.On considère la suite (u) définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=g(u_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $x\in\mathbb{N}^*$ on a : $0\le u_n\le e$

b) Montrer que la suite (u) est croissante. c) En déduire (u) est convergente et trouver sa limite.

Exercice N°5 : On a représenté ci-contre deux courbes représentatives (C_1) et (C_2) d'une fonction f et de sa primitive F définies sur IR.



1. Justifier que (C_2) est celle de la fonction f.

2.Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur [0 ;1]

3)Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_2), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 2.

4)Soit G la fonction définie par : $G(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

a. Etudier le sens de variation de G.

b. Montrer que la représentation graphique Γ de G

c. est l'image de (C_1) par la translation de vecteur $-2\vec{j}$

5)Soit la fonction h définie par : h(x) = ln(f(x)).

a) Préciser le domaine de définition de h. b) Dresser le tableau de variation de h.

Exercice N°6 : Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{2}\ln^2(x)$

1.Etudier f et tracer sa courbe.

2.a)Etudier le sens de variation de f'.

b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\frac{\ln(1+x)}{x}\le f(1+x)-f(x)\le\frac{\ln x}{x}$

c) Soit U la suite définie sur IN par : $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\ln k}{k}$. Montrer que pour tout n ≥3 :

$Un\ge f(n+1)-f(3)+\frac{\ln 2}{2}$ et en déduire la limite de U.

Exercice N°7 : Pour tout $x\in]1,+\infty[$ on pose $f_n(x)=\ln(x-1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ où n est entier naturel tel que

$n \geq 2$.

1.Dresser le tableau de variation de f_n .

2.Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution (α_n).

3.a) Montrer que : $f_{n+1}(\alpha_n) = \dfrac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1}$

b) En déduire la monotonie de la suite (α_n). c) En déduire que la suite (α_n) est convergente

<u>Exercice N°8:</u> Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

On notera par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.Soit $\varphi(x) = 2\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.

a) Etudier le sens de variation de φ sur $[0,+\infty[$. b) En déduire que pour tout $x > 0$ on a $\varphi(x) > 0$.

2.a) Montrer que f est dérivable à droite en 0. b) Montrer que pour tout x>0 : $f'(x) = x\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f et en déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

3.a)Montrer que pour $t \geq 0$, $\ln(1+t) \leq t$. b) Etudier la position de (ζ_f) et la droite (D) d'équation : $y = x$.

4.a) Vérifier que $t \in [0,+\infty[$, $on\ a : 1-t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$

b) En déduire que : $x \in [0,+\infty[$ $on\ a : x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

5.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) = 0.\left(on\ posera\ X = \dfrac{1}{x}\right)$. Interpréter le résultat géométriquement.

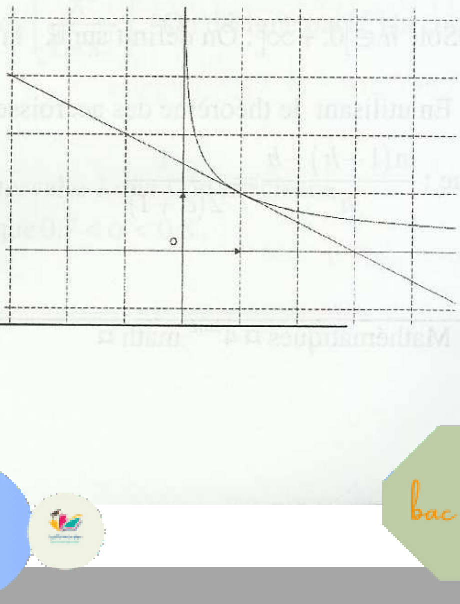
b) Etudier la position de (ζ_f) et la droite Δ : $y = x - \dfrac{1}{2}$. c) Tracer dans le même repère (ζ_f) et (ζ_f^{-1}).

6.a) Soit $\lambda \in]0,1]$ $et\ A_\lambda$: l'aire de la région du plan limité par (ζ_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = 1$.Calculer A_λ et $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} A_\lambda$.

b) En déduire l'aire de la partie limitée par (ζ_f^{-1}), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 1$.

<u>Exercice N°9 :</u>

A- La courbe ci contre est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. La droite (T) est sa tangente au point d'abscisse 1.



1)Par lecture graphique :

a) Déterminer les valeurs f(1) et f'(1).
b) Dresser le tableau de variation d f.
3)a)Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f\left(\mathbb{R}_+^*\right)=J$ à préciser.
b)Donner une équation cartésienne de la tangente T' à C_f^{-1} au point d'abscisse 1.
c)Tracer (C_f^{-1}).
4))Soit D la partie du plan limitée par (C_f) ;(C_f^{-1}) ;[AB] et [AC] où $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;$B\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ et $C\left(f\left(\frac{1}{2}\right),\frac{1}{2}\right)$.

Soit A l'aire, en unité d'aire, de D.
Montrer que $A=2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx-\frac{3}{4}$

5)On admet que $\begin{cases} f(x)=\dfrac{a+\ln x}{b+x} & \forall x\in\left]0,+\infty\right[\setminus\{1\} \\ f(1)=1 \end{cases}$ où a et b sont deux réels.

Montrer que a =0 et b = -1.

B)1)a)Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ on a : $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n} x^k+\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ où $n\in\mathbb{N}$.

b)Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx=-\sum_{k=0}^{n} u_k+\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{n+1}f(x)dx$ avec $u_k=\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^k\ln(x)dx$

2)Calculer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3)a)Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ on a : $x^{n+1}\le\dfrac{x^{n+1}\ln x}{x-1}\le 2\ln 2.x^{n+1}$

b) Déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{n+1}f(x)dx=0$

4)En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} u_k\right]=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$.

Exercice N°10 A- Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1)Soit $h\in\left]0,+\infty\right[$. On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g: x\mapsto\left[\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right]x^2-\ln(1+x)+x$.

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel : $c\in\left]0,h\right[$ tel

que : $\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}=\dfrac{-1}{2(c+1)}$

b) Prouver donc que : $\lim\limits_{h\to0^+}\left(\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}\right)=\dfrac{-1}{2}$

c) Prouver enfin que f est dérivable à droite en 0 et que : $f'_d(0)=-\dfrac{1}{2}$

2)a) Justifier que : $\forall x\geq0 : \int_0^x \dfrac{dt}{(1+t)^2}\leq\int_0^x\dfrac{dt}{1+t}$

b) Déduire que $\forall x\geq0 : \dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)\leq0$. c) Donner enfin le signe de f'(x) pour tout x > 0.

3)Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f.

B- Pour tout $a\in]0,1]$, on pose : $u_n=\int_0^a t^n f(t)\,dt$

1)Etudier la monotonie de la suite (u_n). 2) Prouver que (u_n) est convergente.

3)a) Montrer que pour tout x ≥ 0 ; f(x) ≤ 1. b)En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}, on\ a : u_n\leq\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$.

c) Préciser donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Exercice N°11 : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $U_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)dx$ et $V_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+......+\dfrac{(-1)^n}{n+1}$

1)a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $0\leq U_n\leq\dfrac{\ln2}{n+1}$ puis calculer sa limite.

b) Calculer $\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x}dx$ puis calculer U_1.

2)On pose $S_n=1-x+x^2+....+(-1)^n x^n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0;1]$

a) Montrer que : $S_n=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$ et que : $V_n=\ln2+(-1)^n\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx$

b) En déduire que : $|V_n-\ln2|\leq\dfrac{1}{n+2}$ puis calculer la limite de (V_n).

3)a) En utilisant une intégration par parties pour U_n, montrer que : $U_n=\dfrac{\ln2}{n+1}+\dfrac{(-1)^n}{n+1}.(\ln2-V_n)$

b) En déduire la limite de (W_n) définie par : $W_n=(n+1)\,U_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice N° 12 : Soit la fonction f définie sur]0;1[par $f(x)=\dfrac{1}{2}\text{Log}\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)$. On désigne par (ξ) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α et que $0.7<\alpha<0.8$.

d) Tracer la courbe (ξ) de f et la courbe (ξ') de g.

2) Soit F la fonction définie sur $]0;1[$ par $F(x)=\int_0^{f(x)} g(t)\,dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $]0;1[$ et que $F'(x)=\frac{1}{1-x^2}$

b) Calculer $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, en déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

(On pourra remarquer que $\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$)

c) En déduire, en fonction de α, l'aire de la partie du plan limitée par $\xi;\xi'$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $y=0$.

Exercice N° 13 : Soit α un réel de $[0;+\infty[$. On note $I_0(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{dt}{1+t}$ et pour tout $n\in IN^*$, on pose $I_n(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{(t-\alpha)^n}{(1+t)^{n+1}}dt$. 1) Calculer $I_0(\alpha)$ et $I_1(\alpha)$.

2) a) A l'aide d'une intégration par partie. Montrer que $I_{n+1}(\alpha)=\frac{(-1)^{n+1}\alpha^{n+1}}{n+1}+I_n(\alpha)\ \forall n\in IN$

b) En déduire les valeurs de $I_2(\alpha)$ et $I_3(\alpha)$ .en fonction de α.

3) Soit $J(\alpha)=\int_0^{\alpha}(t-\alpha)^3\,dt$ a) Monter que $J(\alpha)\le I_3(\alpha)\le 0$; b) Calculer $J(\alpha)$

c) En déduire que $\left|Log(1+\alpha)-\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha\right|\le\frac{\alpha^4}{4}$

d) Déterminer un intervalle à lequel appartient α pour que $\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{2}\alpha^2+\alpha$ soit une valeur approchée de $Log(1+\alpha)$ à 10^{-3} prés.

Exercice N°14: Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

1)Etudier le sens de variation de f.

2)a) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\le\int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x^2}dx\le\frac{\ln(k)}{k^2}$

b) Par une intégration par parties, calculer $\int_a^b\frac{\ln x}{x^2}\,dx$ avec $a>0$ et $b>0$.

3)Pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, on pose : $S_n=\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+\frac{\ln 4}{4^2}+......+\frac{\ln(n)}{n^2}$.

a) Montrer que pour tout, on a : $S_n-\frac{\ln 2}{2^2}\le\int_2^n\frac{\ln(x)}{x^2}dx\le S_n-\frac{\ln(n)}{n^2}$

b) En déduire que : $\frac{1+\ln 2}{2}-\frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2}\le S_n\le\frac{2+3\ln 2}{4}-\frac{1+\ln(n)}{n}$

c) Donner un encadrement de S_{100} à 10^{-2} près

Exercice N°15 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \frac{1}{n!}\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$

1)a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b) Montrer que la suite (I_n) est convergente et par suite elle est convergente.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2)a) Par une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + ... + \frac{(\ln 2)^n}{n!}\right)$

3) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \frac{\ln 2}{2!} + \frac{(\ln 2)^2}{3!} + ... + \frac{(\ln 2)^{n-1}}{n!}$.

a) Exprimer (u_n) en fonction de I_n. b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice N°16 : **I-** Soit la fonction g définie sur$]0\,;1]$ par : $g(x) = 2 - 2x + \ln x$

1) Etudier le sens de variation de g.

2) Montrer que g(x) = 0 admet dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ une solution unique α et que : $\forall t \in [\alpha, 1]\ on\ a : 2t - 2 \leq \ln t$.

3) Construire la courbe de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité : 4cm).

4) Calculer en cm² l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et $x = \frac{1}{2}$

II- Soit F la fonction définie sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)}dt$

1) Montrer que F est dérivable $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur et que : $F'(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(2x)\ln(x)}$.

2) Montrer que $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ on a : $\frac{x}{\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}$. Déterminer alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$.

3) Montrer que : $\forall x \in \left[\alpha, \frac{1}{2}\right[$, on a : $F(x) \leq \frac{1}{2}\int_x^{2x}\frac{dt}{t-1}$. Déterminer alors : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} F(x)$

4) Dresser le tableau de variation de F.

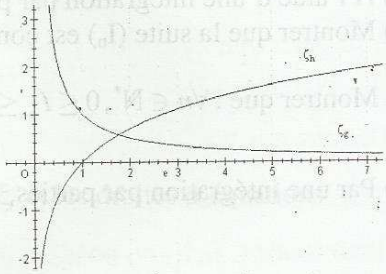
5) a)Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'équation : 1 + n F(x) = 0 admet dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ une solution α_n.

b) Montrer que (α_n) est une suite décroissante et qu'elle est convergente

Exercice N°17 1) Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \text{Ln}x - x\text{Ln}x + x$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. b) Montrer que pour tout $x>0, f'(x) = \dfrac{1}{x} - \text{Ln}x$.

2) Dans la figure ci-contre, ζ_g et ζ_h sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ des fonctions g et h définies sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = \text{Ln}x$. ζ_g et ζ_h se coupent en un point d'abscisse β.



a) Par une lecture graphique donne le signe de $f'(x)$

b) En déduire le sens de variations de f. c) Montrer que : $f(\beta) = \beta + \dfrac{1}{\beta} - 1$

3) On désigne par ζ_f la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Etudier la position relative des courbes ζ_f et ζ_h.

b) Montrer que la courbe ζ_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0.4 < x_1 < 0.5$ et $3.8 < x_2 < 3.9$.

c) Placer dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points $A(\beta;0)$ et $B\left(0;\dfrac{1}{\beta}\right)$ et en déduire une construction du point de coordonnées $(\beta; f(\beta))$. d) Tracer ζ_f

4) Pour tout réel t de $]0;+\infty[\setminus\{\beta\}$, on désigne par $\text{Aire}(t)$ l'aire de la partie du plan $S(t)$ limitée par les courbes ζ_g et ζ_h et la droite d'équation $x = t$.

a) Montrer que pour tout réel $t \in]0;+\infty[\setminus\{\beta\}$; $\text{Aire}(t) = f(\beta) - f(t)$ .b) Soit $t_0 > \beta$. Hachurer $S(t_0)$

c) Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $]0;\beta[$ tel que $\text{Aire}(t_1) = \text{Aire}(t_0)$ .hachurer . $S(t_1)$

Exercice N°18 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \text{Log}^2 x$, on note (ξ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier les variations de f ; b) Préciser les branches infinies de (ξ). c) Construire la courbe (ξ)

2) Soit $\lambda > 0$; $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,dx$.

a) Calculer en fonction de λ l'intégrale $\int_\lambda^1 \text{Log}x\,dx$ et montrer l'égalité $I(\lambda) = 3(1-\lambda) + 2\lambda\text{Log}\lambda - \lambda\text{Log}^2\lambda$

b) Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to0^+} I(\lambda) = 3$

3) Soit $n \geq 2$; $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ et $J_n = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx$ où $1 \leq k \leq n-1$

a) Montrer que f est décroissante sur $\left[\dfrac{k}{n};\dfrac{k+1}{n}\right]$, en déduire que $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leq J_k \leq \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

b) Montrer que $\forall n \geq 2$; $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n} f(1)$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} \operatorname{Log}^2\left(\frac{n}{k}\right) = 2$

Exercice N° 19 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{x}$. On désigne par ζ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. 1) Etudier f et tracer ζ

2) Soit α un réel qui appartient à $]1;+\infty[$. On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par ζ et les droites d'équations $y = 0$; $x = 1$ et $x = \alpha$. On désigne par $\mathcal{A}'(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par ζ et les droites d'équations $y = 0$; $x = 1$ et $x = \frac{1}{\alpha}$. Montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}'(\alpha)$

3) Soit u et v deux réels strictement positifs tels que $u < v$. Comparer u^v et v^u dans chacun des cas suivants : a) u et v sont deux réels de $]0;e]$; b) u et v sont deux réels de $[e;+\infty[$

4) a) Soit $a \in]1;e[$. Justifier qu'il existe un seul réel $b \in]e;+\infty[$ tel que $\frac{\operatorname{Log} a}{a} = \frac{\operatorname{Log} b}{b}$

b) Déterminer l'ensemble des couples $(p;q)$ d'entiers naturels non nuls tels que $p \neq q$ et $p^q = q^p$

Exercice N°20: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}\ln x & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. On désigne par (C) sa courbe représentative de f dan un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0. b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour la courbe (C).

d) Tracer (C) en précisant la tangente à (C) en A.

2)Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose : $F_p(x) = \int_x^1 \sqrt{t}\,(\ln(t))^p\,dt$ où $x \in]0;1[$

a) Calculer $F_1(x)$ puis vérifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} F_1(x) = -\frac{4}{9}$.

b) Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, et que pour tout réel $x \in]0;1[$, on a :

$F_{p+1}(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,[\ln(x)]^{p+1} - \frac{2}{3}(p+1)F_p(x)$.

c) Montrer par récurrence que $F_p(x)$ admet une limite finie $u_p = (-1)^p (p!)\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}$ quand $x \to 0^+$.

RESUME DU COURS

Définition : On appelle fonction exponentielle, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est noté e^x.

-)pour tout réel a et pour tout réel b strictement positif, on a : $b = e^a \Leftrightarrow a = \ln b$

$\forall a \in \mathbb{R}, \ln(e^a) = a$ -) $\forall a > 0,\ e^{\ln a} = a$ -) $\ln e = 1$

Propriétés algébriques : Pour tous réels a et b, on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{na} = (e^a)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$e^{\frac{a}{n}} = \sqrt[n]{e^a}$ pour tout entier naturel $n \geq 2$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$e^{\frac{m}{n}a} = \sqrt[n]{e^{ma}}$ pour tout entier naturel $n \geq 2$ et tout entier m.

Limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{nx}}{x^m} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^m e^{nx} = 0$

Pour tous entiers naturels non nuls n et m, on a :

Dérivée de $e^{u(x)}$ Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$ pour tout réel x dans I

Corollaire : Si u est une fonction dérivable sur I, alors la fonction $f : x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $e^{u(x)} + c$ où c est une constante réelle.

Exponentielle de base a :

- ✓ *Définition :* Soit un réel $a > 0$. pour tout réel b, on a $a^b = e^{b\ln(a)}$
- ✓ *Définition :* Soit un réel $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction : $x \mapsto a^x$.

LES EXERCICES

Exercice N°1 :

Résoudre dans IR les équations et les inéquations suivantes :

a) $-e^{3x+5} + 2 = 0$ b) $2e^x + e^{-x} - 3 = 0$ c) $2e^x + e^{-x} - 3 < 0$ d) $e^{2x} - 6e^{-2x} + 1 = 0$

e) $e^{3x} + 12e^{2x} - 61e^x - 48 \geq 0$

Exercice N°2 : Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} + 1}{e^{3x} - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 5x$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 e^{\frac{1}{x}}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x+3}}{x+4}$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3 - 2x^2)e^x$

Exercice N°3 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 x e^{x^2}\, dx$ b) $\int_0^{\ln 2} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$ c) $\int_0^{-1} \left(3e^{-x} + \dfrac{4}{1 + e^{-x}}\right) dx$ d) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos^2(t)} e^{\tan(t)} dt$ e) $\int_0^1 t e^{-2t}\, dt$

Exercice N°4 : Soit f la fonction $[0, +\infty[$ définie sur par : $f(x) = (e^{-x} - 1)^2$.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan(unité : 2cm).

1.a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$: $f'(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-x})$. b) Dresser le tableau de variation de f.

2.a) Tracer (ζ).

b) Calculer en cm^2, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (ζ) et les droites d'équations $y=0$, $x=0$ et $x=1$.

3.a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer dans le même repère la courbe (ζ') de la fonction réciproque f^{-1} de f.

c) Calculer en cm^2 l, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (ζ), (ζ') et les droites d'équations : $x=1$ et $y=1$.

4.a) Montrer que : $\forall x\in[0;1[: f^{-1}(x)=-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$.

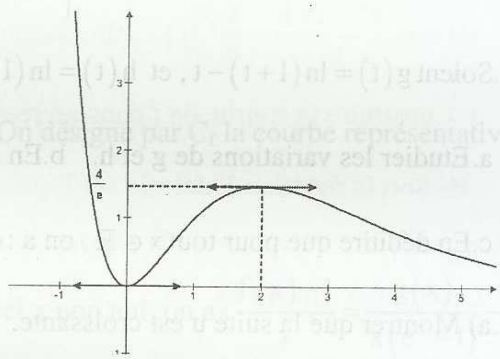
b) Montrer que : f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

5.On pose : $I_\alpha=\int_\alpha^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{x}-x}dx$ où α est un réel de]0 ;1[.

a) Montrer que $I_\alpha=2\ln 2-2f^{-1}(\alpha)$. b) Calculer : $\lim\limits_{\alpha\to0^+}I_\alpha$

Exercice N°5: Soient f la courbe définie sur $\mathbb{R}$ et (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Le graphe ci-dessous représente l'allure de la courbe de (ζ).



1.Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :

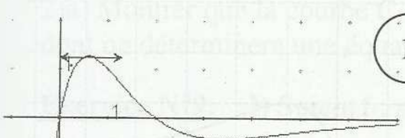
a.Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

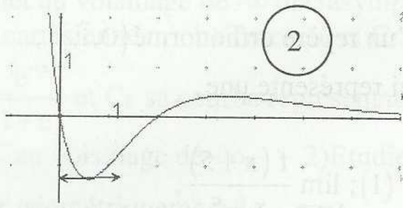
b.Déterminer f' (2),f' (0),

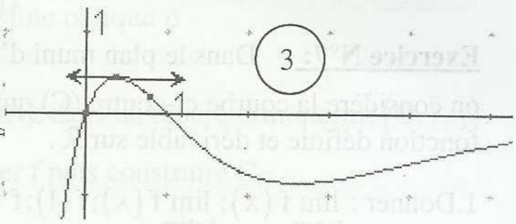
c. $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x-3)}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x-2}{f(x)-\frac{4}{e}}$

d.Donner le comportement des branches infinies de la courbe (ζ).e)Dresser le tableau de variation de f.

2.Parmi les trois courbes 1,2 et 3 ; Indiquer laquelle est susceptible de représenter f' la fonction dérivée de f ? Justifier.







3)On admet que : $f(x)=\left(ax^2+b\right)e^{1-x}$ où a et b deux réels fixes. Déterminer les réels a et b.

4)Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par la courbes (ζ) et les droites d'équations :x=0 et x=1.

Exercice N°6: A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la fonction par : $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$ et (ζ_f) sa courbe représentative dan un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1.Dresser le tableau de variation de f.

2.a) Prouver que pour tout $x\in\mathbb{R}$; $f(x)=-x+\ln\left(1+e^x\right)$.

b)En déduire que la droite $D: y = -x$ est une asymptote à (ζ_f) .c) Préciser la position de (ζ_f) par rapport à D.

3)a)Montrer que (ζ_f) coupe la droite $\Delta : y = x$ en un seul point d'abscisse $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

b)Construire D, Δ et (ζ_f) .

3.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe de f^{-1} dans le même repère. c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

5.Soit C_n l'image de (ζ_f) par l'homothétie $h_{\left(O, \frac{1}{2n}\right)}$. Déterminer l'équation de C_n.

B/ Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 1 + \dfrac{1}{e} \\ u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{e^{n+1}}\right).u_n \end{cases}$.

1.Soient $g(t) = \ln(1+t) - t$, et $h(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{2}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.

a.Etudier les variations de g et h. b.En déduire que pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a : $t - \dfrac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$

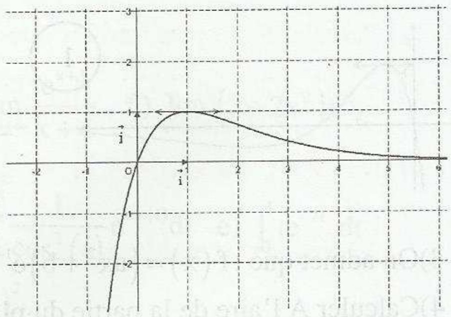
c.En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^{-x} - \dfrac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$.

2.a) Montrer que la suite u est croissante. b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{k=n} f(k)$

3.On pose : $S_1 = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{e^k}$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{e^{2k}}$ .a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_1 - \dfrac{1}{2} S_2 < \ln(u_n) < S_1$.

b)Montrer que la suite u est majorée. En déduire que u est convergente.

c)Soit L la limite de u. Montrer que : $\dfrac{2e+1}{2(e^2-1)} \le \ln(L) \le \dfrac{1}{e-1}$



Exercice N°7: Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

on considère la courbe ci-contre (C) qui représente une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.Donner : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $f(1)$; $f'(1)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x+5)}{x+5}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x+5)}{x+5}$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{f(x)-1}$

2.Dresser le tableau de variation de f.

3.La courbe (C) est celui de la fonction $f(x) = xe^{1-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par A_n la mesure d'aire du domaine du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y = 0$, $x = 1$ et $x = n$.

a. Montrer que : $A_n = -e^{1-n}(n+1) + 2$ b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

4.Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = 1+2e^{-1}+3e^{-2}+4e^{-3}+......+ne^{1-n}$.

a. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a : $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$

b.En déduire que : $U_n \leq 3$ c. Prouver que U est convergente.

Exercice N°8: A/ Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - e^x + 1$

1)Montrer que pour tout réel x on a : $g(x) = \int_0^x te^t\,dt$.

2)a) Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a : $\frac{x^2}{2} \leq g(x) \leq \frac{x^2}{2}.e^x$

b) Montrer que pour tout réel strictement négatif x, on a : $\frac{x^2}{2}.e^x \leq g(x) \leq \frac{x^2}{2}$

c) En déduire que : $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

B/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Montrer que f est continue en0. b) Vérifier que pour tout réel x non nul, on a : $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{g(x)}{x(e^x-1)} - 1$.

c) En déduire que f est dérivable en 0 et on a : $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

d) Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x-1)^2}$. e) Dresser le tableau de variation de f.

2)a) Montrer que la courbe C_f admet au voisinage de -∞ une asymptote oblique Δ dont on déterminera une équation cartésienne. b) Tracer Δ et C_f.

Exercice N°9: I) Soient $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)Etudier le comportement de C_f au voisinage de -∞. 2)Etudier f puis construire C_f.

3) Soit $I = \int_0^1 f(x)\,dx$. Interpréter géométriquement I.

II- 1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J.

2) Construire $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1}. 3) Calculer $f^{-1}(x)\ \forall x \in J$

III)Soit $k = \int_0^1 e^{-x}\ln(1+e^{-x})\,dx$.

1)Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $k = \ln 2 - \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1+e}{e}\right) - I$.

2)a) Déterminer la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1. b) Calculer alors k.

c) Déduire en fin I .

3)Soit D le domaine du plan limitée par $C_{f^{-1}}$, et les droites d'équations respectives y = 0,y = 1 et x =0. Calculer l'Aire de D.

Exercice N°10: A) Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$. 2.Montrer que $\forall x\in[0,+\infty[$, $f'(x)>0$.
3. On se propose dans cette question d'étudier la dérivabilité de f en 0. Soit h un nombre réel

strictement positif et g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{e^h-1-h}{h^2}x^2-e^x+x+1$.

a.En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel $c\in\,]0;h[$

tel que $\dfrac{e^h-1-h}{h^2}=\dfrac{1}{2}f(c)$. b)En déduire : $\lim\limits_{h\to0^+}\left[\dfrac{e^h-1-h}{h^2}\right]$. c. Montrer que f est dérivable en 0.

d. Construire la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

B- Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^{e^x}f(t)\,dt$

1.a) Justifier l'existence de F(x) pour tout réel x. b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

2.Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$

3. a) Montrer que : $e^t>t,\ \ \forall t\in\,]0,+\infty[$ .b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $F(x)\geq\int_1^{e^x}\dfrac{t-1}{t}\,dt$.

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$. d) Donner le tableau de variation de F.

e) Tracer, dans un autre orthonormé, la courbe de F. On prend F(0) ≈1,3.

Exercice N°11: On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_n(x)=1+\dfrac{x}{n+1}-e^{\frac{x}{n}}$ pour tout entier naturel $n\geq2$.

1)a) Etudier les variations de f_n.b) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une seule solution $\alpha_n<0$.

2)On considère la fonction g définie par : $g(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{n+1}\right)+\dfrac{2}{x}$. Dresser le tableau de variation.

3)Montrer que g(x) < 0. En déduire que : $f_n(-2)<0$ puis $\alpha_n>-2$.

4)Montrer que : $f_n\left[2n\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right]=\dfrac{2n}{n+1}\left[\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}+\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right]$

5)On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x)=\dfrac{2x+1}{2x(x+1)}+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

a.Donner le signe de h(x) puis déduire que : $f_n\left[2n\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right]>0$

b.Montrer que : $-2<\alpha_n<2n\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.

Exercice N°12: Soient $F(x)=\int_0^{u(x)} g(t)\,dt$ avec $g(t)=\sqrt{1+t^2}$ et $u(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: u(x) = 1 puis calculer u(0).
2. a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $F'(x)=\dfrac{1}{8}\left(e^x+e^{-x}+2\right);\forall x\in\mathbb{R}$.

   b) Déduire l'expression de F(x) sans intégrale.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de g et les droites d'équations respectifs x = 0 ; x = 1 et y = 0. calculer A.
4. Soit la suite (v_n) définie par sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} g(t)\,dt$. Posons : $S_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n} v_k$.

a. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ v_n\le 0$ et $\dfrac{-1}{n(n+1)}g\left(\dfrac{1}{n}\right)\le v_n$ b. Préciser donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

c. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=\int_0^{\frac{1}{n+1}} g(t)\,dt-A$. Puis trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

Exercice N°13: On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n=\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx$

1. a) Montrer que (I_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.   b) Prouver donc que (I_n) converge.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $2I_{n+2}+(n+1)I_n=e$.
3. Déduire de ce qui précède que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\dfrac{e}{n+3}\le I_n\le\dfrac{e}{n+1}$.   4.Calculer donc $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.
5. Calculer I_1. Trouver la valeur de : $J=\int_0^1\left(x^5+2x^3\right)e^{x^2}\,dx$.

Exercice N°14: Soit la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x>0\\ f(0)=2 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue à droite de 0.
2. Pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, on pose : $I(x)=\int_0^x \dfrac{e^t(x-t)^2}{2}\,dt$.

a.Sans calculer I(x), montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, on a : $0\le I(x)\le\dfrac{x^3}{6}e^x$. En déduire $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{I(x)}{x^2}$.

b.A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+I(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

c.Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que : $f'_d(0)=2$.

3)Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=(x-1)e^{x}+1$ a. Etudier les variations de g

b.En déduire le signe de g(x) pour tout $x\in[0,+\infty[$.

1. a. Exprimer f'(x) en fonction de g(x) pour tout $x\in]0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.

b. Construire la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

4)Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x)=\int_{0}^{\ln x} f(t)\,dt$

a)Justifier que F(x) existe pour tout $x\in[1,+\infty[$.

b. Montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer F'(x)

c .Justifier que : $\forall x\in]e,+\infty[$, on a : $F(x)\geq\int_{1}^{\ln x}\frac{2t-1}{t}\,dt$. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

<u>Exercice N°15:</u> On considère les fonctions f, K et F_n définie par sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2}{e^{x}+e^{-x}},\ K(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\text{ et }F_n(x)=\int_{0}^{x}\left[f(x)\right]^{n}dx\ \text{ avec }\ n\in\mathbb{N}\text{ et }n\geq 2.$$

1. Vérifier que : $\forall t\in[0,+\infty[$, on a : $e^{-t}\leq f(t)\leq 2e^{-t}$. 2.En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f(t)\right]^{n}=0$.

3.On pose : $u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)$. a. Vérifier que pour tout $t\in[0,+\infty[:\left[f(t)\right]^{2}=K'(t)$. En déduire u_2.

b. Vérifier que $\forall t\in\mathbb{R}:4-\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}=-\left(e^{t}-e^{-t}\right)^{2}$.

En déduire que $\left[f(t)\right]^{n-1}f'(t)K(t)=\left[f(t)\right]^{n+2}-\left[f(t)\right]^{n}$.

c.Par une intégration par parties, montrer que :

$\forall\ n\geq 2$ et $\forall x\in[0,+\infty[$, on a : $\int_{0}^{x}\left[f(t)\right]^{n-1}f'(t)K(t)\,dt=\frac{1}{n}K(x)\left[f(x)\right]^{n}-\frac{1}{n}\int_{0}^{x}\left[f(t)\right]^{n+2}dt$.

d.En déduire alors que : $(n+1)F_{n+2}(x)-nF_n(x)=K(x)\left[f(x)\right]^{n}$. Montrer alors que : $u_{n+2}=\frac{n}{n+1}u_n$.

e. Montrer , par récurrence, que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{2n+2}=\frac{\left[2^{n}.n!\right]^{2}}{(2n+1)!}$

<u>Exercice N°16:</u> **A)** 1) a) Montrer que $\forall x\in IR\ ;e^{x}-x\geq 1$

b) En déduire que $\forall x\in IR\ ;xe^{-x}\leq\frac{1}{e}$

2) On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur IR

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

a) Montrer que $\forall x\geq 0$ et $\forall n\in IN$, on a :

$$0\leq x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)\leq\frac{1}{(e-1)e^{n}}$$

b) En déduire que $\forall n\in IN$, On a : $0\leq\int_{0}^{1}x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)\,dx\leq\frac{1}{(e-1)e^{n}}$

dans la suite On prend $f(x)=\frac{1}{1-xe^{-x}}$ $\forall x\in IR$

B) Dans cette partie, on se propose de trouver une valeur approchée de l'intégrale : $I=\int_0^1 f(x)\,dx$. Pour ce faire, on pose : $I_0=1;\forall n\in\mathbb{N}^*\ I_n=\int_0^1 x^n.e^{-nx}\,dx$ et $\forall n\in\mathbb{N};\ S_n=\sum_{k=0}^{k=n} I_k$.

1) Donner la signification de I. 2) Calculer I_1 et I_2.

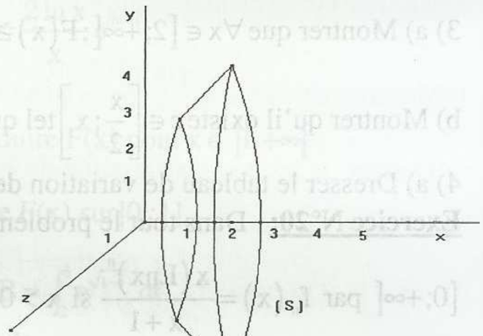
3)a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, on a : $1+x.e^{-x}+x^2e^{-2x}+.....+x^ne^{-nx}=\frac{1-\left(xe^{-x}\right)^{n+1}}{1-xe^{-x}}$.

b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, on a : $I-S_n=\int_0^1 f(x).x^{n+1}.e^{-(n+1)x}\,dx$.

4) a)Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera .

b) Donner une valeur approchée de I à 10^{-1} près

Exercice N° 17: Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y=e^{\sqrt{x}}$; $x\in[1;2]$ autour de l'axe (Ox). Le but de cet exercice est de calculer le volume $\mathcal{V}$ de ce solide.



1) Soit F la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x e^{\sqrt{4t}}\,dt$. Vérifier que $\mathcal{V}=\pi F(2)$

3) Soit G la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $G(x)=\int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$

a) Montrer que G est dérivable sur $[1;+\infty[$ et que $G'(x)=2F'(x)$.

b) En déduire que pour tout réel x de $[1;+\infty[$; $2F(x)=G(x)-G(1)$

3) a) Montrer que pour tout réel x de $[1;+\infty[$; $G(x)=\left(\sqrt{4x}-1\right)e^{\sqrt{4x}}$. b) Calculer alors $\mathcal{V}$.

Exercice N° 18: I) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de IR sur $]-1;1[$. 2) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in]-1;1[$

II) Soit x un réel positif. On pose $I_0(x)=x$ et pour tout $n\in IN^*$; $I_n(x)=\int_0^x\left[f(t)\right]^n dt$

1) Calculer $I_1(x)$ .2) a) Montrer que pour tout $n\geq 1;\ 0\leq I_n\leq x\left[f(x)\right]^n$; b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n(x)$

3) a) Vérifier que pour tout $x\in IR$; $f'(x)=1-\left[f(x)\right]^2$

b) En déduire que pour tout $n\geq 0;\ I_{n+2}(x)=I_n(x)-\frac{1}{n+1}\left[f(x)\right]^{n+1}$

c) Montrer alors que pour tout $n\geq 1;\ I_{2n}(x)=x-\left[f(x)+\frac{1}{3}\left[f(x)\right]^3+...+\frac{1}{2n-1}\left[f(x)\right]^{2n-1}\right]$

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}+\frac{1}{3\times3^3}+\frac{1}{5\times3^5}+...+\frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}$

Exercice N°19: Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $F(x)=\int_0^{2\text{Log}x}\frac{e^t}{1+t}dt$ et soit Γ la courbe de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. 1) a) Montrer que $\forall t\in \text{IR}_+$; $e^t\geq 1+t$; b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

2)a)Montrer que F est dérivable sur $[1;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b)En déduire que $\forall x\in[1;+\infty[;F(x)=\int_1^x\frac{2t}{2+2\text{Log}t}dt$.

3) a) Montrer que $\forall x\in[2;+\infty[;F(x)\geq\int_{\frac{x}{2}}^x\frac{2t}{2+2\text{Log}t}dt$.

b) Montrer qu'il existe $c\in\left[\frac{x}{2};x\right]$ tel que $F(x)\geq\frac{cx}{1+2\text{Log}c}$; c) Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

4) a) Dresser le tableau de variation de F ; b) Donner une allure de la courbe Γ

Exercice N°20: Dans tout le problème n est un entier supérieur ou égal à 2. Soit f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x)=\frac{x(\text{Ln}x)^n}{x+1}$ si $x>0$ et $f_n(0)=0$.

A) Soit $g_n(x)=n(x+1)+\text{Ln}x$ où $x>0$. 1) Dresser le tableau de variations de g_n

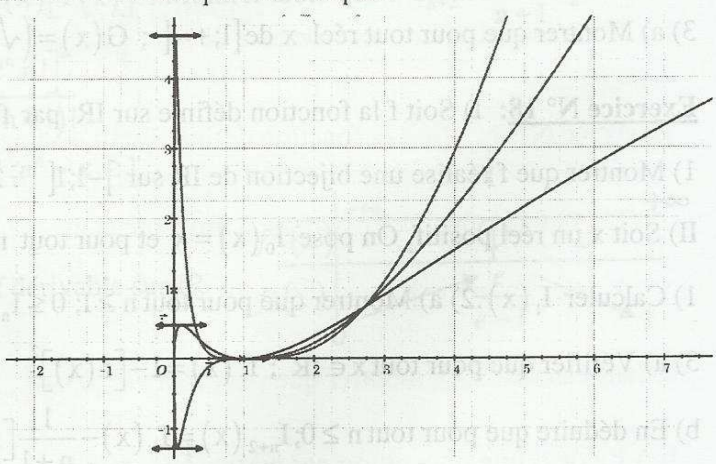
2) Montrer que l'équation $g_n(x)=0$ admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique α_n. Préciser le signe de $g_n(x)$

3) Vérifier que $\alpha_n<e^{-n}$. En déduire la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq2}$.

B) On note ξ_n la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0.

2) Dresser le tableau de variations de f_n on distinguera deux cas de n pair et n impair.



3) Vérifier que $f_n(e)=\frac{e}{1+e}$ et que pour $x\in[1;e]$; $f_{n+1}(x)-f_n(x)\leq0$.

4) Dans la figure ci-contre on a tracé les courbes ξ_2 ; ξ_3 et ξ_4.

Indiquer sur la figure le nom de chaque courbe

5) On considère l'équation $(E_n):f_n(x)=\frac{e}{2(1+e)}$.

a) Montrer que (E_n) admet dans $[1;e]$ une solution unique u_n

b)Montrer que pour tout $n\geq2$; $f_{n+1}(u_n)\leq\frac{e}{2(1+e)}$.En déduire que u est croissante et qu'elle converge vers un réel ℓ . c) Montrer que pour tout $n \geq 2; f_n(u_n) \leq \frac{\ell(\mathrm{Ln}\ell)^n}{1+\ell}$; d) Déterminer la valeur de ℓ

C) On considère la fonction F_n définie sur $[0;+\infty[$ par $F_n(x) = \int_1^{e^x} f_n(t)\,dt$

1) Montrer que F_n est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer $F'_n(x)$

2) Montrer que pour $x \geq e$; $\int_e^{e^x} f_n(t)\,dt \geq \mathrm{Ln}(1+e^x) - \mathrm{Ln}(1+e)$ .3) Dresser le tableau de variations de F_n .

Exercice N°21: Soit $F(x) = \int_1^{1+\ln^2 x} e^{\sqrt{t-1}}\,dt \quad \forall x \in]0,+\infty[$ .1)a) Justifier l'existence de F sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in]0,+\infty[, F'(x) = \frac{2\ln x}{x} e^{|\ln x|}$.

1. a) Calculer F(1) et vérifier que pour $x \geq 1, F(x) = 2\int_1^x \ln t\,dt$. en déduire F(x) pour $x \in]1,+\infty[$

b) Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[, F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire l'expression de F(x) sur]0 ;1].

Calculer chacune des deux intégrales suivantes : $A = \int_1^2 e^{\sqrt{t-1}}\,dt$ puis $B = \int_2^5 e^{\sqrt{t-1}}\,dt$

Exercice N°22: 1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$. On désigne par (C) la courbe f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. a)Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, on a : $1-2t \leq e^{-2t} \leq 1$

b)A l'aide d'une intégration par parties entre 0 et x, montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a $2x - 2x^2 \leq 1 - e^{-2x} \leq 2x$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \leq e^{-2x} + 2x - 1 \leq 2x^2$.

c)Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = -2$.

2)a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{2x} \geq 1+2x$ puis dresser le tableau de variation de f. b) Tracer (C).

3)On pose : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

a)Montrer que f st dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que: $F'(x) = 2f(2x) - f(x)$.b)Vérifier que : $\forall \in \mathbb{R}_+, F'(x) = f(x)e^{-2x}$.

c) Montrer que : $\forall t \in [1,+\infty[, \ 0 \leq \frac{1}{t} - f(t) \leq e^{-2t}$. En déduire que : $\forall x \in [1,+\infty[, \ 0 \leq \ln 2 - F(x) \leq \frac{1}{2}(e^{-2x} - e^{-4x})$.

d. Dresser le tableau de variation de F.

2)Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = f(n) + f(n+1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(2n)$

a)Vérifier que : $\forall k \in \{0,1,1,\ldots..,n-1\}, f(k+1+n) \leq \int_{k+n}^{k+1+n} f(x)\,dx \leq f(k+n)$.

b)En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, F(n) + f(2n) \leq S_n \leq F(n) + f(n)$

c)Montrer alors que S_n est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°23 : A) On considère la fonction g définie par : $g(x)=e^{x}-x-1$.

1)Etudier le sens de variation de g et En déduire que : $\forall x \in IR\ ; e^{x}-x \geq 1$.

2)Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}-x}$. a)Dresser le tableau de variation de f .Déduire que pour tout $x \geq 0$, on a : $1 \leq f(x) \leq \dfrac{e}{e-1}$. b)Construire la courbe (ζ) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3)Soit φ la fonction définie sur $I=[1,+\infty[$ par : $\varphi(x)=\int_{0}^{\ln x} t.f(t)\,dt$.

a)Montrer que φ est dérivable sur I et que : $\varphi'(x)=\dfrac{\ln(x) f(\ln x)}{x}$.

b)Montre que : $\forall x \geq 1, \dfrac{(\ln x)^{2}}{2} \leq \varphi(x) \leq \dfrac{e(\ln x)^{2}}{2(e-1)}$. En Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

c)Dresser le tableau de variation de φ et donner l'allure de sa courbe (Γ) dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

B) $\forall n \in \mathbb{N}$, On pose : $U_n=\int_{0}^{n} f(x)\,dx$. 1)a)Montrer que (U_n) est croissante .

b)Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n-\int_{0}^{n} \dfrac{x}{e^{x}-x}\,dx=n$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$.

2)On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n=U_n-n$. a)Montrer que: $\forall x \in IR_{+}\ ;\ e^{x}-x \geq \dfrac{e^{x}}{2}$.

b)En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq \int_{0}^{n} 2xe^{-x}\,dx$. c)En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq 2$.

d)Montrer que (V_n) admet une limite finie L quand n tend vers $+\infty$.

Exercice N°24: Soit F la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+e^{-|x|}$. On désigne par C_f la courbe F dans un repère orthonormé $(\vec{o},\vec{i},\vec{j})$.1. a. Etudier la dérivabilité de f en 0. b.Dresser le tableau de variation de f.

c. Montrer que la droite $D : y=x$ est une asymptote à C_f .d. Tracer C_f.

2. Soit $K \in]0,1[$ .On désigne par Δ_k la droite d'équation $y=x+k$.

a. Montrer que Δ_k coupe C_f en deux points M_K et N_K d'abscisses respectives $\ln k$ et $-\ln k$

b. On désigne par P_K la partie du plan comprise entre C_f et Δ_k

Montrer que l'axe des ordonnées partage P_K en deux parties de même aire.

c. Soit A_K l'aire de la partie P_K . Calculer A_K puis déterminer $\lim\limits_{K\to 0^+} A_K$

3. On note B le point de C_f d'abscisse 0. On désigne par S_K l'aire du triangle BM_kN_k.

a. Montrer que $S_K=(k-1)\ln k$. b. Montrer que $S_K=2A_K$, si et seulement si, $\dfrac{4(k-1)}{3k+1}-\ln k=0$

c. En déduire qu'il existe une seule valeur de $k \in]0,1[$ telle que $S_K=2A_K$.

RESUME DU COURS

1)Equation différentielle du type : $y' = ay + b$ $(a \in IR \ , b \in IR)$

Définition :

Soient a et b deux nombres réelles. On appelle solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$, toute fonction f définie et dérivable sur IR vérifiant $\forall x \in IR \ f'(x) = af(x) + b$.

Théorème : *) Soit $a \in IR^*$, les solutions de l'équation différentielle y'=ay sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto ke^{ax}$ *avec* $k \in IR$.

*) Soit $a \in IR^*$ et x_0 et y_0 deux réels l'équation différentielle y'=ay admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0 c'est la fonction définie sur IR par : $f : x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$

Théorème : Soit $a \in IR^*$, et $b \in IR$ les solution de l'équation différentielle y'=ay+b sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ *avec* $k \in IR$, de plus pour tout réel x_0, y_0 la fonction

$f : x \mapsto \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \dfrac{b}{a}$ est l'unique solution de y'=ay+b tel que $f(x_0)=y_0$

1) Equation différentielle du type : $y'' + w^2 y = 0$ avec $w \in IR^*$

Théorème : Soit $w \in IR^*$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + w^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur IR par $f(x) = A\sin(wx) + B\cos(wx)$ *avec* $A \in IR$ *et* $b \in IR$.

Concéquence : soit $w \in IR^*$ et x_0 et y_0 deux réels l'équation différentielle $y'' + w^2 y = 0$ admet une unique solution vérifiant $f(0)=x_0$ etet $f'(0)=y_0$ c'est la fonction définie sur IR par

$f(x) = \dfrac{y_0}{w}\sin(wx) + x_0\cos(wx)$

LES EXERCICES

Exercice N°1 : Cocher la ou les réponse(s) correcte(s)

1) Soit l'équation différentielle (E) y'=3y. a/ $f(x) = 3e^{3x}$ est une solution de (E)

b/ $f(x) = 8e^{3x-1}$ est une solution de (E). c/ (E) admet une unique solution.

2) L'équation y'=3y+1 admet : a/ 0 solution b/ une seule solution c/ une infinité de solution.

3) $f(x) = 6e^{5x-5}$ est une solution de l'équation y'=5y vérifiant : a/ $f(1) = 6$ b/ $f(2) = 1$ c/ $f'(1) = 30$.

4) La fonction $x \mapsto \sin x - 2\cos x$ est solution de l'équation différentielle :

a/ $y'' + 2y = 0$ b/ $2y'' + y = 0$ c/ $y'' + y = 0$.

5)Soit l'équation (E): $y'' = -9y$ alors on a :

a/ $f(x) = \alpha\cos 3x + \beta\sin 3x$ est solution de (E) avec α et β deux réels.

b/ $f(x) = a\cos(-3x) + b\sin(-3x)$ est solution de (E) avec a et b deux réels.

c/ $f(x) = 5\cos 3x + \dfrac{7}{3}\sin 3x$ est l'unique solution de (E) qui vérifie $f(0) = 5$ et $f'(0) = 7$.

6) Soit f une solution de l'équation $y' + wy = 0$, on a alors :

a/ f est aussi une solution de l'équation $y''+wy'=0$, b/ f est aussi une solution de l'équation $y''-w^2y=0$.

c) $f''(x)=w^2f(x)-\frac{2}{r}(f'(x)+wf(x))$ avec $r\in IR$. d/ $f(x)=re^{wx}$ avec $r\in IR$.

Exercice N°2 : Résoudre sur IR les équations différentielles : 1) $y'=3y$, 2) $y'+8y=0$,
3) $9y'+5y=0$; 4) $y'+6y=5$; 5) $y'-2=y$; 6) $8y'-5y+2=0$.

Exercice N°3 : Déterminer la solution de l'équation différentielle dans chacun des cas suivants

1) $\begin{cases} y'-5y=0 \\ y(0)=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'=7y-1 \\ y(0)=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y'+y-2=0 \\ y(5)=3 \end{cases}$

Exercice N°4 : Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(3x+8)e^{2x}$.

a) Montrer que f est solution sur IR de l'équation différentielle $y'=2y+3e^{2x}$.

b)En déduire une primitive de f .

Exercice N°5 : Soit l'équation différentielle (E) : $3y'+5y=10x+1$.

1)Montrer que (E) admet une fonction affine f comme solution.

2)Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si la fonction $g-f$ est une solution de l'équation différentielle (E') $3y'+5y=0$. 3)Résoudre alors (E).

Exercice N°6 : Soit l'équation différentielle (E) : $y'-3y=\frac{3}{1+e^{-3x}}$.

1) Soit g une fonction dérivable sur IR et f la fonction définie par $f(x)=e^{3x}g(x)$.

Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x)=\frac{3e^{-3x}}{1+e^{-3x}}$.

2)En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice N°7 : 1)Résoudre sur IR les équations différentielles (E) : $9y''+4y=0$.

2) Déterminer la solution f de l'équation (E) vérifiant : $\begin{cases} f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{3} \\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{9} \end{cases}$ et montrer que

$\forall x\in IR$ $f(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{5\pi}{6}\right)$.

Exercice N°8 : On considère l'équation différentielle (E) : $y''+y=2\sin x$.

1) Montrer que cette équation admet une solution g de la forme $g(x)=ax\cos x$.

2) Résoudre l'équation (E') : $y''+y=0$.

3) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de (E').

4) En déduire les solutions de (E) puis déterminer la fonction f dont la courbe représentative ζ passe par le point E(0,1) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation y = x.

Exercice N°9 : 1) Résoudre sur IR l'équation (E_0): $y'-2y=0$.

2) Soit l'équation (E) : $y'-2y=5\cos x$

a/ Vérifier que la fonction g définie sur IR par $g(x)=\sin x-2\cos x$ est une solution de (E)

b/ Montrer qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si $f-g$ est une solution de (E_0).

c/ Déterminer alors la solution de (E) qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

3) En utilisant ce qui précède déterminer une solution de l'équation différentielle (F): $y''-2y'=5\cos x$.

Exercice N°10 : Une grandeur non nulle y évolue avec le temps selon l'équation $y'(t)=ay(t)$, t temps en années et $a\in IR$. a) Calculer a sachant que cette grandeur double tous les dix ans.

b) Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

Exercice N°11: 1) On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=e^{-x}$

a/ Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=axe^{-x}$ (où a est un réel).

Déterminer le réel a pour que la fonction g soit une solution de l'équation (E).

b/ Montrer que y est solution de (E) si et seulement si (y-g) est solution de (E') : y'+y= 0.

c/ Résoudre alors l'équation différentielle (E) et donner la solution de (E) tel que y(0)= 1.

2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(1+x)e^{-x}$ et soit $V_n=\int_0^n f(x)dx$ où $n\in IN^*$.

a/ Sans intégration par partie, montrer que pour tout $n\in IN^*$, $V_n=2-(2+n)e^{-n}$ b/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Exercice N°12 : On considère l'équation différentielle (E) : $y'-2y=(x\ln x)e^{2x}$ avec $x>0$.

1) Résoudre $y'-2y=0$.

2) On considère la fonction h telle que $\forall x\in]0,+\infty[: h(x)=e^{2x}g(x)$ où g est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$. A)Déterminer g'(x) pour que h soit une solution de (E).

b) Calculer $\int_1^x t\ln t\,dt$ où $x\in]0,+\infty[$ et en déduire g(x) sachant que g(1) = 0.

3) Résoudre (E). 4) Sans intégration par partie calculer $I=\int_1^2\left[(x^2+x)\ln x-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{4}\right]e^{2x}dx$.

Exercice N°13 : On donne l'équation (E) $y''+y'=e^{-x}$.

1)On pose $Z=y'$ écrire l'équation (E_1) qui doit vérifier Z.

2)a/Déterminer le réel a pour que la fonction $\varphi : x\mapsto axe^{-x}$ soit solution de (E_1).

b/Résoudre l'équation (E_1) en Z. 3)Déterminer la solution f de (E) avec $f(0)=f'(0)=0$.

Exercice N°14 :

Soit f une fonction définie et continue sur IR et vérifie $\forall x\in IR : (I) : f(x)=x+\int_0^x f(t)dt$.

1)Montrer que f est dérivable sur IR.

2)Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'=y+1$.

3)Déterminer alors la fonction f.

Exercice N°15 : Une ville compte 10000 habitants. A huit heures du matin 100 personnes apprennent une nouvelle par la radio locale, on note $f(t)$ la fréquence des personnes connaissant la nouvelle à l'instant t (en heure), on choisit 8h du matin comme instant initiale t=0 ainsi $f(0)=0{,}01$. La nouvelle se répand en ville de sorte que la vitesse de propagation $f'(t)$ vérifie $f'(t)=1{,}15f(t)[1-f(t)]$.

1)Soit Z la fonction définie sur IR_+ par $Z=\frac{1}{f}$

a) Montrer que Z est une solution d'une équation différentielle de 1er ordre a coefficients linéaires constants qu'on déterminera.

b)Résoudre cette équation et montrer que $f\ (t)=\dfrac{1}{99e^{-1,15t}+1}$. c)Dresser le tableau de variation de f .

2) Déterminer à partir de quelle heure (à une unité prés) 99% de la population de cette ville connaîtra la nouvelle.

Exercice N°16: 1) Résoudre l'équation différentielle $y''+y=0$.

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivable sur IR telle que pour tout $x\in IR$,

$f'(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=0$, où f' désigne la fonction dérivée de f .

a)Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=\cos x$. Vérifier que g est un élément de E.

b)Soit f un élément de E, vérifier que, pour tout réel x, $f''(x)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

c)En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y''+y=0$.

d)Déterminer alors l'ensemble E.

Exercice N°17 : 1) Résoudre l'équation différentielle (E_1) : y'' + y= 0.

2) Soit l'équation différentielle (E_2) : $y''+\dfrac{1}{x^4}y=0$

a)Soit f et g deux fonctions deux fois dérivables sur IR_+^* telles que $f(x)=xg\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Montrer que f est solution de (E_1) si et seulement si g est une solution de (E_2).

b)En déduire l'ensemble des solutions de (E_2).3) Calculer alors l'intégrale $I=\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}}\dfrac{1}{x^3}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$.

Exercice N°18: Partie A : On considère l'équation différentielle (E) : $y'-3y=\dfrac{-3e}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}$.

On donne une fonction φ dérivable sur IR et la fonction f définie sur IR par $f\ (x\ )=e^{-3x}\varphi(x)$.

1)Montrer que f est dérivable sur IR et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x)-3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.

2)Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur IR et vérifie $\varphi(0)=\dfrac{e}{2}$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur IR par $f\ (x\ )=\dfrac{e^{(1-3x)}}{1+e^{-3x}}$. On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f . 2) Tracer ζ_f .

3) Pour α réel non nul, on pose $I_\alpha=\int_0^\alpha f(x)dx$ .a/

Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α .

b/ Exprimer I_α en fonction de α . c/ Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie C:On définie sur IN^* la suite U par $U_n=\int_0^1 f\ (x\ )e^{\frac{x}{n}}dx$ .1)a)Donner, pour tout n de IN^*,le signe de U_n.

b/ Donner le sens de variation de la suite U. c/ La suite U est-elle convergente ?

2)a/Montrer que pour tout n de IN^*, $I_1 \leq U_n \leq e^{\frac{1}{n}} I_1$ .b/En déduire la limite de la suite U. Donner sa valeur exacte.

Exercice N°19: Partie A : On désigne par f une fonction dérivable sur IR et par f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

❶ Pour tout réel x, $f^2(x) = (f')^2(x) - 4$, ❷ $f'(0) = 2$ et ❸ La fonction f' est dérivable sur IR.

1) a/ Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) \neq 0$. b/ Calculer f(0).

2) Démontrer que, pour réel x, $f''(x) = f(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f .

3) a)Vérifier que $(f'+f)' = f'+f$ et $(f'-f)' = -f'+f$.

b)Résoudre les équation différentielles (E) :y'=y et (E') : y'=-y.

c)En déduire que, pour tout réel x ;$f(x) = e^x - e^{-x}$ On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.1) a)Dresser le tableau de variation de f . b) Construire (C).

2) Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $h(x) = \ln(\tan x)$. a)Montrer que h est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur IR.

b)Montrer que h^{-1} est dérivable sur IR et que $\left(h^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Partie B: Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_0 = \displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{1}{f'(x)}dx$ et $U_n = \displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{f^{2n}(x)}{f'(x)}dx$.

1) Calculer U_0. 2) a)Montrer que, pour $x \in \left[0, \ln\sqrt{3}\right]$, on a $0 \leq \dfrac{f^{2n}(x)}{f'(x)} \leq \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$ b)Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{U_n}{4^n}$

3) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_{n+1} + 4U_n = \dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}$

Partie C : Le but de cette partie est de calculer la limite de la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \frac{1}{2k+1}$.

On pose pour tout entier naturel n, $V_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n U_n$.

1) Montrer que $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$ 2) En déduire que $2\sqrt{3}(V_n - V_{n+1}) = \dfrac{1}{2n+1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

3) Montrer que $S_n = 2\sqrt{3}(V_0 - V_{n+1})$ et déduire que (S_n) converge vers le réel $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Exercice N°20: I) On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = -e^{2x}$. Soit f une fonction dérivable sur IR telle que $f(1) = 0$ et g la fonction définie sur IR par $g(x) = f(x)e^{-2x}$.

1)Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.

2)Déduire l'expression de g(x) puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit une solution de (E).

II)Dans le graphique ci-contre, (Γ) est la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x) = (1-x)e^{2x}$.

1)Déterminer à partir du graphe : a) Le tableau de variation de f b)Le signe de $f(x)$.

2)Déduire le tableau de variation de la fonction $g=f^{2n}$; $\left(n\in IN^*\right)$.

3)Calculer l'aire du domaine limité par (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives :x=0 et x=1.

4)Justifier que la restriction h de f à l'intervalle $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ admet une fonction réciproque h^{-1} et préciser l'ensemble de définition de h^{-1}. Construire les courbes de h et de h^{-1} dans un même repère orthonormé.

II)Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n=\int_0^1(1-x)^n e^{2x}dx$ et $U_n=\frac{2^n}{n!}I_n$.

1)a)Montrer que pour tout $n\in IN^*$, on a: $\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{e^2}{n+1}$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

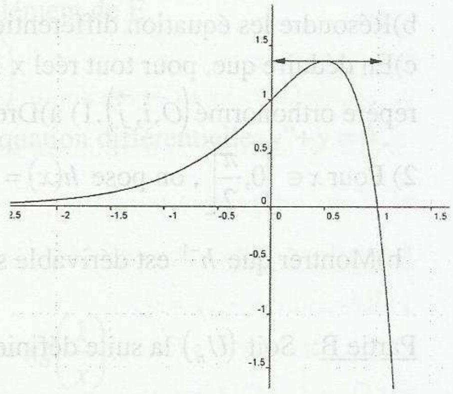
b)Montrer que pour tout $n\in IN^*$, on a : $2I_{n+1}=(n+1)I_n-1$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

2) a)Montrer par récurrence que pour tout $n\in IN^*$: $\frac{2^{n-1}}{n+1}\le 1$.

b) En déduire que pour tout $n\in IN^*$: $U_n\le\frac{2e^2}{n+1}$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $U_{n+1}=-\frac{2^n}{(n+1)!}+U_n$.

b) Montrer alors que pour tout $n\in IN^*$, $U_n=\frac{1}{2}\left[e^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\right]$ Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}$.



Exercice N°20: 1)a) Résoudre sur IR l'équation (E_0): $y'=2y+2$.

Soit l'équation différentielle (E) : $y'=y+2e^{-x}$ .b) Soit g une fonction dérivable sur IR et f la fonction définie par $g(x)=e^x f(x)$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est une solution de (E_0).

c)Déterminer alors les solutions de (E).

2)a)Montrer que $f(x)=e^x-e^{-x}$ est la solution de (E) qui s'annule en 0 .b)Dresser le tableau de variation de f .

c)Construire (C). d) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ et expliciter $f^{-1}(x)$

3)Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction H_n définie par $H_n(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{f(x)}}(1+\log t)^n dt$.

a) Justifier que H_n est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. b) Calculer $H_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} H_1(x)$.

4)a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $H_{n+1}(x)=\frac{1}{f(x)}\left[1-\log(f(x))\right]^{n+1}-(n+1)H_n(x)$.

b)En utilisant la formule de biome de newton montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(f(x))}\left[1-\log(f(x))\right]^{n+1}=0$

b) Montrer par récurrence sur n que la fonction H_n admet en $+\infty$ une limite finie non nulle L_n.

c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $L_n=(-1)^{n-1}n!\frac{1}{e}$.

5) Montrer que H_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $H'_n(x)=\frac{-e^x-e^{-x}}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}\left[1-\log(f(x))\right]^n$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

6) Discuter, suivant n, le tableau de variation de H_n (on ne demande pas de calculer $H_n(0)$).

RESUME DU COURS

Définition : Soit I un point et k un réel non nul. On appelle homothétie de centre I et de rapport k l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

Théorème :Soit k un réel non nul et différent de 1. une application f est une homothétie de rapport k, si et seulement si, pour tous points M et N d'images M' et N' par f ; $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

Théorème :Toute homothétie conserve les mesures des angles orientées.

Théorème :La composée de deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2 est une homothétie de rapport k_1k_2 si $k_1k_2 \neq 1$; une translation $k_1k_2 = 1$.

Théorème :La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $k \neq 1$ est une homothétie de rapport k.

Théorème :Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. l'application f est une homothétie de rapport $k \neq 1$, si et seulement si, il existe un nombre complexe b tel que $z' = kz + b$. De plus, l'affixe z_A du centre A de l'homothétie f vérifie $z_A = \dfrac{b}{1-k}$

Théorème :Soit k un réel strictement positif. On appelle similitude de rapport k, toute application du plan dans lui-même telle que pour tous points A et B d'images respectives A ' et B ' ; $A'B' = kAB$.

Théorème :La composée de deux similitudes de rapports respectifs k et k' est une similitude de rapport kk'.

Théorème :Une application du plan dans lui-même est une similitude, si et seulement si, elle est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Théorème :Pour tous les points A, B ,C et D d' images respectives A', B', C' et D' par une similitude de rapport k ; $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = k^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

Théorème :Deux similitudes qui coïncident sur trois points non alignés coincident sur tout le plan.

Propriétés :Soit f , g et h trois similitudes. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$; $f = g$, si et seulement si, $h \circ f = h \circ g$

Définition :On dit qu'une similitude est directe si elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement. On dit qu'une similitude est indirecte si elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement

Théorème :Toute similitude directe conserve les mesures des angles orientées.
Toute similitude indirecte change les mesures des angles orientées en leurs opposées.

Théorème :- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
- La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.
- La composée d'une similitudes directe et une similitude indirecte est une similitude indirecte.
- La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.
- La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

Théorème :Soit A , B , C et D des points du plan tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$. Il existe une unique similitude directe qui envoie A sur C et B sur D. Il existe une unique similitude indirecte qui envoie A sur C et B sur D.

Théorème :Soit f une similitude directe et A , B , C et D des points du plan tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. Soit A' , B' , C' et D' sont les images respectives par f des points A , B , C et D,
alors $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C'D'}}\right)[2\pi]$. En désignant par θ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}\right)$, on dit que f est une similitude d'angle θ.

Théorème :Si f et g deux similitudes directes d'angles respectifs θ et θ', alors $f\circ g$ est une similitude d'angle $\theta+\theta'$. f^{-1} est une similitude d'angle $-\theta$

Théorème :Toute similitude directe de rapport différent à 1 admet un unique point fixe appelé centre de similitude.

Théorème :Une similitude directe de rapport différent de 1 est parfaitement déterminée par la donnée de son centre , son rapport et son angle le centre, le rapport et l'angle d'une similitude directe sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.

Une application f est une similitude directe de rapport $k\neq 1$, de centre I et d'angle θ, si et seulement si, pour tout point M distinct de I, d'image M' ; $IM'=kIM$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'}}\right)\equiv\theta[2\pi]$

Théorème :Toute similitude directe de centre I, de rapport $k\neq 1$ et d'angle θ se décompose sous la forme $f=h\circ r=r\circ h$ où h est l'homothétie de centre I, de rapport k et r la rotation de centre I et d'angle θ .Cette décomposition s'appelle forme réduite de f.

Théorème :Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.l'application f est une similitude de centre I, de rapport $k\neq 1$ et d'angle θ, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tel que $z'=az+b$;avec $a=ke^{i\theta}$ et $z_I=\frac{b}{1-a}$ est l'affixe de I.

Théorème :Une similitude indirecte de rapport différent à 1 admet un unique point fixe, appelé centre de similitude.

Théorème :Soit f une similitude indirecte de centre I et de rapport $k\neq 1$ et h l'homothétie de centre I et de rapport k. il existe une droite D telle que f se décompose de manière unique sous la forme $f=h\circ S_D=S_D\circ h$; où S_D est la symétrie orthogonale d'axe D. dans ce cas, la droite D est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$, où $M'=f(M)$. Cette décomposition est appelée forme réduite de f. la droite D est appelée axe de similitude de f.

Théorème :Une similitude indirecte de rapport différent de 1 est parfaitement déterminée par son rapport , son centre et son axe , qui sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.

L'axe D d'une similitude indirecte de centre I et la perpendiculaire à D passant par I sont globalement invariants par f. si f une similitude de centre I et de rapport k alors $f\circ f$ est une homothétie de centre I et de rapport k^2

Propriété :Soit f une similitude de centre I , de rapport différent à 1 et d'axe D. si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D, alors $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{IM'}}\right)\equiv-\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{IM}}\right)[2\pi]$, pour tout M distinct de I, d'image M' .la droite D porte donc la bissectrice de $\widehat{MIM'}$

Théorème :Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. l'application f est une similitude indirecte de centre I et de rapport $k\neq 1$,si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tel que $z'=a\bar{z}+b$ Dans ce cas $k=|a|$ et $z_I=\frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$ est l'affixe de I

LES EXERCICES

Exercice 1 : Cocher la ou (les) réponse(s) correcte(s)

1) Une similitude directe qui fixe deux points distincts est :

a) Symétrie orthogonale b) translation de vecteur non nul c) l'identité du plan

2) L'image par une similitude de rapport $\frac{1}{5}$ d'un triangle d'aire A est un triangle dont l'aire est égale à :

a) A $b)25A$ c) $\frac{A}{25}$

3) Soit $h_{(\Omega,-3)}$ et $r(\Omega,\frac{\pi}{2})$, alors h o r est $a)$ $S_d\left(\Omega,3,\frac{-\pi}{2}\right)$; $b)S_d\left(\Omega,-3,-\frac{\pi}{2}\right)$; $c)S_d\left(\Omega,3,\frac{\pi}{2}\right)$

4) Soit f la transformation qui à M(z) associe M'(z') tel que $z'=4a^2z+a+1$ où a est un nombre complexe.

a) f est une translation équivaut $a=\frac{1}{2}$ ou $a=-\frac{1}{2}$ b) f est une similitude du plan $\Leftrightarrow \left|4a^2\right|=1$

c) si $a=e^{i\frac{\pi}{4}}$, alors f est une similitude directe de rapport 4 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

5) Soit f la transformation qui à M(z) associe M'(z') tel que z' = (1-i) $\bar{z}$+ 2i.

a) f admet un seul point invariant.

b) f est la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et d'une Symétrie orthogonale.

c) fof est une homothétie.

6) Soit les points A , B , C et D d'images respectifs A', B', C' et D' par une similitude de rapport k,On a :

a) $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'}=k\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'}=k^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

7) La perpendiculaire à l'axe d'une similitude indirecte f de centre A et de rapport $K\neq 1$ est

a) $\left\{M;\overrightarrow{AM'}=-k\overrightarrow{AM}\text{ et } M'=f(M)\right\}$ b) $\left\{M;\overrightarrow{AM'}=k\overrightarrow{AM}\text{ et } M'=f(M)\right\}$ c) $\left\{M;\overrightarrow{AM'}=\overrightarrow{AM}\text{ et } M'=f(M)\right\}$

8) L'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=2i\bar{z}-3$ est une similitude indirecte de rapport 2, de centre $A(1+2i)$ et d'axe :

a) $\Delta: x+y+1=0$ b) $\Delta: x-y+1=0$ c) $\Delta: x+y-1=0$

9) Soit Δ et Δ' deux droites perpendiculaires en un point E, on pose $g=S_\Delta o h_{(E,2)} o S_\Delta$ alors :

a) g est un déplacement b) $g=h_{(E,-2)}$ c) $g=h_{(E,2)}$

Exercice 2 : Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse :

1) Une similitude qui fixe deux points distincts est l'identité du plan.

2) Soient f et g deux similitudes directes et soit $\varphi=fogof^{-1}og^{-1}$, alors φ est une translation.

3) Il existe une similitude indirecte g telle que $g^{101}=\underbrace{gogo..g}_{101 fois}=Id_P$

4)S similitude directe de rapport k >0 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.Alors SoS est une homothétie de rapport $-k^2$.

5) S une similitude indirecte. L'axe Δ de S est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$ où M' = S(M).
6) Soit k un réel non nul et différent de 1. Soit A et B deux points distincts du plan. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport k et par t la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
Alors $h \circ t$ est une homothétie de centre un point de la droite (AB).

7) Le plan est un muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f l'application du plan dans lui-même de forme complexe $z \mapsto 2i\bar{z}$, f est une similitude indirecte d'axe la droite d'équation $y = x + 1$.

Exercice 3: ABCD est un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I = A * B et J = A*D.
La perpendiculaire à la droite (BD) passant par D coupe la droite (OJ) en E.
1) Soit S la similitude directe définie par S(A) = J et S(B)=D.
a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
b) Déterminer les images des droites (BD) et (AD). c) Déterminer alors S(D).
2) On désigne par ζ le cercle de diamètre [BD] et ζ' le cercle de diamètre [AJ].
a) Soit Ω le centre de S. Montrer que $\Omega \in \zeta \cap \zeta'$ puis construire Ω. b) Caractériser SoS.
c) Montrer que Ω, B et E sont alignés.
3) Soit S' la similitude directe de centre Ω et telle que S'(B) = A.
a) Montrer que S'oS = SoS'. b) Déterminer S'(D). c) Caractériser S'.

Exercice 4: Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centrer I tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
E = D*C et f la similitude directe qui transforme D en A et E en I.
1) a) Déterminer le rapport et l'angle de f. b) Montrer que C est le centre de f.
2) Soit g la similitude directe telle que g (A) = B et g (I) = A.
a) Déterminer le rapport et l'angle de g.
b) On note Ω le centre de g. Montrer que Ω est un point du cercle ζ_1 de diamètre [I B]
c) Montrer que Ω est un point du cercle ζ_2 passant par A et B et tangent à (AC). Construire Ω.
3) Soit $\varphi = gof$.
a) Montrer que φ est une homothétie dont on précisera le rapport.
b) Déterminer $\varphi(D)$ et $\varphi(E)$. Construire le centre de φ
4) Soit $\psi = g^{-1}of$. a) Montrer que ψ est une rotation dont on déterminera l'angle.
b) Déterminer $\psi(D)$ et $\psi(I)$. Préciser, alors, le centre de ψ.

Exercice 5 : On donne deux triangles ABC et ACD rectangles et isocèles tels que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I = D*C et J = C*B.
1) Soit S la similitude directe de centre A qui transforme D en C.
a) Déterminer le rapport et l'angle de S. b) Montrer que S(C) = B et S(I) = J.
2) Soit f la similitude directe telle que f(C) = B et f (B) = A.
a) Déterminer le rapport et l'angle de f.
b) On désigne par Ω le centre de f. Déterminer fof(C), caractériser fof et en déduire que $(\Omega A) \perp (\Omega C)$.
c) Montrer que $(\Omega J) \perp (\Omega C)$. d) En déduire que Ω est le projeté orthogonal de C sur (AJ).

3) a) Caractériser $So f^{-1}$.

Soit M un point du plan tel que $S(M) = M_1$ et $f(M) = M_2$

b) Montrer que BM_2M_1 est un triangle rectangle et isocèle en B de sens direct.

c) La perpendiculaire en A à la droite (AI) coupe (ΩC) en K. Montrer que $S(\Omega) = K$.

d) En déduire la nature du triangle $B\Omega K$

Exercice 6: Soit ABC un triangle rectangle et isocèle de sens direct. I = B*C et soit S la similitude directe de centre A et transformant B en I.

1) Caractériser S.

2) On suppose que $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan. On pose $M_0 = B$, $M_1 = S(M_0)$ et $M_{n+1} = S(M_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On désigne par z_n l'affixe de M_n.

a) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n. b) Montrer que $z_n = \dfrac{e^{in\frac{\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Aff\left(\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right) = \dfrac{e^{i(n+3)\frac{\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose L_n la longueur du polygone $M_0M_1M_2...M_n$. Montrer que

$L_n = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S^n = \underbrace{SoSo..S}_{n\,fois}$.

a) Montrer que S^n est une similitude directe dont on caractérisera la fonction de n.

b) A l'aide de S^n, retrouver le résultat 2) b).

Exercice 7: Soit l'application $f_m : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que z' = (m-i)z + 1.

1) a) Déterminer m pour que f_m soit une translation.

b) Déterminer m pour que f_m soit une homothétie.

2)a) Déterminer la transformation complexe associée à l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de centre O.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiquement de l'application $g = f_1 oh$.

3) Nommons $M_0 = O$, $M_1 = g(M_0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $M_{n+1} = g(M_n)$.

Posons z_n l'affixe du point M_n.

a) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n. b) Déduire z_n en fonction de n.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{n+8} = M_n$, que le milieu du segment $[M_nM_{n+4}]$ est indépendant de n et que le quadrilatère $M_nM_{n+2}M_{n+4}M_{n+6}$ est un carré.

Exercice N° 8 : ABC est un triangle. On désigne par S la similitude directe de centre A qui transforme B en C et par h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{4}$. Soit $f = h \circ S$.

1) Montrer que f admet un seul point invariant Ω

2) a) Construire les points I et J images respectives de A et B pat f.b) Construire le point K image de I par f

3) a) Construire l'ensemble $\Gamma_1 = \left\{M \in P \text{ telque } \left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MI}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]\right\}$

b) Soit $\Gamma_2 = \left\{M \in P \text{ telque } \left(\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MJ}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]\right\}$ Vérifier que I appartient à Γ_2 et construire Γ_2

c) En déduire une construction de Ω

Exercice 9: Soit ABCD un rectangle de centre O tel que AB = 2 AD et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, I = A*B ,

J = C*D et K = D*J. Soit h une similitude directe de centre A qui transforme C en O.

1) Montrer que h est une homothétie

2) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(D) = B$ et $\sigma(K) = C$. Préciser le rapport de σ.

3) On pose $\varphi = ho\sigma$; Préciser $\varphi(D)$ et $\varphi(K)$. En Déduire que φ est une symétrie axiale dont on précisera l'axe. Caractériser, alors σ.

Exercice 10 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On pose O = B*C, E le point du plan tel que AOEC est un losange. I le projeté orthogonal de O sur (AB).

1) Soit f la similitude indirecte qui transforme E en I et C en O. Déterminer le rapport de f.

2) a) Déterminer les images des points A et C par l'application $foS_{(OB)}$.

b) En déduire que $foS_{(OB)}$ est une homothétie c) Caractériser f.

Exercice N° 11 : ABC est un triangle rectangle et isocèle tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On pose $D = S_A(C)$.

Soit σ la similitude indirecte définie par $\sigma(A) = B$ et $\sigma(B) = C$.

1) Déterminer le centre W de σ et vérifier que W = D .

2) Le plan P est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Soit $f : P \to P$; $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = -(1+i)\overline{z} + 1$. a) Montrer que f est un similitude indirecte ; b) Montrer que $f = \sigma$

Exercice 12 Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en B tels que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On note O = A*C, H = O*A et $S_{(BC)}(H) = H'$. Soit S la similitude directe de centre H qui envoie A en B.

1) a) Montrer que AOB est un triangle équilatéral.

b) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S. c) Déterminer l'image de B par S.

2) Soit σ la similitude indirecte qui envoie A en B et B en C.

a) Montrer que σ admet un seul point invariant Ω appartenant à (AC).

b) Caractériser $g = \sigma o S^{-1}$.

c) Déterminer $\sigma(H)$ et déduire que $\Omega \in (BH')$. d) Construire, alors, le centre Ω et l'axe de σ.

Exercice N° 13 : Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle rectangle en B tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC) et H'le symétrique de H par rapport à (BC).

1) Soit S la similitude directe de centre H qui envoie A en B.
a) Déterminer le rapport et l'angle de S ; b) Déterminer les images de B et I par S
2) Soit f la similitude indirecte qui envoie A en B et B en C.
a) Montrer que f admet un seul point invariant Ω que l'on précisera . b) Préciser l'axe de f.
3) Soit $g=f\circ S^{-1}$. a) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$ puis caractériser g ; b) Déterminer $f(H)$.
4) Soit φ la similitude indirecte de centre H et telle que $\varphi(I)=J$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f\circ\varphi^{-1}$

Exercice 14: $R(O,\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé du plan.

1) $f:P\to P,\ M(x,y)\mapsto M'(x',y')$ tel que $\begin{cases}x'=x+y+1\\ y'=x-y\end{cases}$

2) Montrer que la forme complexe de f est : $f:M(z)\mapsto M'(z')$ tel que $z'=(1+i)\bar{z}+1$.
3) Caractériser f.

Exercice 15 : ABCD est un parallélogramme de centre I tel que CB = 2 CD.
1) Soit f la similitude indirecte qui transforme D en C et C en B.
a) Montrer que f admet un seul point invariant Ω.
b) Montrer que f o f est une homothétie . c) En Déduire que $\overrightarrow{D\Omega}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.
d) Soit O le centre de gravité du triangle ACD. Montrer que D = Ω *O. Construire Ω.
e) Prouver que l'axe Δ de f est la médiatrice de [OC]
2) Soit $g=foS_{(OC)}$. a) Montrer que g est une homothétie dont on déterminera le rapport.
b) Déterminer l'image de Δ par g. .c) Montrer que le centre de g est le point d'intersection de Δ et (BC).

Exercice16: Soit ABCD un rectangle de centre O tel que AB = 2 AD et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [JD], h homothétie de centre A qui transforme C en O et R la rotation de centre J qui transforme I en D.
1) On pose s = Roh. .a) Montrer que s est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle.
b) Préciser s(B) et s(C), en Déduire une construction géométrique du centre Ω de s.
c) Soit E le point tel que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CE}$. Montrer que $\Omega E=2\Omega J$ et que $(\Omega E)\perp(\Omega J)$.
2) On suppose dans cette question que $(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé direct du plan.
a) Déterminer la transformation complexe associée à s.
b) En Déduire l'affixe z_0 du centre Ω de s.
3) Soit s' la similitude directe qui fixe D et transforme A en C. Caractériser les deux applications s'os et s o s'.
4) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(D)=B$ et $\sigma(K)=C$.

a) Préciser le rapport de σ.
b) On pose $\varphi = h o \sigma$. Préciser $\varphi(D)$ et $\varphi(K)$, en Déduire que φ est une symétrie axiale dont on précisera l'axe Δ.
c) Caractériser, alors, σ

Exercice 17: Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .On note I = A*B et J = A*D.

1) On note S la similitude directe telle que S (D)=O et S(C) =I.
a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.
b) Soit Ω le centre de S. Trouver une construction géométrique de Ω.
2) a) Préciser les images respectives des droites (BD) et (BC) par S.
b) Determiner S (B) et S (A). c) Montrer que Ω est le barycentre des points pondais (B, 1) et (J, 4).
3) On suppose dans cette question que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé direct du plan.
a) Déterminer l'application complexe associée à S. b) En Déduire l'affixe Z_0 du point Ω centre de S.
4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et h = RoS. a) Préciser h(B) puis caractériser h.
b) On note Ω' le milieu de $[\Omega B]$. Montrer que le triangle $O\Omega\Omega'$ est rectangle et isocèle.
5) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(D) = O$ et $\sigma(C) = I$.
a) Vérifier que $\sigma = S_{(OI)} o S$ puis déterminer $\sigma(B)$. b) Donner, alors, la forme réduite de σ.
6) On pose $\varphi = \sigma o S^{-1}$. a) Montrer que φ est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.
b) Pour tout point M du plan, on pose M' = S (M) et M'' $= \sigma(M)$.
Montrer que M' et M'' sont symétriques par rapport à une droite que l'on précisera.
7) a) Déterminer l'application complexe associée à σ.
b) En déduire l'ensemble des points $\zeta = \left\{ M(z) \text{ telque } \left| -\frac{1}{2} i \bar{z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right| = 2 \right\}$.

Exercice18: Dans un plan orienté on considère un triangle rectangle ABC tel que AB = 2 AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I le milieu de [AB], par D et E les points tels que : $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AC}$.

1) Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en A. a) Déterminer le rapport k et l'angle α de S.
b) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le projeté orthogonal du point A sur (BC).
c) Montrer que S (I)= E.
2) Soit f $= S o R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}$ avec $R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}$ étant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Préciser f (A) et déterminer la nature et leurs éléments caractéristiques de f.
3) Soit $\sigma = S o S_{(AC)}$ avec $S_{(AC)}$ étant la symétrie orthogonale d'axe (AC).
a) Montrer que σ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
b) Déterminer $\sigma o \sigma(C)$ et en déduire que le centre ω de σ est le symétrique de D par rapport à C.
c) Montrer que l'axe de σ est la médiatrice de [AD].
4) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $\sigma(M) = S(M)$.

5) On suppose dans cette question que $\left(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}\right)$ est repère orthonormé direct du plan.

a)Déterminer la forme complexe de σ . b)Déterminer l'ensemble des points $\xi = \left\{M(z) telque \left|-2i\,\overline{z}+2\right| = \sqrt{2}\right\}$.

Exercice 19: Dans le plan rapporté, on considère un triangle rectangle ABC tel que :
$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB= 2AC. Soit I = A*C et J= A*B, (ζ_1) le cercle de diamètre [AC] et (ζ_2) le cercle de diamètre [AB]. Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en A.

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de S. b) Soit H le centre de S, montrer que $H \in \zeta_1 \cap \zeta_2$. Construire H.

c) Montrer que H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

2) a) Montrer que $S(\zeta_1) = \zeta_2$.

b)La droite (JC) recoupe le cercle ζ_1 en E.On pose E' = $S(E)$ .Montrer que A,Eet E'sont alignés et construire E'.

3) Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et ψ = SoR . Déterminer $\psi(I)$ et construire le centre K de ψ.

4) On pose f $= SoS_{(HI)}$. Determiner f (H) et f (I). Donner les éléments caractéristiques de f.

5) Soit g la similitude indirecte qui transforme H en A et A en B.

a) Montrer que g admet un unique point invariant.

b) Montrer que g [(BC)]= (AC). c) Vérifier que gog est une homothétie.

d) Montrer, alors, que g[(AC)]=(BC). e) Déduire, alors, le centre et l'axe de g.

6) On suppose dans cette question que $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan.

a) Déterminer l'application complexe de g. b) Déterminer l'affixe de H et le rapport de g.

c) Déterminer l'ensemble $\gamma = \left\{M(z) telque \left|(-2i-1)\overline{z}+2\right| = \left|(-2i+1)\overline{z}+2-i\right|\right\}$.

Exercice 20 : Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 4 cm) .Soit Ω le point d'affixe 2.On donne r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$, et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1/On pose $\sigma = h\,o\,r$. a)Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b)Montrer que l'écriture complexe de : $\sigma : z \mapsto \frac{1+i}{2}z + 1 - i$.

c)Soit M un point quelconque du plan distinct de Ω, d'affixe z . On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M' .Montrer que $\frac{z-z'}{2-z'} = i$.

d)Déduire des questions précédentes la nature du triangle ΩMM' , pour M distinct de Ω.

2/ Soit M_0 le point d'affixe 2+i . On considère la suite(M_n) de points du plan définies par : pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = \sigma(M_n)$. a)Placer dans le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$ les points $\Omega, M_0, M_1, M_2, M_3$ et M_4.

b)Montrer par récurrence que ,pour tout entier naturel n ,l'affixe z_n de M_n est donnée par : $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$.

c)Soit p un entier naturel, montrer que tous les points M_{4p+2} appartiennent à l'axe des abscisses.

RESUME DU COURS

I)Définition d'une conique et de ses éléments caractéristiques.

Définition : Soit D une droite et F n point n'appartenant pas à D et e un réel strictement positif.
A chaque point M du plan, on associe son projeté orthogonal H sur la droite D.
L'ensemble (C) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ est appelé conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.
La perpendiculaire à D menée par F est l'axe focal de la conique.

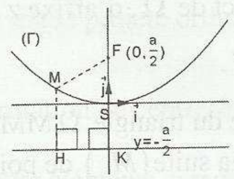
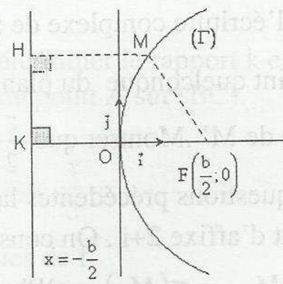
Caractérisation de l'ensemble (C)

(C) est une …	Parabole	Ellipse	Hyperbole
Si et seulement si,	e = 1	0 < e <1	e > 1

* Si $e \neq 1$, c'est-à-dire si la conique est une ellipse ou une hyperbole, l'axe focal rencontre la conique en deux points distincts,ces points sont appelés les **sommets** de l'ellipse ou de l'hyperbole et ils sont les barycentres respectifs des systèmes{ (F,1) ;(K,e)} et {(F,1) ;(K, - e)} avec K est le projeté orthogonal de F sur D.
Pou l'ellipse ces sommets sont appelés sommets principaux. L'ellipse possède deux autres sommets dits secondaires.
* Si e = 1, c'est-à-dire si la conique est une parabole, l'axe focal rencontre la conique en un seul point, appelé sommet de la parabole.

II) Equation réduite d'une conique.

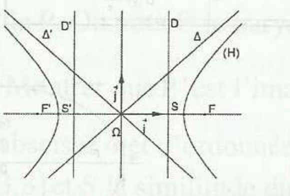
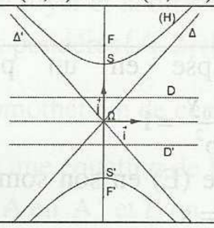
1) Parabole

Equation	$x^2 = 2ax \ (a \neq 0)$	$y^2 = 2bx \ (b \neq 0)$
Foyer	$F\left(0, \frac{a}{2}\right)$	$F\left(\frac{b}{2}, 0\right)$
Directrice	$D : y = -\frac{a}{2}$	$D : x = -\frac{b}{2}$
Axe focal	$(S, \vec{j})$	$(S, \vec{i})$
Figure		

*K est le point d'intersection de l'axe focal et de la directrice.*S est le milieu de [FK].
*On appelle paramètre d'une parabole la distance du foyer à la directrice. *On note p ce paramètre. P = FK ,
$FS = \frac{p}{2}$.

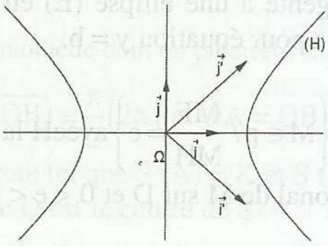
Tangente à une parabole en un point $M_0(x_0,y_0)$	
$(T): x_0x = a(y+y_0)$	$(T): y_0y = b(x+x_0)$
Tangente au sommet	
$T_S: y=0$	$T_S: x=0$
$\Gamma = \left\{ M \in p / \dfrac{MF}{MH} = 1 \right\}$ avec H la projection orthogonal de M sur D	

2) Hyperbole

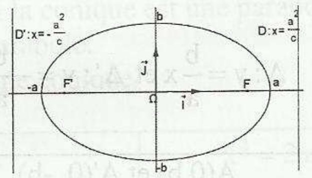
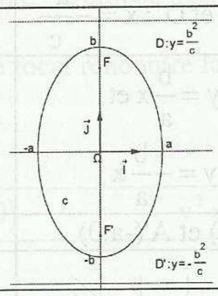
Equation	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
c	$c = \sqrt{a^2+b^2}$	$c = \sqrt{a^2+b^2}$
Excentricité	$e = \dfrac{c}{a}$	$e = \dfrac{c}{b}$
Foyers	F(c,0) et F'(- c,0)	F(0,c) et F'(0,-c)
Directrices	$D: x = \dfrac{a^2}{c}$ et $D': x = -\dfrac{a^2}{c}$	$D: y = \dfrac{b^2}{c}$ et $D': y = -\dfrac{b^2}{c}$
Asymptotes	$\Delta: y = \dfrac{b}{a}x$ et $\Delta': y = -\dfrac{b}{a}x$	$\Delta: y = \dfrac{b}{a}x$ et $\Delta': y = -\dfrac{b}{a}x$
Sommets	A(a, 0) et A'(-a,0)	A(0,b) et A'(0, -b)
Figure		

Equation à une hyperbole rapportée à ses asymptotes

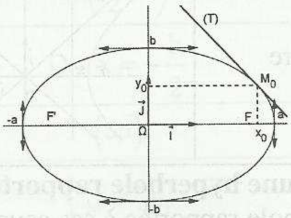
Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a une équation de la forme XY = k où k est un réel non nul.



3) Ellipse

Equation	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>b$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a<b$
c	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{b^2-a^2}$
Excentricité	$e=\frac{c}{a}$	$e=\frac{c}{b}$
Foyers	F(c,0) et F'(- c,0)	F(0,c) et F'(0,-c)
Directrices	$D:x=\frac{a^2}{c}$ et $D':x=-\frac{a^2}{c}$	$D:y=\frac{b^2}{c}$ et $D':y=-\frac{b^2}{c}$
Sommets principaux	A(a, 0) et A'(-a,0)	B(0,b) et B'(0, -b)
Sommets secondaires	B(0,b) et B'(0, -b)	A(a, 0) et A'(-a,0)
Figure		

Tangente à une ellipse en un point $M_0(x_0,y_0)$ $(T):\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$



La tangente à une ellipse (E) en son sommet S(a,0) a pour équation x = a.
La tangente à une ellipse (E) en son sommet L(0,b) a pour équation y = b.

$(E)=\left\{M\in p/\frac{MF}{MH}=e\right\}$ avecH la projection orthogonal de M sur D et $0<e<1$.

Equation non réduite d'une conique : Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'ensemble des points M(x,y) du plan tels que

$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ où A,B,C,D et E sont des réels est une courbe dont la nature est donné par le tableau suivant :

$A\times B$	Nature de courbe
$A\times B=0$	Parabole ou deux droites parallèles ou le vide
$A\times B<0$	Hyperbole ou deux droites sécantes.
$A\times B>0$	Ellipse ou un cercle ou un point ou le vide.

LES EXERCICES

Exercice N°1 : Le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.Cocher la ou les réponses correctes.

1) l'équation $y^2 = -4x$ est celle d'une parabole de :

a) paramètre –2 b) paramètre 2 c) de foyer F (0, – 1) d) de directrice D : x = 1

2) $F(0, \frac{3}{2})$ alors l'équation de la parabole de foyer F est : a) $y^2 = 3x$ b) $y^2 = 6x$ c) $x^2 = 6y$

3) L'équation $y = x^2 + 2x + 2$ est celle d'une parabole de :

a) paramètre 1 , b) sommet S (–1, 1) , c) foyer $F(0, \frac{1}{4})$, d) foyer $F(-1, \frac{5}{4})$.

4) L'équation $2x - 5 = y^2 + 4y$ est une parabole de :

a) sommet $S(\frac{1}{2}, -2)$, b) Foyer F (1 , –2) , c) directrice $D : x = -\frac{1}{2}$, d) directrice $\left(O,\vec{j}\right)$.

Exercice N°2 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ on considère l'ensemble

$(P) = \{M(z) \text{ tel que } 2|z - i| = |z - \bar{z}|\}$.

1) a) Donner une équation cartésienne de (P) dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

b) En déduire que(P) est une parabole dont on précisera une équation réduite .

2) a) Préciser la directrice et le foyer F de (P). b) Tracer (P).

Exercice N° 3 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(3,0)$; $B(-3,0)$ et $I(1,0)$ .et les courbes $P: y^2 = x - 3$ et $P': 8y^2 = 2x - 3$.

1) Montrer que P est une parabole dont on précisera le sommet, le foyer et la directrice.

2) Soit $M(a,b)$ un point de P. On note G le barycentre des points pondérés$(A,2);(B,1)$ et $(M,1)$.

a) Montrer que $G \in P'$.b) Montrer que P 'est l'image de P par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{1}{4}$.

3) Soit E le point de P d'abscisse 4 et d'ordonnée positive. Ecrire une équation de la tangente à P en E.

4) Soit $A'(3,-3)$ et $B'(-3,3)$ et S la similitude directe qui envoie A en A' et B en B'.

Donner l'écriture complexe de S et préciser son angle et son rapport.

5)Soit $\Gamma = S(P)$ et $\Gamma' = S(P')$. Montrer que Γ' est l'image de Γ par une homothétie dont on précisera le rapport.

Exercice N°4 : Soit OAB un triangle rectangle isocèle en O tels que$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et OA = OB =2.On pose I = O * A , J = O * B , K = A * B. On désigne par S la similitude directe tel que S (A) = K et S (K) = J

A) 1) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S. 2) Montrer que O est le centre de S.

B) On considère le repère orthonormé $R = \left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.1) Déterminer l'application complexe associée à S.

2)Soit D l'ensemble des points M (x , y) vérifiant : $x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y = 0$ selon le repère R .

a) Soit M (x, y) et M' (x', y') tel que M' = S (M) . Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

b) Donner alors une équation cartésienne de (P') image de (P) par S.

c) Montrer que(P') est une parabole dont on précisera le foyer F' et la directrice D'

d) En déduire que P est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice

Exercice N°5: Soit t un paramètre réel. On considère dans C l'équation : (E_t) : $z^2+(1-t^2-2ti)z+t^2-2+2ti=0$

1) Résoudre (E_t).

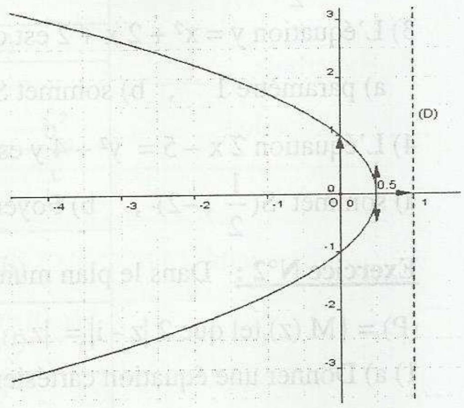
2) Soit M'' l'image de la solution non réelle de (E_t). Montrer que lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, M'' décrit une parabole (P) dont on donnera le foyer et la directrice. Tracer (P) dans un autre repère orthonormé.

Exercice N°6 : Répondre par vrai ou faux :

1)Une droite qui rencontre une parabole en un seule point lui est tangente

2) Il existe une seule parabole de foyer F et de directrice D fixés.

3) Deux paraboles (C) et (C') se déduisent l'une de l'autre par homothétie ou translation si et seulement si les axes (D) et (D') respectifs de (C) et (C') sont parallèles.



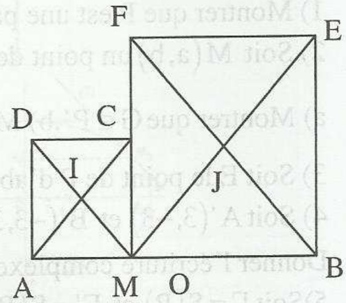
Exercice N°7 : Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est de 2 cm On considère la parabole (P) de foyer O et de directrice la droite (D) d'équation $x = 1$.

1) Ecrire une équation de (P) .

2) Soit M un point de (P), H le projeté orthogonal de M sur (D) , I le milieu du segment [OH] , A le point d'affixe 1et B le point d'affixe 2.

Montrer que $2\left(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MH}\right)=2\left(\overrightarrow{HO},\overrightarrow{HB}\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ En déduire que $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MH}\right)=\left(\overrightarrow{HO},\ \overrightarrow{HB}\right)+2k\pi\ \ k\in\mathbb{Z}$.

3) On choisit $\theta\in[0,2\pi[$, tel que $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MH}\right)=\theta+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ .Montrer que $\dfrac{z-h}{z}=\dfrac{h-2}{h}=e^{i\theta}$, et que θ est différent de zéro. En déduire que $z=\dfrac{2}{\left(1-e^{i\theta}\right)^2}$.



Exercice N° 8 : Dans la figure ci-contre $[AB]$ est un segment de longueur 4 et de centre O ; M est un point variable sur $[AB]$. Les quadrilatères AMCD et MBEF sont deux carrés adjacents de centres respectifs I et J. Soit $\vec{i}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ et $\vec{j}$ le vecteur tel que $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé direct. On pose α l'abscisse de M dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Déterminer en fonction de α les coordonnées du point N, intersection des droites (AE) et (MF).

b) Montrer que lorsque M varie le point N varie sur une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

2) Montrer que les points N, I et J sont alignés.

3) Soit H le projeté orthogonal de N sur la directrice de (P). Montrer que IH = IO.

4) Montrer que (IJ) est une tangente à la parabole.

Exercice N°9 : Soit P la parabole d'équation $y^2 = 4x$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ soit $M\left(\frac{\alpha^2}{4},\alpha\right)$, $N\left(\frac{\beta^2}{4},\beta\right)$ avec $\alpha>0$ et $\beta>0$ deux points de (P) tels que O , M , N soient deux a deux distincts ,

Δ la tangente à (p) en M déterminer la valeur minimale de MN pour que (MN) $\perp$ Δ.

Exercice N°10: Le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Indiquer toute les réponses correctes

1) Soit (H) l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = -4$, alors (H) d'axe focal :

a) $\left(O,\vec{i}\right)$ b) $\left(O,\vec{j}\right)$ c) la droite D : $y = x$.

2) l'équation $x^2 - 9y^2 = 36$ est une hyperbole de centre O et : a) de sommets s (0, 6) et s' (0 , – 6) , b) de foyers F ($\sqrt{40}$, 0) et F' ($-\sqrt{40}$, 0). c) d'excentricité $e = \frac{\sqrt{40}}{6}$, d) d'excentricité $e = \frac{\sqrt{40}}{4}$.

3) H : $(x-1)^2 - 9(y+3)^2 = 9$ est une hyperbole:a)de centre A (– 1, 3) b)d'excentricité $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$

c) de sommet A (3 , 0) et A' (–3 , 0) , d) de sommets A (4 , – 3) et A' (–2 , –3) ,

e) d'asymptotes $D_1 : y+3 = \frac{1}{3}(x-1)$ et $D_2 : y+3 = -\frac{1}{3}(x-1)$.

Exercice N°11 : On considère dans le plan P un triangle AFB rectangle en A et on note θ la mesure en radians de l'angle B avec : $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Soit M un point quelconque du plan. On trace par M les parallèles aux droites (AF) et (FB) qui rencontrent la droite (AB) respectivement en H et M'. On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que MM' = MF.

1) Montrer que M appartient à (Γ) si et seulement si : $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sin\theta}$

En déduire que (Γ) est une conique dont on précisera la nature.

2) Dans cette question on prend FA = 6 avec le centimètre pour unité et $\theta = \frac{\pi}{6}$

Après avoir construit le triangle AFB, représenter les sommets, les foyers et le centre de la conique (Γ). Achever ensuite la construction de (Γ).

Exercice N°12: 1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - \frac{4}{\sin\theta}z + \frac{13}{\sin^2\theta} - 9 = 0; \theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$

On note z' et z'' les solutions avec $\operatorname{Im}(z') \geq 0$.

b) Pour quelle valeur de θ a-t-on $|z'| = \sqrt{43}$?

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit $M'(z')$ et $M''(z'')$.

a) Montrer que M' et M'' varient sur une hyperbole $\mathcal{H}$ dont on donnera une équation cartésienne

b) Préciser les sommets et les asymptotes de $\mathcal{H}$ dont on donnera une équation cartésienne.

b) Préciser les sommets et les asymptotes de $\mathcal{H}$ puis construire $\mathcal{H}$.

3) On pose pour tout $x \in IR_+$; $u(x) = e^x + e^{-x}$ et $F(x) = \int_2^{u(x)} \sqrt{t^2-4}\,dt$

a) Montrer que F est dérivable sur IR_+ et calculer $F'(x)$; b) Exprimer $F(x)$ en fonction de x

c) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par $\mathcal{H}$ et les droites $\Delta : x = 2$ et $x = \frac{5}{2}$

Exercice N°13 : Le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Indiquer toutes les réponses correctes.

1)Soit (ζ) : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ l'équation d'une ellipse d'axe focal : a) $(O,\vec{i})$, b) $(O,\vec{i})$, c) $y=\frac{3}{4}x$

2) On considère les points A (1 , 0) et Ω (-1 , 0) .Soit (E) l'ellipse de centre Ω de sommet A de foyer O une équation de (E) dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ est : a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, b) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$, c) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

3) Soit m un paramètre réel la courbe (C) a pour équation $(m-1)x^2+(m+3)y^2=1$.

a) Si $m>1$ alors (C) est une ellipse b) si $m<-3$ alors (C) est l'ensemble vide.

c) si $-3<m<1$ alors (C) est hyperbole d) si $m=3$ ou $m=-1$ (C) est la réunion de deux droites.

Exercice N°14 : Le plan orienté est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On choisira 2 cm comme unité graphique) .Soit (ζ) la conique d'équation : $3(x+1)^2+4y^2=12$.

1) a) Quelle est la nature de cette conique ? b) Construire (ζ).

c) Déterminer les foyers , les directrices et l'excentricité de (ζ).

2) A chaque point M de (ζ) de coordonnées (x ; y) , on associe le nombre complexe $z=x+iy$ affixe de M

a)Démontrer que $|z|=\frac{1}{2}(3-x)$. b)En déduire que $|z|=\frac{3}{2+\cos\theta}$, θ étant un argument de z .

3) Soit M' et M'' les points de ζ ayant pour affixes respectives z' et z'' d'arguments respectifs θ et θ + π.

a) Calculer $\|\overrightarrow{M'M''}\|$ en fonction de θ. b) Déterminer θ pour que $\|\overrightarrow{M'M''}\|$ soit maximum puis minimum.

Exercice N°15 : le plan est rapporté à un repère orthonormée direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère les points A de coordonnées (– 1, 0) et I de coordonnées (4 ; 0).

Soit (E) l'ellipse de centre I , dont un sommet est A et un foyer est O.

a) Déterminer les trois autres sommets de (E).

b)Calculer l'excentricité de (E), et donner une équation de sa directrice associée au foyer O dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$

c) Former une équation de (E) dans le repère $(I,\vec{u},\vec{v})$ d'origine le centre I de l'ellipse . d) Tracer (E).

2)Dans cette question, à tout réel θ de l'intervalle [0, π] on associe l'équation :

$Z^2-2(4+5\cos\theta)z+(4\cos\theta+5)^2=0$ .a)Résoudre l'équation dans C.

b) Lorsque θ appartient à l'intervalle] 0 ; π [, on note z_1 la solution de l'équation dont la partie imaginaire est strictement positive , et z_2 l'autre solution . Soit M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2 Déterminer les coordonnées de M_1 en fonction de θ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ puis dans le repère $(I,\vec{u},\vec{v})$ .En déduire l'ensemble des points M_1 , puis celui des points M_2 lorsque θ varie dans l'intervalle]0, π [.

Exercice N°16 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ ave $\|\vec{i}\|=2cm$

1) a) Donner une équation de l'ensemble $(E)=\left\{M(z)\text{ tel que }|3z-\bar{z}|=4\right\}$

b) En déduire que (E) est une ellipse dont on précisera les sommets, les foyers, l'excentricité et les deux directrices puis tracer (E).

2) Soit g la fonction définie sur $[-2,2]$ par $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ et (C_g) sa courbe représentative.

Vérifier que $(E) = (C_g) \cup S_{(O,\vec{i})}(C_g)$.

3) On pose $F(x) = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\sin x}\sqrt{4-t^2}\,dt$, $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer F'(x).

b) Calculer F(0) en déduire l'expression de F(x) en fonction de x .

c) Trouver alors en cm^2 l'aire de la partie du plan de frontière l'ellipse (E).

Exercice N°17 : Le plan orienté P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. (Unité : 3 cm) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe Z tels que $5|Z|^2 + 2i\left(\overline{Z}^2 - Z^2\right) = \dfrac{1}{4}$.

et f : $P \to P$: $M(Z) \mapsto M'(Z')$ tel que $Z' = \sqrt{2}(1+i)Z$. 1) Caractériser f.

2)On pose f (E)=(E').Montrer que (E') a pour équation $x^2 + 9y^2 = 1$,tracer (E').3)En déduire le tracé de (E).

4) Soit M et N deux points de (E) tels que $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. On pose

f (M) = M'et f (N) = N' , $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \theta[2\pi]$.Montrer que $OM'^2 = \dfrac{1}{1+8\sin^2\theta}$ et que $\dfrac{1}{OM'^2} + \dfrac{1}{ON'^2} = 10$.

Exercice N°18 : Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, On considère la droite D d'équation x = 1 , le point F (4 , 0) et un point variable S (m + 1,0) avec 0 < m < 3 .(ζ_m) désigne la conique de foyer F , de directrice D et dont S est un sommet de l'axe focal.

1) a) Exprimer en fonction de m l'excentricité e de (ζ_m).

b) Déterminer en fonction de m la nature de (ζ_m).

✓ pour la suite de l'exercice on suppose que m = 1 et on note (H) = (ζ_1).

2)a)Montrer que (H) est une hyperbole d'équation : $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$.

b)Préciser les asymptotes de (H) puis tracer (H)

3) Soit $M(x_0 , y_0)$ un point de (H) non situé sur l'axe focal, la tangente (T) à (H) en M coupe D en un point Q

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FQ}$.

b) En déduire une construction géométrique de la tangente (T) en un point M de (H).

Exercice N°19 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit m un paramètre réel strictement positif et différent de 9. Soit (C_m) la courbe d'équation : $\dfrac{x^2}{m} + \dfrac{y^2}{m-9} = 1$.

1) Déterminer m pour que (C_m) soit une ellipse. Préciser dans ce cas les foyers, les directrices et l'excentricité

2) Déterminer m pour que (C_m) soit une hyperbole. Préciser dans ce cas les foyers, les directrices et les asymptotes.

3) Construire (C_5) et (C_{25}).

4) Soit M (a, b) un point du plan tel que $|a| \neq 3$. Montrer qu'il existe deux courbes (C_m) passant par M.

5) Soit $A\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{3},\dfrac{8}{3}\right)$.Vérifier que A est un point commun de (C_5) et (C_{25}) et que leurs tangentes en A sont perpendiculaires.

Exercice N°20 : Soit D une droite du plan et F un point dont la distance à D est égale à 3, l'unité étant le centimètre. Soit Δ la droite passant par F et orthogonale à D. On considère θ un réel tel que $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$.

1) Soit (Γ_θ) l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = \cos\theta$, H désignant le projeté orthogonal de M sur la droite D. Donner suivant les valeurs de θ la nature de (Γ_θ).

2) Tracer (Γ_0), cas où $\theta = 0$

3) a) Soit $\theta = \frac{\pi}{3}$. Déterminer les sommets A et A' de $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{3}}\right)$ situés sur Δ, le centre O et le deuxième foyer F' de $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{3}}\right)$ et Tracer $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{3}}\right)$.

b) Déterminer l'équation cartésienne de $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{3}}\right)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où O est le centre de $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{3}}\right)$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de la droite Δ.

Exercice N° 21 : Soit (H) l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

1) Tracer (H) et ses asymptotes Δ_1 et Δ_2.

2) Une droite D_1 parallèle à la droite $(O, \vec{j})$ coupe H en M et N et les asymptotes Δ_1 et Δ_2 en I et J. On note M le point d'ordonnée positive.

a) Montrer que les segments $[MN]$ et $[IJ]$ ont même milieu. ; b) Montrer que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = -9$

3) Une droite D_2 parallèle à la droite $(O, \vec{i})$ coupe H en M' et N' et les asymptotes Δ_1 et Δ_2 en I' et J'. On note M' le point d'abscisse positive. Montrer que $\overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{M'J'} = 16$

Exercice N°22: Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par m un nombre réel et par (E_m) l'ensemble des points M du plan (P), de coordonnées (x ; y) vérifiant l'équation :
$(m-1)x^2 + 3my^2 + 2(m-1)x + m + 3 = 0$.

1) Déterminer (E_m) pour les valeurs particulières m = 0 et m = 1.

2) Pour quelle valeur de m l'ensemble (E_m) est – il un cercle ? Préciser dans ce cas son centre et son rayon.

3) Dans cette question m est un réel non nul et différent de 1. Soit O' le point de coordonnées (– 1; 0).
On notera (X, Y) les coordonnées de M dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que l'équation de (E_m) dans ce repère est : $(m-1)X^2 + 3mY^2 + 4 = 0$.

b) En déduire en fonction de m la nature de (E_m).

Exercice N° 23 : Soit (H) l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

I) 1) Déterminer les foyers F et F' de (H). (On notera F le point d'ordonnée positive)

2) Soit M un point du plan de coordonnées $(x;y)$. a) Exprimer les distances MF et MF' en fonction de x et y.

b) Montrer que si $MF - MF' = 6$ alors M appartient à (H)

II) Soit K le point défini par $\overrightarrow{F'K} = \frac{1}{5}\overrightarrow{F'F}$. Pour tout réel $a > 0$, on note C_a le cercle de rayon a et tangent à $(F'F)$ en K. Soit (FT) et $(F'T')$ les tangentes, autre que (FF') à C_a .(T et T' désignent les points de contact respectifs).

1) Justifier les égalités $FT = FK$ et $F'T' = F'K$

2) Montrer que (FT) et $(F'T')$ sont parallèles si et seulement si $a = 4$.

3) Dans la suite on suppose que $a < 4$ et on note M le point d'intersection des tangentes (FT) et $(F'T')$

a) Montrer que $MF > MF'$; b) Calculer $MF - MF'$; c) En déduire que M appartient à (H)

Exercice N°24 : Soit m un paramètre complexe et (E_m) l'équation d'inconnue z ;

$(E_m) = z^2 - \left[\overline{m} + i\left(3\overline{m} - m\right)\right]z + i\overline{m}\left(3\overline{m} - m\right) = 0$

1)a) Vérifier que $\left(\overline{m} + i\left(3\overline{m} - m\right)\right)^2 - 4i\overline{m}\left(3\overline{m} - m\right) = \left(\overline{m} - i\left(3\overline{m} - m\right)\right)^2$

b) Résoudre l'équation (E_m) , on notera z' et z'' les solutions de (E_m) avec $|z'| = |m|$.

2) Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on note A, M, M' et M'' les points d'affixes respectives : 2 ; m ; z' et z'' et $\mathcal{H} = \{M \in P \text{ tels que } \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AM'}\}$.

On pose $m = x + iy$ avec x et y des réels. a) Montrer que $M(x;y) \in \mathcal{H}$ signifie $(x-1)^2 - y^2 = 1$

b) En déduire que $\mathcal{H}$ est une hyperbole équilatère dont on déterminera le centre et les sommets.

3) Soit l'ensemble $E = \{M \in P$ tels que A, M' et M'' soient alignés$\}$.

Montrer que E est une ellipse dont on déterminera le centre et la longueur du grand axe.

Exercice N°25 : Soit f l'application : $P \to P ; M(z) \mapsto M'(z')$ tels que $z' = -6z^2 + 10|z|^2 + 4z$

1) a) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b) Déterminer les points invariants par f

2) On note $(E) = \{M(z) \text{ tels que } z' \in i\mathbb{R}\}$

a) Déterminer une équation cartésienne de (E) ; b) Donner les éléments caractéristiques de (E)

3) Soit $\mathcal{P} = f\left[\left(O;\vec{e_2}\right)\right]$ a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$; b) Caractériser $\mathcal{P}$

Exercice 26 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) On désigne par (C_1) l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $y^2 - 2\sqrt{3}y - 2x = 0$

Déterminer la nature de (C_1) . Donner les éléments caractéristiques de (C_1) et la construire.

B) 1) Soit ξ le cercle de centre O et de rayon 2 et F un point de ξ privé du point $A(-2,0)$.

Justifier que la parabole de foyer F et de directrice $\Delta : x = -2$ passe par O.

2) On se propose de déterminer l'ensemble (E) des sommets des paraboles de directrice $\Delta : x=-2$ et de foyer un point du cercle ξ privé du point $A(-2;0)$. Soit $M(x;y)$ un point de (E) et $F(a;b)$ de la parabole de sommet M et de directrice $\Delta : x=-2$.

a) Déterminer x et y en fonction de a et b ; b) En déduire que $(x+1)^2+\frac{1}{4}y^2=1$. c) Conclure et tracer (E).

Exercice 27: Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit (H) l'ensemble des points M d'affixes z=x+iy avec x, y deux réels vérifiant : $z^2+(\bar{z})^2=2$.

1)a) Montrer que M(x, y)∈ (H) si seulement si $x^2-y^2=1$.

b) En déduire que (H) est une hyperbole dont on précisera le centre, les foyers, les sommets, les asymptotes Δ et Δ' et l'excentricité. c) Tracer (H).

2) Soit $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $M(\frac{1}{\cos\theta},\tan\theta)$. Vérifier que M∈ (H).

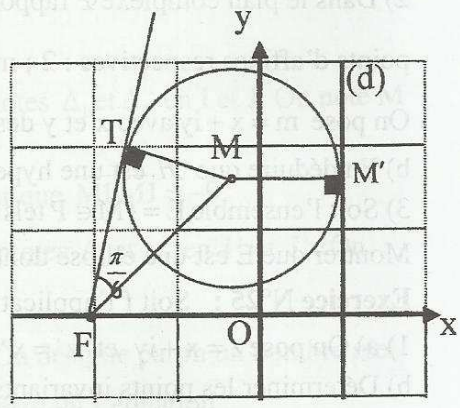
3) Soit T la tangente à (H) en M. a) Montrer qu'une équation de T dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ est x-y $\sin\theta$ -$\cos\theta$=0.

b) La tangente T coupe les asymptotes Δ et Δ' de (H) respectivement en I et J. Vérifier que M est le milieu du segment [IJ]. c) Montrer que l'aire du triangle OIJ est constante.

4) Soit A l'aire du domaine limité par (H) et les droites d'équations : x=2 et x=3 et S le solide obtenu par rotation de A autour de l'axe $(O,\vec{u})$. Calculer le volume S.

Exercice n°28 : On considère le point $F(-2,\ 0)$ et la droite $d: x=1$

Soit (C) un cercle de centre M tel que :*La droite d est tangente en M' à C.*(FT) est tangente à C en T ; * l'angle $\widehat{TFM}$ reste égale $\frac{\pi}{6}$.



1) Démontrer que $\frac{MF}{MM'}=2$ En déduire que M décrit un conique(H) dont on précisera la nature, le foyer ; la directrice et l'excentricité.

2) vérifier que les point O et A(4, 0) sont les sommets de (H) ; et en déduire le centre et le second foyer de (H)

3)a) Montrer que (H) a pour équation $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ et déterminer ses asymptotes.

b) vérifier que le point B(6, 6) est un point de (H) et écrire une équation de la tangente (Δ) à B en (H).

c) Tracer (Δ) et (H)

4) Soit (D') le domaine limité par la conique (H), la tangente (Δ) et la droite d'équation $x=4$

Calculer le volume engendré par la rotation de (D') autour de l'axe des abscisses.

Exercice 29 Le plan est muni d'un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$ On désigne par (H) l'ensemble des points M(x ;y) tels que $x^2-4y^2-2x+5=0$ et (P) l'ensemble des points M(x ;y) tels que $-4y^2-2x+5=0$.

1) a) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets, les asymptotes et

l'excentricité.

b) Montrer que (P) est une parabole dont on précisera le foyer, le sommer et la directrice.

c) Construire (H) et (P) dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

d) Vérifier que la droite T d'équation $x+2\sqrt{5}y-5=0$ est une tangente commune à (H) et (P) au point $A\left(0,\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

2) Pour tout réel positif x : on pose $F(x)=\int_1^{e^x-e^{-x}+1}\sqrt{4+(t-1)^2}\,dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $F'(x)=\left(e^x+e^{-x}\right)^2$

b) Calculer F(0). En déduire l'expression de F(x) pour tout x de $[0,+\infty[$.

c)On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (H) et les droites équations $x=1$ et $x=\dfrac{5}{2}$. Montrer que: $A=\dfrac{15}{8}+2\ln 2$

<u>Exercice 30 :</u> Le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristique de (E) : $4x^2+y^2+8x=0$.Tracer (E).

2)a) Calculer l'aire du cercle(C) de centre O'(-1, 0) et de rayon 1.Déduire que : $\int_{-2}^{0}\sqrt{1-(x+1)^2}\,dx=\dfrac{\pi}{2}$

b)Trouver alors l'aire de la partie limité par (E) et (C).

3)A tout point M d'affixe z=x + iy ; $x\in\mathbb{R}^*$ et $y\in\mathbb{R}$, on associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{z(z-\bar{z})}{4(z+\bar{z})}+4$.

a) Montrer que si M*M'appartient à la droite Δ : x =1 alors M'appartient à la courbe (H) : $(x+1)^2-\dfrac{y^2}{4}=1$.

b)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (H). Déterminer $(E)\cap(H)$ et tracer (H).

<u>Exercice N°31 :</u> Dans le plan orienté par un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$,on considère la courbe (H) d'équation $x^2-4y^2-2x-3=0$.

1) Montrer que (H) est une hyperbole, déterminer ses sommets, ses asymptotes et son excentricité.

2) Soit M_0 le point d'intersection de D : y = 1 avec (H) d'abscisse positive.

a)Déterminer les coordonnées de M_0 ainsi qu'une équation de la tangente (T) à (H)en M_0.

b)Tracer (H) et (T).

3) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta): z^2-2(3\cos\theta+1)z+5\cos^2\theta+6\cos\theta+5=0$ où $\theta\in\mathbb{R}$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

b) Soit M le point d'affixe $z=3\cos\theta+1+2i\sin\theta$; $\theta\in\mathbb{R}$. Montrer que M décrit une ellipse (E) dont on donnera son équation.

4) a) Vérifier que le point $N\left(1+\dfrac{6}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ est un point commun de (H) et (E).

b) Tracer (E). c) Montrer que les tangentes en N à (H) et à (E) sont perpendiculaires.

<u>Exercice N° 32</u>: Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit l'ensemble $H_\alpha : 4x^2-9y^2-16x\cos\alpha-54y\sin\alpha-97\sin^2\alpha-20=0$ avec $\alpha\in[0;\pi]$

1) Montrer que H_α est une hyperbole de centre $O'(2\cos\alpha;-3\sin\alpha)$ et déterminer ses sommets, foyers ; directrices et asymptotes.

2) Soit E_1 l'ensemble des points O' lorsque α varie dans $[0;\pi]$.

a)Montrer que E_1 est une partie d'une ellipse qu'on précisera.

b) Soit A le point de E_1 pour $\alpha=\frac{\pi}{3}$, donner une équation de la tangente à E_1 en A.

3) Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ et ξ le cercle d'équation $x^2+y^2=9$. N un point de ξ et H le projeté orthogonal de N sur (O,j), la demi droite $[HN)$ coupe (E) en M.

Montrer que $HM=\frac{2}{3}HN$, en déduire une construction de (E).

Exercice 33 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère l'application f qui au point $M(x;y)$ on associe le point $M'(X,Y)$ tel que : $\begin{cases} X=x-y \\ Y=x+y \end{cases}$

1)Montrer que f est une similitude directe que l'on caractérisera.

2) Soit (E) la courbe de l'équation cartésienne : $7(x^2+y^2)+2xy=12$

a) Soit $(E')=f[(E)]$. Montrer qu'une équation cartésienne de (E') est $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{3}=1$

b)Déterminer les sommes,les foyers,les directrices associés de l'excentricité de (E').

c)Déterminer alors la nature de (E')

3) a) Vérifier que le point $M_0(2\cos\theta;\sqrt{3}\sin\theta)$ *où* $\theta\neq k\pi$; $(k\in\mathbb{Z})$ appartient à (E')

b) La tangente à (E') en M_0 coupe la directrice $D:x=4$ en un point K. Déterminer les coordonnées de K et montrer que le triangle M_0FK est rectangle en F où $F(1;0)$ est le foyer associé à D. Déduire une construction géométrique de la tangente à $(E$ *en* M_0

Exercice 34 : le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, i, j).Soit (P) la parabole de foyer O et de directrice la droite D d'équation : x= -2.

1)a)Montrer qu'une équation cartésienne de (P) est : $y^2=4x+4$.

b)Tracer la parabole (P) ,on désignera par S son sommet .

2)Soit le point $A=\left(-2,\frac{3}{2}\right)$. a)Déterminer, par leurs équations, les tangentes à (P) issues de A

On notera T_1 et T_2 , ces tangentes, M_1 et M_2 leurs points de contacte respectifs avec (P)

b)Tracer T_1 et T_2 , montrer qu'elles sont perpendiculaire et que les points O, M_1 et M_2 sont alignés.

3)M un point de (P) d'affixe $z=re^{i\theta}$ ou $r\in R^*_+$ a)Prouver que $\theta\neq 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. b)Montrer que $r=\frac{2}{1-\cos\theta}$.

4)Soit M un point de (P) distinct de S, la droite (OM) recoupe (P) en M'.

a) Déterminer la valeur minimale de la distance M M'.

b) Soient N et N' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur l'axe de (P).

Montrer que la valeur du produit MN. M'N' est une constante que l'on précisera.

Exercice 35: On donne dans un plan P, une droite D, un point F n'appartenant pas à D. K le projeté orthogonal de F sur D et S ∈ [FK] tel que : FK = 3, FS = 2 On considère l'hyperbole (H) de directrice D, de sommet S et de foyer F

1)Calculer l'excentricité e de (H). 2)Construire le 2ème sommet S' et le second foyer F 'de (H).

3) Soit O le centre de (H), on considère le repère orthonormé $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $\vec{j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SF}$.

a) Vérifier que OF = 4 et établir .qu'une équation réduite de (H) dans $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est : $-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

b)Déterminer les asymptotes de (H) et tracer (H).

c)Déterminer le point I d'abscisse strictement positive (H) ∩ (d) avec (d) la droite d'équation : y = 4 et donner une équation de la tangente T à (H) en I.

4)Soit (P) la parabole de foyer S et de sommet F, déterminer la directrice et donner l'équation de (P) dans $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

Exercice N°36: On donne dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ les points F et E d'affixes respectives 1 et $i\sqrt{3}$. Soit (E) l'ensemble des points M (Z) tel que $14|z|^2-z^2-\bar{z}^2=48$.

1) a) Donner une équation cartésienne de (E). En déduire que (E) est une ellipse et vérifier que F est un foyer de (E). b) Déterminer les sommets de (E) et tracer (E).

2) Calculer le volume du solide engendré par rotation de (E) autour de $\left(O,\vec{i}\right)$.

3) Soit D la directrice associé à F et H le projeté orthogonal de B sur D. Montrer que le triangle FHB est rectangle.

4) Soit M et N deux points de (E) tel que (OM) ⊥ (ON) . On suppose que $\left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OM}\right)=\theta[2\pi]$ où $\theta\in[0,2\pi[$.

a)Montrer que $OM^2=\frac{12}{3+\sin^2\theta}$. b) En déduire que : $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{7}{12}$.

5) Soit (E') l'ellipse de foyer F' = O * B, de directrice Δ d'équation $y=2\sqrt{3}$ et d'excentricité 0.5 .

On note S la similitude directe de centre O tel que S (A) = B. Montrer que S(E) = E'. Tracer (E').

Exercice 37 : Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ On considère deux points variable A (0,a) et B (b,2) de sorte que la distance AB reste constante et égale à 6. Soit C le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,2) . 1/a) Déterminer les coordonnées de C .

b) En déduire que l'ensemble des points C est la courbe(E) d'équation : $x^2+4y^2=16$.

c)Donner la nature et les éléments géométrique de (E). Tracer la courbe (E).

2/ Calculer le volume du solide engendré par la révolution de la courbe de (E) autour de l'axe des abscisses.

3/ Soit M (x,y) un point de la courbe (E) et soient F et F' les foyers de (E) .

Exprimer les distances MF et MF' en fonction de x .En déduire que pour tout point M de (E) , on a : MF+MF'=8

4/ Soit M_0 un point de (E) distinct de ses sommets S et S' de l'axe focal.

La tangente (T) à (E) en M_0 coupe la directrice de (E) relative au foyer F en un point N_0.

a)Montrer que les droites (FM_0) et (FN_0) sont perpendiculaires.

b)En déduire une construction géométrique de (T) . Effectuer cette construction en prenant $M_0(2,\sqrt{3})$.

RESUME DU COURS

Définition : Soit A, B et C des points. Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le réel défini par :

* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$, si $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC}=\vec{0}$; * $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\widehat{BAC}$, Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nul.

* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et tous réels α et β :

* $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$; * $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$; $(\alpha\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}.\vec{v})$; $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v})=\alpha\beta(\vec{u}.\vec{v})$

Définition : Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthogonal de l'espace. Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$;

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ pour tous points $M(x,y,z)$ et $M'=(x',y',z')$

$MM'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$

Définition : Soit A, B et C des points de l'espace. Le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et défini comme suit :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires, alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$; Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, alors :

* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$; * $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$ est une base directe

* $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=AB.AC.\sin\widehat{BAC}$

Propriétés : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et α, β deux réels :

* $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$; * $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

* $\vec{u}\wedge\vec{v}=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$; $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$; $(\alpha\vec{u})\wedge(\beta\vec{v})=\alpha\beta(\vec{u}\wedge\vec{v})$

Définition : L'espace est muni d'une base orthonormée directe $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Pour tous vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$; $\vec{u}\wedge\vec{v}=(bc'-cb')\vec{i}+(ca'-ac')\vec{j}+(ab'-ba')\vec{k}$

Propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ Pour tous vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ $(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}=(\vec{v}\wedge\vec{w}).\vec{u}=(\vec{u}\wedge\vec{w}).\vec{v}=\det(\vec{u};\vec{v}$ et $\vec{w})$

Définition : L'aire du parallélogramme ABCD est égale à $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$. L'aire du triangle ABD est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$

Définition : Le volume d'un tétraèdre ABCD est égal à $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{BA}\right|$.

Théorème : Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égale à $\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AE}\right|$

Définition : Soit A un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul et D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ alors $D\left(A;\vec{u}\right)=\left\{M;\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}\ \text{ où } \alpha \text{ est un réel}\right\}$.

Définition : L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit A un point, $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et P le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, alors $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)=\left\{M;\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\right)=0\right\}$

Définition : L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit A un point, R un réel strictement positif et S la sphère de centre A et de rayon R. Alors $S=\left\{M;AM=R\right\}$.

Définition : L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit un plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ un point de l'espace. La distance de A à P est le réel, noté $d\left(A,P\right)$ égal à $\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Théorème : L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit S une sphère de centre A et de rayon R. Soit P un plan, h la distance de A à P et H le projeté orthogonal de A sur P. L'intersection de S et P est :

* Vide si $h>R$; * Réduite au singleton $\{H\}$ si $h=R$; * Le cercle de rayon $\sqrt{R^2-h^2}$ et de centre H si $h<R$

Définition : On appelle distance d'un point M à une droite D, la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur D. Cette distance est notée $d(M;D)$

Théorème : Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de D. La distance un point de D. La distance d'un point M de l'espace à la droite D est le réel $d\left(M,D\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. L'application qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ est appelée translation de vecteur $\vec{u}$ et notée $t_{\vec{u}}$. Pour toue points M et M' de l'espace ; $t_{\vec{u}}\left(M\right)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.

Théorème : toute translation de l'espace de vecteur $\vec{u}$ est bijective. Son application réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$. Pour tous points M et N de l'espace, $N=t_{\vec{u}}\left(M\right)\Leftrightarrow M=t_{-\vec{u}}\left(N\right)$.

Théorème : Une application de l'espace dans lui-même est une translation, si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' ; $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$.

Conséquence : Toute translation de l'espace conserve la distance.
Toute translation de l'espace conserve le produit scalaire.

Théorème : L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.
L'image d'un plan par une translation est un plan qui lui est parallèle.

Conséquence : Toute translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
Toute translation conserve le milieu.

Définition : Soit Γ une partie de l'espace. On dit que Γ est globalement invariante par une application f lorsque $f(\Gamma) = \Gamma$.

Théorème : L'image d'une sphère S par une translation est une sphère S' de même rayon et de centre l'image de centre de S.

Définition : Une pyramide IABCD de sommet I est dite régulière, sa base ABCD est un carré et le projeté orthogonal de I sur le plan (ABCD) et le centre du carré ABCD.

Théorème : L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. Si $M(x,y,z)$ est un point de l'espace et $M'(x',y',z')$ est son image par la translation de vecteur $\vec{u}$ alors

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

L'application qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ tel que $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$ est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Définition : Soit I un point de l'espace et K un réel non nul. L'application qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ est appelée homothétie de centre I et de rapport k, elle est notée $h_{(I;k)}$. Pour tous points M et M' de l'espace, $h_{(I;k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$

Théorème : Toute homothétie de centre I et de rapport non nul k est une bijection de l'espace et admet comme application réciproque l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$. Pour tous points M et N de l'espace, $N = h_{(I;k)}(M) \Leftrightarrow M = h_{\left(I;\frac{1}{k}\right)}(N)$

Théorème : Soit f une application de l'espace dans lui-même et k un réel non nul et différent de I. f est une homothétie de rapport k, si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Théorème : Soit h une homothétie de l'espace de rapport k. Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, $M'N' = |k| MN$.

Théorème : L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.
L'image d'un plan est un plan qui lui est parallèle.

Conséquence : Toute homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
Toute homothétie conserve le milieu.

Théorème : L'image d'une sphère S de centre I et de rayon R par une homothétie de l'espace de rapport k est une sphère S' de même rayon et de centre I' l'image I et de rayon $|k|R$

Propriété : Toute homothétie de l'espace conserve le contact.

Théorème : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit un point $I(a;b;c)$, k un réel non nul et différent de 1 et h l'homothétie de centre I et de rapport k. Si $M(x,y,z)$ est un point de l'espace et $M'(x',y',z')$ est son image par h alors $\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \\ z' = kz + (1-k)c \end{cases}$

L'application qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ tel que $\begin{cases} x' = kx + \alpha \\ y' = ky + \beta \\ z' = kz + \delta \end{cases}$; $k \neq 1$ est l'homothétie de centre $I\left(\dfrac{\alpha}{1-k};\dfrac{\beta}{1-k};\dfrac{\delta}{1-k}\right)$

LES EXERCICES

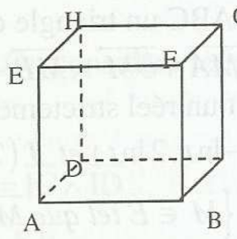
Exercice N°1 Indiquer toutes les réponses correctes.

1) Si A, B et C sont trois points distincts de l'espace alors $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{BC} =$ a) 0 ; b) $\vec{0}$; c) $\overrightarrow{AC}$

2) Soit A, B et C trois points non alignés et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan (ABC) alors :

a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{n}$; b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{n}$; c) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \alpha\vec{n}$; $\alpha \in IR^*$

3) Soit ABCDEFGH un cube d'arrête 1 alors



i) Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube ; $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} =$

a) $\overrightarrow{BF}$; b) $\overrightarrow{EA}$; c) $\overrightarrow{BD}$

ii) $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} =$ a) $\overrightarrow{DH}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{DH}$; c) $\sqrt{2}\,\overrightarrow{AE}$.

4) Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de l'espace alors $\vec{U} \wedge \vec{V} =$ a) $\vec{V} \wedge \vec{U}$; b) $(-\vec{V}) \wedge \vec{U}$; c) $-(\vec{V} \wedge \vec{U})$.

5) $(\vec{u}+\vec{v}) \wedge (\vec{u}-\vec{v}) =$ a) $\vec{0}$; b) $-2\vec{u} \wedge \vec{v}$; c) $\vec{u}^2 - \vec{v}^2$

6) L'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = 0$ est

a) la droite (AC) ; b) le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$;
c) la droite perpendiculaire à (AC) en A.

7) L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ est a) La droite (AB) ; b) un plan ; c) $\{A, B\}$

8) L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ est

a) la droite $\left(C, \overrightarrow{AB}\right)$; b) le plan passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$; c) Le plan (ABC).

9) A, B et C trois points de l'espace tel que ABC est un triangle isocèle en A. L'ensemble des points M de l'espace tel que : $\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \wedge \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ est:

a) le plan ABC ; b) la médiatrice de [BC]; c) la droite parallèle à (BC) passant par A.

10) Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs de l'espace tels que $\|\vec{U}\| = 2$, $\|\vec{V}\| = 3$ et $\vec{U}.\vec{V} = -3$ alors

a) $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = 6$; b) $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = 3\sqrt{3}$; c) $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \frac{3}{2}$.

11) Soit A, B et C trois points non alignés l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AM} = 0$ est : a) Le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$; b) Le plan (ABC) ;
c) La droite perpendiculaire au plan (ABC) en A.

12) Soit A, B et C trois points non alignés l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ est :a) Le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$;
b) Le plan (ABC) ; c) La droite perpendiculaire au plan (ABC) en A.

Exercice N°2 vrai - faux

$\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace .

1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors on a $\vec{v} = \vec{0}$.

2) L'image d'un plan d'équation x+y=0 par une translation de vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est un plan d'équation x+y-2=0.

3) L'application f qui à M(x,y,z) associe le point $\begin{cases} x' = -3x + 8 \\ y' = -3y - 20 \\ z' = -3z + 16 \end{cases}$ est une homothétie de centre $\Omega(2, -5, 4)$ et de rapport-3

4) Soit ABC un triangle de centre de gravité G alors l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ est la droite (OG).

5) Soit t un réel strictement positif et différent de 1. On donne les points $I(\ln t, -\ln t, 2\ln t)$ et $J(2\ln t, 0, -\ln t)$

a) $S_t = \left\{M \in E \text{ tel que } \overrightarrow{MI_t}.\overrightarrow{MJ_t} = 0\right\}$ est la sphère de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}\ln t, -\frac{1}{2}\ln t, \frac{1}{2}\ln t\right)$ et de rayon $R_t = \frac{\sqrt{11}\ln t}{2}$.

b) Le plan d'équation cartésienne x+y-z=0 et la sphère $S_e\,(t = e)$ sont tangents.

6) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

7) Soient $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace si $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{w}=0$.

8) Soient $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace si $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}$ alors $\vec{u}.\vec{w}=0$.

Exercice N°3 : On considère un cube ABCDEFGH d'arrête 1.

1)a) Exprimer plus simplement $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=0$ et $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}=0$ puis que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE).

2)Montrer que le centre de gravité I du triangle BDE est le point d'intersection de (AG) et du plan (BDE).

Exercice N° 4 : Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace ξ.

On donne les points $A(1;-2;-1)$; $B(1;3;1)$ et $C(5;6;5)$

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

b) En déduire que A, B et C ne sont pas alignés puis calculer l'aire du triangle ABC

2) a) Calculer le volume du tétraèdre OABC . b) En déduire la distance du point O au plan(ABC)

3) Calculer le volume du parallélépipède ayant pour arêtes $[OA]$; $[OB]$ et $[OC]$.

Exercice N°5: L'espace est rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$. On considère le cube de sommets O, I, R, J, K, L, M, N. On note A le milieu de [IL] et B le point défini par :

$\overrightarrow{KB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$. On appelle (P) le plan passant par les points O, A et B.

1) a) Déterminer les coordonnées des points A et B.

b)Déterminer les coordonnés du vecteur $\vec{U}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$.

c)Montrer alors que l'aire du triangle OAB est $\frac{\sqrt{14}}{6}$.

2) Le point $C\left(1,\frac{1}{3},1\right)$ appartient-il à (P) ? Justifier votre réponse.

3) On considère le tétraèdre OABK. a) Montrer que le volume de ce tétraèdre est $\frac{1}{9}$

b) Calculer alors la distance du point K au plan (P).

Exercice N° 6 : L'espace est muni d'un repère orthogonal direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$. On considère les points $A(0;2;0)$; $B(-1;4;0)$; $C(1;2;0)$ et $D(1;3;0)$.

a) Vérifier que les droites (AB) et (CD) sont sécantes en I. b) Justifier que $\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IC}\wedge\overrightarrow{ID}$

2) Montrer que pour tous points M et K de l'espace ; $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MK}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{KA}\wedge\overrightarrow{KB}$

3) Soit (Δ) l'ensemble des points de l'espace vérifiant $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}$

a) Justifier que (Δ) est non vide.

b) Montrer que (Δ) est la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

c) Donner une représentation paramétrique de (Δ) et vérifier que $\Delta = (IJ)$.

4) Soit M un point de Δ distinct de I. On désigne par H le projeté orthogonal de M sur (AB) et par K le projeté orthogonal de M sur (CD). Montrer que le rapport $\frac{MH}{MK}$ est constant.

Exercice N°7: Soit le cube OABCDEFG représenté sur la figure ci-dessous. L'espace est orienté par le repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$. On désigne par a un réel strictement positif. Les points L, M et K sont définie par : $\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

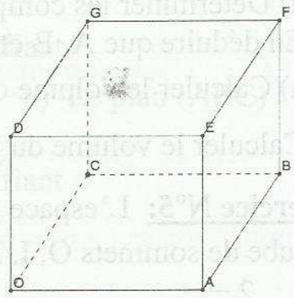
1) a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$. b) En déduire l'aire du triangle DLM.

c) Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DML).

2) On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DML).

a) Démontrer que : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ *et* $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que : $\overrightarrow{OH} = \lambda\overrightarrow{OK}$. Démontrer que $\lambda = \frac{a}{a^2+2}$.



c) En déduire que H appartient au segment [OK].

d) Déterminer les cordonnés de H.

e) Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que : $HK = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

3) A l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a.

Exercice N°8 : L'espace E est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points S(1,1,2), A(-3,0,0) , B(1,0,-2)et C(-1,1,0).

1)Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P d'équation :x-2y+2z+3=0.

2)Soit Q l'ensemble des points M de E vérifiant $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BS})\overrightarrow{SM} = 0$.

a)Montrer que Q est un plan dont on donnera une équation cartésienne.

b)Montrer que P coupe Q suivant une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique.

C)Calculer la distance du point A à la droite Δ.

a) 3) a)Vérifier que SABC est un tétraèdre puis calculer son volume V.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle SAC puis déduire la distance du point B au plan (SAC).

4)Soit Γ l'ensemble des M(x,y,z) tels que : $x^2+y^2+z^2+7y-2z-9=0$.

a)Montrer que Γ est une sphère dont on précisera le rayon R et les coordonnées de son centre.

b)Montrer que Γ est une sphère circonscrite au tétraèdre SABC.

c)Montrer que P coupe Γ suivant un cercle que l'on caractérisera.

Exercice N° 9 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points $A(3,3,0)$ et $C(-1,-1,2)$

1) Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A et perpendiculaire à D.

2) a) Déterminer une équation de la sphère S de diamètre $[AC]$.

b) Montrer que P et S sont tangents en un point que l'on précisera.

c) Soit $B(-1;2;-1)$. Vérifier que $B \in S$ et déterminer une équation du plan Q tangent à S en B.

3) a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ.

b) Calculer la distance de C à Δ.

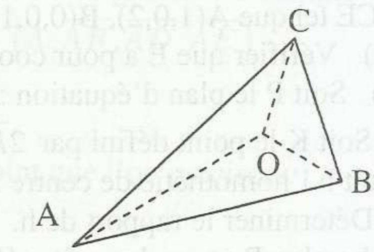
4) Soit $S_m = \{M(x;y;z) \in \xi \text{ telque } x^2 + y^2 + z^2 + 2mx - 2(m+2)y + 2mz - 6 = 0; m \in IR\}$

a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m.

b) Etudier suivant m l'intersection de P et S_m.

c) Déterminer les coordonnées du centre H du cercle ζ de rayon $\sqrt{26}$ intersection de S_m et P avec $m > 0$.

Exercice N° 10 : L'espace est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre, OABC est un tétraèdre tel que les triangles AOC et BOC et AOB sont rectangles en O, $OA = 2$ et $OB = OC = 1$. On munit l'espace du repère $\left(O, \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$



1) Déterminer les coordonnées des points A, B et C.

2) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + 2y + 2z - 2 = 0$.

3) Soit M un point du segment $[OB]$ tel que $OM = \alpha$.

a) Déterminer en fonction de α, la distance du point M au plan (ABC).

b) Existe-t-il une sphère de rayon 2, tangente au plan (ABC) et dont le centre appartient au segment $[OB]$.

Exercice N° 11 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $A(2,2,2)$

1) Ecrire une équation du plan Q passant par A et parallèle à P

2) a) Montrer que la droite (OA) est une perpendiculaire commune aux plans P et Q.

b) En déduire une équation de la sphère S, tangente à P et Q dont le centre I est un point de (OA)

3) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, On désigne par (S') la sphère image de (S) par t.

a) Etudier la position relative de (S') et Q ; b) Déterminer $(S') \cap (OA)$

Exercice N°12: L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par S l'ensemble des points M(x,y,z) tels que : $x^2+y^2+z^2-4y-5=0$.

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $2x-2y+z-2=0$.

Déterminer la position relative de S et P. Caractériser $S \cap P$.

3) Déterminer les translations qui transforment P en un plan tangent à S.

Exercice N°13: Soit ABCDEFGH un cube de coté 1.

1) a) Calculer $\overrightarrow{EH} \wedge \overrightarrow{EF}$.

b) Montrer que le triangle AHF est équilatéral. Déterminer l'air du triangle AHF.

2) a) Montrer que le volume du tétraèdre AEFH est $\frac{1}{6}$. b)Déduire la distance du point E au plan AFH.

3) L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points A, F et H.

b) Retrouver la distance du point E au plan P.

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Déterminer le volume du tétraèdre AF'H'E' avec F', H' et E' les images respectives par h des points F, H et E.

Exercice N°14: L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère le tétraèdre ABCE tel que A(1,0,2), B(0,0,1), C(0,-1,3) et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

1)a) Vérifier que E a pour coordonnés (0,2,3). b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE.

2)a) Soit P le plan d'équation :x-2y-z+5=0. Montrer que P est parallèle à (ABC).

b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que $K \in P$.

3)Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K.

a) Déterminer le rapport de h.

b) Le plan P coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J. Calculer le volume du tétraèdre EIJK.

Exercice N°15: Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace E. Soit A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) et D(1,1,1) quatre points de l'espace.

1)a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) b) Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCD.

c) c) En déduire la distance du point D au plan (ABC).

2)Vérifier qu'une équation du plan P passant par A, B et C est x+y+z-1=0.

3)Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace et vérifiant : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$.

a)Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon R.

b)Montrer que P coupe S suivant un cercle ζ dont on précisera le centre et le rayon.

4)Soit $h: E \to E,\ M \mapsto M'$ tels que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$.

a)Montrer que le G centre de gravité du triangle ABC est l'unique point invariant par h.

b)En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

c)Déterminer S'=h(S) ainsi que $S' \cap P$.

Exercice N°16: L'espace E est rapporté à un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit h l'homothétie de centre le point A(2,4,-4) et de rapport $\frac{1}{2}$.

1)Soit la sphère S de centre O et de rayon R=4. Ecrire un équation de la sphère S'=h(S).

2)Montrer que l'intersection de S et S'est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice N°17: On considère dans l'espace un cube d'arête 3cm, noté ABCDEFGH. Soit I le barycentre des points pondérés (E,2) et (F,1) ; J celui de (F,1) et (B,2) et enfin K celui de (G,2) et (C,1). On note Δ l'ensemble des points équidistants de I, J et K.

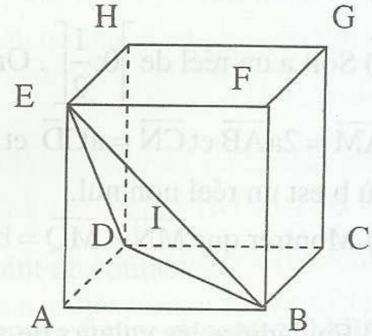
1) Soit Ω le point de Δ située dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ?

Dans la suite de l'exercice, on ce place dans un repère orthonormé $\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$.

2) Donner les coordonnées des points I, J et K.
3) Soit P(2,0,0) et Q(1,3,3). Montrer que (PQ) est orthogonale au plan (IJK).
4) Soit M(x,y,z) un point de l'espace.
a) Montrer que $M \in \Delta \Leftrightarrow (x, y, z)$ est une solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ?
b) Vérifier que P et Q appartiennent à Δ.
5) a) Donner une équation cartésienne du plan (IJK). b) En déduire les coordonnées de Ω.
6) Soit N un point variable de [EF]. Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité du triangle ABN puis celui du centre de gravité de tétraèdre ABNC.

Exercice N°18 : Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1, on désigne par P le centre de gravité du triangle HGF et Q le centre de gravité du triangle FBG et on muni l'espace du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BH).
b) Montrer qu'une équation du plan (ACF) est :-x+y+z=0.
c) Montrer que la droite (BH) est la perpendiculaire au plan (ACF) en un point que l'on précisera.
2) Soit K le milieu de [FG] et h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$.
a) Montrer que h(H)=P et h(B)=Q. b) Donner l'expression analytique de h.
3) a) Soit (R) l'image du plan (ACF) par h. Montrer que (R) est perpendiculaire à (PQ) en un point N' que l'on déterminera.
b) Donner une équation cartésienne de la sphère S tangente aux plans (R) et (ACF) et dont le centre $\in (NN')$.

Exercice N° 19: ABCDEFGH est un cube d'arrête 1. le point I est le centre de gravité du triangle BDE. On muni l'espace du repère orthonormé directe $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



I) 1) Montrer que le triangle BDE est équilatéral.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan (BDE).
3) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ et que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).
II) Soit k un réel non nul. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport k et on note M_k l'image de G par h et (P_k) le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE). Le plan (P_k) coupe (BC) en N_k.
) Identifier $P_{\frac{1}{3}}$; $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ et calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.
) a) Déterminer les coordonnées du point M_k ; b) Trouver une équation du plan P_k
) En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1; 3k-1; 0)$
) a) Pour quelle valeur de k, la droite (M_kN_k) est-elle perpendiculaire à la fois aux droites (AG) et (BC) ?
) Pour quelle valeur de k, la distance M_kN_k est-elle minimale ?

Exercice N°20: Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère le plan d'équation :

$x+y+z-3=0$ et la droite (D) passant par le point A(1,2,3) et de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

1) Démontrer que (D) et (P) sont perpendiculaires.

2) Soit M(x,y,z) un point de l'espace, on lui associe le point M'(x',y',z') tel que (P) est le plan médiateur de [MM'].

a) Montrer que $\begin{cases} x'=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z+2 \\ y'=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z+2 \\ z'=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z+2 \end{cases}$

b) Déterminer les coordonnées du point A' associé à A. En déduire les coordonnées de H, intersection de (P) et (D).

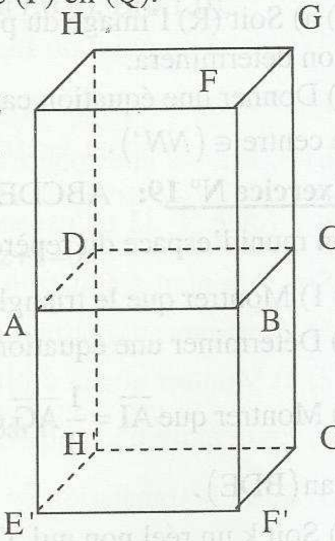
c) Retrouver les coordonnées de H avec une autre méthode.

2)a) Déterminer par son équation cartésienne l'ensemble (S) des points M de l'espace tel que $\frac{MA}{MH}=\sqrt{5}$.

b) Reconnaître (S) et déterminer ses éléments caractéristiques. c) Déterminer l'intersection de (S) et (P).

3)Soit Q le plan d'équation x+y+z=0 et h l'homothétie de centre A, qui transforme (P) en (Q).

Déterminer le rapport de h. Caractériser $h\left((S)\cap(Q)\right)$.



Exercice N°21: ABCDEFGH et E'F'G'H'ABCD sont deux cubes isométriques. On muni l'espace d'un repère orthonormé directe $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points F'et G'.

b) Déterminer $\overrightarrow{AF'}\wedge\overrightarrow{AG'}$, en déduire une équation du plan $(AF'G')$.

2) Soit a un réel de $\left]0;\frac{1}{2}\right[$. On désigne par M et N les points définis par $\overrightarrow{AM}=2a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN}=a\overrightarrow{CD}$ et par Q le point de coordonnées $(0;0;b)$ où b est un réel non nul.

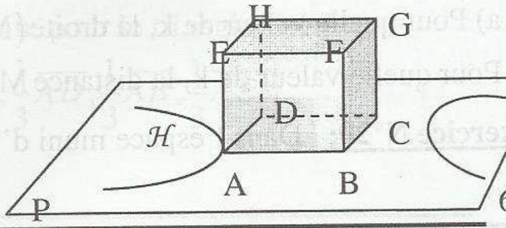
a) Montrer que $\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{MQ}=b\overrightarrow{AB}+(3a-1)b\overrightarrow{AD}+2a\overrightarrow{AE}$.

b) En déduire les valeurs de a et b pour les quels le plan (MNQ) est parallèle au plan $(AF'G')$.

3) Dans la suite de l'exercice, on prend $a=\frac{1}{3}$ et $b=\frac{2}{3}$. On désigne par h l'homothétie de centre E' qui transforme A en Q. la droite (QM) coupe $(E'F')$ en F".

a) Montrer que $h(F')=F"$.

b) La droite $(E'M)$ coupe le plan $(AF'G')$ en M'. Montrer que M', A et F'sont alignés.



Exercice N° 22 : Dans la figure ci-contre :

* ABCDEFGH est un cube d'arête 1 * Le plan ABCD est noté P

* Dans le plan P muni du repère orthonormé $R=\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$, on a construit l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'équation $(x-1)^2-y^2=1$

1) Déterminer le centre et les sommets de $\mathcal{H}$

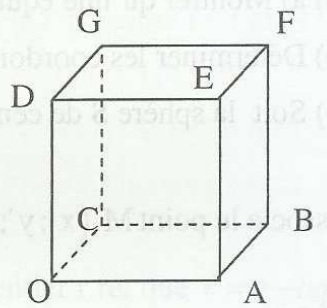
2) On muni l'espace du repère orthonormé $R'=\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. Soit M un point du plan P de coordonnées $(x;y)$ dans le repère R.

a) Déterminer les coordonnées du point M dans le repère R' de l'espace.

b) Déterminer, dans le repère R', les composantes des vecteurs $\overrightarrow{BM}\wedge\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EM}\wedge\overrightarrow{EF}$

c) En déduire l'ensemble des points M, du plan, équidistants aux droites (BC) et (EF)

Exercice N° 23 : La figure ci-contre représente un cube OABCDEFG d'arête 2. On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(O;\frac{1}{2}\overrightarrow{OA};\frac{1}{2}\overrightarrow{OC};\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}\right)$. On désigne par I et H les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[AD]$ et par L le symétrique du point A par rapport à B.



1) Trouver les coordonnées des points I, H et L.

2) Donner une équation cartésienne du plan $P=(HOL)$.

3) Soit (S) la sphère de centre I et passant par H. Montrer que la plan P coupe la sphère (S) selon un cercle dont on précisera le rayon et le centre Ω.

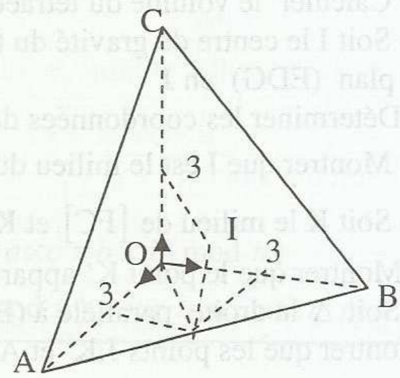
4) Soit h l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point $M(x;y;z)$ associe le point $M'(x';y';z')$ tel que : $\begin{cases} x'=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \\ y'=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3} \\ z'=\frac{1}{3}z+\frac{2}{3} \end{cases}$

a) Caractériser h

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S') image de (S)

c) Montrer que (S') et P sont tangents et déterminer les coordonnées de leur point de contact.

Exercice N° 24: Soit $\left(O;\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace. Dans la figure ci-contre OABC est un tétraèdre tel que : $\overrightarrow{OA}=5\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=5\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=10\vec{w}$ et I le point le coordonnées $(3;3;3)$.



1) Vérifier que le plan (ABC) a pour équation $2x+2y+z-10=0$

2) Soit S la sphère de centre I et de rayon 3.

a) Quelle est la position relative de S et du plan (ABC) ?

b) Montrer que S est tangente aux plans (OAB); (OAC) et (OBC).

3) Soit k un réel non nul et h l'homothétie de centre O et de rapport k.

On désigne par S', la sphère image de S par h.

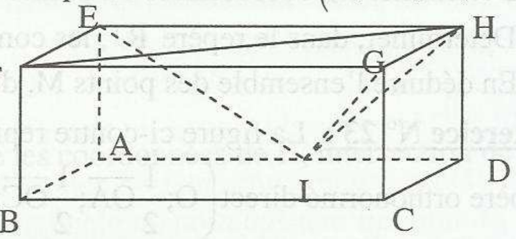
a) Montrer que S' est tangente aux plans $(OAB);(OAC)$ et (OBC).

b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles S' est tangente au plan (ABC).

4) Déterminer le centre et le rayon de la sphère tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre OABC.

Exercice N° 25: Soit ABCDEFGH un parallélépipède tel que $AB = AE = 1$ et $AD = 2$.

On désigne par I le milieu du segment $[AD]$. L'espace est muni d'un repère orthonormé $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AE}\right)$.



1) a) Déterminer les coordonnées des points F, G et H.

b) Montrer que le volume du tétraèdre GFIH est égal à $\frac{1}{3}$.

c) Montrer que FIH est un triangle rectangle et calculer son aire.

d) Déterminer alors la distance du point G au plan $P=(FIH)$

2) a) Montrer qu'une équation du plan $P=(FIH)$ est : $2x+y-z-1=0$.

b) Déterminer les coordonnées du point K d'intersection de (AG) et du plan (FIH).

3) Soit la sphère S de centre G et de rayon 2 et f la transformation de l'espace qui à tout point $M(x;y;z)$ associe le point $M'(x';y';z')$ tel que $\begin{cases} x'=2x+1 \\ y'=2y \\ z'=2z \end{cases}$ a) Caractériser l'intersection de S et le plan (FIH).

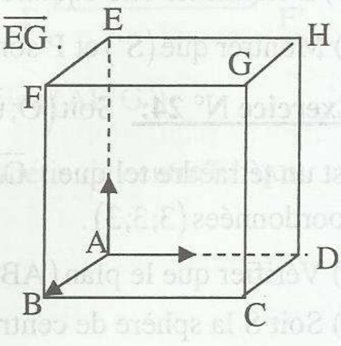
b) Montrer que f est une homothétie dont-on précisera le centre et le rayon.

c) Déterminer la sphère S' image de S par f.

d) Montrer qu'il existe deux homothéties H_1 et H_2 que l'on caractérisera qui transforme S en S'.

e) Déterminer une équation de la sphère S_1 tangente aux plans P et $P'=f(P)$ dont le centre Ω appartient à la droite (AI).

Exercice 26 :L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et ABCDEFGH est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=2\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$



1)a) vérifier que $\overrightarrow{AG}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$. b) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{ED}\wedge\overrightarrow{EG}$

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EDG)

d) Vérifier que les plans (AFC) et (EDG) sont parallèles.

2) Calculer le volume du tétraèdre BEDG.

3) Soit I le centre de gravité du triangle AFC . La droite (BH) coupe le plan (EDG) en J

a)Déterminer les coordonnées de J.

b) Montrer que I est le milieu du segment $[BJ]$

4) Soit K le milieu de $[FC]$ et K' l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$

a)Montrer que le point K' appartient au plan (EDG).

b)Soit Δ la droite parallèle à (BH) et passant par A . Δ coupe le plan (EDG) en A'.

Montrer que les points J,K' et A' sont alignés.

RESUME DU COURS

Définition : Soit a un entier et d un entier non nul. On dit que d est un diviseur de a ou que a est divisible par d, s'il existe un entier q tel que $a = dq$

Conséquence : Soit d un entier non nul et a un entier :

* Si d divise a alors $-d$ *divise a*
* Les multiples de d sont les éléments de l'ensemble $d_{\mathbb{Z}} = \{ dq \ ; q \in \mathbb{Z} \}$

Propriété : Soit a et b deux entiers non nuls et c un entier.

* Si a divise b et b divise a, alors $a = b$ *ou* $a = -b$
* Si a divise b et b divise c, alors a divise c.
* Si a divise b et a divise c, alors a divise $\alpha b + \beta c$ pour tous entiers α *et* β

Définition : Pour tout réel x, il existe un entier unique n tel que $n \leq x \leq n+1$. Cet entier est appelé **partie entière du réel x.**

Définition : Soit a et b deux entiers avec b non nul.
On appelle quotient de a par b l'entier q défini de la manière suivante :

* q est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{a}{b}$ *si* $b > 0$
* q est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{a}{b}$ *si* $b < 0$

Définition : Soit a et b deux entiers avec b non nul. On appelle reste de a par b l'entier r rel que $r = a - bq$; où q est le quotient de a par b.

Théorème : Pour tout entier a et pour tout entier b non nul, il existe un couple unique d'entiers $(q \ ; r)$ tel que $a = bq + r$ *et* $0 \leq r < |b|$.

Conséquence : Le reste de tout entier n dans la division euclidienne par un entier non nul best un élément de l'ensemble $\{ 0 \ ; 1 \ ; 2 \ ; .... \ ; |b|-1 \}$

Définition : Soit n un entier naturel non nul et a et b deux entiers. On dit que a est congru à b modulo n (ou a et b sont congrus modulo n) si $a-b$ est un multiple de n. On note alors : $a \equiv b \ (\text{mod} \ n)$

Théorème : Soit n un entier naturel non nul. Pour tout entier a, il existe un unique entier r appartenant à $\{0 \ ; 1 \ ; .... \ ; n-1\}$ tel que : $a \equiv r \ (\text{mod} \ n)$. On dit que r est le reste modulo n de a.

Conséquence : Soit n un entier naturel non nul. Deux entiers sont congrus modulo n, si et seulement si, ils ont le même reste modulo n.

Propriétés : Soit a, b et c trois entiers et n un entier non nul.

$*a \equiv a \ (\text{mod} \ n)$;*Si $a \equiv b \ (\text{mod} \ n)$ *alors* $b \equiv a \ (\text{mod} \ n)$;

*Si $a \equiv b \ (\text{mod} \ n)$ *et* $b \equiv c \ (\text{mod} \ n)$; *alors* $a \equiv c \ (\text{mod} \ n)$

Propriétés : Soit a, b, c et d quatre entiers naturels et n un entier non nul.

* Si $a \equiv b \ (\text{mod} \ n)$ *et Si* $c \equiv d \ (\text{mod} \ n)$; *alors* $a + c \equiv b + d \ (\text{mod} \ n)$ *et* $a \times c \equiv b \times d \ (\text{mod} \ n)$

Si $a \equiv b \ (\text{mod} \ n)$; *alors* $ha \equiv hb \ (\text{mod} \ n)$ *Pour tout entier h et* $a^m \equiv b^m \ (\text{mod} \ n)$ *pour tout entier* $m > 0$

LES EXERCICES

Exercice 1: Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est exacte, Indiquer cette réponse :

1) Soit $n \in IN^*$; Si $n+3$ divise $3n+17$ *alors* $n+3$ divise :

a) 8	b) 17	c) 9

2) le quotient 320 par -13 est :

a) -24	b) -25	c) -26

3) Soit x un entier ; $x \equiv -2(\text{mod}\,3)$ alors le reste modulo 3 de x est :

a) -2	b) 1	c) 0

4) Soit deux entiers p et q tels que $p \equiv 6(\text{mod}\,5)$ *et* $q \equiv 3(\text{mod}\,5)$. Le reste modulo 5 de $2p^2+3pq+11$ est :

a) 0	b) 1	c) 2	d) 3

5) Pour tout entier n On a :

a) $n^3-n \equiv 0(\text{mod}\,6)$	b) $n^3-n \equiv 2(\text{mod}\,6)$	c) $n^3-n \equiv 4(\text{mod}\,6)$

6) Soit x et y deux entiers tel que $10x \equiv 10y(\text{mod}\,6)$ alors :

a) $x \equiv y\ (\text{mod}\,6)$	b) $x \equiv y\ (\text{mod}\,3)$	c) $x \equiv y\ (\text{mod}\,2)$

7) Le chiffre des unités de l'entier 9^{5438} est :

a) 1	b) 3	c) 0

8) Le chiffre des unités de l'entier 7^{129} est :

a) 7	b) 9	c) 1	d) 0

9) Le chiffre des unités de l'entier $1+7+7^2+\dots\dots\dots+7^{300}$ est :

a) 1	b) 7	c) 0

10) Soit n un entier vérifiant $n^2+2n \equiv 3(\text{mod}\,7)$ alors :

a) $n \equiv 2(\text{mod}\,7)$	b) $n \equiv 3(\text{mod}\,7)$	c) $n \equiv 1(\text{mod}\,7)$	d) $n \equiv 4(\text{mod}\,7)$

Exercice 2: Cocher toutes les réponses correctes :

1) Le produit de 4 chiffres consécutifs est divisible par

a) 3	b) 5	c) 7	d) 24

2) Soit $n \in IN^*$ alors :

a) n^3-n est pair	b) n^3-n est divisible par 3	c) $n^3-n \equiv 0(\text{mod}\,4)$	d) $n^3-n \equiv 0(\text{mod}\,6)$	e) $n^3-n \equiv 0(\text{mod}\,12)$

3) Soit n un entier tel que $n \equiv 13(\text{mod}\,14)$ alors :

a) $n^{100}+n^{151} \equiv 0(\text{mod}\,14)$	b) $n^2-n-2 \equiv 3(\text{mod}\,14)$	c) $3^{3000} \equiv n\ (\text{mod}\,14)$

4) Soit deux entiers x et y :

a) si $x \equiv y\ (\text{mod}\,3)$ alors $2x \equiv 2y\ (\text{mod}\,3)$	b) Si $2x \equiv 2y\ (\text{mod}\,3)$ alors $x \equiv y\ (\text{mod}\,3)$
c) Si $x \equiv y(\text{mod}\,3)$ alors $x^2 \equiv y^2(\text{mod}\,3)$	d) Si $x^2 \equiv y^2(\text{mod}\,3)$ alors $x \equiv y(\text{mod}\,3)$

Exercice 3: 1) Déterminer les entiers n qui divisent $n+15$.

2) Déterminer les entiers n tel que $2n+3$ divise $n+8$.

3) a) Développer $(n+2)(n^2+1)$ $\forall\ n\in IN$.

b) Déterminer les entiers n tels que $n+2$ divise n^3+2n^2+n+16.

Exercice 4: Soit n un entier naturel. Montrer que pour tout entier n On a :

1) $7^{2n}+3$ est divisible par 4. 2) $3^{2n+1}+2^{n+1}$ est divisible par 7.

3) $4^{4n+2}-3^{n+3}$ est divisible par 11 4) $2^{10n+3}+3^{5n+3}\equiv 0(\text{mod}\,11)$

Exercice 5 : 1) Quel est le reste de la division euclidienne de 15^{12} par 13 ?

2) En déduire le reste de la division euclidienne de 15^{3601} par 13.

Exercice 6: 1) Montrer que $2008^{2008}-1$ est divisible par 3 et 7.

2) Quel est le reste de la division euclidienne par 8 de $45^{33}\times 19^{21}$.

3) Quel est le reste de la division euclidienne par 12 de $2410^{425}\times 101^{29}$

Exercice7: 1) Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2.

2) Quel est le reste de la division euclidienne de 2123^{302} par 7

3) Déterminer les entiers naturels n tels que $2123^n\equiv 2(\text{mod}\,7)$.

4) Montrer que $\forall n\in IN$, $2^{3n}+2^{3n+1}+(2123)^{3n+2}\equiv 0(\text{mod}\,7)$

Exercice 8: 1) a) Déterminer les entiers n tels que l'entier : n^3-n+1 soit divisible par 7.

b) Montrer que Les nombres $(212172)^3-212172+1$ et $(1470)^3-1470+1$ sont – ils divisibles par 7 ?

2) Montrer que $A=2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}+5^{2006}+6^{2006}+8^{2006}$ est divisible par 7.

Exercice 9: 1) Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division de 2^n par 10.

2) Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel n, le chiffre des unités de l'écriture décimale de 2^n.

3) Déterminer le chiffre des unités de $(4678^{402})\times(9534)^{83}$

Exercice N° 10 : 1) a) Déterminer le reste modulo 37 de 1000.

) En déduire que pour tout entier naturel n, $10^{3n}\equiv 1(\text{mod}\,37)$

) En déduire que $10^{10}+10^{20}+10^{30}\equiv 0(\text{mod}\,37)$

) Soit $n\in IN$ Montrer que si $n\equiv 36(\text{mod}\,37)$ alors $\sum_{k=0}^{n}10^{3k}\equiv 0(\text{mod}\,37)$

Exercice 11: Soit p un nombre premier. Montrer que $\forall n\in IN$; $(n+1)^p-(n^p+1)\equiv 0(\text{mod}\,p)$.

Exercice 12: Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1) $2x\equiv 8(\text{mod}\,12)$	2) $3x\equiv 5(\text{mod}\,7)$	3) $x^2\equiv 0(\text{mod}\,4)$
4) $x^2\equiv 2(\text{mod}\,4)$	5) $x^2+6x+9\equiv 0(\text{mod}\,4)$	6) $x^2+x+1\equiv 0(\text{mod}\,6)$
7) $x^2+3x\equiv 4(\text{mod}\,5)$		

Exercice 13: 1) a) Soit n un entier naturel. Déterminer en fonction de n le reste modulo 7 de 2^n et 3^n.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles 2^n+3^n est divisible par 7.

c) Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $A=16^{2009}+423^{2009}+162^{2009}$

2) Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_0=-4$ et $\forall n\in IN\ U_{n+1}=2U_n-7$.

a) Montrer par récurrence $\forall n\in IN$; $U_n=7-11\times 2^n$.

b) En déduire suivant les valeurs de n les restes de la division par 7 du terme général U_n de cette série.

c) Quel est le reste de la division par 7 de U_{2009}.

Exercice 14: On désigne par p un entier naturel premier supérieur ou égal à 7 et $n=p^4-1$.

1) Montrer que $p\equiv -1(\text{mod}\,3)$ ou $p\equiv 1(\text{mod}\,3)$. En déduire que n est divisible par 3.

2) En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2-1=4k(k+1)$. En déduire que n est divisible par 16.

3) Démontrer que 5 divise n est divisible par 5

4) a) Soit a, b et c trois entiers naturels. Démontrer que si a divise c et b divise c avec a et b premier entre eux alors ab divise c.

b) Déduire de ce qui précède que 240 divise n.

5) Existe – t – il quinze nombres premiers $p_1;p_2;.........;p_{15}$ supérieur ou égal à 7 tels que l'entier $A=p_1^4+p_2^4+.....+p_{15}^4$ soit un nombre premier.

Exercice 15: Soit (U_n) la suite définie par $U_0=14$ et $U_{n+1}=5U_n-6$; $\forall n\in IN$.

1) Démontrer que $\forall n\in IN^*$, U_n est un entier naturel non nul.

2) a) Calculer $U_1;U_2;U_3$ et U_4. b) Quelle conjecture peut-on émettre ?

3) a) Démontrer que $\forall n\in IN$, $U_{n+2}\equiv U_n(\text{mod}\,4)$

b) En déduire que $\forall k\in IN$, $U_{2k}\equiv 2(\text{mod}\,4)$ et $U_{2k+1}\equiv 0(\text{mod}\,4)$

c) Démontrer par récurrence que $\forall n\in IN$, $2U_n=5^{n+2}+3$. d) En déduire que $\forall n\in IN$, $2U_n\equiv 28(\text{mod}\,100)$

4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de U_n suivant n.

5) Démontrer que le PGCD des deux termes consécutifs de la suite (U_n) est indépendant de n préciser sa valeur.

Exercice N° 16 : 1) a) Déterminer, pour tout entier n de $\{0,1,2,3,4\}$, le reste modulo 13 de 5^n.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$; $18^{4n+1}-44^{4n-1}-3\times 96^{4n+2}\equiv 0(\text{mod}\,13)$

2) a) Vérifier que pour tout entier x on a : $x+x^2+x^3+x^4=x(x+1)(x^2+1)$.

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n qui vérifient $5^n+5^{2n}+5^{3n}+5^{4n}\equiv 0(\text{mod}\,13)$

Exercice 17: 1) Enoncer le petit théorème de fermát.

2) Déterminer l'ensemble des entiers naturels $n\in IN$ tel que $(n+1)^{17}\equiv 2(\text{mod}\,17)$.

3) Résoudre le système : $\begin{cases}(n+1)^{17}\equiv 2(\text{mod}\,17)\\(n+3)^{13}\equiv 5(\text{mod}\,13)\end{cases}$

Exercice 18:

1) a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste de la division euclidienne par 9 de 7^n.

b) Démontrer alors que $2005^{2005} \equiv 7 \pmod 9$

2)a)On désigne par N un entier naturel et par S la somme de ses chiffres. Démontrer alors que $N \equiv S \pmod 9$.

b) En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3) On suppose que $A = 2005^{2005}$. On désigne par B la somme des chiffres de A, C est la somme des chiffres de B, D la somme des chiffres de C.

a) Démontrer la relation suivante $A \equiv D \pmod 9$.

b) Sachant que $2005 < 10000$ démontrer que A s'écrit avec au plus8020 chiffres. En déduire que $B \leq 72180$.

c) Démontrer que $C \leq 45$.

d) Démontrer un majorant de D inférieur à 15. e) Démontrer que $D = 7$

Exercice N°19: On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$.

1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo 100.

2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que : $a = 100k - 1$

3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 \left(\bmod 100^2\right)$

b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}.

Exercice N°20 : Soit a et b deux entiers.

) Montrer que $(a+b)^7 \equiv a^7 + b^7 \pmod 7$ (on pourra utiliser que pour tout k de $\{1;2;3;4;5;6\}$, 7 divise C_7^k)

) En déduire que $(a+b) \equiv 0 \pmod 7$ si et seulement si $a^7 + b^7 \equiv 0 \pmod 7$.

) Déterminer le reste modulo 7 de $444333^7 + 333444^7$

) Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n^7 + 128 \equiv 0 \pmod 7$

Exercice N° 21 : 1)Déterminer tous les entiers naturels a tels que $a^3 \equiv 1 \pmod 7$

2)Déterminer tous les entiers naturels a tels que $a + a^2 + a^3 \equiv 1 \pmod 7$

3)Déterminer tous les entiers naturels a tels que $a^6 \equiv 1 \pmod 7$

4)Déterminer le reste modulo 7 de $(7005)^6 - \left[7005 + 7005^2 + 7005^3\right]$

Exercice 22: Pour tout entier naturel non nul n on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$

1) Montrer que $\forall n \in IN^*$; $U_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

2) Démontrer que $n^3 + 2n^2 + n \equiv 0 \pmod 4$ si et seulement si $U_n \equiv 0 \pmod n$

3) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $U_n \equiv 0 \pmod n$

Exercice N° 23 : Soit les nombres $a_1 = 1$; $a_2 = 11$ et $a_3 = 111$ et plus généralement pour tout $n \in IN^*$; on pose $a_n = 111111....111$ (a_n est le nombre formé par n chiffres égaux à 1).

) Soit p et q deux entiers naturels tel que $p > q$. Montrer que, si $a_p \equiv a_q \pmod{2011}$ alors $a_{p-q} \equiv 0 \pmod{2011}$

) Montrer qu'il existe au moins un multiple de 2011 dont l'écriture décimale ne contient que le chiffre 1.

Exercice N° 24 : Soit a un entier naturel.

1) a) Montrer que $a(a^2-1)\equiv 0(\bmod 6)$; b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, $a(a^{2n}-1)\equiv 0(\bmod 6)$

2) Montrer que $1001^{1001}+1003^{1003}+1005^{1005}\equiv 2(\bmod 6)$

Exercice 25: 1) Soit a et n deux entiers naturels. Démontrer que $a^{2n+1}+1\equiv 0 \bmod (a+1)$.

En déduire que $\left(2^{2^p}\right)^{2n+1}+1\equiv 0\left(2^{2^p}+1\right)$ *avec* $p\in IN$.

2) Prouver que $2^{2^n}+1$ est un nombre premier quand n varie dans l'ensemble $\{0;1;2;3\}$.

3) a) Vérifier que $2^{32}\equiv 640(\bmod 641)$.

b) Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse : $\forall n\in IN$; $2^{2^n}+1$ est un nombre premier.

Exercice N° 26 : 1) a) Montrer que pour tous entiers naturels k et r, $5^{4k+r}\equiv 5^r(\bmod 13)$

b) Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de 5^n par 13, $n\in IN^*$.

2) Soit $n\in IN$, on pose $a_n=1+5^n+5^{2n}+5^{3n}$. a) Déterminer le reste modulo 13 de a_{2000} et a_{2001}

b) Montrer que $a_n\equiv 0(\bmod 13)$ si et seulement si, n n'est pas un multiple de 4.

3) Montrer que pour tout $n\geq 1$; $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}\equiv 4(\bmod 13)$.

Exercice N° 27 : 1) Soit n un entier naturel. Montrer que : $7^n\equiv 1(\bmod 10)\Leftrightarrow n\equiv 0(\bmod 4)$

2) Chercher le chiffre des unités de 7^{2009}

3) Posons $N=7^{2008}$. a) Montrer que $N\equiv C_{1004}^{0}50^{0}(-1)^{1004}+C_{1004}^{1}50^{1}(-1)^{1003}\ (\bmod 100)$

b) Donner alors les deux derniers chiffres de N dans son écriture décimale .

Exercice N° 28: Soit $n\in IN^*$ .1) a) Montrer $n!\equiv 0(\bmod 10)$ si et seulement si $(n\geq 5)$

b) Montrer $n!\equiv 0(\bmod 100)$ si et seulement si $(n\geq 10)$; c) Montrer $n!\equiv 0(\bmod 49)$ si et seulement si $(n\geq 14$

2) Pour tout $n\geq 1$; on pose $u_n=\sum_{k=1}^{n}k!$.a) Montrer que pour tout entier $n\geq 4$; $u_n\equiv u_4(\bmod 10)$;

b) En déduire le chiffre des unités de u_n ; $n\geq 4$. 3) Montrer que pour tout $n\geq 14$ $u_n\equiv 47(\bmod 49)$.

Exercice 29: Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble indiqué : 1) $xy=2x+3y$; $\mathbb{Z}^2$.

2) $x^2-y^2-x+3y=30$; $\mathbb{Z}^2$; 3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$; $(\mathbb{Z}^*)^2$; 4) $x^2-3xy+2y^2+x-3y-6=0$; $\mathbb{Z}^2$

,5) $2x^3+xy-7=0$; $\mathbb{Z}^2$, 6) $x^3+xy+y^3=209$; IN^2 ;7) $\begin{cases}x^3-y^3-z^3=3xyz\\ x^2=2(y+z)\end{cases}$; IN^3 .

Exercice 30: Montrer que les équations suivantes n'ont pas de solutions dans l'ensemble indiqué :

1) $x^2+5y^2=3$; $\mathbb{Z}^2$, 2) $x^2-5y^2=3$; $\mathbb{Z}^2$, 3) $x^3-3y^2+6y^3-16x+8=0$; $\mathbb{Z}^2$ 4) $x^3+11^3=y^3$; $(IN^*)^2$

Exercice N° 31 : On suppose qu'il existe des entiers naturels n, m et a vérifiant : $(4m+3)(4n+3)=4a^2+$

1) Soit p un entier premier qui divise $(4n+3)$. a) Montrer que p est impair .

b) Montrer que $(2a)^{p-1}-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 0(\bmod p)$ .2) A l'aide du théorème de Fermat, montrer que $p\equiv 1(\bmod 4)$

Exercice32: 1) a) Soit $p>5$ un entier. Montrer que si $(p-1)!+1=p^m$ avec $m\in IN^*$ alors p est impair.

b) Montrer que $(p-1)^2$ divise $(p-1)!$

2) Montrer que l'équation en $m\in IN^*$: $(p-1)!+1=p^m$ n'a pas de solution.

Exercice N° 33 :1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^6 par 9.

) Discuter alors selon n l'entier $b\in]-9;9[$ tel que $2^n\equiv b(\bmod 9)$

) Montrer donc que $\forall n\in IN$, 9 divise $(2^{4n+1}-2^{2n}+8)$

xercice 34: Soit n un entier premier avec 2, 3, et 5. Démontrer que n^4+29 est divisible par 30

xercice 35 : Soient p et q deux entiers premiers distincts Montrer que $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1[pq]$.

xercice 36 : Soit $a=\sum_{k=o}^{9}2011^k$. 1/ Vérifier que $2011\equiv 11(\bmod 100)$.

2/ Discuter selon l'entier naturel n, le reste de 11^n modulo 100. En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a=100k+60$. 3/ Montrer que pour tout entier $p\geq 2$ $ona: a^p\equiv 0(\bmod 100)$.

4/ Soit $N=\sum_{k=0}^{2009}2011^k$. a)Montrer que $N\equiv 201\,a\,(\bmod 100)$. b)Déterminer le deux derniers chiffres de N

xercice 37 : Le but de l'exercice et de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du ube se termine par 2009, c'est-à-dire el que $n^3\equiv 2009(\bmod 10000)$.

)1)Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.2) En déduire que $2009^{8001}\equiv 2009(\bmod 16)$

) On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0=2009^2-1$ et, pour tout entier naturel n,

$U_{n+1}=(U_n+1)^5-1$. 1) a) Démontrer que U_0 est divisible par 5.

b) Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n

$$U_{n+1}=U_n\left[U_n^{\ 4}+5\left(U_n^{\ 3}+2U_n^{\ 2}+2U_n+1\right)\right]$$

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, U_n est divisible par 5^{n+1}

2) a) Vérifier que $U_3=2009^{250}-1$ puis en déduire que $2009^{250}\equiv 1(\bmod 625)$

b) Démontrer alors que $2009^{8001}\equiv 2009(\bmod 625)$

C) 1) En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001}-2009$ est divisible par 10000.

2) Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

Exercice 38: Dans cette partie,on se propose de déterminer les couples (n,m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n-3\times 2^m=1$ (F).

1) On suppose que $m\leq 4$ montrer qu'il a exactement deus couples solutions.

2- On suppose maintenant que $m\geq 5$ .a- Montrer que si le couple (n,m) vérifie la relation (F) alors $7^n\equiv 1(\bmod 32)$

b- En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7 ,montrer que si le couple (n,m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4 .c- En déduire que si le couple (n,m) vérifie la relation (F) alors $7^n\equiv 1(\bmod 5)$

d- Pour $m\geq 5$, existe –t-il des couples (n,m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?

3-Conclure ,c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

RESUME DU COURS

Définition : On rappelle que si a et b sont deux entiers naturels non nuls alors leur plus grand commun diviseur est l'entier naturel $a \wedge b$, tel que $a \wedge b$ divise a et b et tout diviseur commun à a et b divise $a \wedge b$

Définition : le plus grand diviseur commun des deux entiers naturels a et b est le dernier reste non nul dan la succession des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide de a et b

Théorème : Si a et b sont deux entiers non nuls, alors il existe un unique entier naturel d qui vérifie les deu conditions suivantes :1) d divise a et d divise b. 2) Si un entier k divise a et b alors il divise d.
L'entier d défini plus haut est noté $a \wedge b$ et appelé le plus grand commun diviseur de a et b.

Conséquence : Pour tous entiers a et b non nuls , $a \wedge b > 0$; Pour tous entiers a et b non nuls, $a \wedge b = |a| \wedge |b$

Propriétés : Soit a et b deux entiers non nuls. * Si b divise a alors $a \wedge b = |b|$;

* Si b ne divise pas a et si r est le reste modulo b de a alors $a \wedge b = b \wedge r$
* $a \wedge b = b \wedge a$; * Pour tout entier non nul k ; $ka \wedge kb = |k|(a \wedge b)$; * $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

Définition : Deux entiers non nuls a et b sont dits premiers entre eux, si $a \wedge b = 1$

Théorème : soit a et b deux entiers non nuls. Alors il existe un unique couple d'entiers $(a';b')$ tel qu

$a = (a \wedge b)a'$ $b = (a \wedge b)b'$ et $a' \wedge b' = 1$

Lemme de Gauss : Soit a, b et c trois entiers non nuls. Si $a \wedge b = 1$ et a divise b.c alors a divise c.

Théorème : Soit a et b deux entiers naturels non nuls et n un entier. Si $a \wedge b = 1$ et $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, a)$

et $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, b)$ alors $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, ab)$

Théorème : Pour tous entiers a et b non nuls il existe un unique entier m strictement positif qui vérifie le deux conditions suivantes :* m est multiple de a et b ;* tout multiple commun de a et b est un multiple de m
L'entier m ainsi défini est le plus petit commun multiple de a et b et est noté $a \vee b$.

Théorème : * Pour tous entiers a et b non nuls, $a \vee b = |a| \vee |b|$

* Pour tous entiers a et b non nuls, $(a \vee b) \times (a \wedge b) = |ab|$

Propriétés : Soit a et b deux entiers naturels non nuls :* Si b divise a alors $a \vee b = |a|$;

* Pour tout entier non nul k, $ka \vee kb = |k|(a \vee b)$ * $a \vee b = b \vee a$; * $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

Théorème : Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $b \geq 2$ et $a \wedge b = 1$ alors il existe un uniqu entier non nul u appartenant à $\{0;1;..;b-1\}$ tel que $au \equiv 1 (\mathrm{mod}\ b)$ .On dit que u est inverse de a modulo b.

Théorème de Bézout : Deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il exist deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Corollaire : Soit a et b deux entiers naturels non nuls et $d = a \wedge b$ alors il existe deux entiers u et v tels qu $au + bv = d$.

Théorème : Soit a, b et c trois entiers et $d = a \wedge b$. L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si et seulement si, d divise c.

LES EXERCICES

EXERCICE 1 : A) Cocher la réponse correcte :

1) $(x;y)$ un couple d'entiers tels que $5x+8y=11$ alors : a) $x\wedge y=11$ b) $x\wedge y$ divise 11, c) $x\wedge y$ multiple 11

2) l'équation $24x-16y=25$: a) n'admet pas de solutions ; b) admet une infinité de solutions

3) Le PGCD $(5x^2+7\ ;\ x^2+2)$ divise : a) 3 ; b) 7 ; c) 5

4) On pose $a=7n+5$ et $b=8n-1$ avec $n\in IN^*$, si a et b ne sont pas premiers entre eux alors :
a) $a\wedge b=47$ b) $a\wedge b=7$ c) $a\wedge b=56$

5) soit n un entier naturel strictement supérieur à 3, on pose $\alpha=2n^2-3n+2$ et $\beta=n-1$ alors
a) $\alpha\wedge\beta=2$ b) $\alpha\wedge\beta=n-1$ c) $\alpha\wedge\beta=1$

B) Cocher la ou les réponse(s) correcte(s) :

1) soit a et b deux entiers relatifs non nuls, Si 6 et 15 sont des diviseurs communs à a et b alors a) $a\vee b=30$
b) $a\wedge b$ divise30 c) 30 divise $a\vee b$ d) $ax+by=21$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$

2) Deux entiers naturels non nuls a et b tels que $ab\wedge(a+b)=5$ alors :
a) 5 divise a^2+b^2 b) 5 divise a^2 et b^2 c) $a\wedge b=5$ d) $a^2\wedge b^2=5$

3) Soit x et y deux éléments de $\mathbb{Z}^2$ tels que $x\wedge y=1$ alors :
a) $-3x\wedge 3y=3$ b) $(x+y)\wedge(x-y)=1$ c) $(x+y)\wedge(x-y)=2$ d) $(x+y)\wedge(x-y)=1$ ou 2

EXERCICE 2: 1)Déterminer l'ensemble des diviseurs de 210.
2)Soit x et y deux entiers naturels non nuls : on pose $d=x\wedge y$ et $m=x\vee y$
3)Déterminer l'ensemble de couples (x ; y) tels que $\begin{cases} m=210d \\ y-x=d \end{cases}$

EXERCICE 3 : Déterminer toutes les paires d'entiers naturels {a ;b} qui vérifient :
$m-18d=791$; ou $m=a\vee b$ et $d=a\wedge b$

EXERCICE4 : 1) Etablir que $\forall$ a, b et c de IN^* tels que $bc>a$: $a\wedge b=b\wedge(bc-a)$
2) Montrer que $\forall n\in IN^*$; $(5n^3-n)\wedge(n+2)=(n+2)\wedge 38$
3) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que n + 2 divise $5n^3-n$
4) Quelles sont les valeurs possibles $(5n^3-n)\wedge(n+2)$?
Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $(5n^3-n)\wedge(n+2)=19$

EXERCICE 5: Déterminer l'ensemble des nombres premiers p tels que p divise 2^p+1

EXERCICE 6: 1)Montrer que si deux nombres entiers naturels x et y sont premiers entre eux, il en est de même pour les entiers 2x+y et 5x+2y

2)Déterminer dans IN^* les entiers a et b vérifiant $\begin{cases} (2a+b)(5a+2b) = 1620 \\ ab = 3(a\vee b) \end{cases}$

EXERCICE 7 : Soit n un entier naturel. Le nombre de Fermat est tout nombre de la forme
$F_n=2^{2^n}+1$.a) Calculer F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 .b)Montrer par récurrence que pour tout $n\geq 2$, $2^{2^n}\equiv 6 \pmod{10}$
c) En déduire que pour tout $n\geq 2$, le chiffre des unités de F_n est 7

2)a) Soient $m\in IN^*$ et $q\in IN^*$; montrer que $\dfrac{q^{2m}-1}{q+1}$ est un entier

b) En déduire que pour tout k de $k \in IN^*$; $\frac{F_{n+k}-2}{F_n}$, est un entier

c) En déduire que $(F_{n+k} \wedge F_n)$ divise 2 . d) Montrer que F_{n+k} et F_n sont premiers entre eux

EXERCICE 8 : Soit l'équation $(E): 138x - 55y = 5$ où $(x;y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

1) Montrer que si $(x;y)$ est solution de (E) alors x est divisible par 5.

2) a) Donner une solution $(x_0;y_0)$ de (E) ; b) Résoudre l'équation (E)

3) Pour tout entier n, on considère les nombres $a = 55n + 10$ et $b = 138n + 25$.

a) Vérifier que pour tout entier n, le couple $(a;b)$ est solution de (E)

b) En déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$. c) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que $a \wedge b = 5$

d) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tel que $a \wedge b = 1$

EXERCICE9 : On considère l'équation $(E): 8x + 5y = 1$ avec $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$

1) a) Citer le théorème permettant d'affirmer sue l'équation (E) a des solutions.

b) Donner une solution particulière de (E) ; c) Résoudre l'équation (E).

2) Soit n un entier naturel tel qu'il existe un couple (a,b) de nombres entiers vérifiant $\begin{cases} n \equiv 1(\text{mod}\,8) \\ n \equiv 2(\text{mod}\,5) \end{cases}$;

a)Montrer que le couple $(a,-b)$ est solution de (E)

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de n par 40.

3) Un groupe de garçons et filles a dépensé 100 dinars dans une excursion, chaque garçon a dépensé 8 dinars et chaque fille a dépensé 5 dinars. Donner les répartitions des groupes possibles.

Exercice N°10 :1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x - 7y = 1$

2) Soit l'équation (E) dans $IN^* \times IN^*$: $x^2 - 7y^2 = 1$.

a) Montrer que si (x, y) est solution de (E) alors x et y sont premiers entre eux.

b) Déterminer la solution (a, b) de (E) telle que b soit le plus petit possible.

3) Soit $n \in IN^*$ et $u_n = \left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$; $u_n = a_n + b_n\sqrt{7}$ où a_n et b_n deux entiers naturels non nuls tels que $(a_n;b_n)$ est solution de (E).

b) En déduire le nombre de solutions de (E).

c) Montrer que pour tout $n \in IN^*$; $\left(8 - 3\sqrt{7}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{7}$. d) Exprimer a_n et b_n en fonction de n

EXERCICE 11 : 1) a) Déterminer deux entiers u et v tel que $8u - 81v = 1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $8x - 81y = 65$.

c) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\begin{cases} n \equiv 5(\text{mod}\,8) \\ n \equiv 70(\text{mod}\,81) \end{cases}$

2)Déterminer deux entiers naturels a et b non premiers entre eux vérifiant : $\begin{cases} 8a - 81b = 65 \\ a \vee b = 480 \end{cases}$

Exercice N° 12 : Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparait périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard, il a observé le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.
On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets.
1) Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1.
Montrer que $(u;v)$ est solution de l'équation $(E): 35x - 27y = 2$.
2) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) ; b) déterminer la solution $(u;v)$ permettant de trouver J_1
3) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?
b) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, Combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux corps ?

Exercice N°13 : 1) Vérifier que 101 est un nombre premier.
2) Prouver que l'équation $(E'): 77a + 100b = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$
3) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') ; b) Le couple $(13;-10)$ est-il une solution de (E')
4) On considère dans IN l'équation $(E): x^{77} \equiv 3 \pmod{101}$
a) Soit x une solution de (E) i) Prouver que x et 101 sont premiers entre eux puis que $x^{100} \equiv 1 \pmod{101}$
ii) Montrer que $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$
b) Soit x un entier naturel. Montrer que si $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$ alors x est une solution de (E)
c) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des entiers naturels de la forme $38 + 101k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice N° 14: Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les points $A(31;-50)$ et $B(-21;34)$

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)
2) Déterminer tous les points, de coordonnées entières du segment $[AB]$

EXERCICE15: Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point A (7, 1).
On désigne par (Δ) et (Δ') les droites d'équations respectives y = x et y = -x.
Soit B un point de (Δ) d'abscisse x et C un point de (Δ') d'abscisse y et tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
1) Démontrer que le couple (x, y) est solution de l'équation (E) : $4x + 3y = 25$.
2) On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des entiers relatifs.
a) Trouver une solution particulière (x_0, y_0) de (E) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.
b) Démontrer qu'un couple (x, y) d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si et seulement si, il est de la forme $(1 + 3k, 7-4k)$, où k est un entier relatif.
c) Combien y a t il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tel que: $-2 \le x \le 4$ et $-1 \le y \le 11$
3) a) Représenter dans le plan ces couples de points, ainsi que le point A et les droites (Δ) et (Δ').
b) Vérifier que parmi les couples de points (B, C) répondant à la question 2) c), il y a un couple (B, C)

pour lequel le quadrilatère OBAC est un rectangle.

EXERCICE 16:

1) a) Expliquer pourquoi il n'existe pas de couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $5u + 10v = 26$

2) Soit (E) l'équation $10u + 33v = 1$ où u et v sont des entiers relatifs.

a) Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E). (On ne demande pas de donner un exemple d'un tel couple).

b) Utiliser l'algorithme d'Euclide, pour trouver un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E).

c) En déduire un couple (u_1, v_1) solution particulière de l'équation (E'): $10u + 33y = 889$ puis trouver la solution générale de cette équation.

d) Déterminer, parmi les couples (u, y) solution de (E') celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

3) Soit l'équation (E'') : $66x^3 + ux^2 + vx - 10 = 0$ où l'inconnue x est un rationnel et où u et v sont des entiers relatifs.

2) a) Prouver que si le nombre $\dfrac{10}{33}$ est solution de (E'') alors le couple (u, v) est solution de (E')

b) Soit $\dfrac{p}{q}$ une solution rationnelle de l'équation (E''). Montrer que si p et q sont premiers entre eux alors p divise 10 et q divise 66.

c)En déduire le nombre de rationnels non entiers , positifs ,pouvant être solutions de l'équation (E'').

Exercice N° 17 :1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_1): 11x + 8y = 79$.

a) Montrer que si $(x; y)$ est solution de (E_1) alors $y = 3 \pmod{11}$. b) Résoudre alors l'équation (E_1).

2) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_2): 3y + 11z = 372$.

a) Montrer que si $(z; y)$ est solution de (E_2) alors $z \equiv 0 \pmod 3$. b) Résoudre alors l'équation (E_2).

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_3): 3x - 8z = -249$.

4) Le prix total de 41 pièces détachées, reparties en trois lots, est de 480 Dinars. Le prix d'une pièce du premier lot est de 48Dinars. Le prix d'une pièce du second lot est de 36 Dinars. Le prix d'une pièce du 3ième lot est de 4 Dinars. Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

EXERCICE 18: Soit p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul.

On pose $S = 1 + p + p^2 + ... + p^{n-1}$ 1) a) Ecrire S sous la forme d'un quotient.

b) Calculer l'expression $p^n + (1 - p)S$ et en déduire que p^n et $(1-p)$ sont premiers entre eux.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $p^n x - (1 - p)y = p$.

b) En déduire, dans $\mathbb{Z}^2$, les solutions de l'équation $10^n x + 2^{2+n} y - 10.\ 2^{n-1} = 0$

Exercice N° 19 :1) Déterminer $994 \wedge 5999$

2) a) Vérifier que le couple $(-1032; -171)$ est une solution de l'équation $(E): 142x - 857y = 3$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

3) Soit n un entier naturel à 6 chiffres tel que lorsque les trois premiers chiffres avec les trois derniers, le résultat obtenu est $6n + 21$. Trouver n.

EXERCICE 20 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$ (unité : 6 cm)

On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$ et on définit une suite de point (M_n) de la manière suivante : M_0 a pour affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n, l'affixe de M_n.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Placer les points M_0, M_1 et M_2.

2) Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

3) Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égale à p, montrer que deux points M_n et M_p sont confondus, si et seulement si, (n – p) est multiple de 12.

3)a) On considère l'équation (E) : 12x–5y = 3 où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié quele couple (4 ; 9) est solution, résoudre l'équation (E).

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite [Ox).

Exercice21 :1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 31x+12y=1$.

2) ABRAR est née en 2008, lorsqu'elle a multiplié le jour et le mois de sa date de naissance par 31 et 12 respectivement, elle a trouvé une somme de 268. Déterminer la date de naissance d' ABRAR.

Exercice N°22: b est un entier naturel premier différent de 2. Soit p et q deux entiers naturels écrits dans le système de base b avec $p=121$ et $q=1001$ (c'est-à-dire $p=1\times b^2+2\times b^1+1\times b^0$ et $q=1\times b^3+0\times b^2+0\times b^1+1\times b^0$) On désigne par Δ le P.G.C.D. de p et q.

1) a) Vérifier que $\forall b\in IN; b^3+1=(b+1)^2(b-2)+3(b+1)$. b) Démontrer que $\Delta=b+1$ ou $\Delta=3(b+1)$

2) a) Trouver une condition nécessaire sur Δ pour qu'on ait : $70p-13q=8$

b) Montrer alors que la seule valeur possible pour b est 7.

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 70x-13y=-16$

EXERCICE 23:1)Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) :35x + 26y = 4

2)On assimile les lettres des alphabets A, B, C,..............., Z aux nombre 0, 1, 2,3...................,25 et on code c'est nombres par la fonction $f: x\to 35x(\mathrm{mod}\,26)$ autrement dit $f(x)$ est le reste de la division Euclide de 35x par 26 **exemple :** *la lettre B est assimilée ou nombre 1

* $f(1)=35\Rightarrow f(1)\equiv 9(\mathrm{mod}\,26)$ et 9 est assimilé a la lettre J donc sera codée J

a)Coder le mot LUNDI

b)Justifier que décoder la lettre E revient a résoudre l'équation (E). c)Décoder le mot EKX

Exercice N° 24: Pour tout $n\in IN$, on pose $a_n=2\times10^n+1$.

1) a) Montrer que $\forall n\in IN$, a_n est divisible par 3.

b) Discuter selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de a_n par 11.

c) En déduire que $\forall n\in IN$; a_n et 11 sont premiers entre eux.

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): a_2x+11y=1$ a) Justifier que (E) admet au moins une solution.

b) En appliquant l'algorithme d'Euclide au nombre a_2 et 11, déterminer une solution particulière de (E).

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère le point A_n d'affixe $z_n=2e^{i\pi\frac{a_n}{4}}$

a) Montrer que $\forall n \in IN$, A_n appartient à un cercle fixe que l'on précisera.

b)Montrer que $\forall n \in IN^* ; A_n \in \{A_1 ; A_2\}$.

EXERCICE 25: Pour coder un message, on procède de la manière suivante :à chacune des 26 lettres de l'alphabet, A, B, C, ………, X, Y, Z ; on associe un entier naturel b de l'ensemble $\{0,1,2,.......,23,24,25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A 0	B 1	C 2	D 3	E 4	F 5	G 6	H 7	I 8	J 9	K 10	L 11	M 12
N 13	O 14	P 15	Q 16	R 17	S 18	T 19	U 20	V 21	W 22	X 23	Y 24	Z 25

A et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(a\ n + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec a = 2 et b = 3, on procède de la manière suivante :

Etape 1 : on lui associe l'entier n = 15. **Etape 2** : le reste de la division $2\times15+3=33$ par 26 est 7.

Etape 3 : on associe 7 à H. donc P est codé par la lettre H.

1) Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend a = 0 ?

2) Montrer que les lettres A et G sont codés par la même lettre lorsqu'on choisit a = 13.

3) Dans toute la suite de l'exercice, on prend a = 5 et b = 2.

a) On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer que si $5n+2$ et $5p+2$ ont le même reste dans la division par 26 alors (n – p) est un multiple de 26.

En déduire que n = p. b) Coder AMI.

4) On se propose de décoder la lettre E.

a)Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que: $5n - 26y = 2$ où y est un entier.

b) On considère l'équation $5x - 26y = 2$ avec x et y entiers relatifs.

i) Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$. ii) Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$

iii) En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \le x \le 25$.

c) Décoder alors la lettre E.

Exercice N° 26 : 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 97x - 299y = 81$

(On pourra vérifier que $(7,2)$ est une solution particulière)

2) Soit n un entier à 4 chiffres qui s'écrit a4b4 . On note m le nombre obtenu si on échange a et b (C'est-à-dire b4a4). Le but de cette question et de déterminer m et n sachant que le reste de la division Euclidienne de m par n est 2. On note q le quotient de cette division.

a) Montrer que $q \in \{0,1,2,....,9\}$; b) Montrer que $10(100q-1)a + 10(q-100)b + 2(202q-201) = 0$

c) Montrer que $2q - 1 \equiv 0 (\bmod 5)$ d) En déduire la valeur de q

e) Montrer que $(b;a)$ est une solution de l'équation (E) . Conclure , c'est-à-dire déterminer m et n.

Exercice 27: Soit n un entier naturel non nul.

1) on considère l'équation notée (E) : $3x + 7y = 10^{2n}$ ou x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer un couple (u ; v) d'entiers relatifs tels que 3u + 7v = 1

En déduire une solution particulière (x_0 ; y_0) de l'équation (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ;y) solutions de (E).

2) On considère l'équation notée (G): $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ ou x et y sont des entiers relatifs.

a) Montrer que $100 \equiv 2 \pmod 7$.Démontrer que si (x ;y) est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod 7$.

b) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de 3x² par 7							

c) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo7.En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Exercice N° 28 : 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 3x+4y-1=0$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.Soit Δ la droite d'équation $3x+4y-1=0$. Déterminer les points de Δ de coordonnées entières dont le carré de la distance à l'origine O est un multiple de 5.

Exercise 29 : 1)a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.

b) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

c) Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009}+2009$ par 11.

2) On désigne par p un nombre entier naturel. On considère pour tous entier naturel non nul n le nombre $A^n = 2^n + p$ .On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}.

a)Montrer que d_n divise 2_n .b)Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.

c)Déterminer la parité de d_n en fonction de celle de p. En déduire le PGCD de $2^{2009}+2009$ et $2^{2010}+2009$

Exercice N°30 :

1) Soit E l'ensemble des couples des entiers naturels $(a;b)$ tels que $a^2=b^3$. Vérifier que E est non vide.

2) Soit $(a;b)\in E$. On note $d=a\wedge b$ et on désigne par a' et b' les entiers tels que $a=da'$ et $b=db'$.

a) Montrer que $a'^2=db'^3$; b) En déduire que $b'=1$.

3) Montrer que $(a;b)\in E$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier

4) Montrer que si n est le carré d'un entier et le cube d'un autre entier alors $n\equiv 0 \pmod 7$ ou $n\equiv 1 \pmod 7$

Exercice N°31 : 1) On considère l'équation $(E): 109x-226y=1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on conclure pour l'équation (E) ?

b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141+226k;68+109k)$ où $k\in\mathbb{Z}$.En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul c tel que $109d=1+226c$ (On précisera les valeurs des entiers d et c)

3) On note A l'ensemble des 227 entiers naturels n tels que $a\le 226$.

4) On considère les deux fonctions f et g de A définies de la manière suivante :

A tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.

A tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a) Vérifier que $g[f(0)]=0$. On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat : si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.

b) Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226}\equiv 1 \pmod{227}$.

c) En utilisant 1) b) ; déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A ; $g\left[f(a)\right]=a$. Que peut-on dire de $g\left[f(a)\right]=a$?

Exercice 32 : 1) a) Déterminer l'ensemble des couples (x , y) de nombres entiers relatifs, solution de , l'équation (E) : 8x -5y = 3.

b) Soient m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p , q) de nombres entiers vérifiant m = 8p + 1 et m = 5q + 4.

Montrer que le couple (p , q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9 \pmod{40}$

c)Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2000.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ .a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$.

b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

3)Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $N = a\times10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = a00b$. On se propose de déterminer ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a)Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod 7$. b)En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice N° 33 :1) On considère l'équation $(E): 6x+7y=57$ où x et y sont deux entiers.

a) Déterminer un couple d'entiers $(u;v)$ tel que $6u+7v=1$;en déduire une solution particulière $(x_0;y_0)$ de l'équation (E) . b) Déterminer les couples d'entiers solutions de (E)

2) Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace. On considère le plan (P) d'équation : $6x+7y+8z=57$

On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan de repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3) On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x ; y et z sont des entiers naturels.

a) Montrer que l'entier y est impair

b) On pose $y=2p+1$ où p est un entier naturel. Montrer que le reste de la division euclidienne de $p+z$ par 3 est égal à 1.

c) On pose $p+z=3q+1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x ; p et q vérifient la relation $x+p+4q=7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d) En déduire les coordonnées de touts les points de P dont les coordonnées sont des entiers naturels.

EXERCICE 34:1) Soit $n \in \mathbb{N}$, On considère les entiers naturels $a=7n+9$ et $b=12n+15$

a) On note $d = a \wedge b$. Montrer que $d \in \{1;3\}$; b) Déterminer n pour que $d = 3$

2) On donne dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 12x-7y=3$ a) Montrer que si $(x;y)$ est solution de (E) alors $y \equiv 0 \pmod 3$. b) Déterminer une solution particulière de (E). Résoudre alors (E)

3) Un astronome a observé en l'an 2000 un corps céleste A qui apparaît périodiquement tous les 24 ans ; 6 ans plus tard il observe un corps B dont la période d'apparition est 14. on appelle z l'an de la prochaine apparition simultanée des deux corps aux yeux de l'astronome.

a) Soient x et y le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre l'an 2000 et l'an z. Montrer que $(x;y)$ est solution de (E). b) Déterminer z.

EXERCICE 35: 1)Soient a, b et c trois entiers non nuls.

a)Montrer que: $a\wedge b=1$ et $a\wedge c=1 \Leftrightarrow a\wedge bc=1$ .b)En déduire que : si $a\wedge b=1$ alors $a\wedge b^n=1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E): x^3+x^2+1=0$. a) Montrer que (E) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.

b) Soit r un rationnel. On pose $r=\dfrac{p}{q}$ avec $q\in\mathbb{N}^*, p\in\mathbb{Z}^*$ et $p\wedge q=1$.

Montrer que si r est une solution de (E) alors $q=1$. En déduire que l'équation (E) n'admet de solutions dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 36 : On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) :17x-13y=2.

1)a) Vérifier que (7,9) est une solution particulière de (E). b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases}17x-13y=10\\ x\wedge y=5\end{cases}$

2)a) Soit $q\in\mathbb{Z}$. Montrer que $\begin{cases}q\equiv5[13]\\ q\equiv1[17]\end{cases}$ si seulement si $q\equiv18[221]$.

b)Une marchandise est mise dans des cartons à 13 pièces le dernier carton ne contient que 5 pièces et si elle est mise dans des cartons à 17 pièces le dernier carton ne contient que 1 déterminer les nombres possibles de pièces de cette marchandise sachant qu'on a moins de 600 pièces .

3)a) Vérifier que $10^{16}\equiv1[17]$ .b) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 10^n par 13. c) Existe-t-il un entier naturel p tel que $10^p\equiv18[221]$.

4) Soit $n\in\mathbb{N}$. On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E') :$17x^2-13y^2=10^{16n+1}$ .a) Montrer que si (x,y) est solution de (E') alors $y^2\equiv11[17]$. b) Déduire que l'équation (E') n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Exercice 37 :1)Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

2/ Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=1+5+5^2+5^3+.....+5^n$. a) Montrer que : $4S_n=5^{n+1}-1$

b) Soit a un entier, montrer que : $4S_n\equiv a$ (mod7) si et seulement si $S_n\equiv2a$ (mod7)

c) En déduire le reste de la division euclidienne de S_{1000} par 7.

3) Soit n un entier naturel donné .On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations (E_0): $5^n x-S_n y=0$ et (E_1): $5^n x-S_n y=7$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, S_n et 5 sont premiers entre eux. b- Résoudre l'équation (E_0).

c)Montrer que les solutions de (E_1) sont les couples (x, y) tels que $x=35+kS_n$ et $y=28+k5^n$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases}25x-31y=7\\ x\wedge y=7\end{cases}$

Exercice 38 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)On désigne par Δ la droite d'équation $3x+2y+8=0$ .a)Vérifier que le point $A(-2,-1)$ est un point de Δ.

b) Déterminer tous les points, de coordonnées entières, de la droite Δ.

2)Soit Δ' la droite perpendiculaire à Δ passant par A. a)Justifier qu'une équation cartésienne de Δ' est $2x-3y+1=0$. b)Déterminer tous les points, de coordonnées entiers, de la droite Δ'.

3) Soit M un point, de coordonnées entières de Δ et M' un point, de coordonnées entières, de la droite Δ'.

a) Montrer qu'il existe $k_1\in\mathbb{Z}$ et $k_2\in\mathbb{Z}$ tels que $MM'=\sqrt{13}\times\sqrt{k_1^2+k_2^2}$.

b) Déterminer tous les couples (p, q) d'entiers carrés parfait tels que p + q = 13

c)Déterminer deux points E et F de coordonnées entiers, de la droite Δ et deux points E' et F',
De coordonnées entières, de la droite Δ' tels que EE'FF' est un losange de coté 13.

RESUME DU COURS

Définition : Soit $E=\{a_1\,;\,a_2\,;\,........\,;\,a_n\}$ un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul.

* Le nombre des p-uplets d'éléments de E est l'entier n^p.
* Le nombre des p-uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier n ! .
* Si $1\le p\le n$ alors : Le nombre des p-uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier : $A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$ Le nombre de parties à p éléments de E est l'entier $C_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$

(L'entier C_n^p est aussi noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ et on convient que $C_n^0=1$)

Définition : Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est soumis au hasard et est donc imprévisible.L'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers.
Les éléments de E sont appelés évènements élémentaires. Une partie A de E est appelée évènement.

Définition : Soit E l'univers d'une expérience et $P(E)$ l'ensemble des évènements de E. On appelle probabilité sur E, toute application p, de $P(E)$ dans $[0,1]$ vérifiant les conditions ci-dessous :

* L'image $P(E)$ de E est égale à 1. * L'image $P(\varnothing)$ de l'ensemble vide est égale à 0.
* L'image $P(A)$ d'un évènement A, est la somme des images des évènements élémentaires de A, c'est-à-dire : $p(A)=\sum\limits_{a_i\in A} p(a_i)$

Propriétés : Soit $(E\;;\;P(E)\;;\;p)$ un espace probabiliste et A et B deux évènements de E.

* $p(\overline{A})=1-p(A)$; * $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$;
* Si $A\cap B=\varnothing$ alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$
* Si $A_1\;;\;A_2\;;........;A_k$ sont des évènements deux à deux incompatibles, alors :
$p(A_1\cup A_2\cup......\cup A_k)=p(A_1)+p(A_2)+.....+p(A_k)$

Théorème: Soit E l'univers d'une expérience aléatoire dans une situation d'équiprobabilité et $P(E)$ l'ensemble des parties de E. l'application p définie de $P(E)$ dans $[0,1]$, définie par $p(a)=\dfrac{1}{card(E)}$, pour tout évènement élémentaire a de E est une probabilité sur E, appelée probabilité uniforme.

Propriété : Si $(E,P(E),p)$ est un espace probabilisé tel que la probabilité p est uniforme, alors :
$p(A)=\dfrac{card(A)}{card(E)}$, pour tout évènement A de E.

Théorème : Soit $(E, P(E), p)$ est un espace probabilisé et B un évènement tel que $p(B) \neq 0$, L'application p_B de $P(E)$ dans $[0,1]$, définie par $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, pour tout évènement A, est une probabilité sur E.

Définition : Soit $(E, P(E), p)$ est un espace probabilisé et B un évènement tel que $p(B) \neq 0$, L'application p_B ainsi définie s'appelle probabilité Conditionnelle. Le réel $p_B(A)$ est noté $p(A/B)$

(On lit « probabilité de A, sachant B »)

Définition : On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Dans le cas où $p(B) \neq 0$, la réalisation de B n'influence pas celle de A, c'est-à-dire $p(A/B) = p(A)$.

Définition : Soit E un ensemble fini, les parties B_1 ; B_2 ;........; B_n forment une partition de E lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est E.

Théorème : Soit $(E, P(E), p)$ est un espace probabilisé B_1 ; B_2 ;........; B_n forment une partition de E tels que pour tout i, $p(B_i) \neq 0$ alors pour tout évènement A, $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i).p_{B_i}(A)$

Définition : Soit $(E, P(E), p)$ est un espace probabilisé. On appelle aléa numérique ou variable aléatoire toute application $X : E \rightarrow IR$.

Définition : Soit $(E, P(E), p)$ est un espace probabilisé et X une variable aléatoire. On appelle loi de probabilité de X ou distribution de X, l'application : $X(E) \rightarrow [0,1]$; $x_i \mapsto p(X = x_i)$

Conséquences : Soit $(E, P(E), p)$ est un espace probabilisé. Si x est une variable aléatoire sur E telle que $X(E) = \{x_1 ; x_2 ;........; x_n\}$, *alors* $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$.

Définition : Soit $(E, P(E), p)$ est un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur E telle que : $X(E) = \{x_1 ; x_2 ;........; x_n\}$. On appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

Théorème : Soit $(E, P(E), p)$ est un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires sur E. Alors :

* Pour tout réel α; $E(\alpha X) = \alpha E(X)$; * $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Définition : Soit $(E, P(E), p)$ est un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur E. On appelle variance de X le nombre : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$, On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété : Soit $(E, P(E), p)$ est un espace probabilisé. Si X est une variable aléatoire sur E alors $V[X] = E(X^2) - (E(X))^2$.

Définition : Soit $(E, P(E), p)$ est un espace probabilisé et une variable aléatoire sur E. On appelle fonction de répartition de X, l'application définie de IR dans $[0,1]$ par $F : x \mapsto p(X \leq x)$

Théorème : Soit une expérience aléatoire constituée de n épreuves identiques, indépendantes et n'ayant que deux issues : succès ou échec. Soit p la la probabilité de l'évènement succès. On considère la variable aléatoire X associant à cette expérience le nombre de succès réalisés au cours des n épreuves. Alors la loi de probabilité de V est donnée par $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$; $k \in \{0 ; 1 ; .... ; n\}$. On dit que X suit une loi binominale de paramètre (n, p)

Théorème : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binominale $B(n,p)$.

On a $E(X) = np$; $V(X) = np(1-p)$ *et* $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Définition : Soit un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$. La fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ est appelée densité de la loi de probabilité uniforme sur $[a,b]$. On appelle probabilité uniforme sur $[a,b]$ l'application qui a tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$ associe le réel $P([c,d]) = \int_c^d f(x)dx$

Définition : Pour tout réel c de $[a,b]$, $P(\{c\}) = \int_c^c f(x)dx = 0$. Si on désigne par $\overline{[c,d]}$ le complémentaire de $[c,d]$ dans $[a,b]$, alors $P\left(\overline{[c,d]}\right) = 1 - P([c,d])$

Définition : On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle $[a,b]$ suit la loi de probabilité uniforme P si $P(c \leq X \leq d) = \dfrac{d-c}{b-a}$

Définition : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de la probabilité uniforme P sur l'intervalle $[a,b]$.

On appelle fonction de répartition de X, l'application $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie

par : $F(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < a \\ P(a \leq X \leq x) & si \;\; x \in [a,b] \\ 1 & si \;\; x > b \end{cases}$

Définition : Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ *par* $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de la loi exponentielle. On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application P qui, * à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $P([c,d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx$.

* à tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $P([c,+\infty[) = e^{-\lambda c}$

Théorème : 1) Pour tout réel $c > 0$, $P(\{c\}) = \int_c^c f(x)dx = 0$

2) Pour tout réel $c > 0$, $P([0,c]) = \int_0^c f(x)dx = 1 - e^{-\lambda c}$; 3) $P([c,+\infty[) = 1 - P([0,c])$

Définition : On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Si $P(c \le X \le d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda c} - e^{\lambda d}$ et $P(X \ge c) = e^{-\lambda c}$

Définition : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle de paramètre λ. On appelle fonction de répartition de X, l'application : $F : IR \to [0,1]$ définie par :

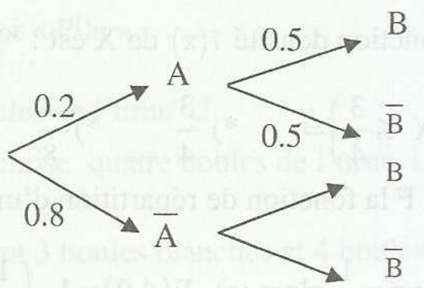
$$F(x) = \begin{cases} 0 & Si \quad x < 0 \\ P(0 \le X \le x) & Si \quad x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

LES EXERCICES

Exercice 1 : Soit A et B deux évènements indépendants tel que : $P(A) = 0.6$ et $P(B) = 0.5$ alors :

a) $P(A \cap \overline{B}) =$	* 0.7	* 0.3	* 0.2
b) $P(A \cup B) =$	* 0.8	* 0.3	* 0.2
c) $P(\overline{A} / B) =$	* 0.6	* 0.4	* 0.1

2) Un expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre où A et B sont deux évènements et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont leurs évènements contraires respectifs



a) $P(B / A) =$ * 0.2 * 0.5 * 0.1

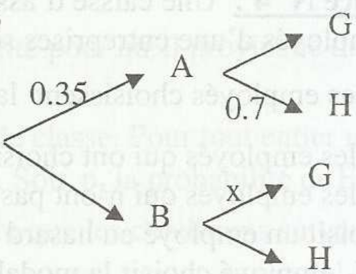
b) $P(A \cap B) =$ * 0.1 * 0.4 * 0.7

sachant que $P(B / \overline{A}) =$ *0.3 *0.24 *0.8

Exercice 2 : Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est Vraie ou Fausse en justifiant la réponse.

Proposition N°1 :Il existe deux évènements A et B tels que $P(A) = 0.8$; $P(B) = 0.4$ et $P(A \cap B) = 0.1$

Proposition N°2 :Si les évènements A et G sont indépendants alors $x = 0.3$



Exercice 3: 1) Une urne contient 80 boules blanches et 20 boules noires indiscernables au toucher. On effectue n tirages successifs avec remise. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées alors :

a) $P(X=0)=$	*) $(0.8)^n$	*) $(0.2)^n$	*) $(0.2)^n\times(0.6)^n$
b) $P(X=1)=$	*) $(0.2)^{n-1}\times 0.8$	*) $n\times(0.8)^{n-1}\,0.2$	*) $n\times(0.8)\times(0.2)^{n-1}$

2) Soit X une variable qui suit une loi binomiale de paramètre n et p, On a :

a) $E(2X)=$	*) $2np$	*) $4np$	*) $np(1-p)$
b) $V(2X)$	*) $np(1-p)$	*) $4np(1-p)$	*) $2np(1-p)$

3) Le choix d'un réel de l'intervalle $[-1;4]$ se fait suivant la loi uniforme :

a) La probabilité pour que l'on ait $-2\le x\le 3$ est : *) 1 ; *) $\frac{2}{3}$; *) $\frac{4}{5}$

b) La probabilité pour qu'il soit un entier naturel est : *) 0 ; *) 1 ; *) $\frac{5}{6}$

4) Soit X la variable aléatoire indiquant la durée de vie d'une machine en années. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre 0.25 alors :

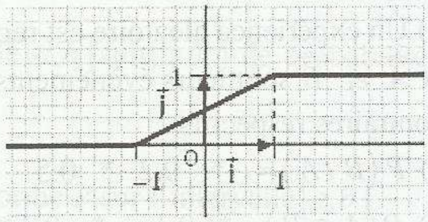
a) La fonction densité de X est : *) $e^{0.25x}$; *) $0.25e^{-0.25x}$; *) $0.25e^{0.25x}$

b) La probabilité que la machine dure plus de 4 ans est égala à : *) $1-e^{-1}$;*) e^{-1} ; *) $e^{-1}-1$

c) La probabilité que la machine dure moins de 4 ans est égala à :*) $1-e^{-1}$;*) e^{-1} ; *) $e^{-1}-1$

d) La probabilité que la machine dure moins de 8 ans sachant qu'elle a duré plus de 4 ans est égala à : *) $1-e^{-1}$;*) e^{-1} ; *) $e^{-1}-1$

5) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi continue dont la courbe de sa fonction de répartition donnée ci- contre.



a) la fonction densité $f(x)$ de X est : *) $\frac{1}{2}$; *) $\frac{1}{4}$; *) e^{-2x}

b) $P\left(X\le\frac{3}{4}\right)=$ *) $\frac{3}{4}$ *) $\frac{7}{8}$ *) $\frac{3}{8}$

6) Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètre

$n=5$ et $p=\frac{1}{3}$ alors :a) $F(4.9)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^5$; b) $F(4.9)=\left(\frac{2}{3}\right)^5$; c) $F(4.9)=\left(\frac{1}{3}\right)^5$

Exercice N° 4 : Une caisse d'assurance maladie propose à ses affiliés une modalité d'hospitalisation m.
Les employés d'une entreprises sont tous affiliés à cette caisse d'assurance et on sait que :

Le $\frac{1}{3}$ des employés choisissent la modalité m.

Parmi les employés qui ont choisi la modalité m, 80% sont atteints d'une maladie chronique
Parmi les employés qui n'ont pas choisi la modalité m, 75% sont atteints d'une maladie chronique
On choisit un employé au hasard et on considère les évènements suivants :
M : « L'employé choisit la modalité m » et C : « L'employé est atteint d'une maladie chronique »

1) a) Déterminer les probabilités suivantes : $P(M)$; $P(C/M)$ et $P(C/\overline{M})$

b) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2) a) Calculer la probabilité que cet employé ait choisit la modalité m et soit atteint d'une maladie chronique.
b) Calculer la probabilité que cet employé n'ai pas choisi la modalité m et soit atteint d'une maladie chronique.
C) En déduire $P(C)$
3) Soit l'évènement E : « L'employé choisit la modalité m sachant qu'il est atteint d'une maladie chronique » Montrer que $P(E)=\frac{8}{23}$.

Exercice N°5: Une urne contient 12 boules $\begin{cases} 4 \text{ numérotées } 1 \\ 5 \text{ numétrotées } 2 \\ 3 \text{ numérotées } 3 \end{cases}$

1) On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A : « Les boules tirées sont de même numéro »
B : « Les boules tirées portent des numéros dont le produit est pair » ; C : « B sachant A »
2)On tire au hasard successivement 3 boules de la manière suivante
Si la boule tirée porte le numéro 2 ,on la remet dans le sac .
Si la boule tirée porte le numéro 1 ou 3,on la garde
Calculer la probabilité de l'évènement E : « deux seulement des 3 boules tirées portent le numéro 1 »

Exercice N° 6 : On dispose d'une urne U_1, d'une urne U_2 et d'une pièce de monnaie »L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 4 boules rouges.L'urne U_2 contient 5 boules blanches et 3 boules rouges.
La pièce de monnaie est truquée de façon que, lorsqu'elle est lancée, la probabilité d'obtenir « Face » soit le double de la probabilité d'obtenir « Pile »
1) Calculer la probabilité d'obtenir « Face » et la probabilité d'obtenir « Pile »
2) On considère l'épreuve suivante : on lance la pièce de monnaie :
- Si le coté visible est « Face » alors on tire simultanément deux boules de l'urne U_1
- Si le coté visible est « Pile » alors on tire successivement et sans remise quatre boules de l'urne U_2
Quelle est la probabilité d'obtenir une seule boule blanche ?

Exercice N° 7 : On considère deux urnes U_1 et U_2L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 4 boules rouges.
L'urne U_2 contient 5 boules blanches et 3 boules rouges.
On choisit au hasard une urne puis on tire un jeton de cette urne.
1) Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1.
2) Sachant qu'on a tiré un jeton portant le numéro 1, quelle est la probabilité pour qu'il provienne de l'urne U_1 ?

Exercice N° 8 : Un professeur oublie fréquemment les clés de son salle de classe. Pour tout entier naturel $n \geq 1$; on note E_n l'évènement : « Le professeur oublie ses clés le jour ». Soit p_n la probabilité de E_n . On note à la probabilité p_1 qu'il oublie ses clés le 1^{er} jour. On suppose en outre que les conditions suivantes sont réalisées :-Si le jour n, il oublie ses clés, la probabilité qu'il les oublies encore le jour suivant $n+1$ est $\frac{1}{10}$.
-Si le jour n, il n'oublie pas ses clés, la probabilité qu'il les oublies encore le jour suivant $n+1$ est $\frac{4}{10}$.

1) a) Déterminer les nombres $p\left(E_{n+1}/E_n\right)$ et $p\left(E_{n+1}/\overline{E_n}\right)$ puis en fonction de p_n les nombres $p\left(E_{n+1}\cap E_n\right)$ et $p\left(E_{n+1}\cap\overline{E_n}\right)$.

b) En déduire pour tout entier naturel non nul $p_{n+1}=-\frac{3}{10}p_n+\frac{4}{10}$.

2) On pose pour tout $n\in IN^*$; $U_n=13p_n-4$

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme en fonction de n

b) Calculer (U_n) en fonction de n et a puis l'expression de p_n en fonction de n et a.

Exercice 9 : Dans une ferme, on produit des œufs de trois tailles différentes : des petits (P) dans la proportion de 20% ; des moyens (M) dans la proportion de 50% et des gros (G) dans la proportion de 30%. Ils sont de deux qualités : Ordinaire (O) et supérieure (S). on a remarqué que : 80% des petits œufs sont de qualité ordinaire ; 50% des œufs moyens sont de qualité ordinaire et 20% des gros œufs sont de qualité ordinaire.

1) On prend un œuf au hasard, Quelle est la probabilité pour qu'il soit :

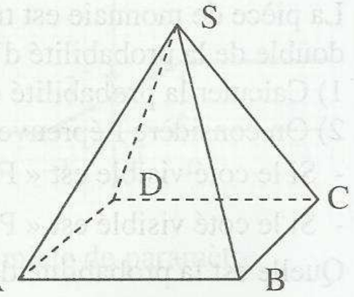
a) De petite taille et de qualité supérieure ; b) De qualité ordinaire ; c) De qualité supérieure

2) a) Montrer que la probabilité pour qu'un œuf soit gros et de qualité supérieure est égale à 0.24

b) On remplit au hasard une boite de 12 œufs. On suppose que les choix des œufs sont indépendantes les uns des autres.

Quelle est la probabilité pour que cette boite contienne au moins deux gros œufs et de qualité supérieure.

Exercice N°10: Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (On suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin. On dit qu'elle « fait un pas ».



1) La fourmi se trouve en A. Après avoir faire deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

2) Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note S_n l'événement : « La fourmi est au a) en A ? ; b) en B ? ; c) en C ? ; d) en D ? sommet S après n pas » et p_n la probabilité de cet événement. (Le point de départ est A)

a) Calculer p_1 et p_2 ; b) Montrer que : $p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)$.

3) On considère la suite (p_n), définie par $\begin{cases} p_1=\frac{1}{3} \\ p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n) ; n\in IN^* \end{cases}$

a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in IN^*$; $p_n=\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n$

Exercice N° 11:

Une urne contient cinq boules rouges numérotées : 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 2 et trois boules noires numérotées :2 ;2 ; 2

1) On tire simultanément trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :A : « Obtenir trois boules de même couleur » B : « Obtenir une somme égale à 4 »

C : « Avoir trois boules de même couleur sachant qu'on a une somme égale à 4 »
2) Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage simultané de trois boules associe la somme des chiffres marqués sur les trois boules tirées.
a) Déterminer la loi de probabilité se X ; b) Calculer l'espérance et la variance de X.
c) Déterminer la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement.

Exercice 12 : Monsieur Sami a trois fils : Ali, Karim et Walid mariés et pères de familles. Les enfants de ces trois familles sont répartis selon le tableau suivant :

	Famille de Ali	Famille de Karim	Famille de Walid
Garçons	2	2	1
Filles	3	2	3

Le grand père sami décide de choisir au hasard un enfant de chaque famille pour l'accompagner à son village.
1) Montrer que la probabilité de choisir trois garçons est égale à $\frac{1}{20}$
2) Soit les évènements suivants : F : « L'enfant choisi de la famille de Ali est une fille »
G : «L'enfant choisi de la famille de Ali est un garçon »
A : «Les trois enfants choisis sont deux garçons et une fille »
a) Calculer $P(F)$ et $P(G)$; b) Démontrer que $P(A/F)$;
c) Calculer $P(A/G)$ et déduire que $P(A)=\frac{11}{40}$
3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre des filles choisies par le grand père.
Déterminer la loi de probabilité de X.
4) Pendant 6 vacances successives, le grand père répète le même phénomène dans les mêmes conditions. Quelle est la probabilité que l'évènement A soit réalisé au moins une fois ?

Exercice 13 : On considère les épreuves de courses de 100 m et 200 m lors des meetings internationaux d'athlétisme. On s'intéresse au nombre des faux départs survenant lors de ces épreuves. On rappelle qu'un faux départ est le démarrage d'un athlète avant le signal de départ donné par le starter à la suite de quoi on doit donner un nouveau signal de départ. Les statistiques des données précédentes ont permis d'établir les données suivantes :La probabilité qu'il y ait un faux départ au premier signal est 0.25
Quand il y a un faux départ au premier signal, la probabilité qu'il y ait de nouveau un faux départ au deuxième signal est 0.08 . Il n'y a jamais de faux départ au troisième signal.
On notera : F_1 L'évènement : « Il y a un faux départ au premier signal »
F_2 L'évènement : « Il y a un faux départ au deuxième signal »
1) Représenter ces données par un arbre de probabilité.
2) Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement un faux départ.
3) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de faux départs lors d'une épreuve quelconque.
a)Déterminer la loi de probabilité de X.
b)Montrer que dans 25% des épreuves il y a au moins un faux départ.
4) Lors d'un quart de finale au 100 m, on fait courir les athlètes en quatre séries indépendantes. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux séries sans faux départ au premier signal lors de ce quart de finale.

Exercice 14: On considère une urne U_1 contenant 2 boules blanches et 3 boules rouges et une urne U_2 contenant 2 boules blanches et 2 boules rouges.

I) On tire une boule de U_1 et une boule de U_2.

1)a) Calculer la probabilité de l'évènement suivant : A : « Obtenir deux boules de même couleur »

b) Sachant qu'on a obtenu deux boules de couleurs différentes, quelle est la probabilité pour que la boule rouge soit tirée de U_1.

2) Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules blanches tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X, Calculer $E(X)$ et $V(X)$

b) On répète l'épreuve 4 fois de suite en remettant à chaque fois la boule dans l'urne où elle est tirée. Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :

F : « Obtenir au plus une fois deux boules de même couleur »

G : « Obtenir deux boules de même couleur pour la 1[ière] fois à la 3[ième] épreuve ».

II) On considère l'épreuve suivante : On tire une boule de U_1, si elle est blanche on la garde et on tire une autre boule de U_1, si elle est rouge on la met dans U_2 et on tire successivement sans remise deux boules de U_2. Soit Y la variable aléatoire qui indique le nombre de boules blanches obtenues au cours de cette épreuve. Déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice 15 : Un QCM comporte quatre questions :A chaque question, trois réponses sont proposées dont un seul est exact. Anis répond à chacune des quatre questions. Pour chaque question, soit il connait la réponse et répond de façon exacte, soit il ne la connait pas et dans ce cas il répond au hasard. On suppose, de plus, que la probabilité que Anis connaisse la réponse à une question donnée est égale à $\frac{1}{2}$. On note C l'évènement : « Anis connait la réponse » et J l'évènement : « La réponse est juste ».

1) a) Anis répond à une question du QCM. Construire un arbre de choix décrivant la situation.

b) Montrer que $P(J)=\frac{2}{3}$

c) Calculer la probabilité que Anis connaisse la réponse sachant que sa réponse est juste.

2) On attribue la note 1 à toute réponse juste et la note (-0.5) à toute réponse fausse. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée au QCM est 0. Soit X la note attribuée par Anis à ce QCM.

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b)Quelle est la probabilité que Anis ait au moins 2 points à ce QCM ?

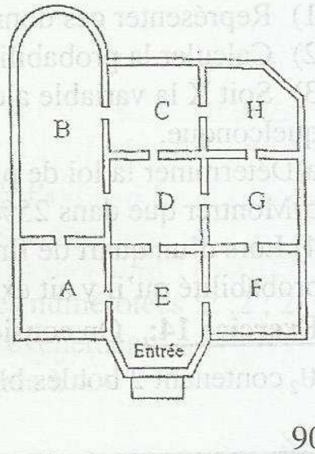
c) En supposant que tous les élèves se comportent comme Anis, Quelle moyenne (arrondie à l'unité) peut-on attendre à ce QCM ?

Exercice 16 : Le plan représenté ci-contre est celui d'une foire.

*un visiteur passe au hasard d'une salle à une salle voisine.

*Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisé pour entrer .Dans le parcours d'un visiteur, on ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprises dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençants par la lettre E.Par exemple : * Si un visiteur passe successivement par les salles E, A, B et C on codera son trajet par le mot EABC.

*Le trajet EDBD est impossible.



1) a) Construire l'arbre de probabilité des différents trajets possibles.

b) Montrer que la probabilité du parcours codé EABC est $\frac{1}{6}$.

c) Déterminer la probabilité de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est D »

2)On choisit douze visiteurs au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante.

On désigne par X la variable aléatoire qui aux douze visiteurs associe le nombre de ceux qui ont parcouru le trajet EABC.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer la probabilité de l'évènement « Avoir aux moins deux visiteurs ayant parcouru le trajet EABC »

c) Déterminer le nombre moyen des visiteurs ayant parcourus le trajet EABC.

Exercice N°17: On place un point aléatoirement dans un disque de centre O et de rayon 30 cm.

Soit d la distance de ce point O. On suppose que d suit une loi uniforme sur $[0;30]$.

1) Quelle est la probabilité que d soit égale à 13 ?

2) Quelle est la probabilité que d appartienne à l'intervalle $[10;20]$?

3) Quelle est la probabilité que d soit inférieur à 3 ?

4) On répète l'expérience décrite ci-dessus cinq fois de suite.

Calculer la probabilité d'avoir au moins un point dont la distance à O est inférieure à 3.

Exercice N18 : La durée de vie, exprimée en années, d'un téléviseur jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

1) La probabilité que le téléviseur tombe en panne avant la fin de la première année est 0.18.

Montrer que l'arrondi au centième de λ est 0.2

2) Déterminer la probabilité que le téléviseur n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années.

3) Sachant que ce téléviseur n'a connu aucune panne au cours des 10 premières années après sa mise en service, quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne au cours des 13 premières années ?

4) Dix téléviseurs neufs de ce type ont été mis en service en même temps.

On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de téléviseurs qui n'ont pas eu de panne au cours des trois premières années.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Déterminer le nombre moyen de téléviseurs qui n'ont pas eu de panne au cours des trois premières années.

Exercice 19: La durée de vie (en année) d'un appareil électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.16$.

1) a) Calculer $P(X \geq 8)$. b) Calculer la probabilité pour que l'appareil ait une durée de vie inférieure à trois mois.

c) Déterminer T tel que $P(X \leq T) = 4P(X \geq T)$.

2) Sachant qu'un appareil a déjà dépassé six ans, Quelle est la probabilité qu'il fonctionne quatre ans de plus ?

3) Une personne achète n appareils électroniques identiques $(n \in IN^*)$ du modèle précédent.

On suppose que la durée de vie d'un appareil est indépendante de cette des autres.

a)Exprimer en fonction de n la probabilité P_n qu'au moins un appareil fonctionne plus que huit ans.

b) Déterminer n pour que $P_n \geq 0.998$.

Exercice 20 : Un quincaillier achète des ampoules à trois fournisseurs dans les proportions suivantes : 20% au premier fournisseur, 50% au deuxième et 30% au troisième fournisseur.

Le premier fournisseur fabrique 97% d'ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 98% d'ampoules sans défaut, le troisième fournisseur fabrique 95% d'ampoules sans défaut.

1)On choisit une ampoule au hasard dans le stock.

2)On note : D l'événement « l'ampoule est défectueuse »

F_1 L'événement « l'ampoule provient du premier fournisseur »

F_2 L'événement « l'ampoule provient du deuxième fournisseur »

F_3 L'événement « l'ampoule provient du troisième fournisseur »

a) Représenter ces données par un arbre de probabilité. ; b) Montrer que $P(D)=0.031$

c) Sachant que l'ampoule choisie est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne du premier fournisseur ?

2) On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité R qu'une ampoule au plus soit défectueuse.

3) La durée de vie en heures d'une ampoule, notée T, suit une loi exponentielle de paramètre : $\lambda=2.10^{-5}$.

a) Quelle est la probabilité P_1 qu'une ampoule dure plus de 25000 heures ? Donner la valeur exacte de P_1 ?

b) Quelle est la probabilité P_2 qu'une ampoule dure plus de 50000 heures ? Donner la valeur exacte de P_2 ?

c) Quelle est la probabilité P_3 qu'une ampoule dure plus de 50000 heures, sachant qu'elle a déjà duré 25000 heurs ?

Exercice 21: Une usine fabrique des appareils électroniques identiques de deux types A « premier choix » et B « deuxième choix » telle que :40% de la production est de type A et le reste est de type B.La durée de vie (en heures) d'un appareil de type A suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1=10^{-3}$ et celle de type B suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2=5\times10^{-3}$

Dans tout l'exercice les résultats seront arrondis à 10^{-2} prés

1) on achète un appareil au hasard sans connaître le type, on désigne par X la variable aléatoire indiquant la durée de vie de cet appareil.

a) Montrer que pour tout $t\in IR_+$; $p(X\geq t)=\frac{2}{5}e^{-\lambda_1 t}+\frac{3}{5}e^{-\lambda_2 t}$.

b) Déterminer la probabilité pour que la durée de vie de cet appareil dépasse 500 heures.

c) Sachant que l'appareil acheté a dépassé 500 heures, quelle est la probabilité pour qu'il soit du deuxième choix ?

2) On pose $g(x)=\frac{1}{5}\int_0^x t\left(2\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+3\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\right)dt$ pour tout $x\in IR$

Calculer $g(x)$ en fonction de x et déterminer la limite de g quand x tend vers $+\infty$

3) Un client achète n appareils électroniques $(n\geq 2)$ du modèle précédent sans connaître le type. Soit Y l'aléa numérique définie par le nombre d'appareils dont la durée de vie dépasse 500 heures.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y. Calculer $E(Y)$.

b) Exprimer en fonction de n la probabilité p_n qu'au moins un appareil fonctionne plus que 500 heures

c) Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $p_n\geq 0.999$

Exercice 22 : Sami reçoit dans son bureau des communications téléphoniques à travers un téléphone muni d'un répondeur. Lorsqu'il sort de son bureau il met toujours en marche le répondeur.

*Lorsqu'il est présent dans son bureau, il met en marche le répondeur une fois sur quatre.

*Lorsqu' un client téléphone, la probabilité pour que le répondeur est égale à $\frac{2}{3}$

1) Un client téléphone et on considère les deux évènements :
A : « Sami est présent dans son bureau » ; R : « Le client reçoit la réponse par le répondeur »

a) Déterminer $p(R)$; $p(R/A)$ et $p(R/\overline{A})$; b) En déduire que $p(A)=\frac{4}{9}$

2) Un client téléphone, le répondeur répond. Quelle est la probabilité que Sami soit présent dans son bureau ?
3) Soit n un entier naturel non nul et différent de 1, n clients contactent par téléphone le bureau l'un après l'autre de façon indépendante. On considère l'évènement B : « Sami répond à au moins deux clients ».

Montrer que $p(B)=p_n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

4) La durée de vie en année du répondeur suit une loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer λ sachant que la probabilité que cet appareil tombe en panne avant la fin de la seconde année est 0.6

Exercice N° 23: On considère n sacs : $S_1;S_2;...;S_n$. * S_1 contient 2 boules blanches et 3 boules noires
* Chacun des autres sacs : $S_2;S_3;...;S_n$ contient 2 boules blanches et 2 boules noires.

1) Dans cette question on considère l'épreuve (E) suivante : « On tire simultanément 2 boules de S_1 et successivement et sans remise deux boules de S_2 ». on obtient ainsi 4 boules.

Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules blanches obtenues.

a) Vérifier que $p(X=0)=\frac{1}{20}$ b) Donner la loi de probabilité de X

c) On répète l'épreuve (E) 3 fois de suite. Quelle est la probabilité p d'obtenir au plus de fois « 4 boules noires »

2) Dans cette question soit l'épreuve (E') suivante : « On tire une boule de S_1 que l'on place dans S_2 puis une boule de S_2 que l'on place dans S_3 ...et ainsi de suite jusqu'à tirer une boule du dernier sac S_n.

On note E_k : La boule tirée du sac S_k est blanche ; $k\in\{1;2;...;n\}$

a) On pose $p_k=p(E_k)$, à l'aide d'un arbre pondéré, montrer que : $p_{k+1}=\frac{1}{5}p_k+\frac{2}{5};k\geq 1$.

b) On pose $U_k=p_k-\frac{1}{2}$. Montrer que (U_k) est une suite géométrique. En déduire p_n en fonction de n.

c) Pour quelles valeurs de n on a : $p_n\geq 0.4999$?

Exercice 24: 1) Pour une entreprise de construction d'ordinateurs, 60% de la production est testée valable à la vente, l'autre partie est révisée puis testée et donne 70% de postes valables à la vente et le reste est révisé une 2^{ième} fois puis vendu. Un appareil non révisé coûte 1000 D à l'entreprise, une 1^{ière} révision coûte 50D et une 2^{ième} révision coûte 150D. On impose à l'entreprise de vendre ses appareils à 1100D l'unité. Soit X la variable aléatoire définie par le gain algébrique de l'entreprise.
a) Déterminer la loi de X et dire si cette affaire est rentable.
b) Définir la fonction F de répartition de X et la représenter.
2) J'ai acheté un de ces ordinateurs, lorsque je lui demande de tracer un segment de 12 cm, il trace, d'une façon aléatoire, un segment de longueur l compris entre 11.7 cm et 12.2 cm.
a) Calculer la probabilité P pour que l soit comprise entre 11.9 et 12 cm.
b) lorsque je lui demande le tracé d'un losange de côté 12 cm, il trace successivement les quartes côtés.
* Calculer la probabilité P_2 d'avoir un losange.

* Calculer la probabilité P_3 d'avoir un quadrilatère dont les côtés ont pour longueur entre 11.9 et 12 cm.

3) Mon ordinateur a une garantie de 3 ans et une durée de vie en année qui suit une loi exponentielle de paramètre 0.2.

a) Calculer la probabilité P_4 pour que mon ordinateur tombe en panne pendant la période de garantie.

b) Mon ordinateur n'est pas tombé en panne pendant la période de garantie, Calculer les probabilités suivantes :* P_5 : Pour qu'il tombe en panne l'année d'après.

* P_6 : Pour qu'il tombe en panne après l'année qui suit.

c) Une association achète 10 ordinateurs de cette entreprise identiques au mien.
Calculer les probabilités suivantes :

* P_7 : pour que 3 de ces ordinateurs tombent en panne pendant la période de garantie.
* P_8 : pour qu'au moins 2 ordinateurs tombent en panne après une année de la période de garantie.

Exercice 25: A) Au rayon de l'électronique d'un grand magasin un téléviseur et un lecteur de DVD sont en promotion pendant une semaine. Une personne se présente :

- La probabilité qu'elle achète le téléviseur est 0,6
- La probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle achète le téléviseur est 0,7
- La probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle n'achète pas le téléviseur est 0,1.

On désigne parT:« La personne achète le téléviseur » et L : «La personne achète le lecteur de DV»

1) Déterminer les probabilités des évènements suivants :

a) «La personne achète les deux appareils » ; b) «La personne achète le lecteur DVD »

c) «La personne n'achète aucun des deux appareils »

2) Montrer que, si la personne achète le lecteur de DVD, la probabilité qu'elle achète aussi le téléviseur es $\frac{21}{23}$

3) Avant la promotion, le téléviseur coûtait 500 dinars et le lecteur de DVD 200 dinars. Pendant cette semaine, le magasin fait une remise de 15% pour l'achat d'un seul des deux appareils et 25% pour l'achat des deux appareils. On désigne par X la dépense effective en dinars de la personne. a) Déterminer les valeurs possibles de X ; b) Déterminer le loi de probabilité de X

c) Calculer l'espérance mathématique de X

d) Le gérant du magasin prévoit qu'il se présentera dans la semaine 80 personnes intéressées par ces deux appareils. Quel chiffre d'affaires peut – il espérer effectuer sur la vente de ces deux appareils ?

B) Lors de cette semaine de promotion ; la durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse de ce magasin est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda(\lambda>0)$.

1) a) Déterminer λ sachant que $P(Y\leq 10)=0.7$ On prendra dans la suite $\lambda=0.12$

b) Calculer $P(Y>50/Y>10)$

2) On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce magasin est indépendante de celles des autres caisses. Il y a 6 caisses sont ouvertes, On désigne par Z l'aléa numérique qui représente le nombre de caisse pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.

a) Calculer $P(Z=2)$; b) Calculer l'espérance $E(Z)$

c) Le gérant ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 5 des 6 caisses est supérieur à 10 minutes. Calculer la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

Définition : Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n et soit $(x_i ; y_i)_{1\le i\le n}$. Les Valeurs numériques prises respectivement par les variables X et Y. la distribution marginale de la variable X est la distribution des valeurs $(x_i)_{1\le i\le n}$ prises par la variable X.
la distribution marginale de la variable Y est la distribution des valeurs $(y_i)_{1\le i\le n}$ prises par la variable Y.

Définition : Soit X une série statistique double sur un échantillon de taille n. si $\overline{X}$; $V(X)$ et σ_X désignent respectivement la moyenne, la variance et l'écart-type de la série alors : $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$; $V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(x_i-\overline{X}\right)^2$ et $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$ où les valeurs $x_1 ; x_2 ;........; x_p$ désignent les valeurs distinctes prises par la variable X si elle est discrète, ou les centres des classes si la variable X est continue. L'entier n_i désigne l'effectif de la valeur x_i.

Définition : Soit $(X;Y)$ une série statistique double sur un échantillon de taille n. On appelle covariance de $(X;Y)$ le réel noté $\operatorname{cov}(X;Y)$ définie par : $\operatorname{cov}(X;Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i-\overline{X}\,\overline{Y}$, où $(x_i ; y_i)$ est la valeur observée pour l'individu i si X et Y sont discrètes, ou le centre de la classe si l'une des variables est continue.

Définition : Soit $(X;Y)$ une série statistique double sur un échantillon de taille n. Soit n_{ij} le nombre de fois qu'apparaît le couple $(x_i ; y_i)$. Alors $\operatorname{cov}(X;Y)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} n_{ij} x_i y_i-\overline{X}\,\overline{Y}$

Définition : Soit $(X;Y)$ une série statistique double de valeurs $(x_i ; y_i)_{1\le i\le n}$. L'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal est appelé nuage des points représentant la série statistique. Le point moyen du nuage est le point dont les coordonnées sont les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

Principe de la méthode de Mayer : Soit un nuage des points représentant une série statistique double (X, Y) et G son point moyen. On scinde le nuage de points de $(X;Y)$ en deux parties contenant à peu prés le même nombre de points. On considère alors les points moyens G_1 et G_2 des deux nuages obtenus. La droite (G_1G_2) définit un ajustement affine du nuage des points représentant la série statistique double $(X;Y)$. La droite (G_1G_2) est appelée droite de Mayer et passe par le point G du nuage global.

Théorème : Soit $(X;Y)$ une série statistique double sur un échantillon de taille n et telle que $\sigma_X \neq 0$. Soit $(x_i ; y_i)_{1\le i\le n}$ les valeurs observées de la série. Alors la somme $\sum_{i=1}^{n}\left(a x_i+b-y_i\right)^2$ est minimale pour la couple $(a_0 ; b_0)$ tel que $a_0=\frac{\operatorname{cov}(X;Y)}{\sigma_X^2}$ et $b_0=\left(\overline{Y}-\frac{\operatorname{cov}(X;Y)}{\sigma_X^2}\overline{X}\right)$

Définition : Soit $(X;Y)$ une série statistique double sur un échantillon de taille n. La droite d'équation : $y=\frac{\operatorname{cov}(X;Y)}{\sigma_X^2}\left(x-\overline{X}\right)+\overline{Y}$ est appelée droite des moindres carrés de Y en X, ou droite de régression de Y en X

La droite d'équation : $x = \frac{\text{cov}(X;Y)}{\sigma_Y^2}(y - \overline{Y}) + \overline{X}$ est appelée droite des moindres carrés de X en Y, ou droite de régression de X en Y.

Théorème : Les droites des moindres carrés de Y en X et de X en Y passent par le point moyen G du nuage associé à la série $(X;Y)$.

Définition : Soit $(X;Y)$ une série statistique double. On appelle coefficient de corrélation linéaire le réel noté ρ_{XY} défini par $\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X;Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Propriété : Soit $(X;Y)$ une série statistique double. Alors $-1 \le \rho_{XY} \le 1$. Le coefficient de corrélation linéaire est invariant par changement d'unité ou d'origine.

Interprétation : Les statisticiens conviennent que lorsque $|\rho_{XY}| > \frac{\sqrt{3}}{2}$, l'ajustement affine est justifié et les prédictions faites au moyen de cet ajustement sont raisonnables.

LES EXERCICES

Exercice 1 Le tableau suivant donne les recettes et dépenses en dinars d'une personne pendant 10 semaines.

Semaine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Recette X_i	106	113	97	87	101	90	91	111	87	102
Dépense y_i	67	70	62	59	66	56	61	73	59	67

1)Représenter dans un repère orthonormé le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$.
2)Déterminer les coordonnées du point moyen G. Placer G.
3)On partage le nuage de points en deux sous nuages : le premier de point moyen G_1 est constitué par les 5 points ayant les plus petites abscisses et le second de point moyen G_2 est constitué par les 5 autres points. Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.
4) Déterminer l'équation de la droite $(G_1\, G_2)$.
5)Estimer la dépense de cette personne si sa recette est de 120 dinars.

Exercice 2 Le tableau ci-dessous donne le poids Y (en kg) de 63 nouveaux nés ainsi que le poids maternel X.

Y \ X	]40,50]	]50,60]	]60,70]	]70,80]	Total
]1.5,2.5]	1	0	1	0	2
]2.5,3.5]	11	17	13	2	43
]3.5,4.5]	4	4	8	2	18
Total	16	21	22	4	63

1)Calculer $\overline{x}$ et σ_X , ainsi $\overline{y}$ et σ_Y. 2) Déterminer la covariance de X et Y. Interpréter.

Exercice N°3 :

Le tableau suivant donne pour sept nouveau-nés la taille X exprimée en cm et le poids Y exprimé en Kg.

Taille x_i (cm)	40	42	44	47	50	52	54
Poids y_i (Kg)	2.1	2.4	2.7	3.2	3.5	3.8	4

1) Représenter le nuage des points associé à la série double ci-dessous dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
2) Calculer la moyenne arithmétique et la variance de chacune des variables X et Y.
3) a) Calculer la covariance du couple $(X;Y)$.
b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Que peut-on déduire ?
4) a) Donner une équation de la droite D de régression de Y en X.
b) Donner une estimation du poids d'un nouveau-né de taille 58 cm.

Exercice4 Le tableau suivant donne la dépense, en milliers de dinars, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels,réparations) de 1990 à 1998.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dépense y_i	398	451	423	501	673	956	1077	1255	1427

1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i,y_i) et le point moyen dans un repère orthogonal tel que 2cm représentent une année en abscisse et 1 cm représente 100 milliers de dinars en ordonnées (ainsi 398 sera représenté par 3,98 cm).
2) a) Donner la valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i,y_i). Un ajustement affine vous parait – il justifié ? b) Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}).Représenter D dans le repère précédent.

c) En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un mille de dinars) en produits informatiques en 2000.
3) L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $z_i = \ln y_i$.
a)Recopier et compléter le tableau suivant ou z_i est arrondi à 10^{-3}

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Z_i	5,986	6,111	6,047	……..	……..	……..	……..	……..	……..

b) Donner la valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série (X_i,Y_i).
Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}).
c) En utilisant cet ajustement, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondi à un mille dinars) en produits informatiques en 2000.
4) En 2000, les ménages ont dépensé 2136 milles de dinars pour les produits informatiques. Avec lequel des deux ajustements l'estimation faite est-elle la meilleure.

Exercice 5 Sur un parcours donné, la consommation y d'une voiture est donnée en fonction de sa vitesse moyenne x par le tableau suivant :

X (en km/heure)	80	90	100	110	120
y (en litres/100km)	4	4,8	6,3	8	10

1)a) Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique (x_i,y_i) dans un repère orthogonal du plan (on prendra 2 cm pour 10 km/h sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 litre sur l'axe des ordonnées).
b) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage sur le graphique.
c) A l'aide de la calculatrice donne une équation, sous la forme y = ax + b, de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés et tracer cette droite (on arrondira a au millième et b au centième).
d) En utilisant cet ajustement, estimer la consommation aux 100 km (arrondi au dixième) de la voiture pour une vitesse de 130 km/h.
2)La forme du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose z = lny et on admet que la droite d'ajustement obtenue pour les cinq points (x ;z) du nuage par la méthode des moindres carrés, a pour équation z=0,0234x-0,5080 a) Ecrire y sous forme $y=e^{Bx}$ (donner A et B arrondis à 10^{-4}).
b) Tracer sur le même graphique la courbe d'équation $y = Ae^{Bx}$ pour x élément de l'intervalle [80 ;120].
c) En utilisant cet ajustement, estimer la consommation aux 100km (arrondi au dixième) de la voiture de 130 km/h.
3) Des deux valeurs obtenues dans les questions 1) et 2) pour la consommation à une vitesse de 130 km/h, laquelle vous semble la plus proche de la consommation réelle ? Expliquer
3) Selon ce modèle, quel serait le prix d'une tonne de matière primaire au 1er Janvier 2010 ?

Exercice 6 L'observation de l'effet du nombre X des mois par an sur le degré Y de saleté dans in lac (en grammes par litre) est résumé dans le tableau suivant :

X	0	1	2	3	4
Y	42,6	3,4	2,01	1,16	1,01

1) a) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points de la série statistique (X, Y).

b) Déterminer un ajustement affine de Y en X par la méthode de Mayer.

c) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Que peut-on conclure?

2) On pose Z = ln(Y – 1).

a) Reproduire et compléter le tableau suivant (les résultats seront arrondis au millième).

X	0	1	2	3	4
Z					

b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Z.
c) Donner une équation de la droite de régression de Z en X à l'aide des moindres carrés.
d) Déterminer le degré de saleté prévu dans ce lac dans le cas où il pleuvrait pendant six mois.

Exercice N°7 : Le tableau suivant donne l'évolution du profil annuel, en millions de dinars, d'une entreprise de l'année 2000 à l'année 2006 :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7
Profil annuel (y_i)	1.26	1.98	2.28	2.62	2.84	3	3.2

1) a) Représenter le nuage de points et le point moyen associé à la série statistique double $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal.
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique.
2) On désigne par : $z_i = e^{y_i}$.
a) Dresser un tableau statistique qui représente la série statistique double $(x_i ; z_i)$ (les résultats seront arrondis au centième).
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les caractères x_i et z_i .
c) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.
d) En déduire y en fonction de x.
3) On suppose que l'évolution du profil annuel se poursuit suivant ce modèle.
a) Calculer le profil annuel, exprimé en millions de dinars, attendu pour l'année 2010.
b) Déterminer à partir de quelle année le profil annuel initial (c'est-à-dire celui de l'année 2000) aura au moins triplé.

Exercice 8 Le tableau suivant indique la teneur de l'air en dioxyde de carbone (CO_2), observée depuis le début de l'ère industrielle. Dans le tableau ci-dessous, x_i désigne le rang de l'année et y_i, la teneur en CO_2, exprimée en parties par million.

Année	1850	1900	1950	1990
Rang x_i de l'année	0	50	100	140
Teneur y_i en CO_2	275	290	315	350

1) Représenter le nuage, de points de la série (x_i, y_i) dans un repère orthogonal R.
On veut modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points. Plusieurs types de fonctions semblent utilisables.
2) Modélisation par une fonction affine
a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y, interpréter.
b) Donner une équation de la droite des moindres carrés sous la forme $y = a x + b$, avec a arrondi au centième et
b à l'unité. Représenter cette droite dans le repère R.
c) Selon ce modèle quelle teneur en CO_2 peut-on prévoir en 2010 ?
Placer dans le repère R le point M correspondant à cette prévision.
3) Autre modélisation :Des scientifiques peuvent penser qu'une autre modélisation est envisageable. Plus précisément, ils proposent de modéliser cette évolution par une fonction affine définie par : $f(x) = 250 + \beta e^{x}$ Pour cela on pose $z_i = \ln(y_i - 250)$
a) Tracer le nuage de points $P_i\ (x_i , z_i)$ dans un autre repère et constater son superbe alignement .
b) Déterminer une équation de la droite des moindres carrés de la série (x_i , z_i)
c) Déduire l'expression de $y = f(x)$
d) Selon ce modèle, quelle teneur en CO_2 peut-on prévoir en 2010 ?

Devoir de contrôle N° 2 : (Exemple 1)

Exercice N°1 A) Cocher la réponse correcte :

1)Toute similitude directe d'angle π et de rapport $k \neq 1$ est une :

a) homothétie de rapport k b) symétrie centrale c) homothétie de rapport -k

2) Soit α un réel strictement positif alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{t^2+t^6+\sin t}{1+t^4}dt$ est égale à : a) $\frac{2}{3}\alpha^3$ b) $\frac{1}{3}\alpha^3$ c) $\frac{3}{2}\alpha^3$

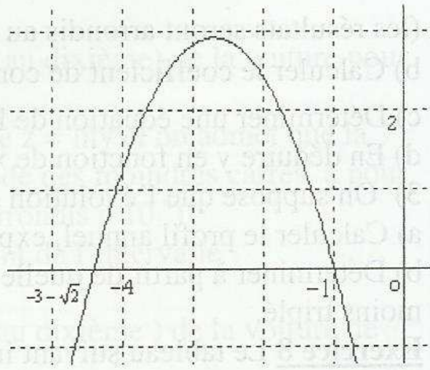
B) Répondre par Vrai ou Faux :

1) f est une similitude indirecte tel que $f(A)=A$, donc A est le centre de f.

2) La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f,

elle coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $-3-\sqrt{2}$ et -1

alors $\int_{-3-\sqrt{2}}^{-1} f'(t)dt \geq 2$



Exercice N°2 Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD de centre O tel que AB= 1. On note I = A*B et J = A*D.

1) Soit f l'antidéplacement tel que f (D)= A et f (J) =I.

a) Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

b) Montrer que f (A) = B. c) Soit $g = S_{(AI)}of$. Caractériser g.

2) Soit S la similitude directe de centre Ω telle que S(D)= O et S(C) = I.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Déterminer S((BC)), en déduire que S(B)= A. c) Montrer que S (A) = J.

3) Montrer que Ω, I, B et C sont situés sur un même cercle(ζ).

4) a) Déterminer SoS (B), en déduire que Ω est le barycentre des points (B, 1) et (J, 4).b) Construire Ω.

5) Soit δ la similitude indirecte telle que $\delta(D)=O$ et $\delta(C)=I$.

a) Montrer que $\delta((BD))=(BD)$ et déterminer $\delta(BC)$. b) En déduire le centre de δ.

c) Prouver que (BD) est l'axe de δ. d) Montrer que $\sigma o S^{-1}$ set une symétrie orthogonale que l'on précisera.

6) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$,

on pose S (M)= M' avec M(Z) et M'(Z').

a)Exprimer Z' en fonction de Z. En déduire les coordonnées de Ω.

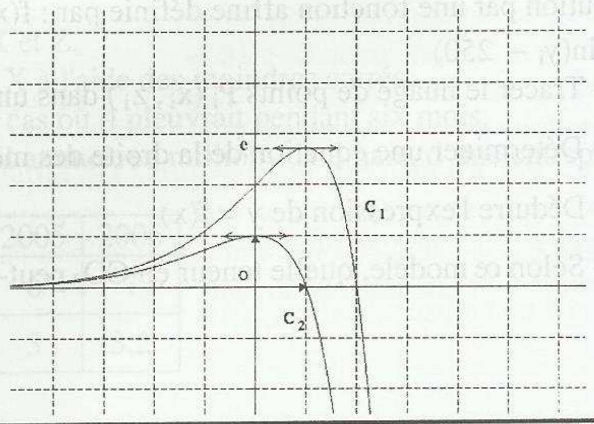
b) Utiliser 6) a) pour déterminer l'ensemble despoints $\gamma = \left\{ M(Z) telque \left| \frac{-1}{2}iZ - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i \right| \leq \left| -\frac{1}{2}iZ + \frac{1}{2}i \right| \right\}$

Exercice N° 3 : On a représenté ci-dessous deux courbes représentatives(C_1) et (C_2) d'une fonction f et de sa primitive F définies sur IR.

1.Justifier que (C_2) est celle de la fonction f.

2. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur [0 ;1]

3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_2), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 2.



4.Soit G la fonction définie par : $G(x)=\int_0^x f(t)dt$.

a)Etudier le sens de variation de G.

b)Montrer que la représentation graphique Γ de G est l'image de (C_1) par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

5.Soit la fonction h définie par : $h(x)=\ln(f(x))$.

a)Préciser le domaine de définition de h.   b)Dresser le tableau de variation de h.

Exercice 4: Soit $n\in IN$ et $U_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$

1) a) Montrer que pour tout $n\in IN$; $0\le U_n\le\frac{1}{n+1}$.   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

2) Utiliser une intégration par parties pour montrer que pour tout $n\in IN$ On a : $U_{n+2}=\frac{n+1}{n+4}U_n$

3) Soit $x\in IR$ et $\phi(t)=\int_0^{\cos t}\sqrt{1-x^2}\,dx$

a) Montrer que ϕ est dérivable sur IR .   b) Calculer $\phi'(t)$

c) En déduire $\phi(t)$ pour $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer alors U_n

4) a) Montrer que pour tout $n\in IN$, On a : $\frac{n+1}{n+4}\le\frac{U_{n+1}}{U_n}\le 1$ b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$

c) Montrer que pour tout n∈ IN , On a : $U_n\times U_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$

d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sqrt{n}\,U_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Devoir de contrôle N° 2 (Exemple 2)

Exercice N°1: On considère une fonction f continue sur IR_+ dont le tableau de variation est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	

1) Utiliser le tableau de variation pour répondre aux questions suivantes :

a) Trouver un encadrement de f sur IR_+

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{f(x)-1}$.

2) Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0;1]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[0;1]$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$

3) Soit g la fonction définie sur IR_+ par : $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ .a) Dresser le tableau de variation de g ; b) Construire la courbe (C)

4) On note par $I=\int_0^1 g(x)\,dx$; $J=\int_0^1 xg'(x)\,dx$

a) Donner une interprétation graphique de I ; b) Montrer que $1\le I\le 2$

) Calculer $I+J$; d) En déduire que : $0 \le J \le 1$

Exercice2: Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre O et tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .Soient I et J les milieux respectifs de [OB] et [BC] et soit E le symétrique de O par rapport à (BC).

) Soit S la similitude directe qui transforme A en C et C en E.

) Déterminer le rapport k et l'angle α de S.

) Soit ω le centre de S. Montrer que les points ω, A et E sont alignés et en déduire une construction de ω.

c) Montrer que les droites (ωJ) et (ωB) sont perpendiculaires.

d) Soient f la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Montrer que $S = f o h$.

) Soit $g = S o h' o S_{(AC)}$ où h' est l'homothétie de centre A et de rapport 2.

a) Déterminer g(A) et g(O).

b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

) Soit Ω le point d'intersection des droites (AE) et (BC) et soit $\sigma = h o g$.

a) Montrer que σ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

b) Montrer que $\sigma o \sigma(A) = I$ et en déduire que Ω est le centre de σ .

c) La droite $(O\Omega)$ coupe (AD) en K. Montrer que l'axe de σ est la médiatrice de [AK].

Exercice N° 3: 1) Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1]$ par $f(x)=x\sqrt{1-x}$.

) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty;1[$ et que $f'(x)=\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$

) Dresser le tableau de variation de f, Construire la courbe ζ_f de f dans un repère orthonormé.

) Soit F la fonction définie sur $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_0^{\sin^2 x} t\sqrt{1-t}\,dt$

) Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout $x\in I$. b) Montrer que F est paire.

) a)Montrer que F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, On a $F'(x)=2\sin x\cos^2 x-2\sin x\cos^4 x$

) Calculer $F(0)$. Déterminer l'expression de $F(x)$ pour tout $x\in I$.

) Déterminer l'aire du domaine limité par ζ_f et les droites : $y=0$; $x=0$ et $x=\frac{1}{2}$.

Exercice N° 4 :Pour tout $n \in IN$, On pose $I_n=\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$

1) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$; On a : $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2) Montrer que pour tout $n \in IN$; On a : $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$

3) a) Montrer que pour tout $k \in IN^*$; On a : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \le \frac{1}{k}$

b) Déduire que pour tout $n \in IN^*$; On a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge Ln(n+1)$. Déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

4) Pour tout $n \in IN^*$ On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} I_k$. Déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Exercice N°5 : Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

A- 1) a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Montrer que pour tout entier $n \ge 3$, l'équation : $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $[1,e]$ une seule solution a_n.

c- Prouver que $a_{n+1} < a_n$, en déduire que la suite (a_n) converge.

2) a- Montrer que pour tout $x \ge 0$, on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \le \ln(1+x)$.

b- En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ on a : $\frac{1}{2}x \le \frac{\ln(1+x)}{1+x}$

c- Montrer alors que pour tout $n \ge 4$ on a : $a_n \le 1 + \frac{2}{n}$

3) Déterminer la limite de la suite (a_n).

B- Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x - \ln x} & si\ x \ne 0. \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1) Montrer en utilisant les variations de f que le domaine de définition de g est $[0,+\infty[$.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0 .
3) Dresser le tableau de variation de g.
4) 4) Construire la courbe de g

Devoir de synthèse N° 2 :

Exercice N° 1:

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la réponse exacte :

1)Dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$, On considère la parabole (P) de foyer $F\left(-\frac{7}{2};0\right)$ et de directrice $D : x = \frac{7}{2}$, l'équation réduite de (P) est : a) $x^2 = -7y$, b) $y^2 = 7x$; c) $y^2 = -7x$, d) $y^2 = -14x$.

2)Soit S une similitude indirecte d'expression complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}\bar{z}$ alors l'expression complexe de sa réciproque est : a) $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}\bar{z}$, b) $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}\bar{z}$, c) $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}\bar{z}$, d) $z' = -e^{i\frac{\pi}{4}}\bar{z}$

3)Soit x et y deux entiers naturels tel que $x\equiv 3(\mathrm{mod}5)$ et $y\equiv 2(\mathrm{mod}5)$, alors le reste de la division euclidienne de x^2+2y^2 par 5 est a) 17 ; b) 2 ; c) 6

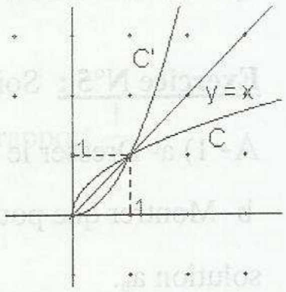
4)Le chiffre des unités de 7^{2009} est : a) 9 ; b) 1 ; c) 0 ; d) 7

5)Soit n un entier vérifiant $n^2+2n\equiv 3(\mathrm{mod}7)$ alors :

a) $n\equiv 2(\mathrm{mod}7)$; b) $n\equiv 3(\mathrm{mod}7)$; c) $n\equiv 1(\mathrm{mod}7)$ ou $n\equiv 4(\mathrm{mod}7)$

6) ζ et ζ' désignent les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ on note A l'aire de la région du plan limitée par ζ et ζ' et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, alors A= a) $2\int_0^1 f(x)dx$; b) $1-2\left(\int_0^1 f^{-1}(x)dx\right)$

c) $\int_0^1 (x-f(x))dx$; d) $\int_0^1 \left(f^{-1}(x)-f(x)\right)dx$



Exercice N° 2 : Soit ABC un triangle rectangle et isocèle de sens direct. I = B*C et soit S la similitude directe de centre A et transformant B en I. 1) Caractériser S.

2) On suppose que $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan. On pose $M_0=B$, $M_1=S(M_0)$ et $M_{n+1}=S(M_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$. On désigne par z_n l'affixe de M_n.

a) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n. b) Montrer que $z_n=\dfrac{e^{in\frac{\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $Aff\left(\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right)=\dfrac{e^{i(n+3)\frac{\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}$.

d) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose L_n la longueur du polygone $M_0M_1M_2...M_n$. Montrer que $L_n=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$.Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S^n=\underbrace{SoSo...S}_{n\,fois}$.

a) Montrer que S^n est une similitude directe dont on caractérisera la fonction de n.

b) A l'aide de S^n, retrouver le résultat 2)b).

Exercice N° 3 : Soit $x\in\mathbb{Z}$

1) a) Déterminer les restes modulo 5 de x^2 b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x^2+2x+2\equiv 0(\mathrm{mod}5)$.

2) a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes dans la division euclidienne par 5 des entiers 2^n et 3^n.

b) En déduire pour quelles valeurs de n le nombre entier $A=7988^n+8667^n$ est divisible par 5.

3) L'entier n'étant supérieur à 1. a) Montrer que $n\left(n^4-1\right)$

b) Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 1. Déduire que les nombres n^p et n^{p+4} se terminent par le même chiffre des unités.

Exercice N° 4 :Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Soit (P) l'ensemble des points M(x, y) tels que : $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.
 a) Ecrire l'équation réduite de (P).
 b) En déduire que (P) est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice (D).

2) a) Soit A(3, 1). Vérifier que $A \in (P)$ et écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (P) en A.
 b) Tracer (P) et (T).
 c) Soit A' le projeté orthogonal de A sur (D). La droite (T) coupe l'axe focal de (P) en B.
 Montrer que les droites (AF) et (BA') sont parallèles.

3) Soit (Δ) la droite d'équation : x = 1. M(x, y) un point de plan. On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de M sur (Δ) et sur $\left(O,\vec{i}\right)$. Soit (H) l'ensemble des points M tels que $MH^2 - 2\,MK^2 = 2$.
 a) Montrer que $M \in (H)$ si et seulement si $\dfrac{(x-1)^2}{2} - y^2 = 1$.
 b) En déduire que (H) est une hyperbole dont on déterminera le centre.
 c) Montrer due (T) est la tangente à (H) en A.
 d) Déterminer les sommets et les asymptotes de (H) puis tracer (H) dans le même repère que (P).

4) Soit A : l'aire du domaine limité par (H) et les droites d'équations x = 3 et x = 4 et (S) : le solide obtenu par rotation de A autour de l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$. Calculer le volume V de S.

Exercice N° 5 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

1. a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
 b) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $0{,}5 < \alpha < 1$.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \int_0^{\alpha} f^n(t)\,dt$. a) Calculer I_1.

b) Vérifier que : $f'(x) = f(x) - \left[f(x)\right]^2$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2^n} - \alpha^n\right)$

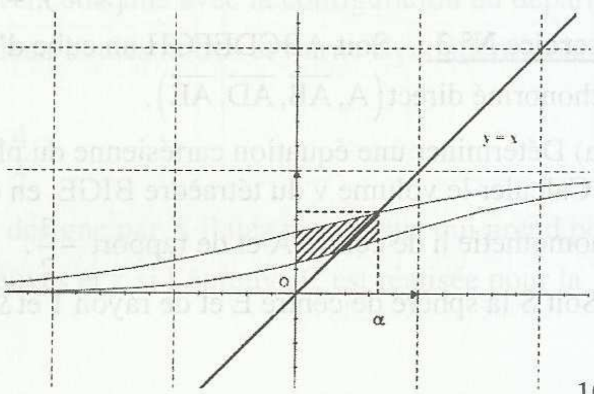
c) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive, que peut on conclure ?

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\alpha}{2^n} \le I_n \le \alpha^{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

3. a) Montrer que pour tout $n > 1$, $I_n = -\ln\left[2(1-\alpha)\right] + \sum\limits_{k=1}^{k=n-1} \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$.

 b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{k=n-1} \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$.

4. Sur le graphique ci-dessous, on donne les courbes de f et de f^2.
a) Identifier les deux courbes.
b) Calculer en fonction de α, l'aire A du domaine coloré



Devoir de contrôle N° 3

Exercice N° 1 : 1) Soit X une variable qui suit une loi binomiale de paramètre n et p, On a :

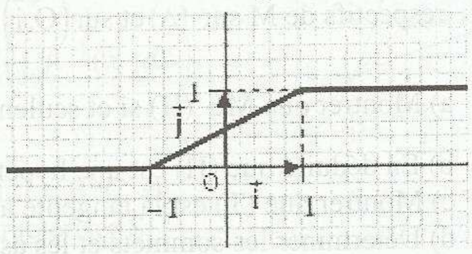
a) $E(2X)=$	*) $2np$	*) $4np$	*) $np(1-p)$
b) $V(2X)$	*) $np(1-p)$	*) $4np(1-p)$	*) $2np(1-p)$

2) Le choix d'un réel de l'intervalle $[-1;4]$ se fait suivant la loi uniforme :

a) La probabilité pour que l'on ait $-2 \le x \le 3$ est : *) 1 ; *) $\frac{2}{3}$; *) $\frac{4}{5}$

b) La probabilité pour qu'il soit un entier naturel est : *) 0 ; *) 1 ; *) $\frac{5}{6}$

3) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi continue dont la courbe de sa fonction de répartition donnée ci- contre.



a) la fonction densité $f(x)$ de X est : *) $\frac{1}{2}$; *) $\frac{1}{4}$; *) e^{-2x}

b) $P\left(X \le \frac{3}{4}\right) =$ *) $\frac{3}{4}$ *) $\frac{7}{8}$ *) $\frac{3}{8}$

Exercice N° 2 : On considère l'équation $(E): 7x+4y=1$ *avec* $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

1) a) Citer le théorème permettant d'affirmer que l'équation (E) admet des solutions.

b) Donner une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E).

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S): \begin{cases} n \equiv 3 \pmod 4 \\ n \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$

3) a) Soit k un entier naturel. Déterminer le reste de 3^{2k} modulo 4 et le reste de 2^{3k} modulo 7.

b) Vérifier que 2263 est une solution de (S) et montrer que $2263^{1008} - 1$ est divisible par 28.

4) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E'): 7x + 4y = 20$.

a) Démontrer que si $(x;y)$ est une solution de (E') alors $x \equiv 0 \pmod 4$. Résoudre alors (E')

b) Soit $d = x \wedge y$ où $(x;y)$ est solution de (E'). Déterminer les valeurs possibles de d.

c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E') dont le PGCD est 4.

d) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système : $\begin{cases} 7x + 4y = 20 \\ x \wedge y = 4 \\ x \vee y = 308 \end{cases}$

Exercice N° 3 : Soit ABCDEFGH un cube d'arrête AB=1et I=A*D. On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1)a) Déterminer une équation cartésienne du plan (BIG).

b) Calculer le volume v du tétraèdre BIGE, en déduire le volume v' du tétraèdre image de BIGE par l'homothétie h de centre A et de rapport $-\frac{3}{2}$.

2)Soit S la sphère de centre E et de rayon 1 et $S' = t_{\overrightarrow{AC}}(S)$.

a)Montrer que S est tangente au plan (BIG) au point $O\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

b)Montrer que S' coupe (BIG) suivant un cercle (C') dont-on précisera le centre et le rayon.

c)Montrer que (OB) est tangente à (C') en O.

3)Soit Δ l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OE}$. Vérifier que G appartient à Δ et que Δ est une droite parallèle à (OB).

Exercice N° 4 : I) On considère l'équation différentielle (E) : $y'-y=\frac{-1}{1+e^{-x}}$.

1) Déterminer la solution de l'équation y'-y=0 qui prend pour valeur 1 en 0.Soit f une fonction dérivable sur IR et g la fonction définie sur IR par $f(x)=e^{x}g(x)$. Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $\forall x\in IR;\ g'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Déduire la solution f de (E) telle que $f(0)=\ln 2$

II) On pose $f(x)=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un R.O.N$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a/ Montrer que $\forall X\in IR_+^*-\{1\}, \ln X<X-1$.

b/ Déduire que $\forall x\in IR, f'(x)>0$. « on pourra poser $X=\frac{1}{1+e^{-x}}$ ».

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Tracer (C). (On précisera la tangente à (C) au point d'abscisse 0).

4) Calculer l'air de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe d'abscisses et les droites d'équations :x=-1, x=0.

III) 1) Montrer que $\forall t\geq 0, t-\frac{t^2}{2}\leq\ln(1+t)\leq t$ 2) Déduire que $1-\frac{e^{-x}}{2}\leq f(x)\leq 1;\forall x\in IR$.

3) On pose $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k);n\in IN^*$.Donner un encadrement de S_n. Déduire que S_n est convergente et déterminer sa limite

Exercice N° 5: Une urne U_1 contient quatre boules blanches et deux boules noires et une urne U_2 contient trois boules blanches et trois boules noires. Une épreuve consiste à tirer une boule de l'urne U_1 que l'on met dans U_2 puis tirer une boule de l'urne U_2 que l'on met dans U_1 . Soit A, B et C les évènements suivants :

A : « à l'issue de cette épreuve la boule tirée de U_1 est blanche et la boule tirée de l'urne U_2 est blanche »

B : « à l'issue de cette épreuve la boule tirée de l'urne U_1 est noire et la boule tirée de l'urne U_2 est noire »

C : « à l'issue de cette épreuve les deux urnes U_1 et U_2 se trouvent chacune avec la configuration du départ, c'est-à-dire que l'urne U_1 contient quatre boules blanches et deux boules noires et l'urne U_2 contient trois boules blanches et trois boules noires »

1) a) Calculer $p(A)$ et $p(B)$. b) Montrer que $p(C)=\frac{4}{7}$.

2) On répète l'épreuve précédente n fois de suite $(n\geq 2)$ et on désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeurs 0 si l'évènement C n'est pas réalisé au cours de n épreuves et k si l'épreuve C est réalisée pour la première fois à la $k^{\text{ième}}$ épreuve $(0<k\leq n)$.

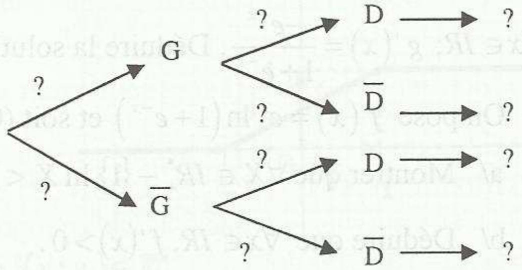
a) Calculer $p(X=k)$ pour tout $k\in\{1;2;.....;n\}$.

b) On pose $f(x)=1+x+x^2+........+x^n$ pour $x\in\left]0;1\right[$. Vérifier que $f'(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

En déduire que $E(X)=\dfrac{7}{4}\left(n\left(\dfrac{3}{7}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\dfrac{3}{7}\right)^n+1\right)$.

Devoir de synthèse N° 3 :

Exercice N° 1 Dans un atelier de couture on sait que 20% des machines sont sous garantie. Parmi les machines sous garantie 1% sont défectueuses. Parmi les machines qui ne sont pas sous garantie 10% sont défectueuses.



On considère les évènements suivants :

G : « La machines est sous garantie »

D : « La machine est défectueuse »

1) ON choisit une machine au hasard.

a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre

b) Déterminer la probabilité pour que la machine soit sous garantie et défectueuse.

2) a) Déterminer la probabilité pour que la machine soit défectueuse.

b) La machine est défectueuse, calculer la probabilité pour qu'elle soit sous garantie.

3) On choisit successivement et au hasard 5 machines. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « Seule la deuxième machine est sous garantie » ; B : « Obtenir au moins deux machines sous garantie »

4) Soit X la variable aléatoire indiquant la durée de vie d'une machine en années. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0.25$. Cocher la réponse exacte :

a) La probabilité que la machine dure plus de 4 ans est : x) $1-e^{-1}$; y) e^{-1} ; z) $e^{-1}-1$

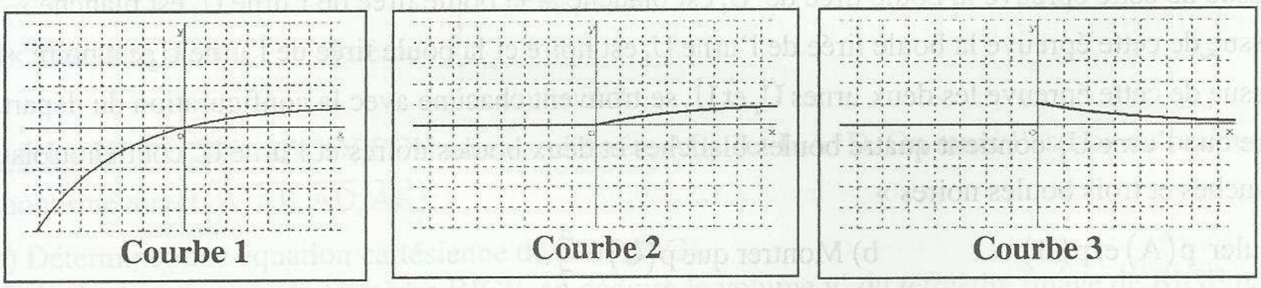
b) La probabilité que la machine dure moins de 8 ans sachant qu'elle a duré plus que 4 ans est égale à :

i) $1-e^{-1}$; ii) e^{-1} ; iii) $e^{-1}-1$

c) Sachant qu'une machine n'a pas eu de panne au cours des deux premiers années alors la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne les deux années suivantes est

i) e^{-1} ; ii) $e^{-0.5}$; iii) $1-e^{-0.5}$

d) La représentation graphique de la fonction de répartition de X est :



Courbe 1 Courbe 2 Courbe 3

Exercice N° 2 Dans un cube ABCDEFGH, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. K désigne le centre de la face BCGF. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Montrer que DIFJ est un losange puis montrer que l'aire de ce losange est égale à $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (DIJ).

c) Soit M le point de $[EF]$ tel que $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$. Déterminer l'aire de l'intersection de la pyramide EDIFJ avec le plan parallèle au plan (DIF) passant par M.

d) Calculer le volume de pyramide EDIFJ.

2) Soit Δ la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ). a) Montrer que $K \in \Delta$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de Δ et (DIJ).

c) Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.

3) Soit S l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient : $x^2+y^2+z^2-2x-y-z+\frac{4}{3}=0$.

a) Vérifier que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que L est un point de S. Quelle propriété géométrique relative à S et au plan (DIJ) peut-on déduire de ce dernier résultat ?

Exercice N° 3 I) Le tableau ci-dessous donne le prix d'une tonne de matière primaire en mille dinars DT au 1er Janvier de chaque année :

Année	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année (X)	0	1	2	3
Prix d'une tonne en mille DT (Y)	5.48	4.80	4.20	4.01

1) Représenter dans un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ du plan le nuage de points de la série statistique (X ; Y) (unité graphique 1 cm)

2) a) Déterminer le coefficient de corrélation ρ_{XY}

b) Déterminer une équation de la droite de régression D de Y en X. Tracer D.

c) Estimer le prix d'une tonne de cette matière primaire au 1er Janvier 2010

II) En fait, à partie de l'année 2003, le prix d'une tonne de cette matière primaire commence à remonter comme le montre le tableau suivant :

Année	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année (X)	3	4	5	6
Prix d'une tonne en mille DT (Y)	4.01	4.10	4.20	4.52

1) Placer sur le graphique de la partie précédente les points associés à ce second tableau.

2) On admet que la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x + 9 - 5\ln(x+2)$ est une modélisation satisfaisante de l'évolution du prix d'une tonne en mille DT de cette matière primaire de 2000 à 2010.

a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$

b) Montrer que la courbe (C) de f dans $(O;\vec{i};\vec{j})$ admet une branche infinie parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y = x$.

c) Tracer (C). On placera les points de (C) d'abscisses entières comprises entre 0 et 8.

d) Déterminer d'après (C) la date où le prix d'une tonne en matière primaire est minimal.

3) Selon ce modèle, quel serait le prix d'une tonne de matière primaire au 1er Janvier 2010 ?

Problème : A) Soit f la fonction définie sur $I=]-\ln 2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2e^x-1}}$, (ζ) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a/ Dresser le tableau de variation de f.

b/ Préciser l'équation de la tangente (T) à (ζ) au point d'abscisse 0.

c/ Tracer (T) et (ζ).

2) Soit g la fonction définie sur $]0,\pi[$ par $g(x)=-\ln(1+\cos x)$.

a/ Montrer que g réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur I.

b/ Soit $h=g^{-1}$, montrer que h est dérivable sur I et que $\forall x\in I; h'(x)=f(x)$.

c/ Calculer alors l'air de la partie du plan limitée par (ζ) et les droites d'équations x=0 ; y=0 et x=ln2.

3) Soit E l'ensemble des fonctions dérivables, strictement positives sur les intervalles de la forme $D=]a,+\infty[$, $a\in$ IR et solution de l'équation différentielle $y+y^3=-2y'$.

a/ Vérifier que f appartient à E.

b/ On pose $z=\dfrac{1}{y^2}$ avec $y\in$ E. Montrer que z est dérivable sur D et que $z'=z+1$.

c/ Montrer alors qu'il existe $k\in IR_+^*$ tel que $y(x)=\dfrac{1}{\sqrt{ke^x-1}}$; $x\in]-\ln k,+\infty[$.

B. Soit $n\in IN^*$ et F_n la fonction définie sur IR_+ par $F_n(x)=\int_0^x [f(t)]^n dt$ où f est la fonction définie dans la partie (A).

1) a/ Exprimer $F_1(x)$ en fonction de h(x). En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x)=\dfrac{\pi}{2}$

b/ Calculer $F_2(x)$ en fonction de x, en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x)=\ln 2$.

2) a/ Vérifier que $\forall t\in IR_+; 0\le f(t)\le e^{\frac{1}{2}}$. En déduire que $\forall x\in IR_+; 0\le F_n(x)\le \dfrac{2}{n}$.

b/ Montrer que F_n admet une limite finie notée L_n lorsque x tend vers $+\infty$.

c/ En utilisant $f\in$ E, montrer que $F_n(x)+F_{n+2}(x)=\dfrac{2}{n}\left(1-[f(x)]^n\right)$.

d/ Montrer alors que $\forall n\in IN^*; L_n+L_{n+2}=\dfrac{2}{n}$, puis calculer L_3 et L_4.

2) Soit $U_n=(-1)^n L_{2n}$ et $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

3) a/ Montrer que $\forall n\in IN^*; U_{n+1}=U_n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

b/ En déduire que $\forall n\in IN^*; S_n=U_{n+1}-U_1$. Calculer la limite de la suite (S_n).