

Section : MATHEMATIQUES

Correction de la série

Analyse aux BAC

1^{ère} Partie

entre 2008 et 2020

Etablie par : Mr M. MAAOUIA

98 600 618 - 20 810 290

e-mail : moez-maaouia@hotmail.com



**موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM**



bac Math

Correction " Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie "

Exercice 01: Principal 2020

① $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ $D_f = \mathbb{R}$

1) $\forall x \in \mathbb{R}, 1+e^{2x} > 0 \Rightarrow f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-(\sqrt{1+e^{2x}})'}{(\sqrt{1+e^{2x}})^2} = \frac{-\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}}{1+e^{2x}} = \frac{-e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}} < 0$$

2) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} = 0$
car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$

$\Rightarrow$ la droite $y=0$: Asymptote horizontale à f au voisinage de $(+\infty)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} = 1$$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \Rightarrow$ la droite $y=1$ est une asymptote horiz en $(-\infty)$

b) Ma $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < f(x) < 1$
car $e^{2x} > 0 \Rightarrow 1+e^{2x} > 1$
donc $\sqrt{1+e^{2x}} > 1$

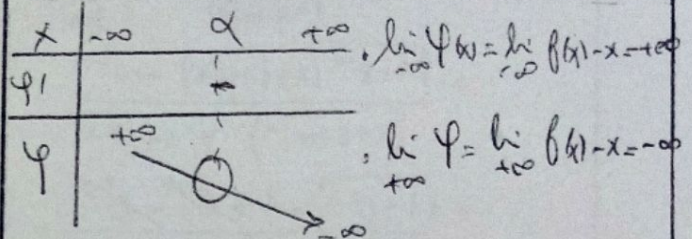
$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} < 1 \Rightarrow \boxed{0 < f(x) < 1}$$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	1	$\searrow 0$

b) f continue et strict $\searrow$ sur $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$
sur $f(\mathbb{R}) =]0,1[=]$

c) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$
on pose $\varphi(x) = f(x) - x \quad D_\varphi = \mathbb{R}$
 $\varphi \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}, \varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$



φ réalise une bijection de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
comme $0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ existe un unique $\alpha \in \mathbb{R} / \varphi(\alpha) = 0 \Rightarrow \boxed{f(\alpha) = \alpha}$
d'autre part :

$$\varphi(0,5) = f(0,5) - (0,5) \approx 0,018 > 0$$

$$\varphi(0,6) = f(0,6) - (0,6) \approx -0,18 < 0$$

$$\varphi(0,5) \cdot \varphi(0,6) < 0 \Rightarrow \boxed{0,5 < \alpha < 0,6}$$

d) si $x \in]-\infty, \alpha)$, $\varphi(x) \in]0, +\infty[$

$$\Rightarrow \varphi(x) > 0 \Rightarrow f(x) - x > 0$$

alors f est strict au dessus de $\Delta: y=x$

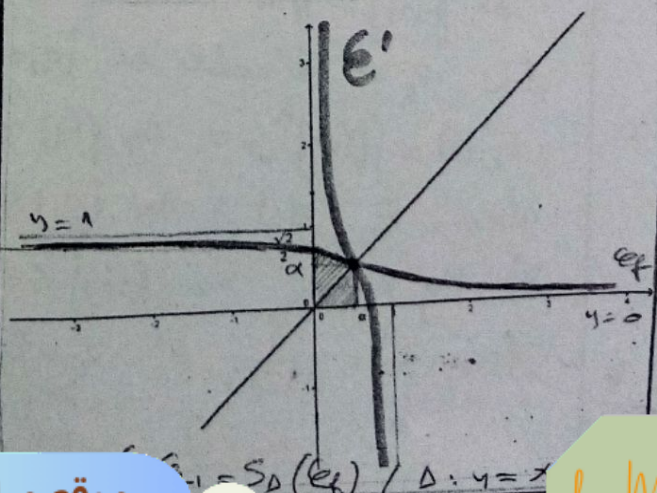
si $x \in [\alpha, +\infty[$, $\varphi(x) \in]-\infty, 0]$

$$\Rightarrow \varphi(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) - x \leq 0$$

alors f est strict au dessous de Δ .

4) a) $\bullet \mathcal{C}_f \cap (\mathcal{O}_f) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$\bullet \mathcal{C}_f \cap (\Delta: y=x) = (\alpha, \alpha)$



5) a) $h(x) = x - \ln(1 + \sqrt{1+e^{2x}})$
 h étant d' sur $\mathbb{R}$ car $\begin{cases} 1+e^{2x} > 0 \\ 1+\sqrt{1+e^{2x}} > 0 \end{cases}$
 $h'(x) = 1 - \frac{e^{2x}}{1+\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{(1+\sqrt{1+e^{2x}}) - e^{2x}}{(1+\sqrt{1+e^{2x}})\sqrt{1+e^{2x}}}$
 $= \frac{\sqrt{1+e^{2x}}(1+\sqrt{1+e^{2x}}) - e^{2x}}{(1+\sqrt{1+e^{2x}})\sqrt{1+e^{2x}}}$
 $= \frac{\sqrt{1+e^{2x}} + 1 + e^{2x} - e^{2x}}{(1+\sqrt{1+e^{2x}})\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

$h \in \text{sur } \mathbb{R} \Rightarrow h$ est une primitive de f
 $h'(x) = f(x)$ sur $\mathbb{R}$

b) $A = \int_0^\alpha f(x) dx = [h(x)]_0^\alpha = h(\alpha) - h(0)$

$\Rightarrow A = \alpha - \ln(1 + \sqrt{1+e^{2\alpha}}) + \ln(1 + \sqrt{2})$

or $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+e^{2\alpha}}} = \alpha$

$\Rightarrow \sqrt{1+e^{2\alpha}} = \frac{1}{\alpha}$

$\Rightarrow A = \alpha - \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \ln(1 + \sqrt{2})$

$\Rightarrow A = \alpha + \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)$

$\Rightarrow A = \alpha + \ln\left[\frac{\alpha(1+\sqrt{2})}{\alpha+1}\right] \quad (uq)$

II) $F_k = \int_0^x [f(t)]^k dt \quad / x \in [0, +\infty[$

1) a) F_k étant la primitive sur $[0, +\infty[$ de $[f(t)]^k$ qui s'annule en 0

d'où F_k est dérivable sur $[0, +\infty[$

$F_k'(x) = [f(x)]^k > 0$ car $f(x) > 0$

alors F_k strict $\nearrow$ sur $[0, +\infty[$

b) Mq $\forall t \geq 0, 0 \leq [f(t)]^k \leq e^{-kt}$

$f(t) - e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} - e^{-t} = \frac{e^t - \sqrt{1+e^{2t}}}{e^t \sqrt{1+e^{2t}}}$

$= \frac{e^{2t} - (1+e^{2t})}{e^t \sqrt{1+e^{2t}}(e^t + \sqrt{1+e^{2t}})} = \frac{-1}{e^t \sqrt{1+e^{2t}}(e^t + \sqrt{1+e^{2t}})} < 0$

$\Rightarrow 0 \leq f(t) \leq e^{-t}$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq [f(t)]^k \leq e^{-kt}$

c) or $t \mapsto [f(t)]^k \in \text{sur } [0, x] \subset \mathbb{R}^+$
 $t \mapsto e^{-kt} \in \text{sur } [0, x]$

$0 \leq \int_0^x [f(t)]^k dt \leq \int_0^x e^{-kt} dt$

$\Rightarrow 0 \leq F_k(x) \leq \left[-\frac{1}{k} e^{-kt}\right]_0^x$

$\Rightarrow 0 \leq F_k(x) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k} e^{-kx}$

Comme $-\frac{1}{k} e^{-kx} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{k} e^{-kx} \leq \frac{1}{k}$

Concl: $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq F_k(x) \leq \frac{1}{k}$

d) F_k étant $\nearrow$ et majorée par $\frac{1}{k}$
alors F_k convergente

d'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} F_k(x) = I_k$: limite finie

e) $0 \leq F_k(x) \leq \frac{1}{k}$
 $\Rightarrow 0 \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} F_k(x) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k}$

$\Rightarrow 0 \leq I_k \leq \frac{1}{k}$

d'autre part: $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$

$\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k = 0$

2) a) $I_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x)$

or $F_1(x) = \int_0^x f(t) dt = [h(t)]_0^x$
 $= h(x) - h(0)$

$\Rightarrow I_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - h(0)]$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(1 + \sqrt{1+e^{2x}})$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln\left[1 + e^x \sqrt{e^{-2x} + 1}\right]$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln\left[e^x (\bar{e}^{-x} + \sqrt{1+\bar{e}^{-2x}})\right]$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x - \ln(\bar{e}^{-x} + \sqrt{1+\bar{e}^{-2x}})$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-x}}) = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) = \boxed{I_1 = -h(0)}$$

$$b) [f(t)]^3 - f'(t) = \frac{1}{(1+e^{2t})\sqrt{1+e^{2t}}} + \frac{e^{2t}}{(1+e^{2t})\sqrt{1+e^{2t}}}$$

$$= \frac{1+e^{2t}}{(1+e^{2t})\sqrt{1+e^{2t}}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} = f(t)$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 0, [f(t)]^3 - f'(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{[f(t)]^3 - f'(t) = f(t)}$$

$$c) \int_0^x ([f(t)]^3 - f'(t)) dt = \int_0^x f'(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x [f(t)]^3 dt - \int_0^x f'(t) dt = [f(t)]_0^x$$

$$\Rightarrow F_3(x) - F(x) = f(x) - f(0)$$

$$\text{d'où } \boxed{F_3(x) = F(x) + f(x) - f(0)}$$

$$d) I_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_3(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) + f(x) - f(0)$$

$$\Rightarrow I_3 = I_1 + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{or } I_1 = -h(0) = \ln(1+\sqrt{2})$$

$$\text{Concl : } \boxed{I_3 = \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$3/a) \text{ On } F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \frac{1}{2k-1} \left([f(x)]^{2k-1} - [f(0)]^{2k-1} \right)$$

$$\text{or } F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \int_0^x ([f(t)]^{2k+1} - [f(t)]^{2k-1}) dt$$

$$= \int_0^x f(t)^{2k-2} (f(t)^3 - f(t)) dt$$

$$= \int_0^x f(t)^{2k-2} f'(t) dt = \left[\frac{1}{2k-1} f(t)^{2k-1} \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2k-1} \left([f(x)]^{2k-1} - [f(0)]^{2k-1} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{2k+1}(x) = I_{2k+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{2k-1}(x) = I_{2k-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{2k-1} = 0$$

$$\Rightarrow I_{2k+1} - I_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \left(-[f(0)]^{2k-1} \right)$$

$$\Rightarrow I_{2k+1} - I_{2k-1} = \frac{-1}{2k-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2k-1}$$

$$\text{Concl : } \forall k \geq 2, \boxed{I_{2k+1} - I_{2k-1} = \frac{-1}{(2k-1)(\sqrt{2})^{2k-1}}}$$

$$c) \text{ On } I_{2k+1} = I_3 - \sum_{n=2}^k \frac{1}{(2n-1)(\sqrt{2})^{2n-1}}$$

$$\text{or } I_{2m+1} - I_{2m-1} = \frac{-1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=2}^k I_{2m+1} - \sum_{m=2}^k I_{2m-1} = \sum_{m=2}^k \frac{-1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$$

$$I_{2k+1} - I_3 = \sum_{m=2}^k \frac{-1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{2k+1} = I_3 - \sum_{n=2}^k \frac{1}{(2n-1)(\sqrt{2})^{2n-1}}}$$

$$d) \text{ on pose } U_k = \sum_{n=2}^k \frac{1}{(2n-1)(\sqrt{2})^{2n-1}}$$

$$\text{d'où } I_{2k+1} = I_3 - U_k$$

$$\Rightarrow U_k = I_3 - I_{2k+1}$$

$$\text{or ma d'après II/1/e) } \lim_{k \rightarrow +\infty} I_k = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} I_{2k+1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} U_k = I_3 =$$

$$\text{Concl : } \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^k \frac{1}{(2n-1)(\sqrt{2})^{2n-1}} = \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Correction " Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie "

Exercice 02: Contrôle 2020

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln(1+x)}{1+x} \quad D_f =]-1, +\infty[$$

(A) 1) a) $\lim_{(-1)^+} f(x) = \lim_{(-1)^+} \frac{x \ln(1+x)}{1+x}$
 $= \lim_{(-1)^+} \left(\frac{x}{1+x} \right) \ln(1+x) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$

car $\lim_{(-1)^+} \left(\frac{x}{1+x} \right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

et $\lim_{(-1)^+} \ln(1+x) = -\infty$

d'où la droite $x = -1$ Asymptote verticale

b) $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \left(\frac{x}{1+x} \right) \ln(1+x) = +\infty$

car $\lim_{+\infty} \left(\frac{x}{1+x} \right) = \lim_{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 1$

et $\lim_{+\infty} \ln(1+x) = +\infty$

• $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)} = 0$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie au voisinage de $(+\infty)$ de direction (OC)

2) a) $x \mapsto \frac{x}{1+x} \in]0, 1[\quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 en particulier $\in]0, 1[\quad \forall x \in]-1, +\infty[$ (1)

et $x \mapsto \ln(1+x) \in]-\infty, 0[\quad \forall x \in]-1, +\infty[$ car $1+x > 0$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow f \in]-\infty, 0[\quad \forall x \in]-1, +\infty[$

b) $f'(x) = \left[\left(\frac{x}{1+x} \right) \cdot \ln(1+x) \right]' = \frac{1}{(1+x)^2} + \left(\frac{x}{1+x} \right) \cdot \frac{1}{1+x}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{\ln(1+x) + x}{(1+x)^2}$

c) on pose $h(x) = \ln(1+x) + x \quad D_h =]-1, +\infty[$

$h \in]-\infty, +\infty[$, $h'(x) = \frac{1}{1+x} + 1 > 0$

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$		-	+

d'où $h(x) \in]-\infty, 0[\quad \forall x \in]-1, +\infty[$

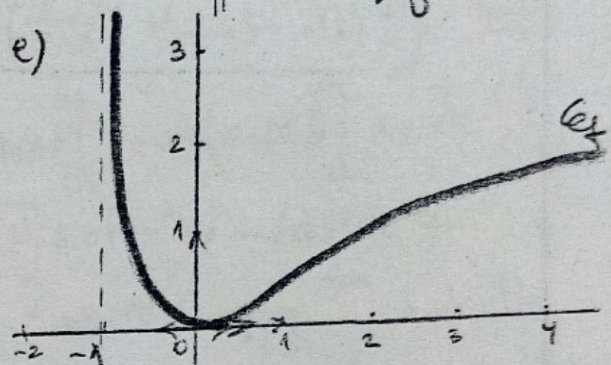
x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$		-	+

alors $h(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$\Leftrightarrow \ln(1+x) + x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

d) le signe de f' dépend de celui de h

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$



(B) $G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$

$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad V_n = \int_1^{\frac{n+1}{n}} \frac{f(t)}{t} dt$

$F_n(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} \cdot \sqrt{t} dt \quad \forall x \geq 1$

1) $G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^x \left(\frac{1}{1+t} \right) \ln(1+t) dt$

$= \left[\frac{1}{2} \ln^2(1+t) \right]_1^x = \frac{1}{2} \ln^2(1+x) - \frac{1}{2} \ln^2(2)$

$\Rightarrow G(x) = \frac{1}{2} \ln^2(1+x) - \frac{1}{2} \ln^2(2)$

2) Ma $\forall x \geq 1, G(x^n) \leq F_n(x) \leq x \cdot G(x^n)$

car $1 \leq t \leq x^n \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{t} \leq x$

et $\frac{f(t)}{t} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(t)}{t} \leq \frac{f(t)}{t} \sqrt{t} \leq x \frac{f(t)}{t}$

or $t \mapsto \frac{f(t)}{t} \in]-\infty, 0[$

et $t \mapsto \frac{f(t)}{t} \sqrt{t} \in]-\infty, 0[$

$\int_1^{x^n} \frac{f(t)}{t} dt \leq \int_1^{x^n} \frac{f(t)}{t} \sqrt{t} dt \leq x \int_1^{x^n} \frac{f(t)}{t} dt$

$\Rightarrow G(x^n) \leq F_n(x) \leq x G(x^n)$

3) on pose $\varphi(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} \sqrt{t} dt$

$F_n(x) = \varphi(x^n)$

or φ est la primitive sur $(1, +\infty[$ de $\frac{f(t)}{t} \sqrt{t}$ qui s'annule en 1
 on a alors $\begin{cases} \varphi \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } (1, +\infty[\\ \varphi'(x) = \frac{f(x)}{x} \sqrt{x} \\ \varphi(1) = 0 \end{cases}$

or $F_n(x) = \varphi(x^n)$
 et $x \mapsto x^n \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } (1, +\infty[\Rightarrow F_n$ dérivable
 et $x^n \in (1, +\infty[= D \varphi$ sur $(1, +\infty[$

$$F_n'(x) = [\varphi(x^n)]' = nx^{n-1} \cdot \varphi'(x^n) \\ = nx^{n-1} \cdot \frac{f(x^n)}{x^n} \sqrt{x^n} = n f(x^n)$$

Concl: $\forall x \geq 1, \boxed{F_n'(x) = n f(x^n)}$

4) on a $n f(t^n) = F_n'(t)$
 d'où $\int_1^{\frac{n+1}{n}} n f(t^n) dt = \int_1^{\frac{n+1}{n}} F_n'(t) dt$

$$\Rightarrow n V_n = [F_n(t)]_1^{\frac{n+1}{n}}$$

$$\Rightarrow n V_n = F_n\left(\frac{n+1}{n}\right) - F_n(1)$$

or $F_n(1) = \varphi(1) = 0$

$$\boxed{n V_n = F_n\left(\frac{n+1}{n}\right)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

5) a) on a $\forall x \geq 1, G(x^n) \leq F_n(x) \leq x G(x^n)$

comme $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \geq 1 \Rightarrow$ on pose $x = \frac{n+1}{n}$

$$\Rightarrow G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) \leq F_n\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) \leq n V_n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)}$$

b) $e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{\ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = l$$

on pose $\frac{1}{n} = x \Rightarrow n = \frac{1}{x}$
 la $n \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow 0$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

concl: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = G(e)$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = 1 \cdot G(e) = G(e)$$

d'après le théorème de Gendarme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n V_n = G(e) = \frac{1}{2} \ln^2(1+e) - \frac{1}{2} \ln^2(2)$$

on a $G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) \leq n V_n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$

$$\text{d'où } \frac{1}{n} G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) \leq V_n \leq \frac{n+1}{n} G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = \frac{G(e)}{+\infty} = 0$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = \frac{G(e)}{+\infty} = 0$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0}$$

Concl: $\frac{2x^2}{1-x^2} = -2 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$

c) $\varphi(x) = \frac{2x^2}{1-x^2} = -2 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$
 $\Rightarrow \varphi(x) = -2x + \ln(1+x) - \ln(1-x) + k$
 or $\varphi(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0 \Rightarrow k=0$

Concl: $\varphi(x) = -2x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \forall x \in]-1, 1[$

d) $A = 2 \int_0^{\alpha} (f(x) - x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\alpha}$
 $= 2\varphi(\alpha) - (\alpha^2 - 0) = 2\left[\varphi(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2}\right]$

3) $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k 3^k} \quad n \in \mathbb{N}^*$

$S_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n t^{2k-1}$

a) $\int_0^{\sqrt{3}} S_n(t) dt = \int_0^{\sqrt{3}} \left(2 \sum_{k=1}^n t^{2k-1} \right) dt$
 $= \sum_{k=1}^n \int_0^{\sqrt{3}} (2t^{2k-1}) dt = \sum_{k=1}^n \left[\frac{2}{2k} t^{2k} \right]_0^{\sqrt{3}}$
 $= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k 3^k} = U_n$

b) $S_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n t^{2k-1} = 2t \sum_{k=1}^n (t^2)^{k-1}$
 $\Rightarrow S_n(t) = 2t \sum_{k=0}^{n-1} (t^2)^k = (2t) \left[\frac{1 - (t^2)^n}{1 - t^2} \right]$
 $\Rightarrow S_n(t) = (1 - t^{2n}) \cdot \frac{2t}{1 - t^2} = (1 - t^{2n}) \cdot g(t)$

c) $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 0 \leq t^{2n} \leq \frac{1}{3^n}$
 $\Rightarrow 1 - \frac{1}{3^n} \leq 1 - t^{2n} \leq 1$

or $g'(t) = \frac{2t}{1-t^2} \geq 0 \quad \forall t \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
 $\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g'(t) \leq (1 - t^{2n}) g'(t) \leq g'(t)$

d) Comme $U_n = \int_0^{\sqrt{3}} S_n(t) dt$

et que $g'(t) \in m \left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \Rightarrow$

$\int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g'(t) dt \leq \int_0^{\sqrt{3}} (1 - t^{2n}) g'(t) dt \leq \int_0^{\sqrt{3}} g'(t) dt$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) [g(t)]_0^{\sqrt{3}} \leq U_n \leq [g(t)]_0^{\sqrt{3}}$

or $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

d'ou $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \leq U_n \leq g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

4) Comme $3 > 1 \Rightarrow \ln 3^n = +\infty$
 d'ou $\ln \frac{1}{3^n} = 0$

also $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow$ d'après le Thém de Gendarme
 on obtient $\lim U_n = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Concl: U_n converge vers $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 04: Contrôle 2019

$$g(x) = e^{-\frac{1}{2x^2}} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et } g(0) = 0$$

$$1) a) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{2x^2}} = 0 = g(0)$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2x^2} = -\infty \quad \text{et } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

Concl: g est continue en 0

$$b) \forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}$$

$$\text{et si } x \in \mathbb{R}^*, g(-x) = e^{-\frac{1}{2(-x)^2}} = e^{-\frac{1}{2x^2}} = g(x)$$

$$\text{et si } x = 0, g(0) = 0$$

Concl: g est une fonction paire

Interprétation: Il suffit d'étudier la restriction de g au domaine d'étude

$D_g = \mathbb{R}_+$ et de construire l'arc $\mathcal{C}_0$

correspondant au D_g

$$\Rightarrow \mathcal{C}_g = \mathcal{C}_0 \cup S_{(0, \frac{1}{2})}(\mathcal{C}_0)$$

$$2) a) \lim_{0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{0^+} \frac{e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{0^+} \frac{e^{-\frac{1}{2x^2}}}{e^{\ln x}} = \lim_{0^+} e^{-\frac{1}{2x^2} - \ln x}$$

$$= \lim_{0^+} e^{\frac{-1 - 2x \ln x}{2x^2}} \xrightarrow{0^+} e^{-\infty} = 0$$

$$\Rightarrow g \text{ st } \frac{1}{x} \text{ en } 0^+ \text{ et } g'_g(0) = 0$$

comme g paire $\Rightarrow$ par symétrie par rapport à $(0, \frac{1}{2})$, g st aussi dérivable en 0^- et $g'_g(0) = 0$

$$\text{ainsi } g'_g(0) = g'_d(0) = 0 \Rightarrow g \text{ st } \frac{1}{x} \text{ en } 0$$

$$b) \text{ on a } x \mapsto -\frac{1}{2x^2} \text{ st sur } \mathbb{R}^*$$

alors $g \text{ st } \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^*$

$$g'(x) = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' e^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{2x^2}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{2x^2}}$$

$$c) \forall x > 0, g'(x) > 0$$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2t^2}} = e^0 = 1$$

$\Rightarrow y = 1$ Asymptote en $(+\infty)$

d) g continue et strict $\uparrow$ sur $[0, +\infty[$

$\Rightarrow g$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$

$$\text{sur } g([0, +\infty[) = [0, 1[$$

$$e) g' \text{ définie par: } \begin{cases} \forall y \in]0, 1[\\ g(y) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in]0, 1[\\ y = g^{-1}(x) \end{cases}$$

$$\text{en effet: } g(y) = x \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2y^2}} = x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2y^2} = \ln x \Leftrightarrow y^2 = \frac{-1}{2 \ln x} > 0$$

$$\Rightarrow |y| = \sqrt{\frac{-1}{2 \ln x}} \quad \text{ou } y \in \mathbb{R}_+ \text{ et}$$

$$\Rightarrow y = g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{-1}{2 \ln x}} \quad \forall x \in]0, 1[$$

$$\text{d'autre part: } g(0) = 0 \Rightarrow g^{-1}(0) = 0$$

$$\text{Concl: } \begin{cases} g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{-1}{2 \ln x}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ g^{-1}(0) = 0 \end{cases}$$

$$3) a) g'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \text{ st sur } \mathbb{R}^*$$

$$g''(x) = \frac{x^3 \cdot g'(x) - 3x^2 \cdot g(x)}{x^6}$$

$$= \frac{g(x) - 3x^2 \cdot g(x)}{x^6} = \frac{g(x)}{x^6} [1 - 3x^2]$$

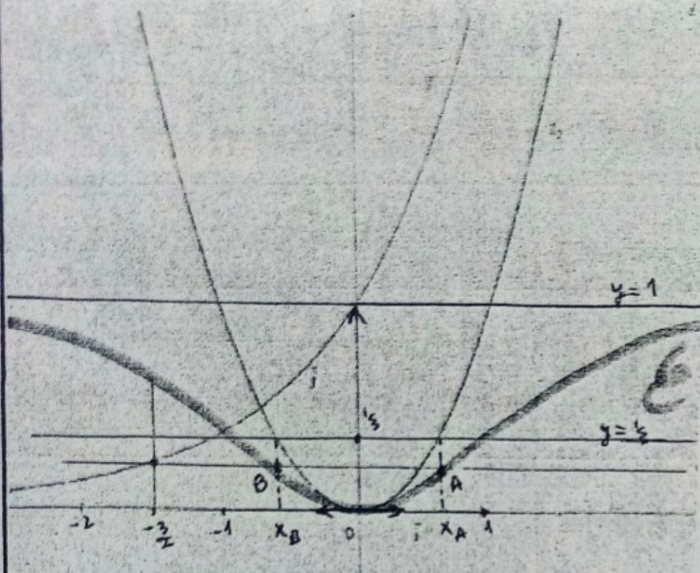
$$\text{on résout } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} < x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{d'où } g'' \text{ s'annule 2 fois et change de signe}$$

$$\text{on admet 2 points d'inflexion: } A(-\frac{\sqrt{3}}{3}, e^{\frac{3}{2}}) \text{ et } B(\frac{\sqrt{3}}{3}, e^{\frac{3}{2}})$$



b) La droite $y = \frac{1}{2}$ coupe E_2 en 2 points d'abscisses

$$x_A = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } x_B = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

La droite $x = \frac{-3}{2}$ coupe E_1 en un point

d'ordonnée $y = e^{-\frac{3}{2}} = y_A = y_B$

$$\Rightarrow A(x_A, y_A) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, e^{-\frac{3}{2}}\right) \text{ et } B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$4) f(x) = [g(x)]^2 \quad D_f = [0, +\infty[$$

g dérivable sur $\mathbb{R}^+ \Rightarrow f$ dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$$f'(x) = 2 \cdot g'(x) \cdot g(x) \geq 0 \text{ car } g'(x) \geq 0$$

d'où f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

$$5) V(n) = \pi \int_0^n f(t) dt \quad \forall n \geq 2$$

$$a) V(n) = \pi \int_0^n [g(x)]^2 dx$$

$\Rightarrow V(n)$ définit le volume du solide de révolution engendré par la courbe E_g et les droites $x=0$ et $x=n$

b) on a $0 < \sqrt{n}$ et $f(x) \geq 0$

$$\Rightarrow \pi \int_0^{\sqrt{n}} f(x) dx \geq 0$$

$$\text{d'où } \pi \int_0^{\sqrt{n}} f(x) dx + \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(x) dx \geq \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(x) dx$$

$$\Rightarrow V(n) \geq \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(x) dx$$

c) on a $\sqrt{n} \leq x < n$

$$f \nearrow \Rightarrow f(\sqrt{n}) < f(x)$$

$$\text{d'où } \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(x) dx \leq \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(x) dx \leq \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(n) dx$$

$$\Rightarrow \pi f(\sqrt{n}) [x]_{\sqrt{n}}^n \leq \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(x) dx \leq \pi f(n) [x]_{\sqrt{n}}^n$$

$$\Rightarrow \pi \cdot f(\sqrt{n}) \cdot \sqrt{n}(n-1) \leq \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(x) dx \leq \pi f(n) [x]_{\sqrt{n}}^n$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi f(\sqrt{n}) \cdot \sqrt{n}(n-1) = +\infty \text{ car } f(\sqrt{n}) > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(x) dx = +\infty$$

$$\text{or } V_n \geq \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(x) dx \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$$

$$d) \text{ Maq } V(n) \leq n\pi$$

$$\text{ma } g(x) \leq 1 \Rightarrow [g(x)]^2 \leq 1$$

$$\text{alors } f(x) \leq 1 \text{ d'où } \int_0^n f(x) dx \leq \int_0^n 1 dx$$

$$\Rightarrow \pi \int_0^n f(x) dx \leq \pi [x]_0^n \Rightarrow V(n) \leq n\pi$$

$$e) \text{ ma } \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt \leq V(n) \leq n\pi$$

$$\text{et } \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt \geq \pi f(\sqrt{n})(n-1) \quad (\text{d'après 5° c})$$

$$\Rightarrow \pi f(\sqrt{n})(n-1) \leq V(n) \leq n\pi$$

$$\text{d'où } \pi f(\sqrt{n}) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{V(n)}{n} \leq \pi$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [g(\sqrt{n})]^2 = 1^2 = 1$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi f(\sqrt{n}) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \pi$$

alors d'après le Théorème de comparaison on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(n)}{n} = \pi$$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 05: Principal 2018

(A) $f(x) = x \ln(x)$ si $x > 0$
 $f(0) = 0$

(1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 = f(0)$
 $\Rightarrow f$ est continue en 0

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
 $\Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 0 et $\mathcal{C}_f$ admet en 0 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

c) f dérivable sur $]0, +\infty[$, $f'(x) = \ln x + 1$
 on résout $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	0		$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$

$f(e^{-1}) = (e^{-1}) \ln(e^{-1}) = -e^{-1}$

2) $\Pi: x \mapsto e^x$, $D: y = x$ et $D': y = -x$

a) on pose $\varphi(x) = e^x \Rightarrow \mathcal{C}_\varphi = (\Pi)$

$A(e, f(e)) \Rightarrow A(e, e) \in \Delta$ avec $e = \varphi(1)$

$B(e^{-1}, f(e^{-1})) \Rightarrow B(e^{-1}, -e^{-1}) \in \Delta'$ avec $e^{-1} = \varphi(-1)$

b) Positions de $\mathcal{C}_f$ et Δ :

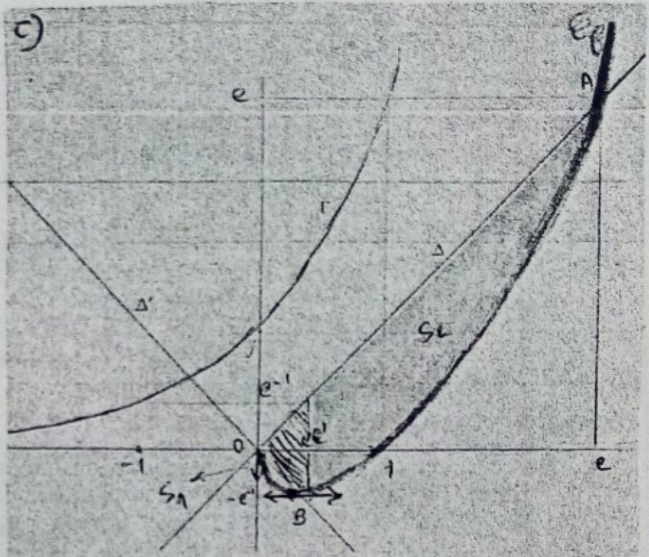
$f(x) - x = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$

x	0	e	$+\infty$
$f(x) - x$	0	-	+
Position de $\mathcal{C}_f$ et Δ		$\mathcal{C}_f$ au dessous de Δ	$\mathcal{C}_f$ au dessus de Δ

Positions de $\mathcal{C}_f$ et Δ' :

$f(x) - (-x) = x(\ln x + 1)$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f(x) - (-x)$	0	-	+
Position de $\mathcal{C}_f$ et Δ'		$\mathcal{C}_f$ au dessous de Δ'	$\mathcal{C}_f$ au dessus de Δ'



Branche infinie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ admet une branche infinie au voisinage de $(+\infty)$ de directrice (O_f) .

3) Soit S_1 : l'aire limitée entre Δ et Δ' et les droites $x=0$ et $x=e^{-1} \Rightarrow S_1 = \int_0^{e^{-1}} 2x dx$
 $\Rightarrow S_1 = [x^2]_0^{e^{-1}} = e^{-2}$

et S_2 : l'aire limitée par $\mathcal{C}_f$ et Δ et les droites $x=e^{-1}$ et $x=e$

$\Rightarrow S_2 = \int_{e^{-1}}^e (x - f(x)) dx = \int_{e^{-1}}^e x(1 - \ln x) dx$

on pose $u(x) = 1 - \ln x \rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x}$
 $v'(x) = x \rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2$

alors $S_2 = \left[\frac{1}{2}x^2(1 - \ln x) \right]_{e^{-1}}^e + \frac{1}{2} \int_{e^{-1}}^e x dx$

$\Rightarrow S_2 = \left(\frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{2}e^2 \ln e \right) - \left(\frac{3}{4}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2} \ln e^{-1} \right) + \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^{-2} \right)$

$S_2 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{5}{4}e^{-2}$

d'où $S = S_1 + S_2 = e^{-2} + \frac{1}{4}e^2 - \frac{5}{4}e^{-2}$

Com: $S = \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2})$

$$\textcircled{B} U_n = \int_{e^{-1}}^1 t^n e^t dt \quad V_n = \int_{e^{-1}}^1 t^n e^t f(t) dt$$

$$\textcircled{1} a) e^{-1} \leq t \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} t^n > 0 \\ e^t > 0 \end{cases} \Rightarrow t^n e^t > 0$$

$$\text{comme } e^{-1} < 1 \Rightarrow \int_{e^{-1}}^1 t^n e^t dt > 0 \Rightarrow \boxed{U_n > 0}$$

$$b) e^{-1} \leq t < 1 \Rightarrow 0 < e^t < e$$

$$t^n > 0 \Rightarrow 0 < t^n e^t \leq e \cdot t^n$$

$$\begin{cases} t \mapsto t^n e^t \\ t \mapsto t^n \cdot e \end{cases} \text{ sont continues sur } [e^{-1}, 1]$$

$$\Rightarrow 0 < \int_{e^{-1}}^1 t^n e^t dt \leq \int_{e^{-1}}^1 e t^n dt = e \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{e^{-1}}^1$$

$$\Rightarrow 0 < U_n \leq e \left[\frac{1}{n+1} - \frac{e^{-n-1}}{n+1} \right] \leq \frac{e}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim U_n = 0}$$

$$c) U_{n+1} = \int_{e^{-1}}^1 t^{n+1} e^t dt$$

$$\text{on pose } \begin{cases} g(t) = t^{n+1} \longrightarrow g'(t) = (n+1)t^n \\ h(t) = e^t \longrightarrow h'(t) = e^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \left[t^{n+1} e^t \right]_{e^{-1}}^1 - (n+1) \int_{e^{-1}}^1 t^n e^t dt$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = e - e^{-n-1} \cdot e^{-1} - (n+1) U_n$$

$$\text{Concl : } \boxed{U_{n+1} = e - \frac{e^{-1}}{e^{n+1}} - (n+1) U_n}$$

$$d) (n+1) U_n = e - \frac{e^{-1}}{e^{n+1}} - U_{n+1}$$

$$\text{or } \lim U_{n+1} = 0 \text{ et } \lim \frac{e^{-1}}{e^{n+1}} = \frac{0}{+\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim (n+1) U_n = e}$$

$$\textcircled{2} a) \text{ on sait que si } t \in [e^{-1}, 1] \Rightarrow -e^{-1} \leq f(t) \leq 0$$

$$\text{or } t^n e^t > 0 \Rightarrow -t^n e^t \cdot e^{-1} \leq t^n e^t f(t) \leq 0$$

$$\text{donc } -e^{-1} \int_{e^{-1}}^1 t^n e^t dt \leq \int_{e^{-1}}^1 t^n e^t f(t) dt \leq 0$$

$$\Rightarrow -e^{-1} \cdot U_n \leq V_n \leq 0 \Rightarrow \boxed{-\frac{U_n}{e} \leq V_n \leq 0}$$

$$\text{or } \lim U_n = 0 \Rightarrow \lim \frac{U_n}{e} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim V_n = 0}$$

$$b) t \cdot f'(t) - t = t [f'(t) - 1] = t [t^n] = t^{n+1} = f(t)$$

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{e^{-1}}^1 t^n e^t f(t) dt = \int_{e^{-1}}^1 t^n e^t (t \cdot f'(t) - t) dt \\ &= \int_{e^{-1}}^1 t^{n+1} e^t \cdot f'(t) dt - \int_{e^{-1}}^1 t^{n+1} e^t dt \end{aligned}$$

$$\text{donc } V_n = \int_{e^{-1}}^1 t^{n+1} e^t f'(t) dt - U_{n+1}$$

$$c) \text{ on pose } f = \int_{e^{-1}}^1 t^{n+1} e^t f'(t) dt \Rightarrow V_n = f - U_{n+1}$$

$$\text{soit } \begin{cases} g(t) = t^{n+1} e^t \longrightarrow g'(t) = (n+1)t^n e^t + t^{n+1} e^t \\ h(t) = f'(t) \longrightarrow h(t) = f(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f = \left[t^{n+1} e^t f(t) \right]_{e^{-1}}^1 - (n+1) \int_{e^{-1}}^1 t^n e^t f(t) dt - \int_{e^{-1}}^1 t^{n+1} e^t f'(t) dt$$

$$= 0 - e^{-n-1} \cdot e^{-1} (-e^{-1}) - (n+1) V_n - V_{n+1}$$

$$\text{donc } V_n = e^{-n-2} \cdot e^{-1} - (n+1) V_n - V_{n+1} - U_{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{(n+2) V_n = \frac{e^{-1}}{e^{n+2}} - V_{n+1} - U_{n+1}}$$

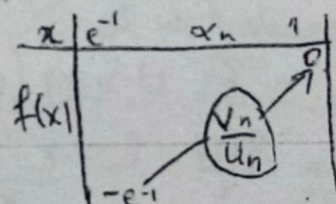
$$d) \lim U_{n+1} = 0, \lim V_{n+1} = 0$$

$$\lim \frac{e^{-1}}{e^{n+2}} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim (n+2) V_n = 0}$$

$$3) a) \text{ on sait que } -\frac{U_n}{e} \leq V_n \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{e} \leq \frac{V_n}{U_n} \leq 0$$

$$\text{donc } \frac{V_n}{U_n} \in [-\frac{1}{e}, 0] \text{ et comme } f \text{ réalise une bijection de } [e^{-1}, 1] \text{ sur } [-e^{-1}, 0] \Rightarrow \text{d'après TVI}$$

$$\text{il existe un unique } \alpha_n \in [e^{-1}, 1] / f(\alpha_n) = \frac{V_n}{U_n}$$



$$b) \lim \frac{V_n}{U_n} = \lim \frac{(n+1) V_n}{(n+1) U_n} = \lim \frac{(n+2) V_n - V_n}{(n+1) U_n}$$

$$= \lim \frac{(n+2) V_n}{(n+1) U_n} - \lim \frac{V_n}{(n+1) U_n}$$

$$\text{or } \lim (n+1) U_n = e \text{ et } \lim (n+2) V_n = 0 \Rightarrow \boxed{\lim \frac{V_n}{U_n} = 0}$$

$$\text{et } \lim V_n = 0$$

$$c) f(\alpha_n) = \frac{V_n}{U_n} \Rightarrow \alpha_n = f^{-1} \left(\frac{V_n}{U_n} \right)$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{U_n} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1} \left(\frac{V_n}{U_n} \right) = f^{-1}(0) = 1$$

$$\text{car } f(1) = 0$$

$$\text{Concl : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1}$$

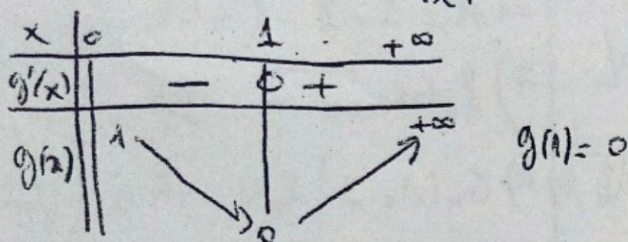
Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 06: Contrôle 2018

1) $g(x) = 1 - x + x \ln x$ $D_g =]0, +\infty[$

a) $g \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,

$g'(x) = -1 + \ln x + x \left(\frac{1}{x}\right) = \ln x$



$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x + x \ln x = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + x \ln x = +\infty$

b) 0: minimum absolu pour g
 $\Rightarrow \forall x > 0, g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x + x \ln x \geq 0$
 $\Rightarrow \boxed{1 + x \ln x \geq x} \quad \forall x > 0$

2) $f(x) = \frac{1}{1+x \ln x}$ si $x > 0$
 $f(0) = 1$

a) continuité de f en 0:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x \ln x} = 1 = f(0)$
 $\Rightarrow f$ est continue en 0

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x \ln x} - 1}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1 - x \ln x}{x(1+x \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{1+x \ln x} = +\infty$

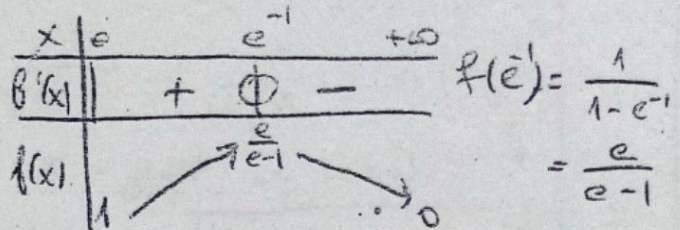
$\Rightarrow f$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ en 0 et $\mathcal{E}_f$ admet en 0 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x \ln x} = 0$
 $\Rightarrow y=0$ Asymptote horizontale en $(+\infty)$

3) a) $f \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

$f'(x) = -\frac{\ln x + x \left(\frac{1}{x}\right)}{(1+x \ln x)^2}$

b) on résout $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 - \ln x = 0$
 $\Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

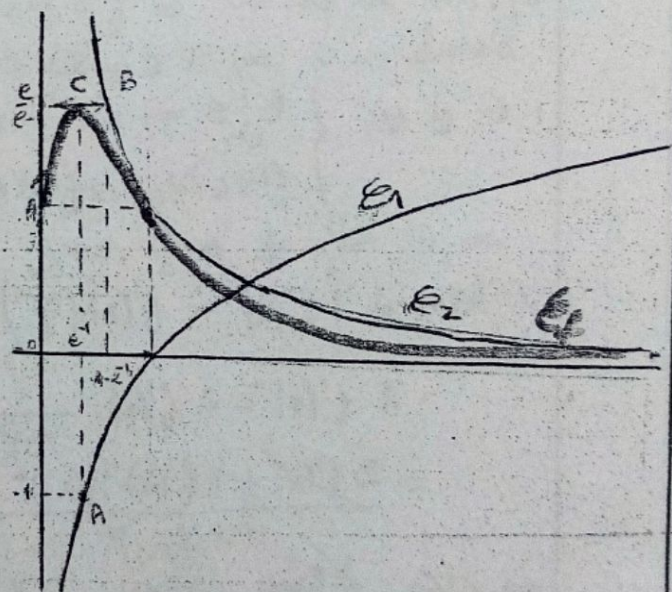


4) a) on a: $\ln(e^{-1}) = -1 \Rightarrow e^{-1}$: l'antécédent de (-1) par $\mathcal{E}_1 \Rightarrow A(e^{-1}, -1)$

• comme $\frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathcal{O}(1-x_A, \frac{e}{e-1}) \in \mathcal{E}_2$

• $C(x_A, y_B)$: l'extrémum de $\mathcal{E}_f$

b) d'après 1) b) on a $1 + x \ln x \geq x$
 $\Rightarrow \frac{1}{1+x \ln x} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x}$
 d'où $\mathcal{E}_f$ est toujours située au dessous de $\mathcal{E}_2$



5) $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ $D_F = [1, +\infty[$

a) on a $t \geq 1 \Rightarrow t + t \ln t \geq 1 + t \ln t$
 $\Rightarrow 0 < \frac{1}{t+t \ln t} \leq \frac{1}{1+t \ln t} \Rightarrow \frac{1}{t+t \ln t} \leq f(t)$

b) d'autre part: $f(t) \leq \frac{1}{t}$
 $\Rightarrow \frac{1}{t+t \ln t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$

$\Rightarrow f(t) \leq \frac{1}{t}$ int calc

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t+t \ln t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{t+t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$\text{or } \int_1^x \frac{1}{t+t \ln t} dt = \int_1^x \frac{\frac{1}{t}}{1+\ln t} dt = [\ln(1+\ln t)]_1^x$$

$$\Rightarrow [\ln(1+\ln t)]_1^x \leq F(x) \leq [\ln t]_1^x$$

$$\Rightarrow \ln(1+\ln x) - \ln 1 \leq F(x) \leq \ln x - \ln 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1+\ln x) \leq F(x) \leq \ln x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+\ln x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

$$\text{pour } x \geq 1: \frac{\ln(1+\ln x)}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\ln x)}{(1+\ln x)} \cdot \frac{(1+\ln x)}{x} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+\ln x)}{(1+\ln x)} \right) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\ln x)}{1+\ln x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

$$e) n \in \mathbb{N}^*$$

$$a) h(x) = x - F(x) \quad D_h = [1, +\infty[$$

F est la primitive de f sur $[1, +\infty[$ qui s'annule en 1. on a alors

$$\begin{cases} F \in \mathcal{M}([1, +\infty[) \\ F'(x) = f(x) \\ F(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } h \text{ str } \in \mathcal{M}([1, +\infty[)$$

$$h'(x) = 1 - f(x) = 1 - \frac{1}{1+x \ln x}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{1+x \ln x - 1}{1+x \ln x} = \frac{x \ln x}{1+x \ln x} \geq 0$$

x	1	α_n	$+\infty$
$h'(x)$	0	+	

$$h(1) = 1 - F(1) = 1$$

$h(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$
--------	---	------------	-----------

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - F(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{f(x)}{x} \right)$$

$$= +\infty \quad \text{car}$$

$$h \in \text{strict } \mathcal{M}([1, +\infty[)$$

$\Rightarrow h$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

b) Comme $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \in [1, +\infty[$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha_n \in [1, +\infty[/ h(\alpha_n) = n$

$$c) h(\alpha_n) = n \Leftrightarrow h^{-1}(n) = \alpha_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} h^{-1}(n) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

$$\text{concl: } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty}$$

$$d) h(\alpha_n) = n \Leftrightarrow \alpha_n - F(\alpha_n) = n$$

$$\Leftrightarrow F(\alpha_n) = \alpha_n - n \Leftrightarrow \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 1 - \frac{n}{\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\alpha_n} = 1 - \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \quad \text{alors}$$

$$\boxed{\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1 - \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}}$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$\text{concl: } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1}$$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 07: Principal 2017

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1} \quad \text{Df} = [0, +\infty[$$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x - 1} = +\infty \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{e^x - 1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = +\infty \Rightarrow \mathcal{C}_f \text{ admet}$$

une branche parabolique infinie au voisinage de $(+\infty)$ de direction $(O, \vec{j})$

$$2/a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{e^x - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \Rightarrow$$

f n'est pas $\mathcal{C}^1$ en 0 et $\mathcal{C}_f$ admet en $(0,0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

$$b) f \in \text{sm }]0, +\infty[\text{ car } e^x - 1 > 0$$

$$f'(x) = (\sqrt{e^x - 1})' = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} > 0$$

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	0	$\nearrow +\infty$

$$d) e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 \leq e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)^2 - (e^x - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 1 - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow f(x)(e^x - 2) \leq 0$$

$$\text{or } f(x) \geq 0 \Rightarrow e^x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x \leq \ln 2$$

$$\text{Ainsi: } e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$$

$$3) f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} \in \text{sm }]0, +\infty[$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^x \sqrt{e^x - 1} - e^x \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}}{e^x - 1} \right]$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{2e^x(e^x - 1) - e^{2x}}{2(e^x - 1)\sqrt{e^x - 1}} \right]$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = \frac{(e^x - 2) \cdot e^x}{4(e^x - 1)\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
f''		-	+

f'' s'annule en $\ln 2$
et change de signe

$$\Rightarrow B(\ln 2, 1) : \text{point d'inflexion pour } \mathcal{C}_f$$

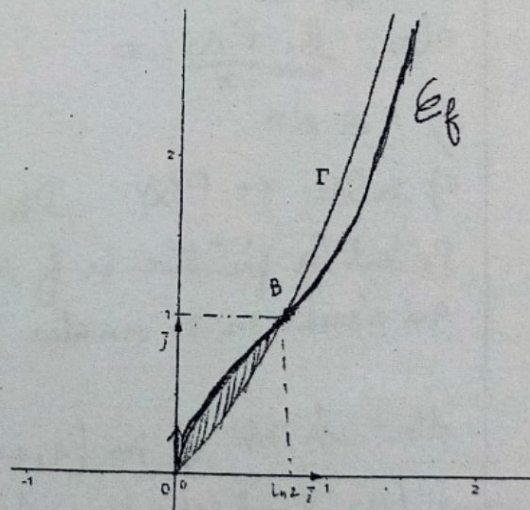
$$4/a) \forall x \in [0, \ln 2], e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$$

$\Rightarrow \Gamma$ se situe au dessous de $\mathcal{C}_f$

$$\text{Si } x \in [\ln 2, +\infty[, e^x - 1 \geq \sqrt{e^x - 1}$$

$\Rightarrow \Gamma$ se situe au dessus de $\mathcal{C}_f$

b)



$$5) g(x) = \tan x \quad \text{Dg} = [0, \frac{\pi}{2}[$$

$$a) g \in \text{sm } [0, \frac{\pi}{2}[, g'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
g'		+
g	0	$\nearrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

$g \in \text{str } \nearrow \text{sm } [0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow$
g réalise une bijection

$$\text{de } [0, \frac{\pi}{2}[\text{ sur } [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow g'(0) = 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$c) g \in \mathcal{C}^1\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow g^{-1} \text{ est } \in \mathcal{C}^1\left[0, +\infty\right]$$

$$d) g^{-1}(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2 y} \Rightarrow$$

$$a) g(y) = x \Leftrightarrow \tan y = x$$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(0)}{x - 0} = (g^{-1})'(0)$$

$$\text{car } g^{-1} \text{ est } \in \mathcal{C}^1 \text{ en } 0$$

$$a) (g^{-1})'(0) = \frac{1}{1+0} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1$$

$$e) F(x) = \int_0^x f(t) dt; \mathcal{D}F = [0, +\infty[$$

$$G(x) = 2 \left[f(x) - (g^{-1} \circ f)(x) \right]$$

a). f est la primitive de f sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0 $\Rightarrow F \in \mathcal{C}^1 \mathbb{R}^+$ et $F'(x) = f(x)$

$$G \in \mathcal{C}^1 \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow x \in]0, +\infty[\\ f(x) \in \mathcal{D}g^{-1} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow G \text{ est } \in \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$G'(x) = 2 \left[f'(x) - f'(x) \cdot (g^{-1})'(f(x)) \right]$$

$$= 2 f'(x) - 2 f'(x) \cdot \frac{1}{1+f(x)^2}$$

$$= 2 f'(x) + 2 f'(x) \cdot \frac{f(x)^2}{1+f(x)^2} - 2 f'(x)$$

$$\Rightarrow G'(x) = \frac{2e^x}{2\sqrt{e^x-1}} \cdot (e^x-1) = \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x-1}}{e^x}$$

$$\Rightarrow G'(x) = \sqrt{e^x-1} = f(x)$$

$$\text{donc } \forall x > 0, \boxed{F'(x) = G'(x)}$$

$$b) \text{ d'où } F(x) = G(x) + k$$

$$a) F(0) = 0 \text{ et } G(0) = 2[f(0) - g^{-1}(f(0))] = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + k \Rightarrow k = 0$$

$$\text{donc } \forall x \geq 0, \boxed{F(x) = G(x)}$$

$$c) A = \int_0^{\ln 2} f(x) - (e^x-1) dx = \int_0^{\ln 2} f(x) dx - \left[e^x x \right]_0^{\ln 2}$$

$$= F(\ln 2) - [2 - \ln 2 - (1-0)]$$

$$= G(\ln 2) - 1 + \ln 2$$

$$a) G(\ln 2) = 2 \left[f(\ln 2) - g^{-1}(f(\ln 2)) \right]$$

$$= 2 \left[1 - g^{-1}(1) \right] = 2 \left[1 - \frac{\pi}{4} \right] = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow A = 2 - \frac{\pi}{2} - 1 + \ln 2 = \boxed{A = 1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}}$$

$$7) f_n(x) = \sqrt{e^x - n} \quad \mathcal{D}f_n = [\ln n, +\infty[$$

$$a) G_n(x) = 2 \left[f_n(x) - \sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

$$\text{ona } f_n(x) \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } [\ln n, +\infty[\Rightarrow$$

$$\text{et } \frac{f_n(x)}{\sqrt{n}} \in [0, +\infty[= \mathcal{D}g^{-1}$$

$$G_n : \text{dérivable sur }]\ln n, +\infty[$$

$$G'_n(x) = 2 \left[f'_n(x) - \sqrt{n} \cdot \frac{f'_n(x)}{\sqrt{n}} (g^{-1})'\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

$$= 2 \left[\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-n}} - \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{f_n(x)^2}{n}} \right]$$

$$\Rightarrow G'_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x-n}} - \frac{e^x}{\sqrt{e^x-n}} \cdot \frac{n}{n+e^x-n} = \frac{e^x-n}{\sqrt{e^x-n}}$$

$$\Rightarrow G'_n(x) = \sqrt{e^x-n} = f_n(x)$$

$$a) G_n(\ln n) = 2 \left[f_n(\ln n) - \sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{f_n(\ln n)}{\sqrt{n}}\right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{G_n(x) = \int_{\ln n}^x f_n(t) dt}$$

$$b) n > 1 \Rightarrow \sqrt{e^x-n} < \sqrt{e^x-1}$$

$$\text{d'où } f_n(x) < f_1(x) \leq e^x-1 \quad \forall x \geq \ln n > \ln 2$$

$$c) A_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} (e^x-1) - f_n(x) dx$$

$$= \left[e^x - x \right]_{\ln n}^{\ln(n+1)} - \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f_n(x) dx$$

$$= (n+1) - \ln(n+1) - n + \ln n - G_n(\ln(n+1))$$

$$= 1 - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 2 \left[f_n\left(\ln(n+1)\right) - \sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{f_n(\ln(n+1))}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

$$= 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 2 \left[1 - \sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

$$= 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 2 + 2\sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{donc } \boxed{A_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 1 + 2\sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - 1 + 2 \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

Correction " Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie "

Exercice 08: Contrôle 2017

$$f_n(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right) \quad D_f =]0, +\infty[$$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = -\infty$
 $\Rightarrow$ la droite $x=0$: Asymptote verticale.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{1+\frac{1}{x}}\right) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2) - \ln(x+1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} = 0$$

$\Rightarrow E_f$ admet une branche parabolique infinie au voisinage de $(+\infty)$ direction $(\vec{Ox})$

2) a) $f \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car $\frac{x^2}{x+1} > 0$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{x^2(x+1)} = \frac{x+2}{x(x+1)}$$

b) $f'(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

c) $f \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[\Rightarrow f$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R} = \mathbb{J}$

3) a) $x^2 = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \alpha \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

b) $-\frac{1}{\alpha} = \frac{-1}{x''} = \frac{-2}{1+\sqrt{5}} = \frac{-2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = x'$

c) $f \cap (x'x) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x+1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = x' = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow E_f \cap (x'x) = \{A(\alpha, 0)\}$$

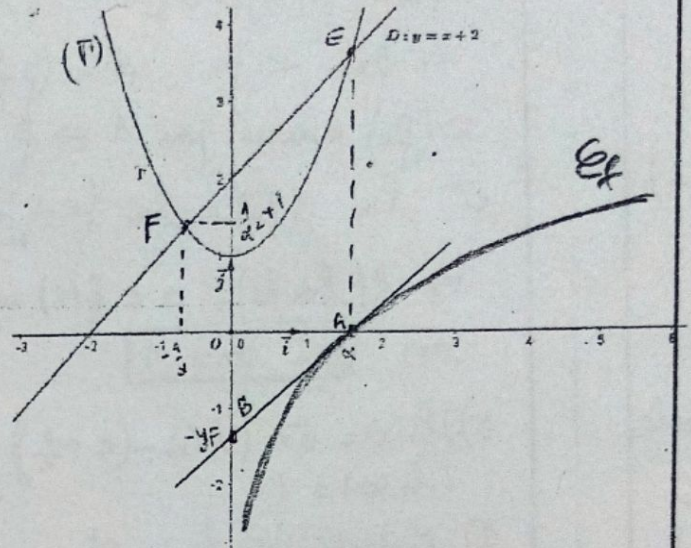
d) $T_A: y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$

$$\alpha f'(\alpha) = \frac{\alpha+2}{\alpha(\alpha+1)} \text{ or } \alpha^2 = \alpha+1 \Rightarrow \alpha+2 = \alpha^2+1$$

$$\Rightarrow f'(\alpha) = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}$$

$$\text{tang} : T_A : y = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$$

e) pm $x = x_B = \alpha \Rightarrow y = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(\alpha) = 1 + \frac{1}{\alpha^2} = y_B$
 $\Rightarrow B\left(\alpha, 1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \in T_A$



4) a) $(\Gamma) \cap D: x^2 + 1 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 = x + 1$
 $\Rightarrow x' = \alpha$ et $x'' = -\frac{1}{\alpha}$

$\Rightarrow (\Gamma) \cap D = \{E(\alpha, \alpha+2); F(\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^2} + 1)\}$
 $\Rightarrow x_E = \alpha \Rightarrow A(0, x_E)$

$$y_F = \frac{1}{\alpha^2} + 1 = -y_B \Rightarrow B(0, -y_F)$$

b) $T_A = (AB)$

B) $G_n(x) = \int_1^x f(t^n) dt \quad D_G = [1, +\infty[$

1) a) $1 \leq t \leq x \Rightarrow 1 \leq t^n \leq x^n$

$$f \uparrow \Rightarrow f(1) \leq f(t^n) \leq f(x^n)$$

$$\text{donc } \int_1^x f(1) dt^n \leq \int_1^x f(t^n) dt^n \leq \int_1^x f(x^n) dt^n$$

$$\Leftrightarrow f(1) [t^n]_1^x \leq G_n(x) \leq f(x^n) [t^n]_1^x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1)$$

b) $G_n(x) = \int_1^x f(t^n) dt$

on pose $u(t) = f(t^n) \rightarrow u' = n t^{n-1} f'(t^n) = \frac{n t^{n-1} t^{n+2}}{t^n (t^n + 1)}$
 $v'(t) = 1 \rightarrow v(t) = t$

$$\Rightarrow G_n(x) = \left[t f(t^n) \right]_1^x - n \int_1^x \frac{t^{n+2}}{t^n + 1} dt$$

$$= x f(x^n) - f(1) - n \int_1^x \left(1 + \frac{1}{t^n + 1}\right) dt$$

$$= x f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n [t]_1^x$$

$$\Rightarrow G_n(x) = x f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n} dt$$

$$\text{Concl.} : G_n(x) = x f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n} dt$$

$$2) J_n = \int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \frac{1}{1+t^n} dt$$

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = \alpha^0 = 1$$

$$\text{Can } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \neq 0$$

$$\text{Concl.} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$$

b) d'après B) 1) a) on a :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt[n]{\alpha}-1) \leq G_n(\sqrt[n]{\alpha}) \leq f(\sqrt[n]{\alpha})(\sqrt[n]{\alpha}-1)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt[n]{\alpha}-1) \leq G_n(\sqrt[n]{\alpha}) \leq f(\alpha)(\sqrt[n]{\alpha}-1)$$

$$\text{or } f(\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt[n]{\alpha}-1) \leq G_n(\sqrt[n]{\alpha}) \leq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt[n]{\alpha}-1) = 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = 0$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = l$$

$$\text{pose } x = \frac{1}{n}, \text{ Si } n \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \alpha} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x \ln \alpha} - 1}{x \ln \alpha} \right) \cdot \ln \alpha = \ln \alpha$$

$$\text{Can } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\text{Concl.} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$d) \text{ ma } G_n(x) = x f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n} dt$$

$$\text{pose } x = \sqrt[n]{\alpha} \Rightarrow G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = \sqrt[n]{\alpha} f(\alpha) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(\sqrt[n]{\alpha}-1) - \int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \frac{n}{1+t^n} dt$$

$$\text{or } f(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = \ln 2 - n(\sqrt[n]{\alpha}-1) - J_n$$

$$\Rightarrow J_n = \ln 2 - n(\sqrt[n]{\alpha}-1) - G_n(\sqrt[n]{\alpha})$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{\alpha}-1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \ln \alpha$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \ln 2 - \ln \alpha$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)$$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 09 : Principal 2016

A) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ $D_f =]0, +\infty[$

i) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow$ la droite $x=0$: droite verticale
a' $\in f$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{t}}}{(t)^{3/2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^3} = +\infty$

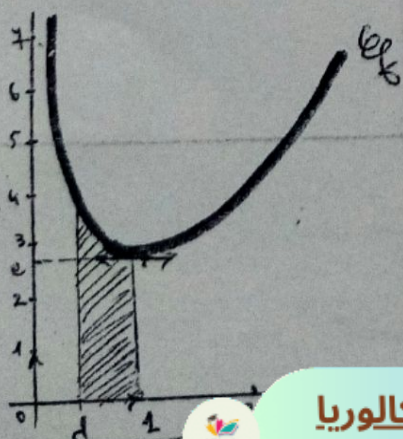
$\Rightarrow f$ admet une branche parabolique infinie au voisinage de $(+\infty)$ de direction $(0, \vec{j})$.

2) a) f étant dérivable sur $]0, +\infty[$
 $f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\right) \sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}}{2x \cdot \sqrt{x}} \quad \forall x > 0$

b) le signe de f dépend du signe de $(\sqrt{x} - 1)$ $f(1) = e$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	e	$+\infty$



3) $S_1 = \int_1^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$
 $= 2 \int_1^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2 \left[e^{\sqrt{x}} \right]_1^1$

$\Rightarrow S_1 = 2(e - e^1)$ (ua)

$\lim_{d \rightarrow 0^+} S_d = \lim_{d \rightarrow 0^+} 2(e - e^d) = 2(e - 1)$

B) a) $g_1(x) = f(x)$ si $x \in]0, 1[$

et $g_2(x) = f(x)$ si $x \in [1, +\infty[$

$\bullet g_1$: continue et strict $\downarrow$ sur $]0, 1[\Rightarrow g_1$ réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $I = [e, +\infty[$

$\bullet f$: continue et strict $\uparrow$ sur $[1, +\infty[$
 $\Rightarrow g_2$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $I = [e, +\infty[$

2) $n \in \mathbb{N}^*$

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, (e + \frac{1}{n}) \in I = [e, +\infty[$

$\Rightarrow$ en application du thém des valeurs intermédiaires aux fonctions g_1 et g_2 , il existe un unique $\alpha_n \in]0, 1[$

tel que $g_1(\alpha_n) = e + \frac{1}{n} \Leftrightarrow f(\alpha_n) = e + \frac{1}{n}$

et il existe un unique $\beta_n \in [1, +\infty[$ tel que $g_2(\beta_n) = e + \frac{1}{n} \Leftrightarrow f(\beta_n) = e + \frac{1}{n}$

b) (α_n) convergente :

on a $f(\alpha_{n+1}) = e + \frac{1}{n+1} \Rightarrow f(\alpha_n) = e + \frac{1}{n}$

or $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$

$\Rightarrow g_1(\alpha_{n+1}) < g_1(\alpha_n) \Rightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n$
 g_1 b sur $]0, 1[$

$\Rightarrow \alpha_n \nearrow$ et majorée par 1

alors α_n convergente

$f(\alpha_n) = \ln(e + \frac{1}{n}) = e \Rightarrow \alpha_n \rightarrow 1$

• (p_n) convergente :

$$f(p_{n+1}) = e + \frac{1}{p_{n+1}} \text{ et } f(p_n) = e + \frac{1}{p_n}$$

$$\Rightarrow f(p_{n+1}) < f(p_n) \text{ car } \frac{1}{p_{n+1}} < \frac{1}{p_n}$$

or p_{n+1} et $p_n \in]1, +\infty[\Rightarrow f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$\Rightarrow p_{n+1} < p_n \text{ d'où } (p_n) \text{ décroissante}$$

or (p_n) minorée par 1 $\Rightarrow (p_n)$ converge

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e + \frac{1}{p_n} \right) = e$$

$$\Rightarrow f(\lim p_n) = e = f(1) \Rightarrow \lim p_n = 1$$

3) $h(x) = \sqrt{x} \left(f(x) - \left(e + \frac{1}{n} \right) \right)$ si $x > 0$
 $h(0) = 1$

a) continuité de h en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \left(f(x) - \left(e + \frac{1}{n} \right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \left(e + \frac{1}{n} \right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n} \right) = e^0 = 1 = h(0)$$

$\Rightarrow h$ est continue en 0

• b) le signe de $h(x)$ dépend du signe de $\left(f(x) - \left(e + \frac{1}{n} \right) \right)$ qui s'annule en α_n et β_n

x	0	α_n	β_n	$+\infty$
h(x)	1	0	0	+

4) $H(x)$ est une primitive de h / $H(0) = 0$

a) $u: x \mapsto \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$
 u est la primitive de $e^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+$
 qui s'annule en 0
 $\Rightarrow u$ dérivable sur $\mathbb{R}^+ \Rightarrow u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$
 $\Rightarrow \begin{cases} u'(x) = e^{\sqrt{x}} \\ u(0) = 0 \end{cases}$

$v: x \mapsto 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}$

v est dér. $\Leftrightarrow \forall x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, +\infty[$
 $\text{et } v$ est dérivable $\forall x > 0 \Rightarrow x \in]0, +\infty[$

• $\forall x > 0, v'(x) = \left[2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} \right]'$
 $\Rightarrow v'(x) = 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) e^{\sqrt{x}} + 2(\sqrt{x} - 1) \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$
 $\Rightarrow v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow \forall x > 0, u'(x) = v'(x)$

$\Rightarrow u(x) = v(x) + k$

or $u(0) = 0$
 $\text{et } v(0) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow k = 0$

Conclusion : $\forall x \geq 0, u(x) = v(x)$

c) $h(x) = \sqrt{x} \left(f(x) - \left(e + \frac{1}{n} \right) \right)$

$\Rightarrow h(x) = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n} \right)$

$\Rightarrow h(x) = v'(x) - \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n} \right)$

d'où $H(x) = v(x) - \frac{2}{3} x \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n} \right) + k$

$\Rightarrow H(x) = 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n} \right) + k$

or $H(0) = 0 \Rightarrow 2 - 2 + k = 0 \Rightarrow k = 0$

Conclusion : $H(x) = 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n} \right)$

5) $A_n = \int_0^{\beta_n} |h(x)| dx = \int_0^{\alpha_n} h(x) dx + \int_{\alpha_n}^{\beta_n} -h(x) dx$

$= \left[H(x) \right]_0^{\alpha_n} - \left[H(x) \right]_{\alpha_n}^{\beta_n}$

$= H(\alpha_n) - H(0) - H(\beta_n) + H(\alpha_n)$

$\Rightarrow A_n = 2H(\alpha_n) - H(\beta_n)$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 2H(1) - H(1)$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} H(1) = 2 + 0 - \frac{2}{3}(e + 0)$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \left(2 - \frac{2}{3}e \right)$



Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 10: Contrôle 2016

$$f(x) = \frac{\sqrt{2 - \ln^2 x}}{x} \quad D_f = [e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}]$$

$$1) a) \lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \frac{\varphi(x) - \varphi(e^{\sqrt{2}})}{x - e^{\sqrt{2}}} = \varphi'(e^{\sqrt{2}})$$

$$\text{tel que } \varphi(x) = \ln x \quad \varphi \in \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{d'où } \varphi'(e^{\sqrt{2}}) = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} = e^{-\sqrt{2}}$$

$$\text{concl.} : \lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = e^{-\sqrt{2}}$$

$$b) \frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2 - \ln^2 x}}{x}}{x - e^{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 - \ln^2 x}}{x(x - e^{\sqrt{2}})}$$

$$= \frac{2 - \ln^2 x}{x(x - e^{\sqrt{2}}) \cdot \sqrt{2 - \ln^2 x}} = \frac{-(\ln x + \sqrt{2}) \cdot \ln x + \sqrt{2}}{x \sqrt{2 - \ln^2 x} (x - e^{\sqrt{2}})}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \frac{-(\ln x + \sqrt{2}) \cdot \ln x + \sqrt{2}}{x \sqrt{2 - \ln^2 x} (x - e^{\sqrt{2}})} = \frac{-2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} = -\infty$$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $(e^{\sqrt{2}})^-$ et E_f admet en $(e^{\sqrt{2}}, 0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

c) dérivabilité de f en $(e^{-\sqrt{2}})^+$:

$$\lim_{x \rightarrow e^{-\sqrt{2}}} \frac{f(x) - f(e^{-\sqrt{2}})}{x - e^{-\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow e^{-\sqrt{2}}} \frac{\frac{\sqrt{2 - \ln^2 x}}{x}}{x - e^{-\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow e^{-\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2 - \ln^2 x}}{x(x - e^{-\sqrt{2}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow e^{-\sqrt{2}}} \frac{[\sqrt{2 - \ln^2 x}] \cdot [\frac{\ln x + \sqrt{2}}{x - e^{-\sqrt{2}}] = l'$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow e^{-\sqrt{2}}} \frac{\ln x + \sqrt{2}}{x - e^{-\sqrt{2}}} = \varphi'(e^{-\sqrt{2}}) = e^{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow l' = \frac{e^{\sqrt{2}}}{e^{-\sqrt{2}}} = +\infty \Rightarrow f \text{ n'est pas}$$

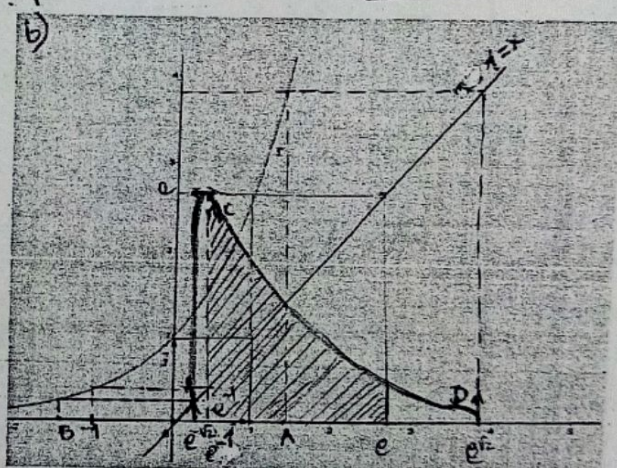
dérivable en $(e^{-\sqrt{2}})^+$ et E_f admet en $(e^{-\sqrt{2}}, 0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

2) f'' s'annule en α et β et change à chaque fois le signe $\Rightarrow$ $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$ sont des points d'inflexion pour E_f .

3) a) La $\perp \vec{a}$ ($\vec{OE}$) passant par B coupe (Γ) en $(-\sqrt{2}, e^{\sqrt{2}}) \Rightarrow$ le point $(e^{\sqrt{2}}, 0) \in E_f$.

La droite $x = -1$ coupe (Γ) en $(-1, e')$ et la droite $x = 1$ coupe (Γ) en $(1, e)$ $\Rightarrow$ le point $(e', e) \in E_f$.

La $\perp \vec{a}$ ($\vec{OE}$) passant par A coupe (Γ) en $A'(\sqrt{2}, e^{\sqrt{2}}) \Rightarrow (e^{\sqrt{2}}, 0) \in E_f$.



$$4) g(x) = \sin x \quad D_g = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

a) g continue et dérivable sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

$$g'(x) = \cos x > 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$g(x)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

g continue et strictement $\nearrow$ sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

$\Rightarrow g$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ sur $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$$b) g \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow g^{-1} = h \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$e) h'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\text{or } g(y) = x \Leftrightarrow \sin y = x$$

$$\text{or } \cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2 > 0$$

$$\Rightarrow |\cos y| = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{comme } y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow \cos y > 0$$

$$\text{donc } \cos y = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{Cml: } h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$c) u(x) = h\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right) \quad D_u = [e^{-1}, e]$$

$$\text{on a } x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{2}} \text{ dérivable sur } [e^{-1}, e]$$

$$e) e^{-1} \leq x \leq e \Leftrightarrow -1 \leq \ln x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\ln x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et comme } h \text{ est}$$

$$\text{dérivable sur } \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Rightarrow u \in \mathcal{H}([e^{-1}, e])$$

$$u'(x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)' \cdot h'\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{x\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\ln^2 x}{2}}} = \frac{1}{x\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\ln^2 x}}$$

$$\text{donc } \forall x \in [e^{-1}, e], \quad u'(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{2-\ln^2 x}}$$

$$d) \int_{e^{-1}}^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{2-\ln^2 x}} = \int_{e^{-1}}^e u'(x) dx$$

$$= [u(x)]_{e^{-1}}^e = u(e) - u(e^{-1})$$

$$= h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - h\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - h\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{or } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{et } g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{donc } \int_{e^{-1}}^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$5) a) A = \int_{e^{-1}}^e f(x) dx = \int_{e^{-1}}^e \frac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x} dx$$

$$\text{on pose } u(x) = \sqrt{2-\ln^2 x} \rightarrow u'(x) = \frac{-\ln x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$$

$$v'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow v(x) = \ln x$$

$$\Rightarrow A = \left[(\ln x) \sqrt{2-\ln^2 x} \right]_{e^{-1}}^e + \int_{e^{-1}}^e \frac{e \cdot (\ln x)^2}{e^{-1} x \sqrt{2-\ln^2 x}} dx$$

$$\Leftrightarrow A = 1 - (-1) + \int_{e^{-1}}^e \frac{e \cdot (\ln x)^2}{e^{-1} x \sqrt{2-\ln^2 x}} dx$$

$$\Rightarrow A = 2 + \int_{e^{-1}}^e \frac{(\ln x)^2}{x \sqrt{2-\ln^2 x}} dx$$

$$b) \frac{2}{x \sqrt{2-\ln^2 x}} - f(x) = \frac{2}{x \sqrt{2-\ln^2 x}} - \frac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x}$$

$$= \frac{2 - (2 - \ln^2 x)}{x \sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{\ln^2 x}{x \sqrt{2-\ln^2 x}}$$

$$c) A = 2 + \int_{e^{-1}}^e \frac{(\ln x)^2}{x \sqrt{2-\ln^2 x}} dx$$

$$= 2 + \int_{e^{-1}}^e \frac{2}{x \sqrt{2-\ln^2 x}} dx - \int_{e^{-1}}^e \frac{f(x) dx}{e^{-1}}$$

$$\Rightarrow A = 2 + 2 \int_{e^{-1}}^e \frac{dx}{x \sqrt{2-\ln^2 x}} - A$$

$$\Rightarrow 2A = 2 + 2 \left[\frac{\pi}{2} \right] = 2 + \pi$$

$$\text{alors } A = 1 + \frac{\pi}{2} \quad (\text{ua})$$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 11: Principal 2015

(I) $f(x) = e^{\sin x}$ $D_f = [0, \pi]$

1) a) $f \in \text{sm}([0, \pi])$; $f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$
le signe de f' dépend du signe de $\cos x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	1	e	1

$f(0) = e^0 = 1$
 $f(\pi) = e^0 = 1$
 $f(\frac{\pi}{2}) = e^1 = e$

b) Nq: $\Delta: x = \frac{\pi}{2}$: Axe de symétrie.

$\Rightarrow$ Nq $\forall x \in D_f; (\pi - x) \in D_f$
 $f(\pi - x) = f(x)$

ou $\forall x \in D_f \Rightarrow x \in [0, \pi] \Rightarrow -\pi \leq -x \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq \pi - x \leq \pi \Rightarrow (\pi - x) \in [0, \pi] = D_f$

$f(\pi - x) = e^{\sin(\pi - x)} = e^{\sin x} = f(x)$

Conf: $\Delta: x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie.

c) T: tangente en 0 $\Rightarrow T: y = f'(0)(x-0) + f(0)$

ou $f'(0) = \cos 0 \cdot e^{\sin 0} = 1 \Rightarrow \boxed{y = x + 1}$

2) $g(x) = e^x \cdot \sqrt{1-x^2} - 1$ $D_g = [0, 1]$

a) g réalise une bijection de $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1]$

sur $[-1, g(\frac{1+\sqrt{5}}{2})]$ ou $g(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) > 0$

$\Rightarrow$ d'après le T.V.I, il existe un unique $\alpha \in]\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1[$ pour lequel $g(\alpha) = 0$

• si $x \in]0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$, $g(x) > 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$

Conf: sur $]0, 1[$, il y a $g(x) = 0$ admet un solution unique α .

b) si $x \in]0, \alpha[$, $g(x) > 0$

si $x \in [\alpha, 1]$, $g(x) \leq 0$

x	0	α	1
$g(x)$		+	-

3) $h(x) = e^{\sin x} - (x+1)$ $D_h = [0, \frac{\pi}{2}]$

a) h est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$h'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x} - 1$

ou $g(\sin x) = e^{\sin x} \sqrt{1 - \sin^2 x} - 1$
 $= e^{\sin x} \cdot |\cos x| - 1$

ou $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow |\cos x| = \cos x$

$\Rightarrow g(\sin x) = \cos x \cdot e^{\sin x} - 1 = h'(x)$

b) on résout $h'(x) = 0 \Leftrightarrow g(\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = \alpha \in]0, 1[$

ou $x \mapsto \sin x$ réalise une bijection

de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $]0, 1[\Rightarrow$ il existe

un unique $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ / $\sin \beta = \alpha$

c) $x \mapsto \sin x$ est $\nearrow$ sur $(0, \frac{\pi}{2})$

et $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin([0, \beta]) = [\sin 0, \sin \beta]$

$\Rightarrow \sin([0, \beta]) = [0, \alpha]$

et $\sin([\beta, \frac{\pi}{2}]) = [\sin \beta, \sin \frac{\pi}{2}] = [\alpha, 1]$

d) $h'(x) = g(\sin x)$

• si $x \in [0, \beta] \Rightarrow \sin(x) \in [0, \alpha] \Rightarrow g(\sin x) \geq 0$

• si $x \in [\beta, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin(x) \in [\alpha, 1] \Rightarrow g(\sin x) \leq 0$

x	0	β	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		+	-
$h(x)$	0	$\alpha + 1 - \beta$	$e - \frac{\pi}{2} - 1$

$h(0) = 0$ $h(\frac{\pi}{2}) = e - \frac{\pi}{2} - 1$

$h(\beta) = e^{\sin \beta} \cdot \beta + 1 = \alpha + 1 - \beta$

e) 0: minimum absolu de $h(x)$

$\Rightarrow \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], h(x) \geq 0$

$h(x) \geq x + 1$

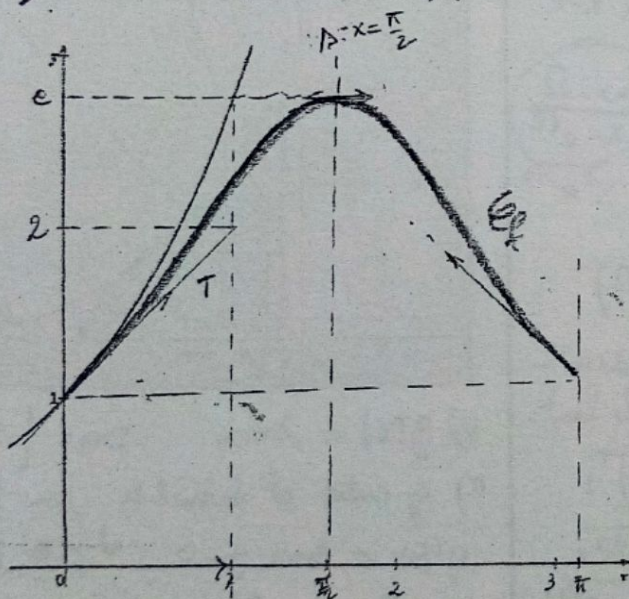
d'où $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $f(x) \geq x+1$
 $\Rightarrow \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ Cf. skémetique au dessus de T_0 .

II) 1/a) On $\forall x \in [0, +\infty[$ on a $\ln x \leq x$
 on pose $\varphi(x) = \ln x - x$ $D\varphi = \mathbb{R}_+$
 $\varphi \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 \leq 0$

x	0	$+\infty$	$\varphi(0) = 0$: maximum
φ'	0	-	$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) \leq 0$
φ	0		$\Rightarrow \boxed{\ln x \leq x}$

b) on sait que $x \mapsto e^x$ $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow \ln x \leq x \Rightarrow e^{\ln x} \leq e^x$
 $\Rightarrow f(x) \leq e^x \cdot \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

c) Annexe (à rendre avec la copie)



2) a) on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq e^x$
 or $x \mapsto f(x) \in \mathcal{M}[0,1]$
 et $x \mapsto e^x \in \mathcal{M}[0,1]$
 $\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1$
 d'où $\boxed{\int_0^1 f(x) dx \leq e - 1}$

d'autre part $\ln x \leq 1$
 $e^x \Rightarrow e^{\ln x} \leq e^1 \Rightarrow f(x) \leq e$
 alors $\int_1^{\pi/2} f(x) dx \leq \int_1^{\pi/2} e \cdot dx$
 $\Rightarrow \int_1^{\pi/2} f(x) dx \leq e [x]_1^{\pi/2}$
 $\Rightarrow \boxed{\int_1^{\pi/2} f(x) dx \leq e(\frac{\pi}{2} - 1)}$

b) Comme $\Delta: x = \frac{\pi}{2}$: axe de symétrie
 $\Rightarrow A = \int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(x) dx$
 $\Rightarrow A = 2 \left[\int_0^1 f(x) dx + \int_1^{\pi/2} f(x) dx \right]$
 or $\int_0^1 f(x) dx \leq e - 1$
 et $\int_1^{\pi/2} f(x) dx \leq e(\frac{\pi}{2} - 1)$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(x) dx \leq e - 1 + e\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\pi/2} f(x) dx \leq e\pi - 2 \quad (1)$$

d'autre part $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $f(x) \geq x+1$
 car Cf. au dessus de T_0

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\pi/2} f(x) dx \geq \int_0^{\pi/2} 2(x+1) dx$$

$$\Rightarrow A \geq [x^2 + 2x]_0^{\pi/2}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{\pi^2}{4} + \pi \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2): \boxed{\frac{\pi^2}{4} + \pi \leq A \leq e\pi - 2}$$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 12: Contrôle 2015

I) $u(t) = 3\ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$ $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}_+^*$

1) a) u est dérivable sur $]0, +\infty[$ car $1+t > 0$

$$u'(t) = \frac{3}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{3(1+t) - 1}{(1+t)^2}$$

$$\Rightarrow u'(t) = \frac{3t+2}{(1+t)^2} > 0$$

t	0	$+\infty$
$u'(t)$		+
$u(t)$	0	$+\infty$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = 0$
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = +\infty$

b) d'après le TV de u , $\forall u > 0$, $u(x) > 0$

2) $f(x) = x^3(\ln(1+x) - \ln x)$ si $x \in]0, 1[$
 $f(0) = 0$

a) Continuité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x = 0$$

$$= f(0) \Rightarrow \boxed{f \text{ est continue en } 0}$$

Dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3(\ln(1+x) - \ln x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(1+x) - x \ln x = 0$$

$\Rightarrow f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

b) f est dérivable sur $]0, 1[$

$$f'(x) = 3x^2(\ln(1+x) - \ln x) + x^3 \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} \right]$$

$$= 3x^2 \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{x^3}{x(1+x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\frac{1}{1+x} \right)$$

$$= x^2 \left[3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1+x} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = x^2 \cdot u\left(\frac{1}{x}\right)}$$

c) on a vu que $\forall t > 0$, $u(t) > 0$

Comme $\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow u\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

d'où $f'(x) > 0$

x	0	1
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	$\ln 2$

$f(1) = \ln 2$

II) $g(x) = x^3 \ln(x+1)$ $\mathcal{D}_g =]0, 1[$

$h(x) = x^3 \ln x$ si $x \in]0, 1[$
 $h(0) = 0$

1) h est dérivable sur $]0, 1[$

$$h'(x) = 3x^2 \ln x + \frac{x^3}{x} = 3x^2 \ln x + x^2$$

$$\Rightarrow h'(x) = x^2(3 \ln x + 1)$$

$$h'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = e^{-\frac{2}{3}} \left(3e^{-\frac{1}{3}} + 1\right) = 0$$

$\Rightarrow E_h$ admet une tangente horizontale en $e^{-\frac{1}{3}}$

2) a) $f(x) = x^3(\ln(1+x) - \ln x)$

$$= x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) - h(x) \text{ si } x \in]0, 1[$$

$$f(0) = g(0) - h(0) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in]0, 1[; \boxed{f(x) = g(x) - h(x)}$$

b) Positions relatives de E_f et E_g

$$f(x) - g(x) = -h(x) \geq 0$$

car $x \in]0, 1[\Rightarrow \ln x \leq 0$
 $\text{et } x^3 \geq 0$

$\Rightarrow f(x) \geq g(x) \Rightarrow E_f$ est toujours au-dessus de E_g

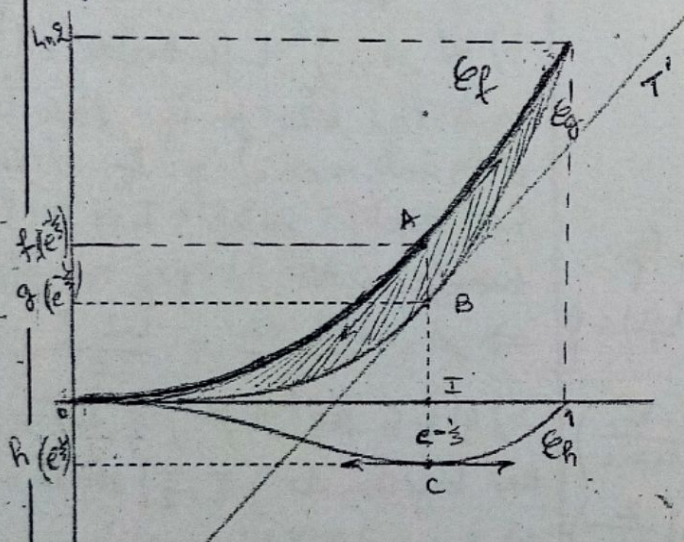
x	0	1
$-h(x)$	0	+
Position		E_f au-dessus de E_g

c) T : tangente à E_g en $e^{-\frac{1}{3}}$
 T' : tangente à E_g en $e^{\frac{1}{3}}$

La pente de T est $f'(e^{-\frac{1}{3}})$
 or $f(x) = g(x) - h(x)$
 $\Rightarrow f'(x) = g'(x) - h'(x) \quad \forall x \in]0,1[$

d'où $f'(e^{-\frac{1}{3}}) = g'(e^{-\frac{1}{3}}) - h'(e^{-\frac{1}{3}})$
 et comme $h'(e^{-\frac{1}{3}}) = 0 \Rightarrow f'(e^{-\frac{1}{3}}) = g'(e^{-\frac{1}{3}})$
 $\Rightarrow T$ et T' ont la même pente
 $\Rightarrow \boxed{T \parallel T'}$

3)



a) soit $A(e^{-\frac{1}{3}}, f(e^{-\frac{1}{3}}))$ et $I(e^{-\frac{1}{3}}, 0)$
 or $f(e^{-\frac{1}{3}}) = g(e^{-\frac{1}{3}}) - h(e^{-\frac{1}{3}})$
 soit $B(e^{-\frac{1}{3}}, g(e^{-\frac{1}{3}}))$ et $C(e^{-\frac{1}{3}}, h(e^{-\frac{1}{3}}))$
 $\Rightarrow \vec{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ g(e^{-\frac{1}{3}}) - h(e^{-\frac{1}{3}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(e^{-\frac{1}{3}}) \end{pmatrix} = \vec{IA}$
 $\Rightarrow A = t_{\vec{CB}}(I)$

T étant la $\parallel^a$ T' passant par A

b) h étant continue sur $]0,1[$
 étudions la $\lim_{x \rightarrow 0^+}$ de h en 0^+ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 0 = h(0)$
 $\Rightarrow h \in \text{con}(0,1)$ d'où H admet
 au moins une primitive H

$1 \in]0,1[\Rightarrow H$ est l'unique primitive
 $H(1) = 0$ de h qui s'annule en 1

$$b) A_\alpha = \int_\alpha^1 x^3 \ln x \, dx = \int_\alpha^1 h(x) \, dx \\ = [H(x)]_\alpha^1 = H(1) - H(\alpha)$$

$$\text{or } H(1) = 0 \Rightarrow \boxed{A_\alpha = -H(\alpha)}$$

c) on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x^4 \rightarrow v'(x) = \frac{1}{4} x^3 \end{cases}$

$$\Rightarrow A(\alpha) = \left[\frac{1}{4} x^4 \ln x \right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{1}{4} x^3 \, dx$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = \left[\frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 \right]_\alpha^1$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = -\frac{1}{4} \alpha^4 \ln \alpha + \frac{1}{16} \alpha^4 - \frac{1}{16}$$

$$\text{d'où } \boxed{A_\alpha = \frac{1}{16} [\alpha^4 - 1 - 4\alpha^4 \ln \alpha]}$$

$$d) H(0) = -\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A_\alpha \\ = -\frac{1}{16} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [\alpha^4 - 1 - 4\alpha^4 \ln \alpha]$$

$$\Rightarrow \boxed{H(0) = \frac{1}{16}}$$

$$e) A = \int_0^1 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_0^1 -h(x) \, dx$$

$$\Leftrightarrow A = [H(x)]_0^1 = -H(1) + H(0)$$

$$\text{or } H(1) = 0 \text{ et } H(0) = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{16}} \text{ (ua)}$$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 13: Principale 2014

$$f(x) = \ln(1 + \tan x), \quad D_f =]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$$

$$1) a) \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} \ln(1 + \tan x) = -\infty$$

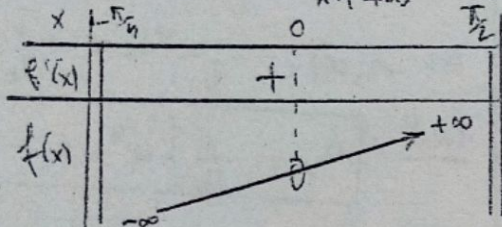
$$\text{car } \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} (1 + \tan x) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \ln(1 + \tan x) = +\infty$$

$$b) \text{ on a } \forall x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[; (1 + \tan x) > 0$$

$$\Rightarrow f \text{ continue et } \frac{1}{1 + \tan x} > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \tan x} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} > 0$$



$$2) a) f(0) = 0 \Rightarrow 0 \in E_f$$

$$\bullet f(\frac{\pi}{4}) = \ln 2 \Rightarrow A(\frac{\pi}{4}, \ln 2) \in E_f$$

$$\bullet f(\frac{\pi}{8}) = \ln(1 + \tan \frac{\pi}{8}) = \ln \sqrt{2} \Rightarrow I(\frac{\pi}{8}, \frac{\ln 2}{2}) \in E_f$$

$$b) f(\frac{\pi}{4} - x) = \ln(1 + \tan(\frac{\pi}{4} - x)) = \ln(1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x})$$

$$= \ln\left(\frac{1 + \tan x + 1 - \tan x}{1 + \tan x}\right) = \ln\left(\frac{2}{1 + \tan x}\right)$$

$$= \ln 2 - \ln(1 + \tan x) = \ln 2 - f(x)$$

$$\text{Concl. } f(\frac{\pi}{4} - x) = \ln 2 - f(x)$$

$$c) x \in D_f \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < -x < -\frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\frac{\pi}{4} - x) \in D_f$$

$$\text{et } f(\frac{\pi}{4} - x) = \ln 2 - f(x) \Rightarrow I(\frac{\pi}{8}, \frac{\ln 2}{2}) \text{ est}$$

un centre de symétrie par la courbe E_f

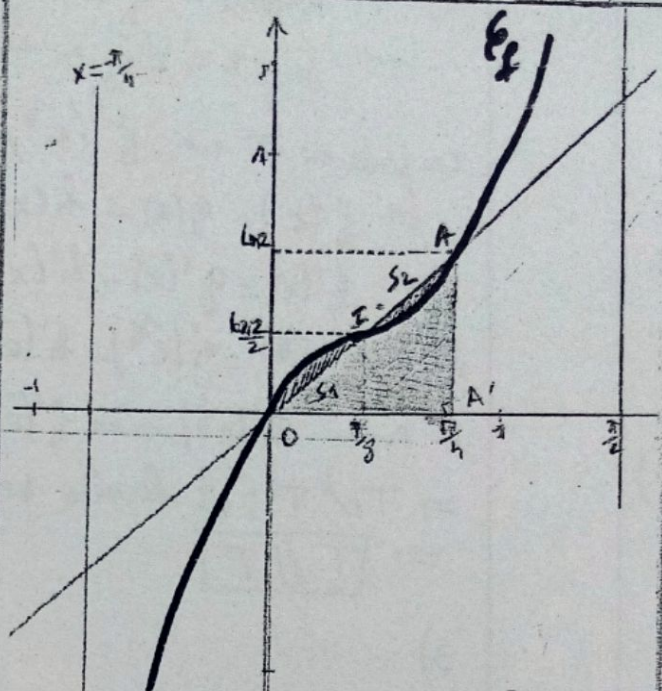
$$4) a) \text{ Comme } I: \text{ centre de symétrie par } E_f$$

et que $A = S_1(0)$ et (OA) : globalement

invariante par $S_1 \Rightarrow S_1$ et S_2 sont

symétriques par rapport à I qui conserve

les arcs $\Rightarrow$ l'axe des



$$b) \text{ soit } A = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$$

$\Rightarrow A$: l'aire limitée par E_f , l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=\frac{\pi}{4}$ et comme S_1 et S_2 sont symétriques par rapport à $I \Rightarrow A$: l'aire du triangle OAA' / A' proj orth de A sur (x)

$$\Rightarrow A = \frac{OA \cdot OA'}{2} = \frac{\ln 2 \cdot \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi \cdot \ln 2}{8}$$

$$5) a) f \in \text{strict } \nearrow \text{ sur }]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow f \text{ réalise une bijection de }]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ sur } \mathbb{R} = \mathbb{J}$$

$$b) f \in \text{sur }]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow f^{-1} \in \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f'(x) \neq 0$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1 + \tan y}{1 + \tan^2 y}$$

$$a) f(y) = x \Rightarrow \ln(1 + \tan y) = x \Rightarrow 1 + \tan y = e^x$$

$$\Rightarrow \tan y = e^x - 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1 + e^x}{1 + (e^x - 1)^2}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$c) I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2} dx = \int_0^{\ln 2} (f^{-1})'(x) dx$$

$$= [f^{-1}(x)]_0^{\ln 2} = f^{-1}(\ln 2) - f^{-1}(0)$$

$$\text{or } f^{-1}(\ln 2) = \frac{\pi}{4} \text{ car } f(\frac{\pi}{4}) = \ln 2 \text{ et } f^{-1}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 14: Contrôle 2014

1) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $D_f =]0, +\infty[$
 $f \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{(\frac{1}{x})x - \ln x}{x^2}$
 $\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

on résout : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$		e^{-1}	0

$f(e) = e^{-1}$

2) $g(x) = e^{f(x)}$ si $x > 0$ | $D_g = \mathbb{R}_+$
 $g(0) = 0$

a) Continuité de g en 0 :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{f(x)} = e^{-\infty} = 0 = g(0)$
 $\Rightarrow g \in \mathcal{C}^0$

b) $\mathcal{C}^1$ de g en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{f(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{f(x)}}{e^{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{f(x) - \ln x}{1}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\frac{\ln x}{x} - \ln x}{1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x - x \ln x}{x}} = e^{-\infty} = 0$
 $\Rightarrow g \in \mathcal{C}^1$ et $g'(0) = 0$

c) $\forall x > 0$, $g'(x) = [e^{f(x)}]' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
 $\Rightarrow$ le signe de g' est celui de f'

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	0	+	-
$g(x)$	0	e^{-1}	1

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} = 1 \Rightarrow y = 1$ A.1)

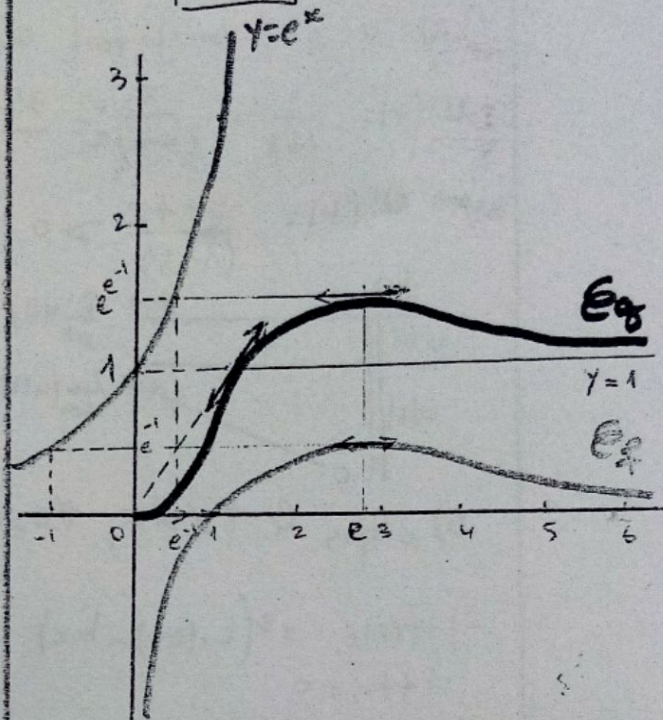
$g(e) = e^{f(e)} = e^{-1}$

3) on pose $h(x) = e^x$ et $E_h: y = e^x$
 $h(1) = e^1 = e$ et $h(e^{-1}) = e^{e^{-1}} = a(e)$
 $\Rightarrow A(e^{-1})$

b) $T_1: y = g'(1)(x-1) + g(1)$

et $g'(1) = f'(1)e^{f(1)} = 1 \cdot e^0 = 1$ et $g(1) = 1$

$\Rightarrow T_1: y = x$



4) $u_1 = 1$, $u_n = g(n) / n \geq 2$

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = 1$

b) Soit $\varphi(n) = \sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln(n)}{n}} = e^{f(n)}$

$\Rightarrow \varphi(n) = e^{\frac{\ln(n)}{n}} = e^{f(n)} = g(n)$

or g est maximale en e
donc l'entier naturel le plus proche
de e est 3

$\Rightarrow \sqrt[n]{n}$ est maximale en 3

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 16: Principale 2013

I) $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ $D_\varphi = \mathbb{R}^*$

1) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right) = \frac{0}{-1} = 0$

$\Rightarrow y = 0$ Asymptote horizontale au voisinage de $(-\infty)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \right) = 1$

$\Rightarrow y = 1$ Asymptote horizontale au voisinage de $(+\infty)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right) = +\infty$
 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0^+$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right) = -\infty$
 car $\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 0^-$

La droite $x = 0$: Asymptote verticale.

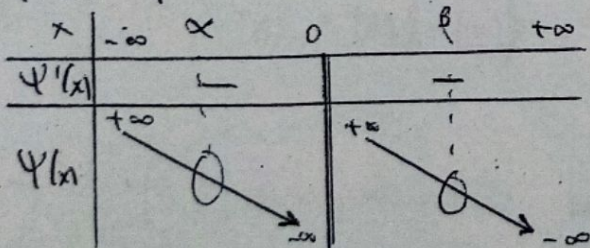
c) $\varphi \in \text{fon. } \mathbb{R}^* \text{ car } e^x - 1 \neq 0$

$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$

$\Rightarrow \varphi$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

2) on pose $\psi(x) = \varphi(x) - x$ $D_\psi = \mathbb{R}^*$

$\psi'(x) = \varphi'(x) - 1 < 0$ car $\varphi'(x) < 0$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\varphi(x) - x) = 0 + \infty = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi(x) - x) = 1 - \infty = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\varphi(x) - x) = +\infty - 0 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\varphi(x) - x) = -\infty - 0 = -\infty$

$\varphi \in \text{fon. } \mathbb{R}^* \Rightarrow \psi$ réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ sur $]$

Comme $0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \alpha \in]-\infty, 0[/ \varphi(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \varphi(\alpha) - \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(\alpha) = \alpha}$

Si $x \in]0, +\infty[$, $\varphi \in \text{fon. } \mathbb{R}^* \Rightarrow \varphi$ réalise aussi une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

Comme $0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \beta \in]0, +\infty[/ \varphi(\beta) = 0$

$\Rightarrow \varphi(\beta) - \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(\beta) = \beta}$

II) $f(x) = e^x - x$ $D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = 1 - x + \ln x$ $D_g =]0, +\infty[$

1) a) $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]0, +\infty[$

Δ_a : tangente à f en $A(a, f(a))$

Δ_b : tangente à g en $B(b, g(b))$

a) Δ_a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

car $f \in \text{fon. } \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f'(a) = e^a - 1$

$\Rightarrow y = (e^a - 1)(x - a) + e^a - a$
 $= (e^a - 1)x - ae^a + e^a + a$

$\Rightarrow \boxed{y = (e^a - 1)x + e^a(1 - a)} : \Delta_a$

Δ_b : $y = g'(b)(x - b) + g(b)$

car $g \in \text{fon. }]0, +\infty[$, $g'(x) = -1 + \frac{1}{x} \Rightarrow g'(b) = -1 + \frac{1}{b}$

$\Rightarrow y = (-1 + \frac{1}{b})(x - b) + 1 - b + \ln b$

$\Rightarrow y = (\frac{1-b}{b})x + b - 1 + 1 - b + \ln b$

$\Rightarrow \boxed{y = (\frac{1-b}{b})x + \ln b} : \Delta_b$

b) $\Delta_a \parallel \Delta_b \Rightarrow f'(a) = g'(b)$

$\Leftrightarrow e^a - 1 = -1 + \frac{1}{b} \Rightarrow e^a = \frac{1}{b} \Rightarrow \boxed{b = e^{-a}}$

2) a) $\Delta_a = \Delta_b \Rightarrow \begin{cases} m=m \\ p=p' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = e^{-a} \\ e^a(1-a) = \ln b \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b = e^{-a} \\ e^a(1-a) = \ln(e^{-a}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = e^{-a} \\ e^a - ae^a = -a \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b = e^{-a} \\ a(1-e^a) = -e^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = e^{-a} \\ a = \frac{e^a}{e^a - 1} \neq 0 \end{cases}$

b) on a $\Delta_a = \Delta_b$: tangente commune à E_f et $E_g \Leftrightarrow a \neq 0$ et $a = \frac{e^a}{e^a - 1}$
 $\Rightarrow \varphi(a) = a \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ a = \beta \end{cases}$

ainsi Δ_α : tangente commune à E_f et E_g respectivement aux points $A(\alpha, f(\alpha))$ et $B(b, g(b))$ or $b = e^{-\alpha} = e^{-\alpha}$
 $\Rightarrow B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$

c) de même si $a = \beta \Rightarrow \Delta_\beta$: tangente commune à E_f et E_g aux points respectifs $A'(\beta, f(\beta))$ et $B'(e^{-\beta}, g(e^{-\beta}))$

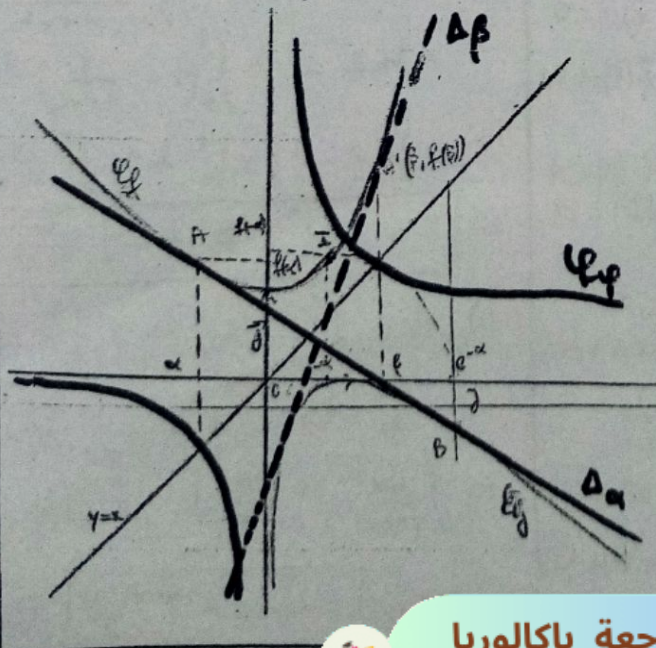
3) a) α : abscisse négative de $\varphi(x) = x$
 $\Rightarrow E_\varphi \cap \Delta \Rightarrow A(\alpha, f(\alpha))$ / $\alpha < 0$

b) $f(-\alpha) = e^{-\alpha} + \alpha \Rightarrow e^{-\alpha} = f(-\alpha) - \alpha$
 Construction de $B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$

soit $H(-\alpha, 0)$ et $I(-\alpha, f(-\alpha)) \in E_f$
 alors $J \in [0, H] / OJ = OH + HI$
 $\Rightarrow$ L'abscisse de J est $[-\alpha + f(-\alpha)]$
 $\Rightarrow$ L'abscisse de J est $e^{-\alpha}$

La Δ_a (Δ_β) en J coupe E_g en B
 $\Rightarrow B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$

c) $\Delta_\alpha = (\Delta_\beta)$



Exercice 15: Principale 2013

Q.C.M.

$$2) F(x) = \int_1^{\ln x} \frac{e^t}{1+t^2} dt$$

(A_3) : soit $g(t) = \frac{e^t}{1+t^2}$ continue sur $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow g$ admet une primitive G $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 et telle que $G'(t) = g(t)$

$$\text{donc } F(x) = [G(t)]_1^{\ln x} = G(\ln x) - G(1)$$

or $x \mapsto \ln x \in]0, +\infty[\Rightarrow$
 et $(\ln x) \in \mathbb{R} = \text{Dom } G$

F est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\Rightarrow (A_3) : \boxed{\text{Vrai}}$$

$$(A_4) : F'(x) = [G(\ln x)]' - [G(1)]'$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x} \cdot G'(\ln x) - 0$$

$$= \frac{1}{x} g(\ln x) = \frac{1}{x} \frac{e^{\ln x}}{1+(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{x}{x(1+(\ln x)^2)}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{1+(\ln x)^2} \neq \frac{x}{1+(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow (A_3) : \boxed{\text{Faux}}$$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 17: Contrôle 2013

$$f(x) = x - \ln(1+x^2) \quad D_f = [0, +\infty[$$

I) 1) $f \in \text{som } [0, +\infty[$ car $(1+x^2) > 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x^2+1-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$

$$2) a) f(x) = x - \ln \left[x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] \\ = x - \ln(x^2) - \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\Rightarrow f(x) = x - 2\ln x - \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right), \forall x > 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - 2\frac{\ln x}{x} \right] - \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2\ln x - \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

$\Rightarrow$ La droite $D: y = x$ est une direction asymptote à la courbe Γ_f en $(+\infty)$

$$3) \forall x \geq 0, f'(x) \geq 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	0	$1 - \ln 2$	$+\infty$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1 - \ln 2$$

$$f'(0) = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$4) a) T_0: y = f'(0)(x-0) + f(0) \text{ or } y = x$$

$$\Rightarrow T_0: y = x$$

$$b) \text{ on a } f(x) - x = -\ln(1+x^2) \leq 0$$

$\Rightarrow \Gamma_f$ est toujours inférieure au droit de D

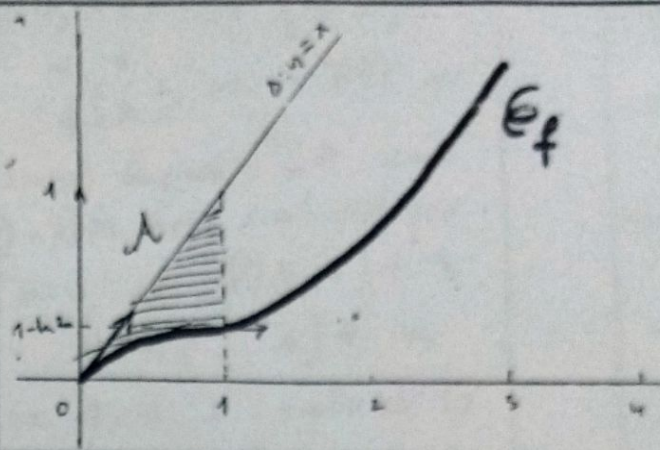
$$II) G(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \quad D_G = [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$1) \text{ on pose } h(t) = \frac{1}{1+t^2} \in \text{som } \mathbb{R} \Rightarrow h \text{ admet}$$

une primitive H dérivable sur $\mathbb{R} / H'(t) = h(t)$

$$\Rightarrow G(x) = [H(t)]_0^x = H(x) - H(0)$$

or $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$



$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[; f(x) \in [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow G \in \text{som } [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$G'(x) = (1+\ln^2 x) \cdot H'(\ln x) = (1+\ln^2 x) \cdot \frac{1}{1+\ln^2 x}$$

$$\Rightarrow G'(x) = 1 \cdot \frac{1}{1+\ln^2 x} = 1$$

$$b) G'(x) = 1 \Rightarrow \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[; G(x) = x + k$$

$$\text{or } G(0) = \int_0^0 h(t) dt = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow G(x) = x$$

$$c) \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{\ln 2} h(t) dt = G(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$$

$$2) a) I = \int_0^1 \ln(1+t^2) dt$$

$$\text{on pose } u(x) = \ln(1+x^2) \rightarrow u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$v'(x) = 1 \rightarrow v(x) = x$$

$$\Rightarrow I = [x \ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \ln 2 - 0 - \int_0^1 \frac{2x^2+2-2}{1+x^2} dx$$

$$= \ln 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \ln 2 - 2 \left[x \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \ln 2 - 2 + 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$b) A = \int_0^1 (x - f(x)) dx = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx$$

$$= \ln 2 - 2 + 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\text{or } \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow A = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \quad (\text{un})$$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

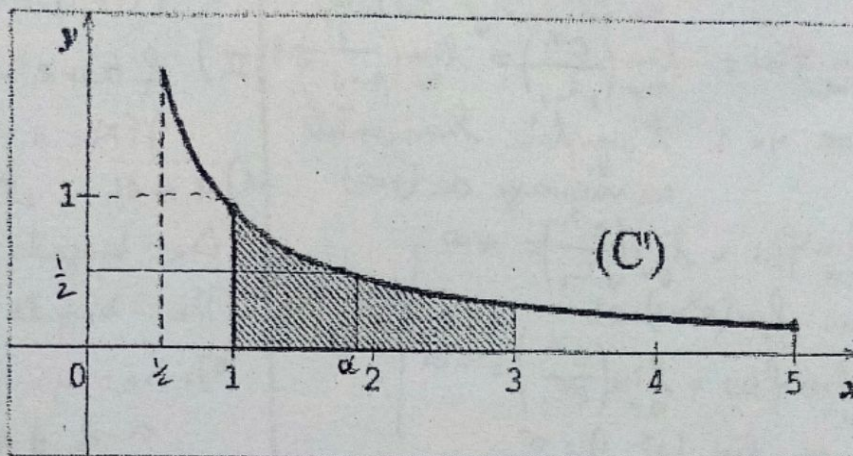
Exercice 18: Principale 2012

Q.C.M.

Le plan est muni d'un repère orthonormé

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[\frac{1}{2}, 5]$ telle que sa courbe représentative (C) passe par les points $A(1,0)$ et $B(3,1)$.

Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f' de la fonction f .



Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- 1) (C) admet une tangente de coefficient directeur -1
- 2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1.
- 3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$
- 4) Pour tout a et b de $[1, 3]$, $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$

Réponses :

- 1) **Faux** car $\forall x \in [\frac{1}{2}, 5]$, C' est strictement au-dessus de l'axe des abscisses $\Rightarrow \forall x \in [\frac{1}{2}, 5]$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f'(x) \neq -1$ alors il n'existe aucune tangente à C de coeff directeur (-1)
- 2) $A = \int_1^3 f'(x) dx = [f(x)]_1^3 = f(3) - f(1) = y_B - y_A = 1 - 0 = 1$
 $\Rightarrow$ **Vrai**
- 3) comme $\frac{1}{2} \in f'([\frac{1}{2}, 5]) \Rightarrow$ il existe $\alpha \in [\frac{1}{2}, 5]$ tel que $f'(\alpha) = \frac{1}{2}$
d'où la courbe C admet une tangente de pente $(\frac{1}{2})$ en α
 $\Rightarrow$ **Vrai**
- 4) Appliquons le TIAF à f entre a et b : ($a \neq b$)
on a $\{a, b\} \in [1, 3]$, $f \in \mathcal{C}^1$ sur $[1, 3]$ et $\forall x \in [1, 3]$, $|f'(x)| \leq 1$
 $\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq 1 |b - a| \Leftrightarrow |f(b) - f(a)| \leq |b - a|$
• Si $a = b \Rightarrow |f(b) - f(a)| = 0 \leq |b - a| = 0$ vérifié $\Rightarrow$ **Vrai**



Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 19: Principale 2012

I) $f_2(x) = x^2 - \ln x$ $D_{f_2} =]0, +\infty[$

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right)$
 $= +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\Rightarrow$ (I) admet une branche parabolique en voisinage de $(+\infty)$ de direction $(0, \vec{j})$

c) $f_2 \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

$f'_2(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

on résout sur $]0, +\infty[$; $f'_2(x) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'_2(x)$		- 0 +	
$f_2(x)$		$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$	$+\infty$

$f_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$

2) a) $M \in (L) \Leftrightarrow M(x, \ln x)$

$M_2 \in (E) \Leftrightarrow M_2(x, x^2)$

$\overrightarrow{MM_2} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x - \ln x \end{smallmatrix} \right) \Rightarrow MM_2 = |x^2 - \ln x| = |f_2(x)|$

or $\forall x \in]0, +\infty[, f_2(x) > 0 \Rightarrow MM_2 = f_2(x)$

b) $D_2: x=2 \Rightarrow D_2 \cap (L) = A_1$ et $D_2 \cap (E) = A_2$

$\Rightarrow AA_2 = f(2) \Rightarrow A(2 | A, A_2) \in (I)$

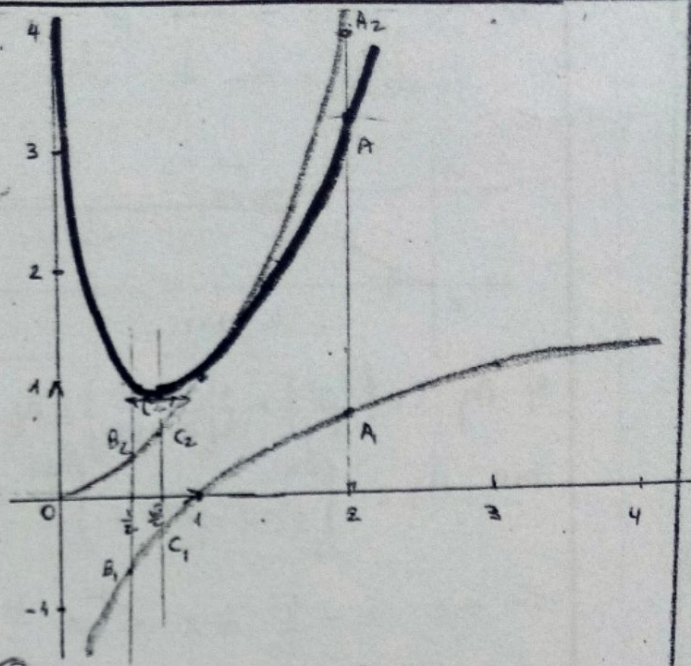
$D_{\frac{1}{2}}: x = \frac{1}{2} \Rightarrow D_{\frac{1}{2}} \cap (L) = B_1$ et $D_{\frac{1}{2}} \cap (E) = B_2$

$\Rightarrow B_1B_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow B\left(\frac{1}{2} | B, B_2\right) \in (I)$

$D_{\frac{\sqrt{2}}{2}}: x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow D_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cap (L) = C_1$ et $D_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cap (E) = C_2$

$\Rightarrow C_1C_2 = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow C\left(\frac{\sqrt{2}}{2} | C, C_2\right) \in (I)$

c) (I) admet en $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2} | C, C_2\right)$ une tangente horizontale



II) 1) $k \geq 2$, $f_k(x) = x^k - \ln x$ $D_{f_k} =]0, +\infty[$

a) $f_k \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$; $f'_k(x) = kx^{k-1} - \frac{1}{x} = \frac{kx^k - 1}{x}$

b) on résout $f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow kx^k = 1 \Rightarrow x^k = \frac{1}{k}$
d'où $x = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$

x	0	$\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$	$+\infty$
$f'_k(x)$		- 0 +	
$f_k(x)$		$\frac{1+\ln k}{k}$	

f'_k s'annule en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$
et change de signe
 $\Rightarrow f_k$ admet un mini
égal à $f_k\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1}{k} + \ln\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1+\ln k}{k}$

c) $\forall x > 0$; $M_k(x, x^k)$ $M(x, \ln x)$

on a $MM_k = \|\overrightarrow{MM_k}\| = |x^k - \ln x| = f_k(x)$

or f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1+\ln k}{k}$

$\Rightarrow$ le min de MM_k est $\frac{1+\ln k}{k} > 0$

2) $\forall k \geq 2$, $U_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$

a) $\ln(U_k) = \ln\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right) = \ln\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = -\frac{1}{k} \ln k = -\frac{\ln k}{k}$

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln(U_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} -\frac{\ln k}{k} = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} U_k = 1$

b) $A(1, 0)$ $A_k(U_k, f_k(U_k))$

on a $\overrightarrow{AA_k} \left(\begin{smallmatrix} U_k - 1 \\ f_k(U_k) \end{smallmatrix} \right) = AA_k = \sqrt{(U_k - 1)^2 + [f_k(U_k)]^2}$

or $\lim_{k \rightarrow +\infty} U_k = 1$ et $f_k(U_k) = \frac{1+\ln k}{k} = \frac{1}{k} + \frac{\ln k}{k}$

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} AA_k = 0$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 20: Contrôle 2012

1) $g(x) = 1 + x - x \ln x$ $D_g =]0, +\infty[$

a) $g \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, $g'(x) = 1 - \ln x - x \left(\frac{1}{x}\right)$
 $\Rightarrow g'(x) = -\ln x$

x	0	1	x_0	$+\infty$
g'		+	0	-
g			2	$-\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x - x \ln x = 1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} + 1 - \ln x \right) = -\infty$
 $g(1) = 2$

b) Si $x \in]0, 1]$, on a $g \in \mathcal{C}^1$ et $g'(x) = -\ln x \geq 0$
 $\Rightarrow$ l'éq. $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0, 1]$

Si $x \in [1, +\infty[$, $g \in \mathcal{C}^1$ et $g'(x) = -\ln x \leq 0$
 $0 \in]-\infty, 2] \Rightarrow \exists! x_0 \in]1, +\infty[/ g(x_0) = 0$
 Conf. sur $]0, +\infty[$, l'éq. $g(x) = 0$ admet une solution unique x_0 .

d'autre part: $g(3,5) > 0$
 $g(3,6) < 0 \Rightarrow \boxed{3,5 < x_0 < 3,6}$

2) $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ $D_f =]0, +\infty[$

a) $f \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x \ln x}{(1+x^2)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} + x - 2x \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2}$

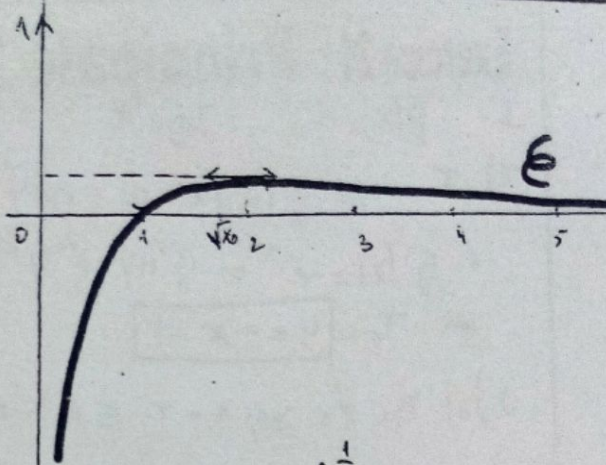
$\Rightarrow f'(x) = \frac{1+x^2 - x^2 \ln(x^2)}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = x_0 \Rightarrow x = \sqrt{x_0}$
 Si $x > \sqrt{x_0} \Rightarrow x^2 > x_0 \Rightarrow g(x^2) < 0$

x	0	$\sqrt{x_0}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$			$-\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} = 0$
 $f(\sqrt{x_0}) = \frac{\frac{1}{2} \ln(x_0)}{1+x_0}$

c) pour $\mathcal{C}_f$: $x_0 = 3,6$
 $\Rightarrow f(\sqrt{x_0}) \approx 0,2$



3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t) dt$

a) $a_{n+1} - a_n = \int_1^{\frac{1}{n+1}} f(t) dt - \int_1^{\frac{1}{n}} f(t) dt$
 $= \int_1^{\frac{1}{n+1}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(t) dt$

or $1 \leq n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

et comme $f(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$

et que $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(t) dt \geq 0$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n \geq 0 \Rightarrow \boxed{a_n \uparrow}$

b) $0 < x \leq 1 \Rightarrow 1 < 1+x^2 \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+x^2} < 1$

or $\ln x < 0 \Rightarrow \ln x \leq \frac{\ln x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \ln x$

c) or $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \int_1^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2} \ln x dx \leq \int_1^{\frac{1}{n}} \frac{\ln x}{1+x^2} dx \leq \int_1^{\frac{1}{n}} \ln x dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[x \ln x - x \right]_1^{\frac{1}{n}} \leq a_n \leq \left[x \ln x - x \right]_1^{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + 1 \right) \leq a_n \leq \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} + 1$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1+\ln n}{n} \right] \leq a_n \leq \left[1 - \frac{1+\ln n}{n} \right]}$

d) or $\frac{1+\ln n}{n} > 0$ car $n \geq 1$

$\Rightarrow 1 - \frac{1+\ln n}{n} < 1 \Rightarrow a_n \leq 1$

d'où $a_n \uparrow$ et majorée par 1

$\Rightarrow \boxed{a_n \text{ convergente}}$

on pose $l = \lim a_n$

$l_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1+\ln n}{n} \right] = \frac{1}{2}$

$l_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1+\ln n}{n} \right] = 1$

car $\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1+\ln n}{n} \right] \leq a_n \leq \left[1 - \frac{1+\ln n}{n} \right]$

d'où $l \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 21: Principale 2011

I- $g(x) = e^{-x}$ $D_g = \mathbb{R}$

1) $T_0: y = g'(0)(x-0) + g(0)$

or $g'(x) = -e^{-x} \Rightarrow g'(0) \text{ et } g(0) = 1$

$\Rightarrow T_0: \boxed{y = -x + 1}$

2) a) On $\forall x \geq 0, 1-x \leq e^{-x} \leq 1$?

car $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow e^{-x} \leq 1$ ①

• On $1-x \leq e^{-x}$

on pose $h(x) = 1-x - e^{-x}$ $D_h = \mathbb{R}^+$

$h'(x) = -1 + e^{-x} \leq 0$ car $x \geq 0$

x	0	$+\infty$
h'	0	-
h	0	$\searrow$

$h(0) = 1-1=0$: maximum absolu $\Rightarrow \forall x \geq 0, h(x) \leq 0$
 $\Rightarrow 1-x-e^{-x} \leq 0$
 donc $1-x \leq e^{-x}$ ②

① et ② $\rightarrow \boxed{1-x \leq e^{-x} \leq 1}$

b) car $1-t \leq e^{-t} \leq 1$

pour $0 \leq x$: $\int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x e^{-t} dt \leq \int_0^x 1 dt$

$\Rightarrow \left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^x \leq \left[-e^{-t}\right]_0^x \leq \left[t\right]_0^x$

$\Rightarrow \boxed{x - \frac{1}{2}x^2 \leq 1 - e^{-x} \leq x}$

II $\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

$\Rightarrow y=1$ Asymptote horiz en $(+\infty)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$

on pose $t = -\frac{1}{x}$; si $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow -\infty$

$l = \lim_{t \rightarrow -\infty} -te^t = 0 \Rightarrow f$ est dérivable

en 0 et $f'(0) = 0$

c) $f \in \mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$
 $\forall x > 0, f'(x) = (e^{-\frac{1}{x}})' = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow 1$

2) $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

$f''(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} (1-2x)$

le signe de f'' dépend du signe de $(1-2x)$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f''		+	-

$\Rightarrow f''$ s'annule en $\frac{1}{2}$ et change de signe

$f(\frac{1}{2}) = e^{-2} \Rightarrow I(\frac{1}{2}, e^{-2})$: point d'inflexion

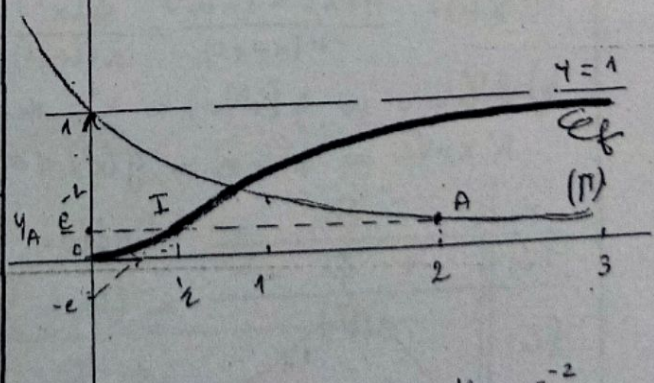
b) $T_I: y = f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$

or $f'(\frac{1}{2}) = 4e^{-2}$ et $f(\frac{1}{2}) = e^{-2}$

$\Rightarrow T_I: y = 4e^{-2}(x - \frac{1}{2}) + e^{-2}$

$\Rightarrow \boxed{y = (4e^{-2})x - e^{-2}}$

3) 2)



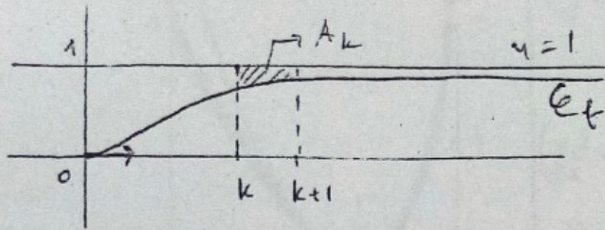
Soit $A \in (I) / x_A = 2 \Rightarrow y_A = e^{-\frac{1}{2}}$

donc $I(\frac{1}{2}, e^{-2})$

b) et $I'(0, -e^{-2}) \Rightarrow (II') = T_I$

Asymptote horiz en $+$

4) A_k : l'aire limitée par $y=1$
et les droites: $x=k$ et $x=k+1$



a) On a $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

ou $A_k = \int_k^{k+1} [1 - f(x)] dx = \int_k^{k+1} (1 - e^{-1/x}) dx$

ou on a $t - \frac{t^2}{2} \leq 1 - e^{-t} \leq t$

on pose $t = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \leq 1 - e^{-1/x} \leq \frac{1}{x}$

on a $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \in \text{Am}[k, k+1] \subset [1, +\infty[$

$x \mapsto 1 - e^{-1/x} \in \text{Am}[k, k+1]$

$x \mapsto \frac{1}{x} \in \text{Am}[k, k+1]$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) dx \leq \int_k^{k+1} (1 - e^{-1/x}) dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$

$\Rightarrow \left[\ln x + \frac{1}{2x}\right]_k^{k+1} \leq A_k \leq [\ln x]_k^{k+1}$

$\Rightarrow \ln(k+1) + \frac{1}{2(k+1)} - \ln k - \frac{1}{2k} \leq A_k \leq \ln(k+1) - \ln k$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

b) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln 1 = 0$

et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = 0$

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} (A_k) = 0$

5) $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$

a) $S_n = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} [1 - f(x)] dx = \int_1^{n+1} [1 - f(x)] dx$

(en moyennant la relation de chesles)

$\Rightarrow S_n$ définit l'aire de la partie du plan limitée par la courbe f les droites: $y=1$, $x=1$ et $x=n+1$

b) on a $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq \sum_{k=1}^n A_k \leq \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

on $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$= \ln\left[\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n}\right] = \ln(n+1)$

et $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$

$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \ln(n+1) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq S_n \leq \ln(n+1)$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right] = +\infty - \frac{1}{2} = +\infty$

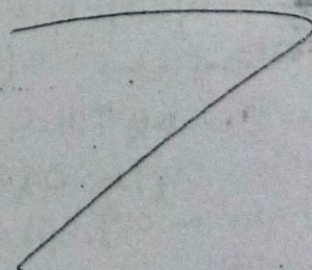
$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

$\frac{\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{n+1} \leq \frac{S_n}{n+1} \leq \frac{\ln(n+1)}{n+1}$

on $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n+1} = 0$



Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 22: Contrôle 2011

Q.C.M.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTRE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2011

SESSION
DE CONTRÔLE

SECTION : MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt$.

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

- 1) Pour tout $x > 0$, $f'(x) \geq 0$.
- 2) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$.
- 3) $f(2) \leq \ln 2$.

Réponses :

1) f étant la primitive sur $]0, +\infty[$ de $\frac{\cos^2 x}{x}$ qui s'annule en 1
alors on a sûrement : $\begin{cases} 1) f \text{ est sur }]0, +\infty[\\ 2) f'(x) = \frac{\cos^2 x}{x} \\ 3) f(1) = 0 \end{cases}$

ainsi $f'(x) = \frac{\cos^2 x}{x} \geq 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[\Rightarrow \boxed{\text{Vrai}}$

2) on fait que $\forall t > 0, \frac{\cos^2 t}{t} \geq 0$
or si $x \geq 1 \Rightarrow \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$
mais si $x \in]0, 1[\Rightarrow \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Faux}}$

3) on a : $f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt$ or $\cos^2 t \leq 1$

d'où $\frac{\cos^2 t}{t} \leq \frac{1}{t}$
or $t \mapsto \frac{\cos^2 t}{t} \leq m[1, 2]$
et $t \mapsto \frac{1}{t} \leq m[1, 2]$
et $1 < 2$
 $\Rightarrow \int_1^2 \frac{\cos^2 t}{t} dt \leq \int_1^2 \frac{1}{t} dt$
 $\Leftrightarrow f(2) \leq [\ln t]_1^2$
 $\Leftrightarrow f(x) \leq \ln 2 \Rightarrow \boxed{\text{Vrai}}$



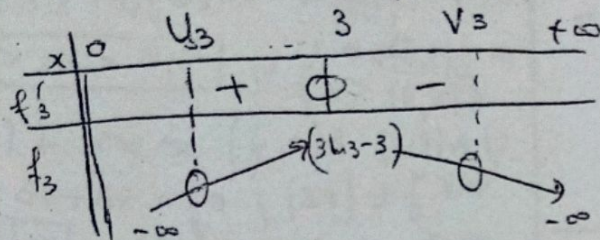
Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 23: Contrôle 2011

$p \geq 3$ $f_p(x) = p(\ln x) - x$

A) 1) $f_3(x) = 3\ln x - x$ $\mathcal{D}_{f_3} =]0, +\infty[$

$f_3 \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, $f'_3(x) = \frac{3}{x} - 1 = \frac{3-x}{x}$



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3\ln x - x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{3\ln x}{x} - 1 \right) = -\infty$

2) Si $x \in]0, 3[$; $f_3 \in \mathcal{C}^1$ et $f'_3(x) > 0 \Rightarrow f_3$ est strictement croissante sur $]0, 3[$

$\Rightarrow \exists! u_3 \in]0, 3[$ / $f_3(u_3) = 0$

Si $x \in]3, +\infty[$, $f_3 \in \mathcal{C}^1$ et $f'_3(x) < 0 \Rightarrow f_3$ est strictement décroissante sur $]3, +\infty[$

$\Rightarrow \exists! v_3 \in]3, +\infty[$ / $f_3(v_3) = 0$

$\Rightarrow$ l'éq $f_3(x) = 0$ admet exactement 2 solutions

3) a) $f_p \in \mathcal{C}^1$ sur $]1, p[$ et $f'_p(x) = \frac{p}{x} - 1 = \frac{p-x}{x}$

or $0 \in]1, f(p)[\Rightarrow \exists! u_p \in]1, p[$ / $f_p(u_p) = 0$

b) $f_p \in \mathcal{C}^1$ sur $]p, +\infty[$ et $f'_p(x) = \frac{p}{x} - 1 = \frac{p-x}{x}$

$\Rightarrow 0 \in]-\infty, f(p)[\Rightarrow \exists! v_p \in]p, +\infty[$ / $f_p(v_p) = 0$

II) 1) or $\forall p > p$ or $\lim_{p \rightarrow +\infty} p = +\infty \Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} v_p = +\infty$

2) a) $E_3 \cap (0, x) = A_3 \Rightarrow u_3$: abscisse de A_3

$E_4 \cap (0, x) = A_4 \Rightarrow u_4$: abscisse de A_4

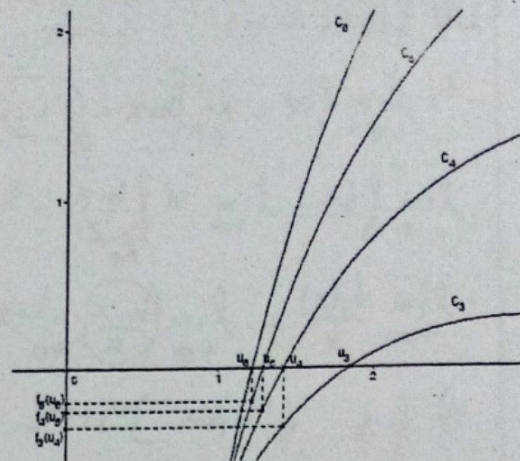
$E_5 \cap (0, x) = A_5 \Rightarrow u_5$: abscisse de A_5

$E_6 \cap (0, x) = A_6 \Rightarrow u_6$: abscisse de A_6

b) st $B_4(u_4, f_3(u_4))$ $B_5(u_5, f_4(u_5))$

et $B_6(u_6, f_5(u_6))$

(voir figure)



3) a) Or $\forall p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) < 0$

or $\forall x \in]0, p[$, $f_p(x) < 0$

or $u_{p+1} \in]p, p[\Rightarrow \boxed{f_p(u_{p+1}) < 0}$

b) or $f_p(u_p) = 0 \Rightarrow f_p(u_{p+1}) < f_p(u_p)$
et $f_p(u_{p+1}) < 0$

or $f_p \uparrow$ sur $]1, p[\Rightarrow u_{p+1} < u_p$

alors $\boxed{u_p \searrow}$ $\Rightarrow u_p$ convergente
 u_p minorée par 1

c) $f_p(u_p) = 0 \Leftrightarrow p \ln(u_p) - u_p = 0$

$\Rightarrow p \ln(u_p) = u_p \Leftrightarrow \boxed{\frac{\ln(u_p)}{u_p} = \frac{1}{p}}$

• u_p convergente $\Rightarrow$ il existe $l \in]1, p[$
tel que $\lim u_p = l$

or $\frac{\ln(u_p)}{u_p} = \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{\ln(l)}{l} = 0$

car $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow \ln(l) = 0$

$\Rightarrow l = 1$ and $\boxed{\lim u_p = 1}$



Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 24: Principale 2010

1) $f(x) = \ln x - x \ln x + x$; $D_f = \mathbb{R}^*_+$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x \ln x + x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1 \right) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1 \right) = -\infty$

b) $f \subseteq \subseteq \text{ sur }]0, +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x} - (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) + 1$
 $= \frac{1}{x} - \ln x - 1 + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

2) $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \ln x$

a) on a $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x = g(x) - h(x)$

$\Rightarrow$ Le signe de f' dépend de la position de E_g et E_h

x	0		$+\infty$
Position	E_g au dessus de E_h		E_g au dessous de E_h
$f'(x)$	+	0	-

b) x	0	x_1	β	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0		0	-
$f(x)$			$f(\beta)$		$-\infty$

c) $f(\beta) = \ln \beta - \beta \ln \beta + \beta$

on $g(\beta) = h(\beta) \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = \ln \beta$

$f(\beta) = \frac{1}{\beta} - \beta \left(\frac{1}{\beta} \right) + \beta \Rightarrow f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$

3) a) Position de E_g et E_h :

on pose $\varphi(x) = f(x) - h(x) = x - x \ln x$

$\Rightarrow \varphi(x) = x(1 - \ln x)$

on résout $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$\varphi(x)$		+	0	-
Position	E_g au dessus de E_h			E_g au dessous de E_h

b) on a $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1 > 0$ car $\beta > 1$

• si $x \in]0, \beta[$, $f \subseteq \text{ sur }]0, \beta[\Rightarrow f(0) = -\infty, f(\beta)$

on $0 \in]-\infty, f(\beta)] \Rightarrow \exists ! x_1 \in]0, \beta[/ f(x_1) = 0$

on $f(0,4) > 0$ } $\Rightarrow 0,4 < x_1 < 0,5$
 $f(0,5) < 0$

• si $x \in [\beta, +\infty[$, $f \subseteq \text{ sur } [\beta, +\infty[\Rightarrow f(\beta) = 0, f(+\infty) = -\infty$

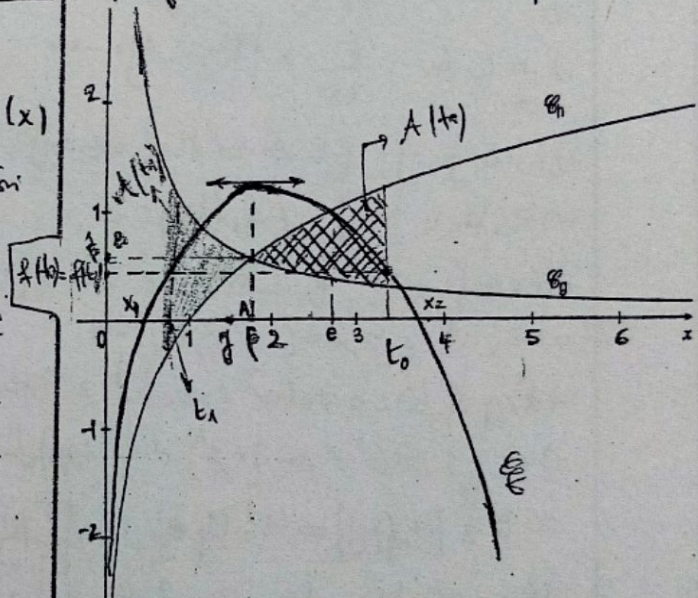
on $f(3,8) > 0$ } $\Rightarrow 3,8 < x_2 < 3,9$
 $f(3,9) < 0$

c) $A(\beta, 0)$ $B(0, \frac{1}{\beta})$ on pose $I(1, 0)$

soit $J \in [OI] / OJ = OA + OB - OI$

$\Rightarrow x_J = \beta + \frac{1}{\beta} - 1 = f(\beta) \Rightarrow M(\beta, f(\beta))$

d) E_f admet un BI de dir^{on} (o_f) en $(+\infty)$



4) a) si $t \in]0, \beta[\Rightarrow A(t) = \int_t^\beta (g(x) - h(x)) dx = \int_t^\beta \frac{1}{x} dx$

$\Rightarrow A(t) = [f(x)]_t^\beta = f(\beta) - f(t)$

• si $t \in [\beta, +\infty[\Rightarrow A(t) = \int_\beta^t (h(x) - g(x)) dx$

$\Rightarrow A(t) = \int_\beta^t -f'(x) dx = [f(x)]_\beta^t = f(t) - f(\beta)$

d'où : $\forall t > 0, A(t) = f(\beta) - f(t)$

b) $t > \beta \Rightarrow$ (voir figure)

c) on pose $\psi(t) = A(t) - A(\beta) = f(\beta) - f(t) - (f(\beta) - f(\beta))$

$\Rightarrow \psi(t) = f(t) - f(\beta)$ $D\psi =]0, \beta[$

$\psi \subseteq \subseteq]0, \beta[$, $\psi'(t) = -f'(t) \leq 0$

$\psi(0) = f(0) - f(\beta) < 0$

car $f(\beta)$: maximum absolu.

$\psi(\beta) = f(\beta) - f(\beta) = 0 \Rightarrow A(\beta) = A(\beta)$

Correction " Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie "

Exercice 25: Principale 2010

$$y = e^{\sqrt{x}} \text{ et } D = [1, 2]$$

$$1) F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{t}} dt \quad D_F = [1, +\infty[$$

$$\text{on a } V = \pi F(2)$$

$$\text{on a } V = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (e^{\sqrt{x}})^2 dx$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_1^2 e^{2\sqrt{x}} dx = \pi \int_1^2 e^{\sqrt{4x}} dx$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \pi \cdot F(2)}$$

$$2) G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} t e^t dt \quad D_G = [1, +\infty[$$

a) on pose $h(t) = t e^t \in \text{som } \mathbb{R} \Rightarrow$
 h admet une primitive $H \in \text{som } \mathbb{R}$ et
 telle que $H'(t) = h(t)$

$$\Rightarrow G(x) = [H(t)]_1^{\sqrt{4x}} = H(\sqrt{4x}) - H(1)$$

$$\text{or } t \mapsto \sqrt{4t} \in \text{som } [1, +\infty[\Rightarrow$$

G est dérivable sur $[1, +\infty[$

$$G'(x) = [H(\sqrt{4x})]' - [H(1)]'$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{4x}} H'(\sqrt{4x}) - 0 = \frac{2}{\sqrt{4x}} h(\sqrt{4x})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4x}} \cdot \sqrt{4x} e^{\sqrt{4x}} = 2e^{\sqrt{4x}}$$

d'autre part: F est la primitive de $e^{\sqrt{4t}}$
 qui s'annule en 1 $\Rightarrow \begin{cases} F \in \text{som } [1, +\infty[\\ F'(x) = e^{\sqrt{4x}} \\ F(1) = 0 \end{cases}$

$$\text{d'où } F'(x) = e^{\sqrt{4x}} \text{ alors } \boxed{G'(x) = 2F'(x)}$$

$$b) \text{ D'où } 2F(x) = G(x) - G(1)$$

$$\text{comme } G'(x) = 2F'(x)$$

$$\Rightarrow G(x) = 2F(x)$$

$$\text{or } F(1) = 0 \Rightarrow G(1) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\text{alors } G(x) = 2F(x) + G(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{2F(x) = G(x) - G(1)}$$

$$3) a) \text{ on a } G(x) = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}} ?$$

$$\text{on a } G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} t e^t dt$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u(t) = t & \rightarrow u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^t & \rightarrow v(t) = e^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(x) = [t e^t]_1^{\sqrt{4x}} - \int_1^{\sqrt{4x}} e^t dt$$

$$\Rightarrow G(x) = [t e^t - e^t]_1^{\sqrt{4x}} = [(t-1)e^t]_1^{\sqrt{4x}}$$

$$\Rightarrow G(x) = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}} - 0$$

$$\text{and : } \forall x \in [1, +\infty[$$

$$\boxed{G(x) = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}}}$$

$$b) \text{ on a } 2F(x) = G(x) - G(1)$$

$$\text{or } G(1) = (\sqrt{4} - 1)e^{\sqrt{4}} = e^2$$

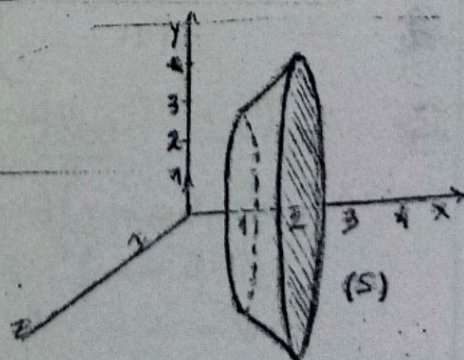
$$\Rightarrow 2F(x) = G(x) - e^2$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}} - \frac{1}{2} e^2$$

$$\text{or } V = \pi F(2)$$

$$\Rightarrow V = \pi \left[\frac{1}{2} (\sqrt{8} - 1)e^{\sqrt{8}} - \frac{1}{2} e^2 \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi}{2} [(2\sqrt{2} - 1)e^{2\sqrt{2}} - e^2]} \text{ (uv)}$$



Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 26: Contrôle 2010

$$f(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3} \quad D_f =]0, +\infty[$$

1) a) $f \in \mathcal{C}^1]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{[e^x + (x-2)e^x]x^3 - 3x^2(x-2)e^x}{x^6}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x e^x + (x^2 - 2x) e^x - 3x^2(x-2)e^x}{x^6}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x [x + x^2 - 2x - 3x^2 + 6x]}{x^6} = \frac{e^x (x^2 - 4x + 6)}{x^4}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-2)e^x}{x^3} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) \left(\frac{e^x}{x^3} \right) = +\infty$$

c) on a: $x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) $T_2: y = f'(2)(x-2) + f(2)$ or $\begin{cases} f'(2) = \frac{e^2}{8} \\ f(2) = 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow T_2: y = \frac{e^2}{8}(x-2)$

3) a) $g \in \mathcal{C}^1]2, +\infty[$ et $\frac{e^2}{8} \in \left[\frac{e^3}{27}, +\infty[$
 $\Rightarrow \exists ! \alpha \in]2, +\infty[/ g(\alpha) = \frac{e^2}{8}$

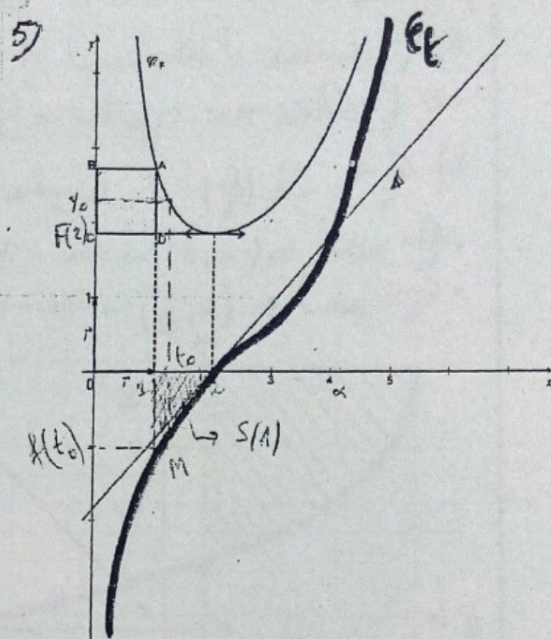
$$\left. \begin{aligned} g(4,2) &\approx \dots < \frac{e^2}{8} \\ g(4,3) &\approx \dots > \frac{e^2}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4,2 < \alpha < 4,3$$

b) Position de E_g par rapport à D :

on pose $h(x) = f(x) - y = \frac{(x-2)e^x}{x^3} - \frac{e^2}{8}(x-2)$
 $\Rightarrow h(x) = (x-2) \left[\frac{e^x}{x^3} - \frac{e^2}{8} \right] = (x-2) \left(g(x) - \frac{e^2}{8} \right)$

x	0	2	α	$+\infty$
$x-2$	-	0	+	+
$g(x) - \frac{e^2}{8}$	+	0	-	+
$h(x)$	-	0	-	+
Position de E_g par rapport à D	Δ	Δ	Δ	E_g

4) $f \in \mathcal{C}^1]0, +\infty[\Rightarrow f$ admet une primitive $F \in \mathcal{C}^1]0, +\infty[/ F(1) = e$



b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)e^x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) \left(\frac{e^x}{x^4} \right) = +\infty$
 $\Rightarrow E_g$ admet une BI en $(+\infty)$ de d'ordre (0^+)

c) $t \in]1, 2[$
a) $A(t) = \int_t^2 f(x) dx = [-F(x)]_t^2 = F(2) - F(t)$
 $\Rightarrow A(t) = F(2) - F(t)$

b) $A(1) = F(1) - F(2)$
on a l'aire de $ABCD = AB \times BC$
or $AB=1$ et $BC = y_B - y_C = F(1) - F(2)$
 $\Rightarrow A(1) = \text{l'aire de } ABCD$

c) $\exists ! t_0 \in]1, 2[/ A(t) = \frac{1}{2} A(1)$
 $\Leftrightarrow F(t) - F(2) = \frac{1}{2} A(1) \Leftrightarrow F(t) - F(2) = \frac{1}{2} (F(1) - F(2))$
on pose $\varphi(x) = F(x) - F(2) - \frac{1}{2} A(1)$, $D_\varphi =]1, 2[$
 $\varphi'(x) = f'(x) = f(x) \leq 0$ car $x \in]1, 2[$

x	1	t_0	2
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$	$\frac{1}{2} A(1)$	0	$-\frac{1}{2} A(1)$

 $\varphi \in \mathcal{C}^1]1, 2[\Rightarrow -\frac{1}{2} A(1) \in \left[-\frac{1}{2} A(1), \frac{1}{2} A(1) \right]$
il existe une $t_0 \in]1, 2[/ \varphi(t_0) = 0 \Rightarrow A(t_0) = \frac{1}{2} A(1)$
 $F(2) + \frac{1}{2} A(1) \Rightarrow F(t_0) = \frac{e^2}{2} = y$
 $t_0 \Rightarrow M \in E_f / x_M = t_0$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 27: Principale 2009

$$f(x) = \ln(1 - \sqrt{x}) \quad D_f =]0, 1[$$

$$1) a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - \sqrt{x})}{x}$$

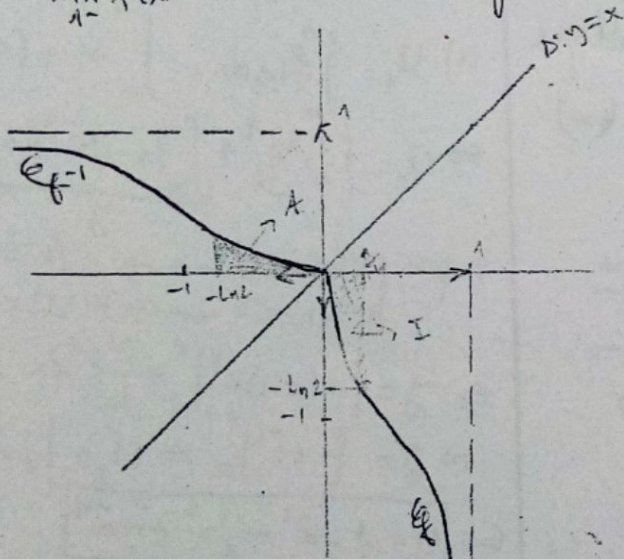
$$\text{on pose } t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$$

$$\text{Si } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow 0^+$$

$$L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-t)}{t^2} = L' = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{1-t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2t(1-t)} = -\infty$$

b). f n'est pas dérivable en 0^+ et E_f est en O une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x=1 : \text{Asymptote verticale}$$



2) a) f continue et strict $\downarrow$ sur $]0, 1[\Rightarrow f$ réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]-\infty, 0]$

$$b) E_f^{-1} = S_D(E_f) \quad / D: y=x$$

$$3) a) f^{-1} \text{ est définie par: } \begin{cases} \forall y \in]0, 1[\\ \forall x \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall y \in]0, 1[\\ \forall x \in]-\infty, 0] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in]0, 1[\\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$$

$$\text{or } f(y) = x \Rightarrow \ln(1 - \sqrt{y}) = x$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{y} = e^x \Rightarrow \sqrt{y} = 1 - e^x$$

$$\text{donc } y = (1 - e^x)^2 = (e^x - 1)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2} \quad \forall x \leq 0$$

$$b) A: \text{ l'aire limitée par: } \begin{cases} \text{la courbe } E_f \\ x = -\ln 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \int_{-\ln 2}^0 f^{-1}(x) dx = \int_{-\ln 2}^0 (e^x - 1)^2 dx$$

$$\Rightarrow A = \int_{-\ln 2}^0 (e^{2x} - 2e^x + 1) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 2e^x + x \right]_{-\ln 2}^0$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1}{2} - 2 + 0 \right) - \left(\frac{1}{2} e^{-2\ln 2} - 2e^{-\ln 2} - \ln 2 \right)$$

$$= -\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} e^{\ln(1/4)} - 2e^{\ln(1/2)} - \ln 2 \right)$$

$$\Rightarrow A = -\frac{3}{2} - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} - \ln 2 \right]$$

$$\Rightarrow A = -\frac{3}{2} - \frac{1}{16} + 1 + \ln 2 = \ln 2 - \frac{9}{16}$$

$$\text{Concl: } \boxed{A = \left(\ln 2 - \frac{9}{16} \right) \text{ ua}}$$

$$c) I = \int_0^{1/4} \ln(1 - \sqrt{x}) dx = \int_0^{1/4} f(x) dx$$

I : l'aire algébrique limitée par la courbe E_f , l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1/4$.

Comme E_f se situe au-dessus de l'axe des abscisses $\Rightarrow I < 0$

or $A + |I| = \left(\frac{1}{4} \right) \cdot (\ln 2)$: l'aire du rectangle des côtés $\frac{1}{4}$ et $\ln 2$

$$\Rightarrow |I| = \frac{1}{4} \ln 2 - A = \frac{1}{4} \ln 2 - \ln 2 + \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow |I| = \frac{9}{16} - \frac{3}{4} \ln 2$$

$$\text{Comme } I < 0 \Rightarrow I = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{9}{16}$$

$$\text{Concl: } \boxed{\int_0^{1/4} \ln(1 - \sqrt{x}) dx = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{9}{16}}$$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 28: Contrôle 2009

$$f(x) = x + (x-1)e^{-x} \quad D_f = \mathbb{R}_+$$

$$1) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + (x-1)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{x-1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{e^x}{x}} \right) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{e^x}{x}} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ D: $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $(+\infty)$.

$$c) f(x) - y = (x-1)e^{-x}$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
Position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ	$\mathcal{C}_f$ au dessous de Δ	$\mathcal{C}_f = \Delta$	$\mathcal{C}_f$ au dessus de Δ

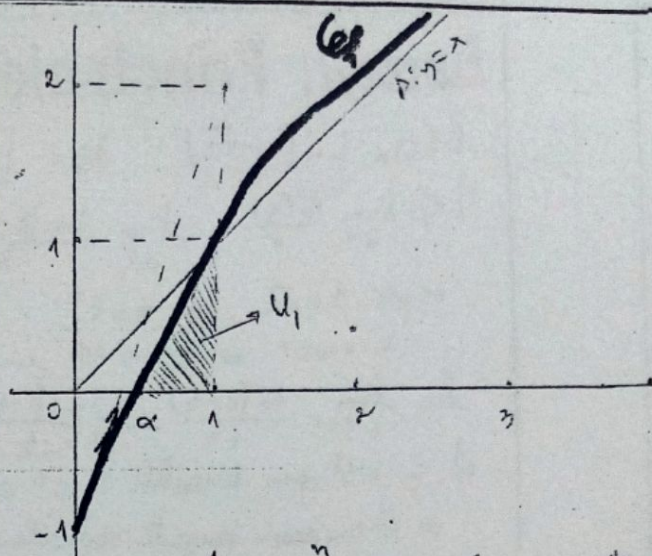
2) a) $f \in \mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[\Rightarrow f$ vérifie une bijection de $[0, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[$
 Comme $0 \in [-1, +\infty[\Rightarrow$ il existe un unique $\alpha \in]0, +\infty[/ f(\alpha) = 0$

$$f(0) = -1 < 0 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \dots > 0 \quad \Rightarrow \boxed{0 < \alpha < \frac{1}{2}}$$

b) Equation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \quad \text{et } f'(0) = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 3x - 1}$$



$$3) U_n = \int_{\alpha}^1 [f(x)]^n dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$a) U_1 = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \int_{\alpha}^1 x + (x-1)e^{-x} dx$$

$$\Rightarrow U_1 = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{\alpha}^1 + \int_{\alpha}^1 (x-1)e^{-x} dx$$

$$\text{On pose } \begin{cases} v(x) = x-1 & \rightarrow v'(x) = 1 \\ w'(x) = e^{-x} & \rightarrow w(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^1 (x-1)e^{-x} dx = \left[-(x-1)e^{-x} \right]_{\alpha}^1 + \int_{\alpha}^1 e^{-x} dx = \left[(1-x)e^{-x} \right]_{\alpha}^1$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^1 (x-1)e^{-x} dx = \left[x e^{-x} \right]_{\alpha}^1 \Rightarrow U_1 = \left[\frac{1}{2}x^2 - x e^{-x} \right]_{\alpha}^1$$

$$\Rightarrow \boxed{U_1 = \frac{1}{2} - e^{-1} - \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha e^{-\alpha}}$$

Interprétation: U_1 définit l'aire limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites $x=0, x=1, x=\alpha$
 b) on $\forall x \in [\alpha, 1)$ $\mathcal{C}_f$ est située au dessous de $\Delta \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq x$

$$\text{alors } 0 \leq [f(x)]^n \leq x^n$$

$$\text{donc } \alpha < 1 \Rightarrow 0 \leq \int_{\alpha}^1 [f(x)]^n dx \leq \int_{\alpha}^1 x^n dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^1$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

$$\text{donc: } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \boxed{0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$



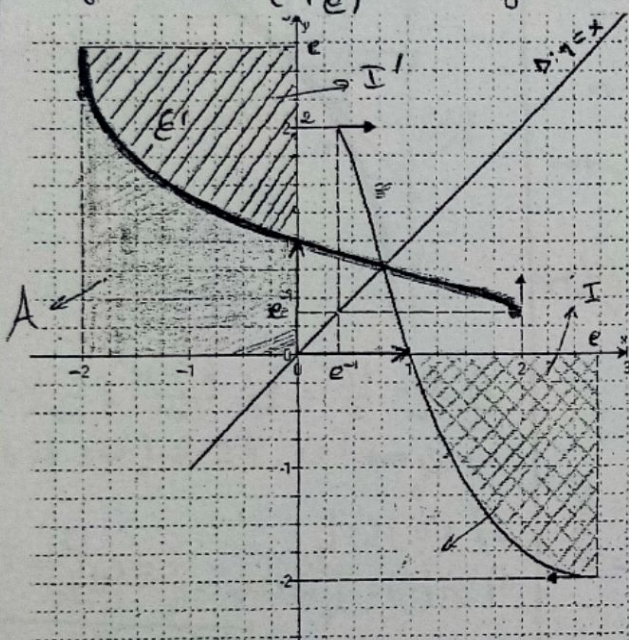
Correction " Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie "

Exercice 29: Principale 2008

1) $f(x) = (\ln x)^3 - 3 \ln x$ $D_f = \left[\frac{1}{e}, e \right]$
 a) f continue et strictement $\nearrow$ sur $\left[\frac{1}{e}, e \right]$
 $\Rightarrow f$ réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}, e \right]$ sur $[-2, 2]$

b) $\mathcal{E}^{-1} = S_D(\mathcal{E})$ / $D: y=x$

- $\mathcal{E}^{-1}$ admet en $(-2, e)$ une demi-tangente verticale.
- $\mathcal{E}^{-1}$ admet en $(2, \frac{1}{e})$ une demi-tangente verticale.



2) $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

a) $a_1 = \int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e$
 $= (e - e) - (0 - 1) \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$

b) $a_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$

on pose $u(x) = (\ln x)^{n+1} \rightarrow u'(x) = (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n$
 $v'(x) = 1 \rightarrow v(x) = x$

$\Rightarrow a_{n+1} = [x (\ln x)^{n+1}]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n dx$

$\Rightarrow \boxed{a_{n+1} = e - (n+1) a_n}$

c) pour $n=2$, $a_3 = e - 3 a_2$

or pour $n=1$, $a_2 = e - 2 a_1 = e - 2$

alors $a_3 = e - 3(e - 2)$

$\Rightarrow \boxed{a_3 = 6 - 2e}$

3) a) $I = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e ((\ln x)^3 - 3 \ln x) dx$

$\Rightarrow I = \int_1^e (\ln x)^3 dx - 3 \int_1^e (\ln x) dx$
 $= a_3 - 3 a_1$

$\Rightarrow I = 6 - 2e - 3 \Rightarrow \boxed{I = 3 - 2e}$

b) I : se finit l'axe abscisse de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{E}$, l'axe des abscisses et les droites $x=1$ et $x=e$

Or comme $\mathcal{E}$ se situe au dessous de l'axe des abscisses $\Rightarrow I < 0$

$\Rightarrow$ l'aire est $|I| = 2e - 3$

on pose $I' = S_D(I)$

$\Rightarrow I'$ est l'aire limitée par:

$S_D(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$	S_D : isométrie
$S_D(y=0) = (x=0)$	$\Rightarrow S$: conserve les aires
$S_D(x=1) = (y=1)$	
$S_D(x=e) = (y=e)$	$\Rightarrow I' = I $

d'autre part: $A + I' = A_R$

où A_R : l'aire du rectangle de côtés: 2 et $e \Rightarrow A + I' = 2e$

$\Rightarrow A = 2e - I' = 2e - (2e - 3)$

car: $\boxed{A = 3} \text{ (ua)}$

Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 30: Contrôle 2008

1) $f(x) = (x+2) \cdot \ln(x+2)$ si $x \in]-2, 2]$
 $f(-2) = 0$

a) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{(x+2)^+} (x+2) \cdot \ln(x+2)$

on pose $t = x+2$, si $x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow t \rightarrow 0^+$

$l = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0 = f(-2)$

$\Rightarrow f$ est continue en -2^+

b) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{(x+2)^+} \frac{(x+2) \ln(x+2)}{(x+2)} = -\infty$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $(-2)^+$ et E_f admet en $(-2, 0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

c) $f \leq 0$ si $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

$\Rightarrow f \leq 0$ sur $]-2, +\infty[$

$f'(x) = \ln(x+2) + (x+2) \cdot \frac{1}{x+2}$

$\Rightarrow f'(x) = \ln(x+2) + 1$

on résout : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = -1$

$\Leftrightarrow x+2 = e^{-1} \Leftrightarrow x = -2 + e^{-1}$

x	-2	$-2 + e^{-1}$	2
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	0		$8 \ln 2$

$f(2) = 4 \cdot \ln 4 = 8 \ln 2$

$f(-2 + e^{-1}) = (-2 + e^{-1} + 2) \cdot \ln(-2 + e^{-1} + 2) = -\frac{1}{e}$

2) $g(x) = f(x) - x \cdot \sqrt{4-x^2}$

a) Position de E_f et E_g :

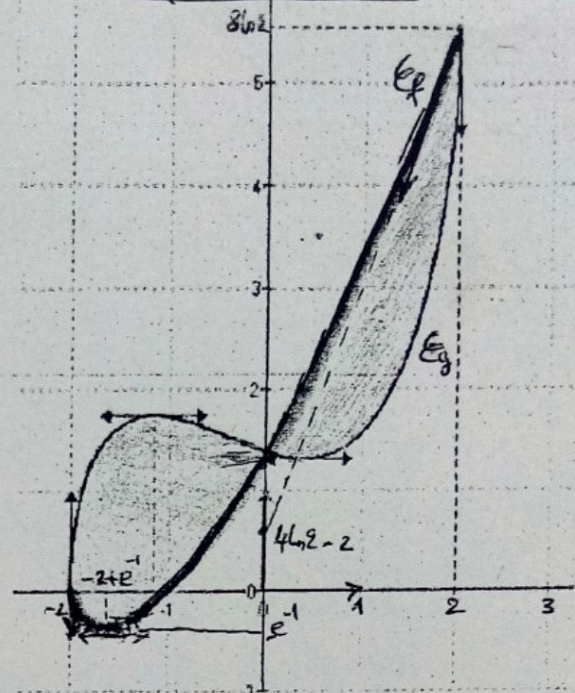
on pose $\varphi(x) = f(x) - g(x) = x \cdot \sqrt{4-x^2}$

$\Rightarrow \text{sgn}(\varphi) = \text{sgn}(+x)$

x	-2	0	2
$\varphi(x)$	0	-	+

Position de E_f par rapport à E_g :
 E_f est au-dessous de E_g sur $]-2, 0[$
 E_g est au-dessus de E_f sur $]0, 2[$

b) $T_x: y = f'(x)(x-2) + f(2)$ et $f'(2) = 1 + 2 \ln 2$
 $\Rightarrow T_x: y = (1 + \ln 4)x + (4 \ln 2 - 2)$
 $f(2) = 8 \ln 2$



2) a) si $x \in]-2, 0[\Rightarrow A(x) = \int_0^x (g(t) - f(t)) dt$

$\Rightarrow A(x) = \int_0^x -t \sqrt{4-t^2} dt = - \int_0^x t \sqrt{4-t^2} dt$

si $x \in]0, 2[\Rightarrow A(x) = \int_0^x f(t) - g(t) dt$

$\Rightarrow A(x) = \int_0^x t \sqrt{4-t^2} dt$

Compl : $\forall x \in]-2, 2[\setminus \{0\} \Rightarrow A(x) = \int_0^x t \sqrt{4-t^2} dt$

b) $A(x) = \int_0^x t (4-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^x -\frac{1}{2} (-2t) (4-t^2)^{\frac{1}{2}} dt$

$\Rightarrow A(x) = \left[-\frac{1}{3} (4-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x = \left[-\frac{1}{3} (4-x^2) \sqrt{4-x^2} \right]_0^x$

$\Rightarrow A(x) = -\frac{1}{3} (4-x^2) \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3} 4 \sqrt{4}$

$\Rightarrow A(x) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} (4-x^2) \sqrt{4-x^2}$ u.a

c) A' : l'aire limitée par les 2 courbes

$\Rightarrow A' = \int_0^{-2} x \sqrt{4-x^2} dx + \int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx$

$\Rightarrow A' = A(-2) + A(2)$

on $A(-2) = \frac{8}{3}$ et $A(2) = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow A' = \frac{16}{3}$ (u.a)

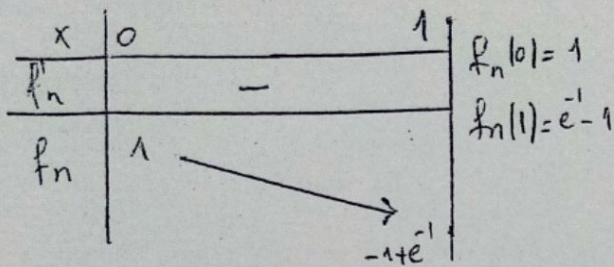
Correction "Analyse aux Bac - 1^{ère} Partie"

Exercice 31: Contrôle 2008

$$f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1} \quad D_f = [0, 1]$$

1) f continue et $\leq$ sur $[0, 1]$

$$f'_n(x) = -e^{-x} - (2n+1)x^{2n} < 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$



2) $f_n \in \text{strict } \searrow \text{ sur } [0, 1] \Rightarrow f_n \text{ réalise une bijection de } [0, 1] \text{ sur } [-1+e^{-1}, 1]$

or $0 \in [-1+e^{-1}, 1] \Rightarrow$ d'après le T.V.I

il existe unique $U_n \in]0, 1[/ f_n(U_n) = 0$

$$3) a) f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+3} - (e^{-x} - x^{2n+1}) = x^{2n+1}(1 - x^2) > 0 \quad \forall x \in]0, 1[$$

$$\Rightarrow \forall x \in]0, 1[\quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad f_{n+1}(x) > f_n(x)$$

b) comme $U_{n+1} \in]0, 1[\Rightarrow$

$$f_{n+1}(U_{n+1}) > f_n(U_{n+1})$$

or U_{n+1} solution de l'équation $f_{n+1}(x) = 0$

$$\text{donc } f_{n+1}(U_{n+1}) = 0$$

$$\Rightarrow 0 > f_n(U_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

c) U_n étant la solution de $f_n(x) = 0$

$$\Rightarrow f_n(U_n) = 0 \quad \Rightarrow f_n(U_n) > f_n(U_{n+1})$$

$$\text{or } 0 > f_n(U_{n+1})$$

et comme f_n strict $\searrow$ sur $]0, 1[$ et que les termes U_n et U_{n+1} sont dans $]0, 1[$

$$\Rightarrow U_n < U_{n+1}$$

ona alors $U_n \nearrow$ et majorée par 1

$\Rightarrow U_n$ convergente.

$$4) a) f_n(U_n) = 0 \Leftrightarrow e^{-U_n} - (U_n)^{2n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-U_n} = (U_n)^{2n+1} \Leftrightarrow -U_n = L_n((U_n)^{2n+1})$$

$$\Leftrightarrow -U_n = (2n+1) \cdot L_n(U_n)$$

$$\text{d'où } L_n(U_n) = -\frac{U_n}{2n+1}$$

b) U_n étant convergente $\Rightarrow$ il existe une limite $l \in [0, 1] / \lim U_n = l$

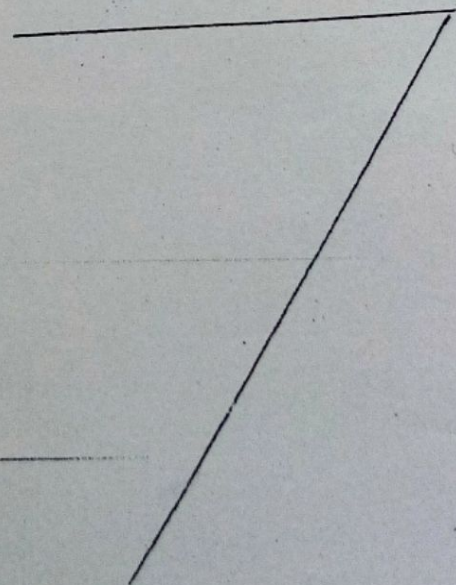
$$\text{or } L_n(U_n) = -\frac{U_n}{2n+1}$$

$$\text{donc } \lim L_n(U_n) = \lim -\frac{U_n}{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow L_n(l) = \frac{-l}{\infty} = 0$$

$$\text{donc } l = 1$$

$$\text{donc } \lim U_n = 1$$



Section : MATHEMATIQUES

Correction de la série

Analyse aux BAC

2^{ème} Partie

entre 1991 et 2008

Etablie par : **Mr M. MAAOUIA**

98 600 618 - 20 810 290

e-mail : moez-maaouia@hotmail.com



موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM



bac Math

Problème 01: BAC 2008 - Session Principale

1) $g(x) = \frac{1}{x^2} + 1 - 4 \ln x$

a) $D_g =]0, +\infty[$ $g'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x} < 0$

x	0	α	$+\infty$
g'		-	
g			

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 4 \ln x \right) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 4 \ln x \right) = -\infty$

b) g est strict^{ement} décroissante sur $]0, +\infty[\Rightarrow g$ réalise une bijection de $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 et comme $0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists ! \alpha \in]0, +\infty[/ g(\alpha) = 0$

car $g(1) = 2 > 0$
 $g(2) = \frac{1}{4} + 1 - 4 \ln 2 < 0 \Rightarrow 1 < \alpha < 2$

c) $g(x) \begin{array}{c|c} 0 & + \\ \hline + & \phi \\ \hline \end{array} \begin{array}{c|c} \alpha & - \\ \hline \end{array} \begin{array}{c|c} +\infty & - \end{array}$

2) $f(x) = \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}$ $D_f =]0, +\infty[$

a) $x > 0 \Rightarrow f$ est strict^{ement} décroissante sur $]0, +\infty[$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2+1)^2 - \ln x \cdot 2(2x)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+1) \left[\frac{1}{x} + x - 4x \ln x \right]}{(x^2+1)^4}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{x \left[\frac{1}{x^2} + 1 - 4 \ln x \right]}{(x^2+1)^3} = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2+1)^3}$

b) $\text{Sign}(f') = \text{Sign}(g(x))$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-
$f(x)$			

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} = 0$

3) a) $T: y = f'(1)(x-1) + f(1)$

car $f'(1) = \frac{1 \cdot g(1)}{(1+1)^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ et $f(1) = 0$
 $\Rightarrow T: y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

b) $\forall x > 0, \ln x \leq x-1$

on pose $A(x) = \ln x - x + 1$ $D_A =]0, +\infty[$
 $A'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

x	0	1	$+\infty$
A'		+	-
A			

$A(1) = 0$: maximum absolu
 $\Rightarrow \forall x > 0, A(x) \leq 0$
 $\Rightarrow \ln x - x + 1 \leq 0$
 $\Rightarrow \boxed{\ln x \leq x-1}$

• Dq $f(x) - \frac{1}{4}(x-1) \leq (x-1) \left[\frac{4 - (1+x^2)^2}{4(1+x^2)^2} \right]$

car $\ln x \leq x-1$

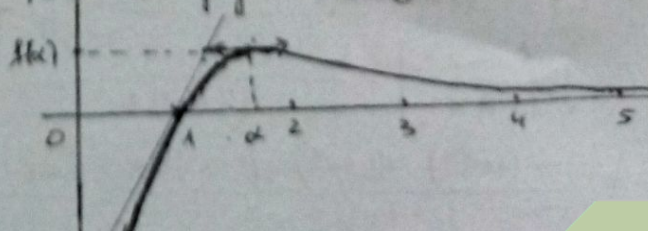
$\Rightarrow \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}(x-1) \leq (x-1) \left[\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}}{(x^2+1)^2} \right]$
 $\Rightarrow f(x) - \frac{1}{4}(x-1) \leq (x-1) \left[\frac{4 - (x^2+1)^2}{4(x^2+1)^2} \right]$

c) car $4 - (x^2+1)^2 = (2 - (x^2+1))(2 + (x^2+1))$
 $= (1-x^2)(3+x^2) = -(x-1)(x+1)(3+x^2)$
 $\Rightarrow f(x) - \frac{1}{4}(x-1) \leq -\frac{(x-1)^2(x+1)(3+x^2)}{4(x^2+1)^2} \leq 0$

$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{4}(x-1) \Leftrightarrow f(x) \leq y$

$\Rightarrow E_f$ est toujours situé au dessous de T

d) $x=0$: Asymptote verticale
 $y=0$: Asymptote horizontale en $x \rightarrow +\infty$



$$\text{II} \quad F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x f(t) dt \quad / x > 0$$

1) $f(t) \in \text{on }]0, +\infty[\rightarrow f$ admet au moins une primitive $\varphi \in \text{on }]0, +\infty[/ \varphi'(t) = f(t)$

$$\Rightarrow F(x) = \left[\varphi(t) \right]_{\frac{1}{x}}^x = \varphi(x) - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

ou $\varphi \in \text{on }]0, +\infty[$

et $\forall x > 0, \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right) \in]0, +\infty[= D_{\varphi}$

$$\Rightarrow F \text{ est } \in \text{on }]0, +\infty[$$

$$\forall x > 0, F'(x) = [\varphi(x)]' - [\varphi(\frac{1}{x})]'$$

$$\Rightarrow F'(x) = \varphi'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \varphi'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x) + \frac{1}{x^2} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-\ln x}{(1+\frac{1}{x^2})^2}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2 \ln x}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x^2) \ln x}{(x^2+1)^2}$$

$$2) h(x) = \text{tg}(x) \quad / x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$a) h \in \text{on } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, h'(x) = 1 + \text{tg}^2 x > 0$$

$\Rightarrow h \in \text{strict } \nearrow \text{on } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow h$ réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \left]0, +\infty\right[$ en $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = +\infty$

$$b) h \in \text{on } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow h^{-1} \text{ est } \in \text{on } \mathbb{R}^+ \text{ et } h'(x) \neq 0$$

$$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(y)} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2(y)}$$

$$a) h(y) = x \Leftrightarrow \text{tg}(y) = x \Rightarrow (h^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$c) \text{ Mg } F(x) = \frac{1}{2} \left(h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - h^{-1}(x) \right) + \frac{x \ln x}{1+x^2}$$

$$\text{on pose } G(x) = \frac{1}{2} \left(h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - h^{-1}(x) \right) + \frac{x \ln x}{1+x^2}$$

$G \in \text{on }]0, +\infty[$ car $h^{-1} \in \text{on } \mathbb{R}^+$

$$G'(x) = \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{1}{x^2}\right) (h^{-1})'\left(\frac{1}{x}\right) - (h^{-1})'(x) \right) + \left(\frac{x \ln x}{1+x^2} \right)'$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{1+x^2} \right) + \frac{(1+x^2) - 2x^2 \ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{1+x^2} \right) + \frac{1+x^2 - 2x^2 \ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-(1+x^2) + (1+x^2) + (1-x^2) \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x^2) \ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{donc } G'(x) = F'(x) \Rightarrow G(x) = F(x) + k$$

$$\text{or } F(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0 \quad \Rightarrow k = 0$$

$$\text{d'où } G(1) = \frac{1}{2} \left(h^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) - h^{-1}(1) \right) + \frac{1 \ln 1}{1+1} = 0$$

$$\text{3) a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left(h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - h^{-1}(x) \right) + \frac{x \ln x}{1+x^2}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0^+} h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h^{-1}(t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} h^{-1}(x) = 0 \quad \text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{1+x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - h^{-1}(x) \right) + \frac{x \ln x}{1+x^2}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} h^{-1}(t) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\frac{\pi}{4}$$

$$b) F'(x) = \frac{(1-x^2) \ln x}{(x^2+1)^2}$$

F' s'annule en 1.

$$c) G(x) = F(x) \text{ si } x > 0$$

$$G(0) = \frac{\pi}{4}$$

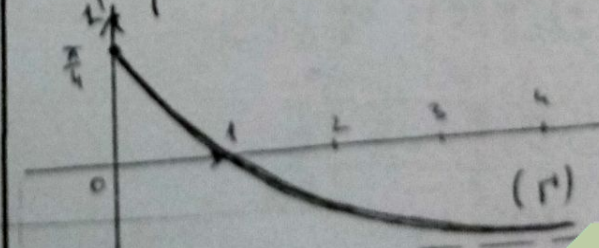
$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{\pi}{4} = G(0)$$

$\Rightarrow G$ est la prolongement de F par continuité en 0 alors

$$\forall x > 0, G'(x) = F'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow y = -\frac{\pi}{4} \text{ A. Hozig en } +\infty$$

Rq: La $\in$ de G en 0 et ne peut pas être étudiée avec les données proposées



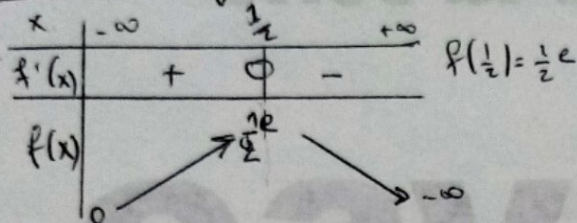
Problème 02: BAC 2008 - Session de Contrôle

$$f(x) = (1-x) \cdot e^{2x} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$1) f \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}, f'(x) = -e^{2x} + 2(1-x)e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (1-2x) \cdot e^{2x}$$

$$\text{on résout : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{2}(2x)} = 0$$

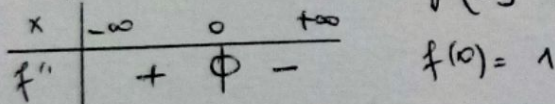
$\Rightarrow y=0$ Asymptote horizontale en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^{2x} = -\infty$$

$$2) a) \text{ Point d'inflexion : } f'(x) = (1-2x)e^{2x}$$

$$f' \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}, f''(x) = -2e^{2x} + 2(1-2x)e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = -4xe^{2x} \Rightarrow \text{sign}(f'') = \text{sign}(-4x)$$



f'' s'annule en 0 et change de signe.

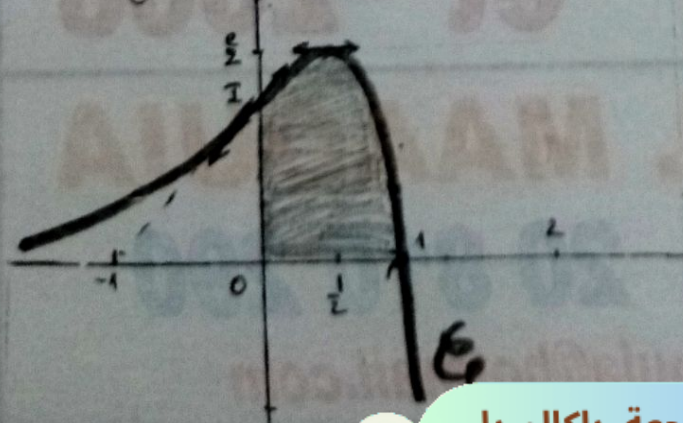
$\Rightarrow I(0,1)$ est un point d'inflexion pm $\mathcal{C}_f$

$$b) T_I: y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$a) \left. \begin{array}{l} f'(0) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow T_I: y = x + 1$$

$$c) \text{ Branche inférieure : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x}{x} \right) e^{2x} = -\infty$$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ admet une BI en $(+\infty)$ de direction $(0,1)$



$$3) A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^{2x} dx$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u(x) = 1-x \longrightarrow u'(x) = -1 \\ v'(x) = e^{2x} \longrightarrow v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} \right]_0^1 = \left[\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x \right) e^{2x} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{e^2 - 3}{4}} \text{ (4a)}$$

$$4) \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$$

$$a) 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 2$$

$$e^1 \Rightarrow 1 \leq e^{2x} \leq e^2$$

$$\text{or } 0 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow (1-x)^n \geq 0$$

$$\text{d'où } (1-x)^n \leq (1-x)^n e^{2x} \leq (1-x)^n e^2$$

$$\text{or } \begin{cases} x \mapsto (1-x)^n \in \mathcal{M}[0,1] \\ x \mapsto (1-x)^n e^{2x} \in \mathcal{M}[0,1] \\ x \mapsto (1-x)^n e^2 \in \mathcal{M}[0,1] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (1-x)^n dx \leq \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx \leq e^2 \int_0^1 (1-x)^n dx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{-1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{-e^2}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow 0 + \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 0 + \frac{e^2}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \boxed{\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^2}{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0}$$

$$b) 2I_{n+1} = \int_0^1 2(1-x)^{n+1} e^{2x} dx$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u(x) = (1-x)^{n+1} \longrightarrow u'(x) = -(n+1)(1-x)^n \\ v'(x) = 2e^{2x} \longrightarrow v(x) = e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2I_{n+1} = \left[(1-x)^{n+1} e^{2x} \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$$

$$= 0 - 1 + (n+1) I_n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \boxed{2I_{n+1} = (n+1) I_n - 1}$$

$$= nI_n + I_n - 1$$

$$\Rightarrow n I_n = 2 I_{n+1} - I_n + 1$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+1} = 0$$

$$\text{alors } \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (n I_n) = 1}$$

$$5) \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{2^n}{n!} I_n$$

$$a) \text{ On } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$$

$$\text{pm } n=1, \frac{2^0}{1!} = 1 \leq 1 \text{ vérifié}$$

$$\bullet \text{ Supp que } \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1 \text{ vrai}$$

$$\bullet \text{ Démontrons que } \frac{2^n}{(n+1)!} \leq 1$$

$$\text{en effet : } \frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot 2^{n-1}}{(n+1) \cdot n!}$$

$$\text{or } n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{alors } \frac{2}{n+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{2^n}{(n+1)!} \leq 1$$

$$\text{or } \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1 \Rightarrow \frac{2^n}{(n+1)!} \leq 1$$

$$\text{Concl: } \forall n \in \mathbb{N}^* \boxed{\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1}$$

$$b) \text{ Dq } U_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$$

$$\text{or } I_n \leq \frac{e^2}{n+1} \text{ d'après (9/a)}$$

$$\text{et } \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$$

$$\text{Produit: } \frac{2^{n-1}}{n!} I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$$

$$\text{donc } \frac{2^n}{n!} I_n \leq \frac{2e^2}{n+1} \Leftrightarrow U_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$$

$$c) \text{ d'autre part : } \left. \begin{array}{l} I_n \geq 0 \\ \frac{2^n}{n!} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow U_n \geq 0$$

$$\text{alors } 0 \leq U_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^2}{n+1} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0}$$

$$6) a) \text{ Mg } \forall n \in \mathbb{N}^* U_{n+1} = \frac{2^n}{(n+1)!} + U_n$$

$$\text{or } U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} I_{n+1}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{2^n}{(n+1)!} [(n+1) I_n - 1]$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{2^n (n+1)}{(n+1) \cdot n!} I_n - \frac{2^n}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{n+1} = U_n - \frac{2^n}{(n+1)!}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$b) \text{ Dq } \forall n \in \mathbb{N}^* U_n = \frac{1}{2} \left[e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right]$$

$$\text{On } n=1, U_1 = \frac{2^1}{1!} I_1 = 2 I_1$$

$$\text{or } I_1 = \int_0^1 (1-x) e^{2x} dx = A = \frac{e^2 - 3}{4}$$

$$\Rightarrow U_1 = 2 \left(\frac{e^2 - 3}{4} \right) = \frac{1}{2} [e^2 - 3] = \frac{1}{2} \left[e^2 - \sum_{k=0}^1 \frac{2^k}{k!} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^2 - \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[e^2 - \sum_{k=0}^1 \frac{2^k}{k!} \right]$$

$$\Rightarrow U_1 \text{ vérifié}$$

$$\bullet \text{ Supposons que : } U_n = \frac{1}{2} \left[e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right] \text{ vrai}$$

$$\bullet \text{ Démontrons que : } U_{n+1} = \frac{1}{2} \left[e^2 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} \right]$$

$$\text{en effet : } U_{n+1} = U_n - \frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} \left[e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right] - \frac{2^n}{2(n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{1}{2} \left[e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \right] = \frac{1}{2} \left[e^2 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} \right]$$

$$\text{Concl: } \forall n \in \mathbb{N}^* \boxed{U_n = \frac{1}{2} \left[e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right]}$$

$$c) \text{ on pose } V_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \Rightarrow U_n = \frac{1}{2} [e^2 - V_n]$$

$$\Rightarrow 2U_n = e^2 - V_n \Rightarrow V_n = e^2 - 2U_n$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = e^2}$$

$$\text{concl: } V_n \text{ converge vers } e^2$$

Exercice 03: BAC 2007 - Session de Contrôle

$$f(x) = e^{-\sqrt{x-1}} \quad \text{Def} = [1, +\infty[$$

$$1) a) \text{ d de } f \text{ en } 1^+ : f(1) = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-\sqrt{x-1}} - 1}{x - 1}$$

$$\text{mpx } X = \sqrt{x-1}, \text{ si } x \rightarrow 1^+ \Rightarrow X \rightarrow 0^+$$

$$l = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-X} - 1}{X^2} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{e^{-X} - 1}{X^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \cdot \frac{-1}{xe^x} = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x = 0^+ \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ n'est pas $\leq$ en 1 et $\notin \mathcal{E}_f$ admet en $(1, 1)$ une demi-tangente verticale dirigée vers bas

b) $f \in \text{som } [1, +\infty[$ car $x-1 \geq 0$

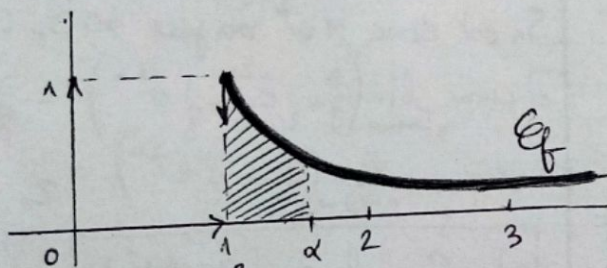
et $\notin \text{som }]1, +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} e^{-\sqrt{x-1}} < 0$$

x	1	$+\infty$
f(x)	1	—
f'(x)	1	$\searrow$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{x-1}} = 0$
car $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x-1} = -\infty$

$\Rightarrow y=0$ Asymptote horizontale en $+\infty$



$$2) F(x) = \int_1^{1+(\ln x)^2} f(t) dt \quad D_F =]0, 1[$$

a) ora $f \in \text{som } [1, +\infty[\Rightarrow f$ admet une primitive $H \in \text{som } [1, +\infty[/ H'(t) = f(t)$

$$\text{donc } F(x) = [H(t)]_1^{1+(\ln x)^2} = H(1+(\ln x)^2) - H(1)$$

$$\text{or } x \mapsto 1+(\ln x)^2 \in \text{som }]0, 1[\Rightarrow [1+(\ln x)^2] \subset [1, +\infty[= D_H$$

$$F \in \text{som }]0, 1[$$

$$F'(x) = [H(1+(\ln x)^2)]' - [H(1)]'$$

$$= 2 \left(\frac{1}{x} \right) \ln x \cdot H'(1+(\ln x)^2) = 0$$

$$= \frac{2}{x} \ln(x) \cdot f(1+(\ln x)^2) = \frac{2}{x} \ln(x) \cdot e^{-\ln x}$$

$$= \frac{2}{x} \ln(x) e^{-|\ln x|} = \frac{2}{x} \ln(x) e^{-\ln x} = \frac{2}{x} \ln(x) x$$

$$\Rightarrow F'(x) = 2 \ln x$$

$$b) F(x) = 2(x \ln x - x) + k$$

$$\Rightarrow F(x) = 2x \ln x - 2x + k$$

$$\text{or } F(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0 \text{ et } F(1) = k - 2$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$\text{concl: } \forall x \in]0, 1[, F(x) = 2x \ln x - 2x + 2$$

3) $\alpha \geq 1$ $S(\alpha)$: l'aire limitée par le courbe $\mathcal{E}_f$ et les droites: $y=0, x=1, x=\alpha$

$$a) S(\alpha) = \int_1^\alpha f(x) dx$$

$$\text{or } F(f(x)) = \int_1^{1+(\ln f(x))^2} f(x) dx$$

$$\text{et } 1+(\ln f(x))^2 = 1+(\ln(e^{-\sqrt{x-1}}))^2 = 1+(-\sqrt{x-1})^2 = 1+x-x = x \Rightarrow F(f(x)) = \int_1^x f(x) dx$$

$$\text{concl: } S(\alpha) = F(f(\alpha))$$

$$b) S(\alpha) = F(f(\alpha)) = 2f(\alpha) \cdot \ln(f(\alpha)) - 2f(\alpha) + 2 = 2e^{-\sqrt{\alpha-1}} \cdot \ln(e^{-\sqrt{\alpha-1}}) - 2e^{-\sqrt{\alpha-1}} + 2$$

$$\Rightarrow S(\alpha) = -2\sqrt{\alpha-1} e^{-\sqrt{\alpha-1}} - 2e^{-\sqrt{\alpha-1}} + 2$$

$$\Rightarrow S(\alpha) = 2 - 2e^{-\sqrt{\alpha-1}} (\sqrt{\alpha-1} + 1) \text{ ua}$$

$$\cdot \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{\alpha-1}} (\sqrt{\alpha-1} + 1) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{e^{\sqrt{\alpha-1}}} - \frac{1}{e^{\sqrt{\alpha-1}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x} = 0 \text{ avec } x = \sqrt{\alpha-1} \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S(\alpha) = 2$$

Problème 04 : BAC 2006 - Session Principale

$$f(x) = x + \ln(1+e^{2x}) \quad D_f = [0, +\infty[$$

$$(A) 1) a) f \in \text{som } [0, +\infty[\text{ car } 1+e^{2x} > 0$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1+e^{2x} - 2e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$= \frac{1+e^{2x} - 2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

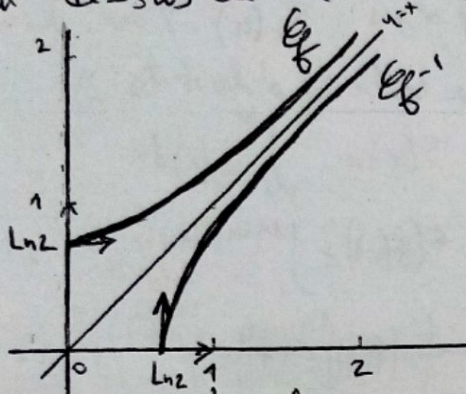
x	0	$+\infty$
f'(x)	0	+
f(x)	0	$\nearrow$

$f(0) = \ln(2)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(1+e^{2x}) = +\infty$
car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t) - x] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2t}) = \ln 1 = 0$
 $\Rightarrow$ la droite $D: y = x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $(+\infty)$.

c) $f(x) - y = \ln(1 + e^{-2x}) > 0$

car $1 + e^{-2x} > 1$
 $\Rightarrow$ la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours située au dessus de la droite $D: y = x$



2) a) f continue et strictement $\nearrow$ sur $[0, +\infty[$
 $\Rightarrow f$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) = [\ln 2, +\infty[$

b) $\mathcal{C}_f^{-1} = S_D(\mathcal{C}_f) / D: y = x$

$$3) a) (1-t) - \frac{1}{1+t} = \frac{(1-t)(1+t) - 1}{1+t} = \frac{-t^2}{1+t} \leq 0$$

$$\Rightarrow 1-t \leq \frac{1}{1+t} \quad (1)$$

$$\text{et } \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t} \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 \quad \forall t \geq 0$$

$$b) \text{ pour } 0 \leq x \Rightarrow \int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x 1 dt$$

$$\Leftrightarrow \left[t - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^x \leq \left[\ln(1+t) \right]_0^x \leq \left[t \right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x - \frac{1}{2} x^2 \leq \ln(1+x) \leq x} \quad \forall x \geq 0$$

$$c) \text{ on pose } x = e^{-2t} \geq 0$$

$$\Rightarrow e^{-2t} - \frac{1}{2} (e^{-2t})^2 \leq \ln(1 + e^{-2t}) \leq e^{-2t}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \geq 0, \boxed{e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-4t} \leq \ln(1 + e^{-2t}) \leq e^{-2t}}$$

$$4) a) S_n = \int_0^n (f(x) - x) dx = \int_0^n \ln(1 + e^{-2t}) dt$$

$$\text{or } e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-4t} \leq \ln(1 + e^{-2t}) \leq e^{-2t}$$

$$\text{car } 0 < n \Rightarrow \int_0^n \left(e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-4t} \right) dt \leq \int_0^n \ln(1 + e^{-2t}) dt \leq \int_0^n e^{-2t} dt$$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{8} e^{-4t} \right]_0^n \leq S_n \leq \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^n$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} e^{-2n} + \frac{1}{8} e^{-4n} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) \leq S_n \leq -\frac{1}{2} e^{-2n} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{3}{8} - \frac{1}{2} e^{-2n} + \frac{1}{8} e^{-4n} \leq S_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2n}}$$

b) Montrons d'abord que $S_n \nearrow$

$$S_{n+1} - S_n = \int_0^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt - \int_0^n \ln(1 + e^{-2t}) dt$$

$$= \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt$$

$$\text{or } \ln(1 + e^{-2t}) \geq 0 \Rightarrow S_{n+1} - S_n \geq 0$$

$$\text{et } n < n+1 \quad \text{donc } \boxed{S_n \nearrow}$$

$$\text{et } S_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_n \text{ majorée par } \frac{1}{2}$$

S_n est donc $\nearrow$ et majorée $\Rightarrow S_n$ converge

$$\text{et comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} e^{-2n} + \frac{1}{8} e^{-4n} \right) = \frac{3}{8}$$

$$\text{et que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2n} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim S_n = l \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2} \right]}$$

$$B) U_0 = \int_0^{\ln 2} 1 dx \quad U_n = \int_0^{\ln 2} [f'(x)]^n dx$$

$$1) U_0 = \left[x \right]_0^{\ln 2} = \ln 2$$

$$U_1 = \int_0^{\ln 2} f'(x) dx = \left[f(x) \right]_0^{\ln 2} = f(\ln 2) - f(0)$$

$$= \ln 2 + \ln(1 + e^{-2 \ln 2}) - \ln 2 = \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{U_1 = \ln\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$2) a) \text{ on a } f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

$$\text{or } 0 \leq x \leq \ln 2 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq \ln 4$$

$$\Rightarrow 1 \leq e^{2x} \leq 4 \Rightarrow 2 \leq e^{2x} + 1 \leq 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{e^{2x} + 1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \leq -\frac{2}{e^{2x} + 1} \leq -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \leq \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{5}}$$



Concl: $\forall x \in [0, \ln 2]; \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{5}$

b) d'où $0 \leq [f'(x)]^n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$

alors $0 \leq \int_0^{\ln 2} [f'(x)]^n dx \leq \int_0^{\ln 2} \left(\frac{3}{5}\right)^n dx$

$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \left[x\right]_0^{\ln 2}$

$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \ln 2$

c) $\frac{3}{5} \in]-1, 1[\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$

3) a) $f''(x) = \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)' = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$
 $= \frac{2e^{4x} + 2e^{2x} - 2e^{4x} + 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$

$\Rightarrow 1 - f''(x) = 1 - \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{(e^{2x} + 1)^2 - 4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$
 $= \frac{(e^{2x} - 1)^2}{(e^{2x} + 1)^2} = \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)^2 = [f'(x)]^2$

Concl: $1 - f''(x) = [f'(x)]^2$

b) $U_n = \int_0^{\ln 2} [f'(x)]^n dx = \int_0^{\ln 2} [f'(x)]^{n-2} \cdot [f'(x)]^2 dx$
 $= \int_0^{\ln 2} [f'(x)]^{n-2} (1 - f''(x)) dx$

$\Rightarrow U_n = \int_0^{\ln 2} [f'(x)]^{n-2} dx - \int_0^{\ln 2} f''(x) \cdot [f'(x)]^{n-2} dx$

$= U_{n-2} - \left[\frac{1}{n-1} [f'(x)]^{n-1} \right]_0^{\ln 2}$

$= U_{n-2} - \frac{1}{n-1} \left([f'(\ln 2)]^{n-1} - [f'(0)]^{n-1} \right)$

$\Rightarrow U_n = U_{n-2} - \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \quad \forall n \geq 2$

c) On a par récurrence que: $U_{2n} = U_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k-1}$

pour $n=1$ $U_2 = U_0 - \frac{1}{1} \left(\frac{3}{5} \right)^1 = \text{vrai}$

Supposons $U_{2n} = U_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k-1}$ vrai

On a $U_{2n+2} = U_0 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k-1}$

en effet: $U_{2n+2} = U_{2n} - \frac{1}{2n+1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2n+1}$
 $= U_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k-1} - \frac{1}{2n+1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2n+1}$

$\Rightarrow U_{2n+2} = U_0 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k-1}$

Concl: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_{2n} = U_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k-1}$

On a $U_{2n+1} = U_1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k}$

pour $n=1$ $U_3 = U_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \text{vrai}$

Supposons que: $U_{2n+1} = U_1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k}$

On a $U_{2n+3} = U_1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k}$

en effet: $U_{2n+3} = U_{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \left(\frac{3}{5} \right)^{2n+2}$

$\Rightarrow U_{2n+3} = U_1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k} - \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{3}{5} \right)^{2(n+1)}$

$\Rightarrow U_{2n+3} = U_1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k}$

Concl: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_{2n+1} = U_1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k}$

4) $V_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \left(\frac{3}{5} \right)^k$

on a: $U_{2n} + U_{2n+1} = U_0 + U_1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k}$

$\Rightarrow U_{2n} + U_{2n+1} = U_0 + U_1 - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \left(\frac{3}{5} \right)^k = U_0 + U_1 - V_n$

$\Rightarrow V_n = U_0 + U_1 - U_{2n} - U_{2n+1}$

or $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = U_0 + U_1 = \ln 2 + \ln \left(\frac{5}{2} \right) = \ln \left(\frac{5}{2} \right)$

Concl: V_n converge vers $\ln \left(\frac{5}{2} \right)$

Problème 05: BAC 2005 - Session Principale

$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x} \quad \text{Df} = \mathbb{R}$

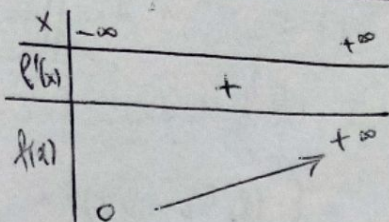
A 1) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car $1+e^x \neq 0$

$f'(x) = \frac{2e^{2x}(1+e^x) - e^x(e^{2x})}{(1+e^x)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2e^{2x} + e^{3x}}{(1+e^x)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{1+e^x} = \frac{0}{1} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{1+e^x} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$

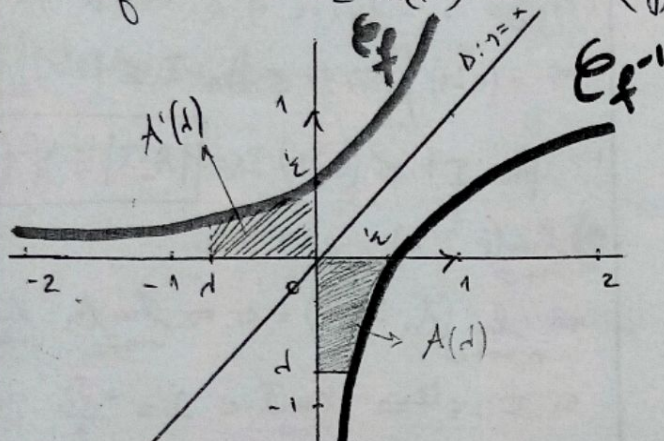


2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y=0 : A.H. \text{ en } (-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x(1+e^x)} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(e^x+1)}$$

$$= +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ admet une BI en $(+\infty)$ de directrice (Oy)



3) a) $f \subseteq \text{strict } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } f(\mathbb{R}) =]0, 1[$

b) $\mathcal{C}_f^{-1} = S_D(\mathcal{C}_f) / D: y=x$

c) f' est définie par: $\begin{cases} \forall y \in \mathbb{R} \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x > 0 \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$

en effet: $f(y) = x \Leftrightarrow \frac{e^{2y}}{1+e^y} = x \Leftrightarrow$

$$e^{2y} = x + x e^y \Leftrightarrow (e^y)^2 - x e^y - x = 0$$

$$\Delta = x^2 + 4x > 0 \text{ car } x > 0$$

$$e^y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2} < 0 \text{ à rejeter}$$

$$e^y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{2} > 0 \Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4x})$$

car: $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4x}) / x > 0$

4) a) $e^x - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x(1+e^x) - e^x}{1+e^x} = \frac{e^{2x}}{1+e^x} = f(x)$

b) $A(d)$: l'axe limitée par $\begin{cases} \mathcal{C}_f^{-1} \\ x=0 \\ y=1 \\ y=0 \end{cases}$

on pose $A'(d) = S_D(A(d))$

$\Rightarrow A'(d)$: l'axe limitée par $\begin{cases} S_D(\mathcal{C}_f^{-1}) = \mathcal{C}_f \\ S_D(x=0) = (y=0) \\ S_D(y=1) = (x=d) \\ S_D(y=0) = (x=0) \end{cases}$

$$\Rightarrow A'(d) = \int_0^d f(x) dx = \int_0^d \left(e^x - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx$$

$$\Rightarrow A'(d) = \left[e^x - \ln(1+e^x) \right]_0^d = 1 - \ln 2 - e^d + \ln(1+e^d)$$

Comme S_D : isométrique $\Rightarrow$ conserve les aires

$$\Rightarrow A(d) = A'(d) = 1 - \ln 2 - e^d + \ln(1+e^d) \quad (u.a)$$

5) $F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt$ tel que $x \leq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) $F_1(x) = \int_x^0 \frac{e^t}{1+e^t} dt = \left[\ln(1+e^t) \right]_x^0 = \ln 2 - \ln(1+e^x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} F_1(x) = \ln 2$$

b) $F_2(x) = \int_x^0 \frac{e^{2t}}{1+e^t} dt = \int_x^0 f(t) dt = A(x)$

$$\Rightarrow F_2(x) = 1 - \ln 2 - e^x + \ln(1+e^x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} F_2(x) = 1 - \ln 2$$

2) a) $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} dt + \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt$

$$= \int_x^0 \frac{e^{(n+1)t} + e^{nt}}{1+e^t} dt = \int_x^0 \frac{e^{nt}(e^t + 1)}{1+e^t} dt$$

$$\Leftrightarrow F_{n+1}(x) + F_n(x) = \int_x^0 e^{nt} dt = \left[\frac{1}{n} e^{nt} \right]_x^0$$

$$\Rightarrow F_{n+1}(x) + F_n(x) = \frac{1}{n} (1 - e^{nx})$$

b) Nq $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x)$: existe then n^*

• pour $n=1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_1(x) = \ln 2 \Rightarrow$ vérifiée

Supp p: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) = l$ (fini)

• Dq $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{n+1}(x) = l'(\text{fini})?$

en effet: $F_{n+1}(x) = -F_n(x) + \frac{1}{n} (1 - e^{nx})$

or $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{n+1}(x) = -l + \frac{1}{n}$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} (1 - e^{nx}) = \frac{1}{n} \Rightarrow$ existe et fini

0 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) : \text{ex}$

$$3) a) 2e^t - (1+e^t) = e^t - 1 \leq 0 \text{ car } t \leq 0 \\ \Rightarrow 2e^t \leq 1+e^t \quad (1) \\ \text{et } (1+e^t) - 2 = e^t - 1 \leq 0 \text{ car } t \leq 0 \\ \Rightarrow 1+e^t \leq 2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \forall t \leq 0, \boxed{2e^t \leq 1+e^t \leq 2}$$

$$b) \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^t} \leq \frac{1}{2e^t} \\ \text{car } e^{nt} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} e^{nt} \leq \frac{e^{nt}}{1+e^t} \leq \frac{e^{(n-1)t}}{2}$$

$$\text{Comme } x \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_x^0 e^{nt} dt \leq \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt \leq \frac{1}{2} \int_x^0 e^{(n-1)t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} e^{nt} \right]_x^0 \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n-1} e^{(n-1)t} \right]_x^0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2n} (1 - e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)} (1 - e^{(n-1)x})}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2n} (1 - e^{nx}) = \frac{1}{2n} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) = R_n \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2(n-1)} (1 - e^{(n-1)x}) = \frac{1}{2(n-1)} \\ \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2n} \leq R_n \leq \frac{1}{2(n-1)}}$$

$$4) G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt} dt \quad \forall x \leq 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

$$a) G_n(x) = (-1)^n \left[\frac{1}{n} e^{nt} \right]_x^0 = \frac{(-1)^n}{n} (1 - e^{nx}) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{nx} = 0 \text{ et } \frac{(-1)^n}{n} \cdot n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$b) \sum_{k=1}^n G_k(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_x^0 e^{kt} dt \\ = \int_x^0 \sum_{k=1}^n (-1)^k e^{kt} dt = \int_x^0 \sum_{k=1}^n (-e^t)^k dt \\ = \int_x^0 (-e^t) \left[\frac{1 - (-e^t)^{n+1}}{1 - (-e^t)} \right] dt = \int_x^0 \frac{-e^t - (-e^t)^{n+1}}{1+e^t} dt \\ = \int_x^0 \frac{-e^t}{1+e^t} dt - (-1)^{n+1} \int_x^0 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} dt \\ = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow G_1(x) + G_2(x) + \dots + G_n(x)$$

$$5) \text{th} \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow -\infty} G_k(x) = \frac{(-1)^k}{k} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow -\infty} G_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sum_{k=1}^n G_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \\ \Rightarrow U_n = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sum_{k=1}^n G_k(x)$$

$$\text{or } \sum_{k=1}^n G_k(x) = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x) \\ \Rightarrow U_n = - \lim_{x \rightarrow -\infty} [-F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)]$$

$$U_n = \ln 2 - (-1)^n R_{n+1} \\ \Rightarrow \boxed{U_n = \ln 2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}}$$

$$b) \text{d'après } B) 3) c) \quad \frac{1}{2n} \leq R_n \leq \frac{1}{2(n-1)} \\ \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)} \leq R_{n+1} \leq \frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n+1} = 0$$

$$\text{or } (-1)^{n+1} \neq 1 \Rightarrow |(-1)^{n+1} R_{n+1}| = |R_{n+1}| \\ \text{et comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} R_{n+1} = 0$$

$$\text{alors } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ln 2} \text{ ainsi } U_n \text{ converge vers } \ln 2$$

Problème 06: BAC 2004 - Session Principale

$$A) f_1(x) = \sqrt{1+x} \cdot e^{-x} \quad \mathcal{D}_{f_1} = [-1, +\infty[$$

$$1) a) \text{Dérivabilité de } f_1 \text{ en } (-1)^+, f_1(-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f_1(x) - f_1(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{1+x} e^{-x}}{1+x} \\ = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{1+x} e^{-x}}{(1+x)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{e}{0^+} = +\infty \Rightarrow f_1 \text{ n'est pas dérivable en } (-1)^+ \text{ et } f_1 \text{ admet en } (-1, 0) \text{ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{e^x} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{1+x}}{x}}{\frac{e^x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\frac{e}{x}} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

9) $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe C_1 au voisinage de $(+\infty)$

2) $f_1 \in \mathcal{C}^1$ sur $1+x > 0 \Rightarrow f_1 \in \mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$

$$f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} e^{-x} - \sqrt{1+x} e^{-x} = \frac{e^{-x} - 2(1+x)e^{-x}}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow f_1'(x) = \frac{(-1-2x)e^{-x}}{2\sqrt{1+x}}, \quad f_1'(x)=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{sgn}(f_1'(x)) = \text{sgn}(-1-2x)$$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0	-
$f_1(x)$			$\sqrt{\frac{e}{2}}$	

$f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{e}{2}} = \sqrt{\frac{e}{2}} \approx 1,2$

3) $T_0: y = f_1'(0)(x-0) + f_1(0) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f_1'(0) = -\frac{1}{2}$ et $f_1(0) = 1$

$$T_0: y = -\frac{1}{2}x + 1$$

4) on pose $\varphi(x) = f_1(x) - x$, $\mathcal{D}\varphi =]-\frac{1}{2}, +\infty[$

$\varphi \in \mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$, $\varphi'(x) = f_1'(x) - 1 < 0$
 car $f_1'(x) \leq 0$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) - x) = -\infty$$

x	$-\frac{1}{2}$	α	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	
$\varphi(x)$	$\sqrt{\frac{e}{2}} + \frac{1}{2}$		$-\infty$

$\varphi(-\frac{1}{2}) = f_1(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{e}{2}} + \frac{1}{2}$
 $\varphi \in \mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$
 et $\varphi(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{e}{2}} + \frac{1}{2}$
 $\alpha \in]-\infty, \sqrt{\frac{e}{2}} + \frac{1}{2}]$

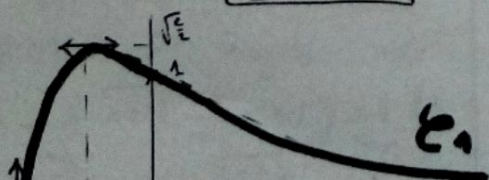
$$\Rightarrow \exists! \alpha \in]-\frac{1}{2}, +\infty[/ \varphi(x) = 0 \Rightarrow f_1(x) = \alpha$$

$$\varphi(-\frac{1}{2}) = f_1(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{e}{2}} + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3}{2e}} - \frac{1}{2} \approx 0,24 > 0$$

$$\varphi(1) = f_1(1) - 1 = \sqrt{2e} - 1 \approx -0,48 < 0$$

$$\Rightarrow \varphi(-\frac{1}{2}) \cdot \varphi(1) < 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$$

5)



6) a) on pose $g(x) = 1+x-e^{-x}$ $\mathcal{D}g = \mathbb{R}$

$g \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $g'(x) = 1 - e^{-x}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		0	

$g(0) = 0$: maximum absolu
 $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$
 $\Rightarrow 1+x-e^{-x} \leq 0$
 $\Rightarrow \boxed{1+x \leq e^x}$

b) pm $x \geq -1 \Rightarrow 0 \leq 1+x \leq e^x$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} \leq \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$$

$$e^{-x} > 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} e^{-x} \leq e^{\frac{x}{2}} e^{-x} \Rightarrow \boxed{f_1(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}}$$

7) $d \geq 1$, $S(d) = \int_1^d f_1(x) dx$

8) $S(d)$: l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_1 , l'axe des abscisses et les droites $x=1$ et $x=d$

9) on a $0 \leq f_1(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$

$$\text{pm } 1 \leq d \Rightarrow 0 \leq \int_1^d f_1(x) dx \leq \int_1^d e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq S(d) \leq \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_1^d = -2e^{-\frac{d}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{or } -2e^{-\frac{d}{2}} < 0 \Rightarrow \boxed{0 \leq S(d) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}}$$

10) $f_n(x) = \sqrt{1+x} \cdot e^{-\frac{x}{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Points fixes: $f_{n'}(x) = f_n(x) / n \neq n'$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} e^{-\frac{x}{n'}} = \sqrt{1+x} e^{-\frac{x}{n}} \Rightarrow \sqrt{1+x} (e^{-\frac{x}{n'}} - e^{-\frac{x}{n}}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(-1, 0) \\ \text{ou} \\ e^{-\frac{x}{n'}} = e^{-\frac{x}{n}} \Rightarrow -\frac{x}{n'} = -\frac{x}{n} \Rightarrow \end{cases}$$

$$-x n = -x n' \Rightarrow x(n-n') = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ n \neq n' \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(0, 1)$$

Conclusion: $\{A(-1, 0), B(0, 1)\} \subset C_n \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) a) $\forall x > -1$, $f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} e^{-\frac{x}{n}} - \frac{\sqrt{1+x}}{n} e^{-\frac{x}{n}}$

$$\Rightarrow f_n'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{2n\sqrt{1+x}} (n - 2(1+x))$$

$$\Rightarrow f_n'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{2n\sqrt{1+x}} (-2x + (n-2))$$

$$\Rightarrow -2x + n - 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{n-2}{2}$$

$\Rightarrow E_n$ admet en M_n d'abscisses $(-1 + \frac{1}{2^n})$ une tangente horizontale $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $\alpha_n = -1 + \frac{1}{2^n} \Rightarrow \alpha_n$ est le terme général de la suite arithmétique définie par $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ et $r = \frac{1}{2}$

3) Propriétés de E_n et E_{n+1} :

on pose $h(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$

$$\Rightarrow h(x) = \sqrt{1+x} (e^{-\frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n+1}})$$

$$\Rightarrow h(x) = \sqrt{1+x} e^{-\frac{x}{n}} (1 - e^{-\frac{x}{n+1} + \frac{x}{n}})$$

$$\Rightarrow h(x) = \sqrt{1+x} e^{-\frac{x}{n}} (1 - e^{\frac{x}{n(n+1)}})$$

on vérifie $h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ e^{\frac{x}{n(n+1)}} = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

x	-1	0		
h(x)	0	+	0	-
Position de E_n par rapport à E_{n+1}	$E_n = E_{n+1}$	E_n au-dessus de E_{n+1}	$E_n = E_{n+1}$	E_n au-dessous de E_{n+1}

4) $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1+x} dx$, $A_n = \int_{-1}^1 f_n(x) dx$

a) $I = \int_{-1}^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 0)$

$\Rightarrow I = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

b) $(1 - e^{\frac{1}{n}}) - (e^{-\frac{1}{n}} - 1) = -e^{\frac{1}{n}} + 2 - e^{-\frac{1}{n}} = -e^{\frac{1}{n}} (e^{\frac{1}{n}} - 2e^{-\frac{1}{n}} + 1) = -e^{\frac{1}{n}} (e^{\frac{1}{n}} - 1)^2 \leq 0$
 $\Rightarrow 1 - e^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{1}{n}} - 1$

c) $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{n} \leq -\frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}$

et $\Rightarrow e^{-\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow -e^{\frac{1}{n}} \leq -e^{-\frac{x}{n}} \leq -e^{-\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow 1 - e^{\frac{1}{n}} \leq 1 - e^{-\frac{x}{n}} \leq 1 - e^{-\frac{1}{n}}$

d'où $e^{-\frac{1}{n}} - 1 \leq e^{-\frac{x}{n}} - 1 \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$

ou $1 - e^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{x}{n}} - 1$

$1 - e^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{x}{n}} - 1 \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$

$\Rightarrow |e^{-\frac{x}{n}} - 1| \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$ d'où $|1 - e^{-\frac{x}{n}}| \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$

d) $A_n - I = \int_{-1}^1 f_n(x) dx - \int_{-1}^1 \sqrt{1+x} dx = \int_{-1}^1 (f_n(x) - \sqrt{1+x}) dx$

$\Rightarrow A_n - I = \int_{-1}^1 \sqrt{1+x} (e^{-\frac{x}{n}} - 1) dx$

on $|e^{-\frac{x}{n}} - 1| \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$

$-(e^{\frac{1}{n}} - 1) \leq e^{-\frac{x}{n}} - 1 \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$

$\sqrt{1+x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{1+x} (e^{\frac{1}{n}} - 1) \leq \sqrt{1+x} (e^{-\frac{x}{n}} - 1) \leq \sqrt{1+x} (e^{\frac{1}{n}} - 1)$

$\Rightarrow -(e^{\frac{1}{n}} - 1) \int_{-1}^1 \sqrt{1+x} dx \leq A_n - I \leq (e^{\frac{1}{n}} - 1) \int_{-1}^1 \sqrt{1+x} dx$

$\Rightarrow |A_n - I| \leq (e^{\frac{1}{n}} - 1) I \Rightarrow |A_n - I| \leq \frac{4\sqrt{2}}{3} (e^{\frac{1}{n}} - 1)$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1) = e^0 - 1 = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n - I) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} I$

or $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I = I = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Concl: A_n converge vers $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Exercice 7: BAC 2004 - Session de Contrôle

$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ Df = $\mathbb{R}_2$

a) $f \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$

$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$	$f(1) = \ln 1 = 0$
f(x)	$+\infty$	0	$+\infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$
f(x)	$+\infty$	0	$+\infty$	car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 2x + 2) = +\infty$

b) On D: $x=1$ Axe de symétrie par $\in$

car $(2-x) \in \mathbb{R}$ et $f(2-x) = \ln((2-x)^2 - 2(2-x) + 2)$

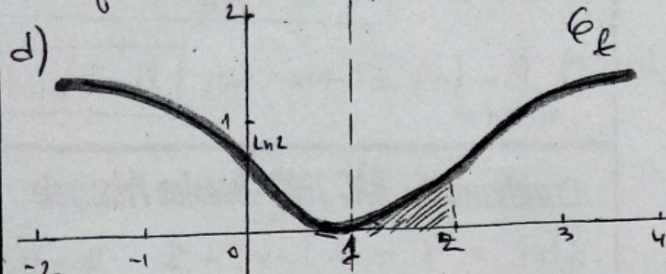
$\Rightarrow f(2-x) = \ln(4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

$\Rightarrow f(2-x) = f(x)$ d'où D: $x=1$: axe de sym.

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}))}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ f admet 2 BI en $(+\infty)$ de dir $(0, \infty)$



$$2) f(x) = \int_1^{1+x} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} \quad D_f = [0, \frac{\pi}{2}]$$

a) on pose $g: t \mapsto \frac{1}{t^2 - 2t + 2} \in \text{fon } \mathbb{R}$

$\Rightarrow g$ admet une primitive $G \in \text{fon } \mathbb{R} / G'(t) = g(t)$

$$\Rightarrow f(x) = [G(t)]_1^{1+x} = G(1+x) - G(1)$$

or $x \mapsto 1+x \in \text{fon } [0, \frac{\pi}{2}]$
et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], (1+x) \in \mathbb{R} = D_g \Rightarrow f \in \text{fon } [0, \frac{\pi}{2}]$

$$f'(x) = (G(1+x))' - (G(1))' = (1+x^2) \cdot g(1+x) - 0 = \frac{(1+x^2)}{(1+x^2)^2 - 2(1+x^2) + 2} \cdot 1$$

$$= \frac{1+x^2}{1+2x^2+x^4-2-2x^2+2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 1}$$

b) $f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x + h$

or $f(0) = \int_1^1 g(t) dt = 0 \Rightarrow h = 0$ donc $\boxed{f(x) = x}$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_1^{1+\frac{\pi}{4}} g(t) dt = \int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \frac{\pi}{4}$$

alors $\boxed{\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \frac{\pi}{4}}$

3) a) soit $I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \ln(x^2 - 2x + 2) dx$

on pose $u(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) \rightarrow u'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$
 $v'(x) = 1 \rightarrow v(x) = x$

$$\Rightarrow I = \left[x \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) \right]_1^2 - 2 \int_1^2 \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} dx$$

$$\Rightarrow I = 2 \ln 2 - 1 \ln 1 - 2 \int_1^2 \left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} \right) dx$$

b) $1 + \frac{x-1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{x^2-2x+2}$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} = 1 + \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

$$c) A = \int_1^2 f(x) dx = 2 \ln 2 - 2 \int_1^2 \left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} \right) dx$$

$$\Rightarrow A = 2 \ln 2 - 2 \int_1^2 \left(\frac{-1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2} + 1 \right) dx$$

$$\Rightarrow A = 2 \ln 2 + 2 \int_1^2 \frac{dk}{x^2 - 2x + 2} - \int_1^2 \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} dx - 2 \int_1^2 1 dx$$

$$= 2 \ln 2 + 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) - \left[\ln(x^2 - 2x + 2) \right]_1^2 - 2[x]_1^2$$

$$\Rightarrow A = 2 \ln 2 + \frac{\pi}{2} - \ln 2 + \ln 1 - 2(2-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2} \quad (\text{ua})$$

Problème 8: BAC 2003 - Session Principale

1) $h(x) = x - \ln x \quad D_h =]0, +\infty[$

a) $h \in \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\quad h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$x \backslash 0$	1	$+\infty$
h'	$-$	$+$
h	$+\infty$	1

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$
 $h(1) = 1$

b) $h(1) = 1$: minimum absolu de f
 $\Rightarrow \forall x > 0, \quad \boxed{h(x) \geq 1}$

2) $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

a) or $\forall x > 0, h(x) \geq 1 \Rightarrow h(x) \neq 0$

$\Rightarrow f \in \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\Rightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ en } 0^+ \quad \text{Cml: } D_f = [0, +\infty[$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x - \ln x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 \ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow f$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ en 0^+ et f admet en $\mathcal{O}(0,0)$ une demi-tangente verticale dirigée haut

3) $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt \quad D_F = [0, +\infty[$

1) a) f étant $\in \mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[\Rightarrow f$ admet une primitive $\varphi \in \mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ / $\varphi'(t) = f(t)$

$$\text{donc } F(x) = \left[\varphi(t) \right]_x^{2x} = \varphi(2x) - \varphi(x)$$

$$\text{or } \varphi \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$\text{et } x_1 \mapsto 2x_1 \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } (2x) \in \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow F \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$b) \forall x \in \mathbb{R}_+; F'(x) = [\varphi(2x)]' - [\varphi(x)]'$$

$$\Rightarrow F'(x) = 2\varphi'(2x) - 1 \cdot \varphi'(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

$$\cdot \text{Si } x > 0 \Rightarrow F'(x) = \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln x}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{2x - 2\ln x - 2x + \ln 2x}{h(2x) \cdot h(x)}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{-2\ln x + \ln 2 + \ln x}{h(2x) \cdot h(x)}$$

$$\Rightarrow \forall x > 0, F'(x) = \frac{\ln 2 - \ln x}{h(2x) \cdot h(x)}$$

$$\cdot \text{Si } x = 0, F'(0) = 2f(0) - f(0) = 0$$

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \left[\ln t \right]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln x$$

$$= \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln 2 \Rightarrow \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln 2$$

$$\Rightarrow \forall x \geq 1, 0 \leq F(x) - \ln 2 \leq \frac{\ln 2x}{x - \ln x}$$

$$\text{or } \frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t} = \frac{\ln t}{t \cdot h(t)}$$

$$\text{a } x \leq t \leq 2x \text{ et } x \geq 1 \text{ or } h \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } [1, +\infty[$$

$$\Rightarrow h(x) \leq h(t) \leq h(2x)$$

$$x \leq t \leq 2x$$

$$\text{Produit: } x h(x) \leq t h(t) \leq 2x h(2x)$$

$$\text{donc } 0 \leq \frac{1}{t h(t)} \leq \frac{1}{x h(x)}$$

$$\text{et } \ln x \leq \ln t \leq \ln 2x$$

$$\text{Produit: } 0 \leq \frac{\ln t}{t h(t)} \leq \frac{\ln(2x)}{x h(x)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(t) - \frac{1}{t} \leq \frac{\ln(2x)}{x h(x)}$$

$$\text{donc } 0 \leq \int_x^{2x} f(t) dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{\ln(2x)}{x h(x)} dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq F(x) - \ln 2 \leq \frac{\ln(2x)}{x h(x)} \cdot [t]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow 0 \leq F(x) - \ln 2 \leq \frac{\ln(2x)}{x - \ln x}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(2x)}{2x}}{\frac{x}{2x} - \frac{\ln x}{2x}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - \ln 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln 2$$

$$b) \text{ a) or } F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{h(t)} dt$$

$$\text{or } h \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow h(1) \leq h(t) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{donc } \frac{1}{h(t)} \leq h(1) = 1$$

$$\text{donc } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{h(t)} dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dt$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) \leq [t]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} \leq \ln 2$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln 2$$

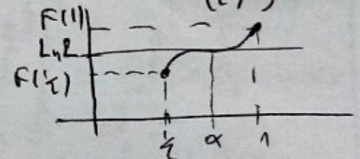
$$b) F \text{ étant } \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \Rightarrow F \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln 2 \text{ et d'après II) 3) or}$$

$$F(1) - \ln 2 \geq 0 \Rightarrow F(1) \geq \ln 2$$

alors il existe au moins $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tel que

$$F(\alpha) = \ln 2$$

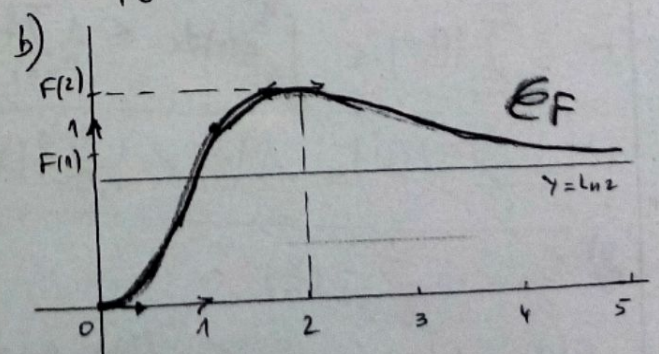


$$c) \text{ a) on résoud: } F'(x) = 0 \text{ et } x > 0$$

$$\Rightarrow \ln 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{or } \forall t > 0, h(t) \geq 1 \Rightarrow h(2x) > 0 \text{ et } h(x) > 0$$

x	0	2	+
F'	0	+	-
F	0	F(2)	ln 2



$$d) \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad V_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{t}{t - \ln t} dt$$

a) Maq $\forall t > 0 \quad \frac{t}{t - \ln t} \leq t$
 ma $\forall t > 0, h(t) \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{h(t)} \leq 1$
 or $t > 0 \Rightarrow \frac{t}{h(t)} < t \Leftrightarrow \boxed{\frac{t}{t - \ln t} \leq t}$

b) $V_{n+1} - V_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^1 \frac{t}{t - \ln t} dt - \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{t}{t - \ln t} dt$
 $= \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{t - \ln t} dt > 0$

car $\frac{t}{h(t)} > 0$ et $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow V_{n+1} - V_n > 0$

d'où V_n strict $\nearrow$ sur $\mathbb{N}^*$

c) maq $\frac{t}{t - \ln t} \leq t \Rightarrow 0 \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{t}{t - \ln t} dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 t dt$

$\Leftrightarrow 0 \leq V_n \leq \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow V_n$ est majorée par $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow V_n$ converge

et converge vers $l \in [0, \frac{1}{2}]$

2) $W_n = \int_1^n \frac{t}{t - \ln t} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) $\frac{t}{t - \ln t} - (1 + \ln t) = \frac{t - (1 + \ln t)(t - \ln t)}{t - \ln t}$

$= \frac{t - t + t \ln t - t \ln t + (\ln t)^2}{t - \ln t}$

$= \frac{\ln t \cdot [1 - (t - \ln t)]}{t - \ln t} = \frac{\ln t \cdot [1 - h(t)]}{t - \ln t}$

or $t \geq 1 \Rightarrow \ln(t) > 0$ et $h(t) \geq 1 \Rightarrow 1 - h(t) \leq 0$

$\Rightarrow \frac{\ln t \cdot [1 - h(t)]}{t - \ln t} \leq 0 \Rightarrow \boxed{\frac{t}{t - \ln t} \leq 1 + \ln t}$

alors $\int_1^n \frac{t}{t - \ln t} dt \leq \int_1^n (1 + \ln t) dt$

$\Leftrightarrow W_n \leq \left[t + t \ln t - t \right]_1^n = n \ln n$

car : $\boxed{W_n \leq n \ln n}$

b) $\int_1^n \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt = \left[t + \frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_1^n$

$= n + \frac{1}{2} \ln^2(n) - 1$

$n \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln^2(n) - 1 \geq 1$

d'où $n + \frac{1}{2} \ln^2(n) - 1 \geq n$
 or $W_n \geq n + \frac{1}{2} \ln^2(n) - 1 \geq n$
 or $W_n \leq n \ln n$

$\forall n \geq 5; \boxed{n \leq W_n \leq n \ln n}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n) = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = +\infty}$

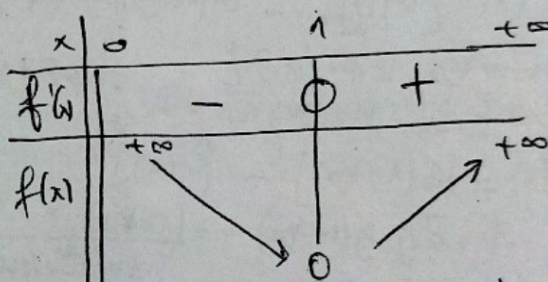
Problème 9 : BAC 2002 - Session Principale

$f(x) = x^2 - 2 \ln x - 1 \quad D_f =]0, +\infty[$

I) a) $f \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2 \ln x - 1) = +\infty$

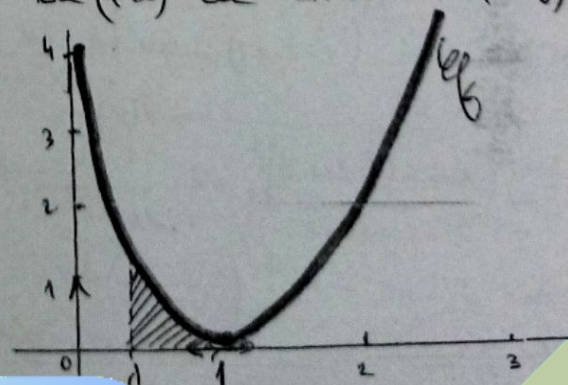
alors $x = 0$ Asymptote verticale

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 \ln x - 1)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2 \ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \quad (BI)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ admet une BI au voisinage de $(+\infty)$ de direction $(0, 1)$



2) $\lambda \in]0, 1[$
 a) $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx = \int_{\lambda}^1 (x^2 - 2\lambda x + 1) dx$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 - 2(\lambda x^2 - x) - x \right]_{\lambda}^1$$

$$\Rightarrow A(\lambda) = \left(\frac{1}{3} + 2 - 1 \right) - \left(\frac{1}{3} \lambda^3 - 2\lambda^2 \lambda + \lambda \right)$$

$$\Rightarrow A(\lambda) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda \quad (\text{car})$$

b) $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \ln(\lambda) = 0 \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda) = \frac{4}{3}$

1) a) $n \geq 2, 1 \leq k \leq n-1$

On a $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

ma $1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} \leq 1$

et $1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow 2 \leq k+1 \leq n \Rightarrow \frac{k+1}{n} \leq 1$

$\Rightarrow \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \subset]0, 1[$ et f est

donc $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$

f est croissante $\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$

car $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx$

$\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \left[x \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \left[x \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}$

$\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \left[\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right] \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \left[\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right]$

$\Rightarrow \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

b) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq A\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

c) $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

a) On a $A\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + A\left(\frac{1}{n}\right)$

car $\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

a) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq A\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow S_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq A\left(\frac{1}{n}\right)$

alors $S_n \leq A\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ ①

et $\sum_{k=2}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$

or $f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = S_n$

et comme $A\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\Rightarrow A\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ ②

① et ② $\Rightarrow A\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq A\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} A\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda) = \frac{4}{3}$

et $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n^2} - 2\lambda\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right]$

$= \frac{1}{n^3} + \frac{2\lambda n}{n} - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n^3} + \frac{2\lambda n}{n} - \frac{1}{n} \right] = 0$

$\Rightarrow$ d'après le théorème de Gendarmes

on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{4}{3}$

3) a) On a $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

pour $n=2 \Rightarrow \sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = \frac{2(2-1)(2-1)}{6} = 1$

• Supposons $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ vrai

• On a $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(n)(2n+1)}{6}$?

$$\begin{aligned}
 E_n &= \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 \\
 &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2 \\
 &= \frac{n(n-1)(2n-1) + 6n^2}{6} \\
 &= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

$$\text{Concl: } \forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$\begin{aligned}
 b) S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k^2}{n^2} - 2 \ln\left(\frac{k}{n}\right) - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{2}{n} \left[\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] - \frac{1}{n} \cdot (n-1) \\
 &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{2}{n} \ln\left(\frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-1)}{n^{n-1}} \right) - 1 + \frac{1}{n} \\
 &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} - \frac{2}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - 1 + \frac{1}{n} \\
 \Rightarrow S_n &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{2}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) - 1 + \frac{1}{n} \\
 &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{2}{n} \ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n - 1 + \frac{1}{n} \\
 \Rightarrow S_n &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + 2 \ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right) - 1 + \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

c) Déduisons $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \right)$?

$$\begin{aligned}
 \text{on pose } U_n &= \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \\
 \Rightarrow S_n &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + 2 \ln(U_n) - 1 + \frac{1}{n} \\
 \Rightarrow 2 \ln(U_n) &= S_n + 1 - \frac{1}{n} - \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} \\
 \Rightarrow \ln(U_n) &= \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{2n^2 - 3n + 1}{12n^2} \\
 \text{alors } U_n &= e^{\frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{2n^2 - 3n + 1}{12n^2}} \\
 \text{on } \lim S_n &= \frac{4}{3} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{12n^2} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim U_n = e^{\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = e^1 = e$$

$$\text{Concl: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \right) = e$$

Problème 10: BAC 2001 - Session Principale

I) $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

a) $f \in \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}$ car $e^x + e^{-x} \neq 0$

$$f'(x) = \frac{-2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{-2e^{-x}(e^{2x} - 1)}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

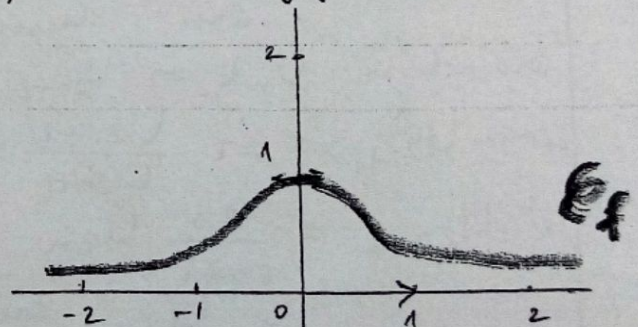
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	1	0

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 0 \\
 f(0) &= \frac{2}{1+1} = 1
 \end{aligned}$$

d'après le TV de f on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 < f(x) \leq 1$$

b) $y = 0$ Asymptote horizontale ($\neq \infty$)



2) $g(x) = \ln(\tan x)$ / $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

a) on a : $x \mapsto \tan x \in]0, +\infty[$ et $(\tan x) \in]0, +\infty[\Rightarrow g \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$g'(x) = \frac{(\tan x)'}{\tan x} = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}$$

b) $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ strict $\nearrow$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\tan x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\tan x) = +\infty$$

$g \leq$ strict $\nearrow$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow g$ réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$

alors g admet une fonction réciproque $g^{-1} = h$ définie sur $\mathbb{R}$.

on pose $h(0) = x \Rightarrow g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln(\tan x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \text{alors} \quad \boxed{h(0) = \frac{\pi}{4}}$$

c) on a $g \leq$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $g'(x) \neq 0$
 $\Rightarrow h \leq$ sur $\mathbb{R}$

$$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(h(x))}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{\tan(h(x))}{1 + \tan^2(h(x))}$$

$$\text{or } g(h(x)) = x \Leftrightarrow \ln(\tan(h(x))) = x$$

$$\Leftrightarrow \tan(h(x)) = e^x \Rightarrow h'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2} f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{2h'(x) = f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cdot \forall t \in \mathbb{R}; f(t) = 2h'(t)$$

$$\text{alors } \int_0^x f(t) dt = 2 \int_0^x h'(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t) dt = 2[h(t)]_0^x = 2(h(x) - h(0))$$

$$\text{or } h(0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\int_0^x f(t) dt = 2h(x) - \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{D) } F_n(x) = \int_0^x f(t) dt \quad / x \in [0, +\infty[$$

$$\text{A) } F_n(x) = \int_0^x f(t) dt = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2h(x) - \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{2) } K(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \quad D_K = \mathbb{R}$$

$$K \leq \text{ sur } \mathbb{R} \quad \text{car } e^x + e^{-x} \neq 0$$

$$K'(t) = \frac{(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2} = [f(t)]^2$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int_0^x f^2(t) dt = \int_0^x K'(t) dt \\ &= [K(t)]_0^x = K(x) - K(0) \end{aligned}$$

$$\text{or } K(0) = 0 \Rightarrow \boxed{F_2(x) = K(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x) = 1}$$

3a) F_n est la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $f''(t)$ qui s'annule en 0
 $\Rightarrow$ on a $\begin{cases} F_n \leq \text{ sur } [0, +\infty[\\ F_n'(x) = f''(x) \\ F_n(0) = 0 \end{cases}$

donc $F_n \leq \text{ sur } [0, +\infty[\Rightarrow F_n \leq \text{ sur } \mathbb{R}_+$

$$F_n'(x) = f''(x) \geq 0 \quad \text{car } 0 < f(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow F_n([0, +\infty[) = [F_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)]$$

$$\text{or } F_n(0) = 0 \Rightarrow \boxed{F_n([0, +\infty[) = [0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)]}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(t) - 2e^{-t} &= \frac{2}{e^t + e^{-t}} - 2e^{-t} \\ &= \frac{2 - 2 - 2e^{-2t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{-2e^{-2t}}{e^t + e^{-t}} < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 0, f(t) < 2e^{-t}$$

$$\cdot \text{on a d'après I) 1a) } 0 < f(t) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < f''(t) \leq 1$$

$$\text{or } 0 < f(t) < 2e^{-t}$$

$$\Rightarrow 0 < f''(t) \leq 2e^{-t}$$

$$\text{donc } 0 < \int_0^x f^n(t) dt \leq 2 \int_0^x e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow F_n(x) \leq 2 [-e^{-t}]_0^x$$

$$\Rightarrow F_n(x) \leq 2 - 2e^{-x} \leq 2$$

$$\text{car: } \forall x \geq 0, \boxed{F_n(x) \leq 2}$$

F_n est n^o sur $[0, +\infty[$ et majorée

$$\text{par } 2 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1} \text{ (finie)}$$

$$c) f(t) - e^{-t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} - e^{-t} = \frac{2 - 1 - e^{-2t}}{e^t + e^{-t}}$$

$$= \frac{e^{-2t}(e^{2t} - 1)}{(e^t + e^{-t})} \geq 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\text{alors } \forall t \geq 0, f(t) \geq e^{-t}$$

$$\text{donc } [f(t)]^n \geq e^{-nt}$$

$$\text{alors } \int_0^x f^n(t) dt \geq \int_0^x e^{-nt} dt$$

$$\Rightarrow F_n(x) \geq -\frac{1}{n} [e^{-nt}]_0^x$$

$$\Rightarrow \boxed{F_n(x) \geq \frac{1 - e^{-nx}}{n}} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-nx}}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) \geq \frac{1}{n} \text{ alors } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = U_n$$

$$a) U_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$U_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x) = 1$$

$$b) f^{n+1}(t) \cdot f'(t) \cdot k(t) = f^n(t) \cdot \frac{2}{e^t + e^{-t}} \cdot \frac{(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} \cdot (e^t - e^{-t})$$

$$= f^n(t) \cdot \frac{2}{e^t + e^{-t}} \cdot \frac{-(e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2}$$

$$= f^n(t) \cdot \left[\frac{4 - (e^t + e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2} \right] = f^n(t) [f^2(t) - 1]$$

$$\Leftrightarrow f^{n+1}(t) \cdot f'(t) \cdot k(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t)$$

$$c) I = \int_0^x f^{n+1}(t) \cdot f'(t) \cdot k(t) dt$$

$$\text{on pose } u(t) = k'(t) \rightarrow u'(t) = k''(t) = f(t)$$

$$v'(t) = f^{n+1}(t) \cdot f(t) \rightarrow v(t) = \frac{1}{n+2} f^{n+2}(t)$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{1}{n+2} f^{n+2}(t) \cdot k(t) \right]_0^x - \frac{1}{n} \int_0^x f^{n+2}(t) dt$$

$$= \frac{1}{n+2} f^{n+2}(x) \cdot k(x) - \frac{1}{n} \int_0^x f^{n+2}(t) dt$$

$$\text{and: } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \geq 0$$

$$\int_0^x f^{n+1}(t) \cdot f'(t) \cdot k(t) dt = \frac{1}{n} k(x) \cdot f^n(x) - \frac{1}{n} \int_0^x f^{n+2}(t) dt$$

$$d) \text{ on a } f^{n+1}(t) \cdot f'(t) \cdot k(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^x f^{n+1}(t) \cdot f'(t) \cdot k(t) dt = \int_0^x f^{n+2}(t) dt - \int_0^x f^n(t) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} k(x) \cdot f^n(x) - \frac{1}{n} \int_0^x f^{n+2}(t) dt = \int_0^x f^{n+2}(t) dt - \int_0^x f^n(t) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} k(x) \cdot f^n(x) - \frac{1}{n} F_{n+2}(x) = F_{n+2}(x) - F_n(x)$$

$$\Rightarrow k(x) \cdot f^n(x) - F_{n+2}(x) = n F_{n+2}(x) - n F_n(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{(n+1) F_{n+2}(x) - n F_n(x) = k(x) \cdot f^n(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = U_n \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{n+2}(x) = U_{n+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0^n = 0$$

$$\Rightarrow (n+2) U_{n+2} - n U_n = 0 \Rightarrow \boxed{U_{n+2} = \frac{n}{n+2} U_n}$$

$$4) a) \text{ on a } \forall p \in \mathbb{N}^* \quad U_{p+2} = \frac{p}{p+2} U_p$$

Par induction:

$$\text{Pm } p=1 \rightarrow U_3 = \frac{1}{2} U_1$$

$$p=3 \rightarrow U_5 = \frac{3}{4} U_3$$

$$p=5 \rightarrow U_7 = \frac{5}{6} U_5$$

$\vdots$

$$p=2n-1 \rightarrow U_{2n+1} = \frac{2n-1}{2n} U_{2n-1}$$

$$\text{donc: } U_{2n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} \cdot U_1$$

$$\text{on } U_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{U_{2n+1} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Écrivons maintenant les termes paires

$$\text{ma } \forall p \in \mathbb{N}^* \quad U_{p+2} = \frac{p}{p+1} U_p \Rightarrow$$

$$p=2 \longrightarrow U_4 = \frac{2}{3} U_2$$

$$p=4 \longrightarrow U_6 = \frac{4}{5} U_4$$

$$p=6 \longrightarrow U_8 = \frac{6}{7} U_6$$

$$\vdots$$

$$p=2n \longrightarrow U_{2n+2} = \frac{2n}{2n+1} U_{2n}$$

Produit : $U_{2n+2} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2n}{2n+1} U_2$

$$\text{or } U_2 = 1 \Rightarrow U_{2n+2} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1)}$$

b) On a $U_n \downarrow$

ma $\forall t \geq 0, \quad 0 < f(t) \leq 1$

$f'(t) \geq 0 \Rightarrow 0 < f''(t) \leq f'(t)$

pour $0 \leq x \Rightarrow 0 < \int_0^x f''(t) dt \leq \int_0^x f'(t) dt$

$\Rightarrow 0 < f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

also $f_n \searrow$ strict $\downarrow$

c) On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2n}{2n+1} \leq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} \leq 1$

ma déjà $U_n \downarrow \Rightarrow U_{2n+2} \leq U_{2n+1}$

comme $U_{2n+1} > 0 \Rightarrow \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} \leq 1$ ①

et $U_{2n+2} = \frac{2n}{2n+1} U_{2n}$

a. $U_{2n+1} \leq U_{2n}$ car $U_n \downarrow$

$\Rightarrow \frac{2n}{2n+1} U_{2n+1} \leq \frac{2n}{2n+1} U_{2n}$

don $\frac{2n}{2n+1} U_{2n+1} \leq U_{2n+2}$

comme $U_{2n+1} > 0 \Rightarrow \frac{2n}{2n+1} \leq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}$ ②

Donc ② $\Rightarrow \frac{2n}{2n+1} \leq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} \leq 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} = 1$

d) on pose : $V_n = \left[\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1)} \right]^2 \cdot \frac{2}{2n+1}$

Ma $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \pi$

ma $\frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} = \frac{\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)(2n+1)}}{\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-1)}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)}} \cdot \frac{2}{2n+1}$

$\Rightarrow \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} = \left[\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$

$\Rightarrow \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} = \left[\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)} \right]^2 \cdot \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{\pi}$

$\Leftrightarrow \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} = V_n \cdot \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} = 1$

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{V_n}{\pi} \right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \pi$

Concl $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)} \right]^2 \cdot \frac{2}{2n+1} = \pi$

Problème 11: BAC 2001 - Session de Contrôle

A) 1) $g(x) = (1-x)e^{-x} + 1, \quad \text{Dg} = \mathbb{R}$

$g \in \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}$,

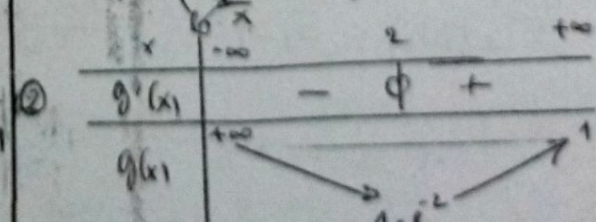
$g'(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$

on résoud : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(1-x)e^{-x} + 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x}{e^x} + 1 \right)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} + 1 \right) = 1, \quad g(2) = 1 \cdot e^{-2}$



$1 - e^{-2}$: minimum absolu pour $g(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 1 - e^{-2} > 0 \Rightarrow$

2) $f(x) = x e^{-x} + x$, $D_f = \mathbb{R}$

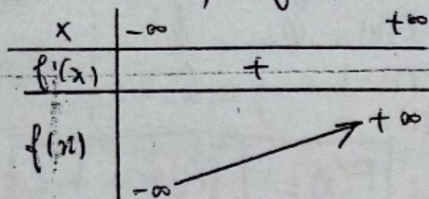
a) $f \equiv \Delta$ sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + x \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{-x} + x) = -\infty$

$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} + 1 = (1-x) e^{-x} + 1 = g(x)$

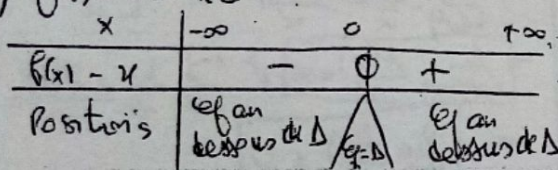
$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$



b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\Rightarrow \Delta: y = x$ Asymptote oblique en $(+\infty)$.

c) $f(x) - x = x e^{-x}$

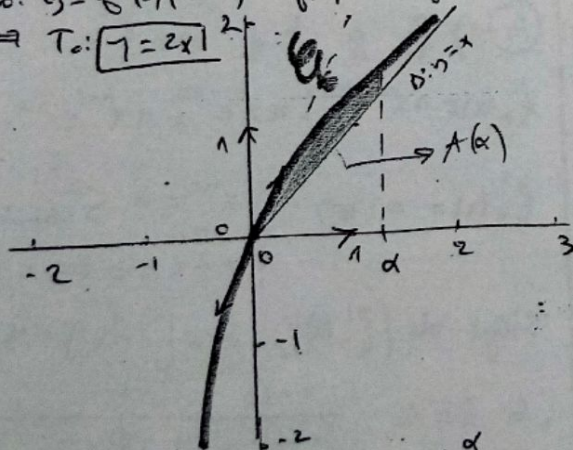


d) BI en $(-\infty)$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{-x} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 1) = +\infty$

$\Rightarrow$ f admet une BI en $(-\infty)$ de direction $(0, 1)$

T₀: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ or $f'(0) = 2$

$\Rightarrow T_0: y = 2x$



3) a) $A(x) = \int_0^x (f(t) - t) dt = \int_0^x t e^{-t} dt$

on pose $u(t) = t \rightarrow u'(t) = 1$

$v'(t) = e^{-t} \rightarrow v(t) = -e^{-t}$

$\Rightarrow A(x) = [-t e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt = [-t e^{-t} - e^{-t}]_0^x$

$\Rightarrow A(x) = (-x e^{-x} - e^{-x}) - (0 - 1) = 1 - (x+1) e^{-x}$

b) $A(1) = 1 - 2e^{-1}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - (x+1) e^{-x} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x+1}{e^x} \right) = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 1$

3) $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$, $D_f = [0, +\infty)$

1) $F_1(x) = \int_0^x t e^{-t} dt = A(x) = 1 - (x+1) e^{-x}$

2) a) $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$

on pose $u(t) = t^n \rightarrow u'(t) = n t^{n-1}$

$v'(t) = e^{-t} \rightarrow v(t) = -e^{-t}$

$\Rightarrow F_n(x) = [-t^n e^{-t}]_0^x + n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt$

$\Rightarrow F_n(x) = -x^n e^{-x} + n F_{n-1}(x)$ $\forall n \geq 2$

b) Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $F_n(x) = n! \left[1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right]$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = 1$: $F_1(x) = 1 - \frac{x^0}{0!} e^{-x} - \frac{x^1}{1!} e^{-x} = 1 - (x+1) e^{-x}$ vérifie

Supposons que $F_n(x) = n! \left[1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right]$ vérifie

Deq: $F_{n+1}(x) = (n+1)! \left[1 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right]$

en effet: $F_{n+1}(x) = -x^{n+1} e^{-x} + (n+1) F_n(x)$

$\Rightarrow F_{n+1}(x) = -x^{n+1} e^{-x} + (n+1) \cdot n! \left[1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right]$

$= -x^{n+1} e^{-x} + (n+1)! \left[1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right]$

$\Rightarrow F_{n+1}(x) = (n+1)! \left[1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} \right]$

$\Rightarrow F_{n+1}(x) = (n+1)! \left[1 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right]$

Concl: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $F_n(x) = n! \left[1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right]$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k e^{-x}}{k!} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!} \frac{x^k}{e^x}$

$= \frac{1}{k!} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{k!} \cdot 0 = 0$ (k : constante)

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = n!$

$$3) \text{ car } 0 \leq t \leq x \Rightarrow -x \leq -t \leq 0$$

$$e^1 \Rightarrow e^{-x} \leq e^{-t} \leq 1 \Rightarrow$$

$$0 + t \geq 0 \Rightarrow t^n e^{-x} \leq t^n e^{-t} \leq t^n$$

$$\text{comme } 0 < x \Rightarrow \int_0^x t^n e^{-x} dt \leq \int_0^x t^n e^{-t} dt \leq \int_0^x t^n dt$$

$$\Rightarrow e^{-x} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x \leq f_n(x) \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x} \leq f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$4) a) \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{2x^n - nx^{n-1}}{2n!}$$

$$= \frac{x^{n-1}(2x - n)}{2n!} \leq 0 \text{ car } x^n \geq 0$$

$$2x \leq n$$

$$\Rightarrow \frac{x^n}{n!} \leq \frac{1}{2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \forall x \geq 2n$$

b) st p: un entier naturel: $2x \leq n_0 \leq p \leq n$

$$\text{car } \forall p \geq n_0 \Rightarrow \frac{x^p}{p!} \leq \frac{1}{2} \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}$$

par induction: $p = n_0 \Rightarrow \frac{x^{n_0}}{n_0!} \leq \frac{1}{2} \frac{x^{n_0-1}}{(n_0-1)!}$

$$p = n_0 + 1 \Rightarrow \frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!} \leq \frac{1}{2} \frac{x^{n_0}}{n_0!}$$

$$p = n \Rightarrow \frac{x^n}{n!} \leq \frac{1}{2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Produit: $\frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1} \frac{x^{n_0-1}}{(n_0-1)!}$

$$\Rightarrow \forall n \geq 2x, 0 < \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1} \frac{x^{n_0-1}}{(n_0-1)!}$$

$$\text{or } n_0: \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{2} \in]-1, 1[\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1} = 0$$

$$\text{st } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n_0-1}}{(n_0-1)!} = \frac{x^{n_0-1}}{(n_0-1)!} : \text{cte}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1} \cdot \frac{x^{n_0-1}}{(n_0-1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

$$c) \text{ or } f_n(x) = n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}\right)$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = n! \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 \right) \cdot e^x$$

$$\Rightarrow e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$5) a) \text{ car } \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq f_{n+1}(x) \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{par } x=1 \Rightarrow \frac{e^{-1}}{n+1} \leq n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} e^{-1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e^{-1}}{(n+1)}\right) \cdot \frac{1}{n!} \leq 1 - e^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \leq e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \left(\frac{e}{(n+1)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq e \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \left(\frac{e}{(n+1)}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq e \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \quad \text{car } \frac{e}{n+1} < \frac{1}{n!}$$

$$b) d = \frac{1}{n!} < 10^{-2} \Rightarrow n! > 100 \Rightarrow n=5$$

$$\text{car } 5! = 120 \Rightarrow \sum_{k=0}^5 \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^5 \frac{1}{k!} + \frac{1}{5!}$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \leq e \leq 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{2}{5!}$$

Problème 12 : BAC 2000 - Session Principale

$$I) 1) g(x) = x \ln x - x + 1 \quad \text{D}_g = [1, +\infty[$$

$$a) g \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } [1, +\infty[$$

$$g'(x) = \ln x + x \left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x \geq 0$$

x	1	$+\infty$	$g(1) = 0$
$g'(x)$	0	+	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - 1) + 1 = +\infty$
$g(x)$		$+\infty$	

$$b) \text{ car } g([1, +\infty[) = [1, +\infty[$$

$$\Rightarrow \forall x \geq 1, g(x) \geq 1$$

$$2) f(x) = \frac{x-1}{\ln x} \quad \text{si } x > 1$$

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$= f(1) \Rightarrow f \text{ est continue en } 1$$

$$\Rightarrow x \ln(2) \leq f(x) \leq x^2 \ln(2)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^+} x \ln(2) = \ln 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \ln 2 = f(1) \\ \ln x^2 \ln(2) = \ln 2 \quad \Rightarrow F \text{ est en } 1^+ \end{array} \right.$$

$$3) a) \text{ on pose } h(t) = \frac{1}{\ln t} \in \text{ sur }]1, +\infty[\\ \Rightarrow h \text{ admet une primitive } H \in \text{ sur }]1, +\infty[\\ \text{et telle que } H'(t) = h(t)$$

$$\Rightarrow F(x) = [H(t)]_x^{x^2} = H(x^2) - H(x)$$

$$\text{comme } H \in \text{ sur }]1, +\infty[\Rightarrow F \in \text{ sur }]1, +\infty[$$

$$F'(x) = [H(x^2)]' - [H(x)]' \\ = 2x \cdot H'(x^2) - H'(x) = 2x \cdot h(x^2) - h(x) \\ = 2x \cdot \frac{1}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2x}{2 \ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x) \quad \forall x > 1$$

$$b) \text{ on a } F \in \text{ sur } [1, x] \text{ et } F \in \text{ sur }]1, x]$$

$$\Rightarrow \text{d'après le TAF a) } F \in \text{ sur } [1, x]$$

$$\Rightarrow \text{il existe } c \in]1, x[\text{ / } F'(c) = \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$$

$$\Rightarrow F(x) - F(1) = (x-1) \cdot F'(c)$$

$$c) \text{ d de } F \text{ en } 1^+ : \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)F'(c)}{x-1} = \lim_{c \rightarrow 1^+} F'(c) = \lim_{c \rightarrow 1^+} f(c) = f(1) = 1$$

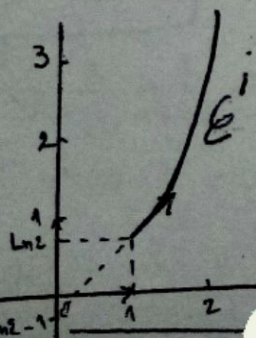
$$\Rightarrow F \text{ est en } 1^+ \text{ et } F'(1) = 1$$

$$4) \forall x > 1, F'(x) > 0$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 1 & +\infty \\ \hline F' & 1 & + \\ \hline f(x) & & \nearrow +\infty \end{array} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

$$T_i: y = F'(1)(x-1) + F(1)$$

$$\Rightarrow y = x-1 + \ln 2$$



$$\textcircled{\text{III}} 1) \text{ On a } F(x) = \int_1^x f(t) dt + \ln 2$$

$$\text{on pose } \varphi(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad D_\varphi =]1, +\infty[$$

est la primitive de f sur $]1, +\infty[$ (qui passe en 1)

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi \in \text{ sur }]1, +\infty[\\ \varphi'(x) = f(x) \\ \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) = \varphi'(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \varphi(x) + k$$

$$\text{a) } F(1) = \ln 2 \quad \varphi(1) = 0 \quad \Rightarrow k = \ln 2 \quad \Rightarrow F(x) = \varphi(x) + \ln 2$$

$$\text{On a : } F(x) = \int_1^x f(t) dt + \ln 2$$

$$2) A(x) = \int_1^x f(t) dt = F(x) - \ln 2$$

$$\text{a) } \frac{x^2 - x}{\ln(x^2)} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{\ln(x^2)} - \frac{\ln 2}{x} \leq \frac{A(x)}{x} \leq \frac{x-1}{\ln x} - \frac{\ln 2}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln(x^2)} - \frac{\ln 2}{x^2} \leq \frac{A(x)}{x^2} \leq \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x} - \frac{\ln 2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{x^2} = 0$$

Problème 13 : BAC 1999 - Session Principale

$$f_n(x) = x^n e^{-nx} \quad D_{f_n} = \mathbb{R}_+ \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\textcircled{\text{A}} 1) f_n \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

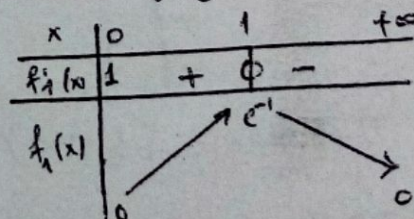
$$f'_n(x) = nx^{n-1} e^{-nx} - nx^n e^{-nx} = nx^{n-1} e^{-nx} (1-x)$$

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^{n-1} = 0 & \leftarrow x=0 \text{ sin } n \geq 2 \\ \text{ou} \\ 1-x=0 \Leftrightarrow x=1 \end{cases} \quad \text{Abandon si } n=1$$

$$\text{Signe de } [f'_n(x)] = \text{signe}(1-x) \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$\bullet \text{ Si } n=1$$

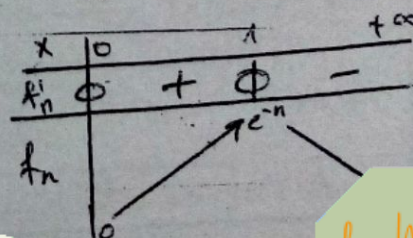
$$f'_1(0) = 1$$



$$\bullet \text{ Si } n \geq 2$$

$$f_n(0) = 0$$

$$f'_n(0) = 0$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x^n e^{-nx} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{nx}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{e^n} \right)^n$$

b) Position de E_n et E_{n+1} :

$$\text{on pose } \varphi(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} e^{-(n+1)x} - x^n e^{-nx}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = x^n e^{-nx} (x e^{-x} - 1) = f_n(x) \cdot [f_1(x) - 1]$$

$$\text{or } \forall x \geq 0, f_n(x) \geq 0 \text{ et } f_1(x) \leq e^{-1}$$

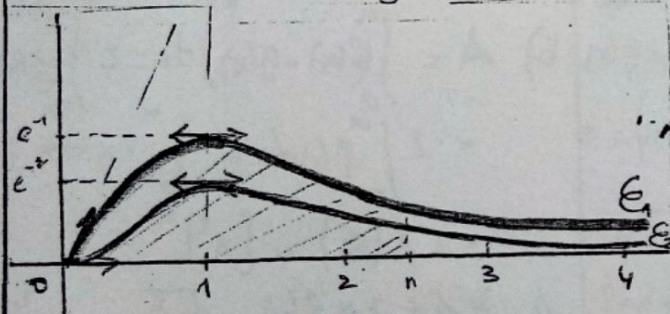
$$\Rightarrow f_1(x) - 1 < 0 \Rightarrow \varphi(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

d'où E_{n+1} est toujours située au dessous de $E_n \quad \forall x \geq 0$

2a) si $n=1 \Rightarrow E_1$ admet en 0 une tangente d'éq $y = f_1'(0)(x-0) + f_1(0)$

$$\Rightarrow \boxed{y=x}$$

si $n \geq 2 \Rightarrow E_n$ admet à droite de 0 (pp) une tangente horizontale.



$$b) S_n = \int_0^n f_1(x) dx = \int_0^n x e^{-x} dx$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u(x) = x & \rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} & \rightarrow v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$S_n = \left[-x e^{-x} \right]_0^n + \int_0^n e^{-x} dx = \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_0^n$$

$$\Rightarrow S_n = \left[-(1+x) e^{-x} \right]_0^n = -(1+n) e^{-n} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = 1 - (1+n) e^{-n}} \quad (\text{ua})$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - (1+n) e^{-n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{n}{e^n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$$

$$B) F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt \quad / x \geq 0$$

$$1) \text{ Ma } \forall t \geq 0; 0 \leq f_1(t) e^{\frac{1}{2}t} \leq 1$$

$$\text{ma } \forall x \geq 0 \quad 0 \leq f_1(x) \leq e^{-1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f_1(t) \leq e^{-1} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} t e^{\frac{1}{2}t} \leq \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow 0 \leq t e^{\frac{1}{2}t} \leq \frac{2}{e} \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 0, \boxed{0 \leq f_1(t) \cdot e^{\frac{1}{2}t} \leq 1}$$

$$2) \text{ Ma } \forall t \geq 0; 0 \leq f_n(t) \leq e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\text{ma } 0 \leq f_1(t) e^{\frac{1}{2}t} \leq 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$e^{\frac{1}{2}t} > 0 \Rightarrow 0 \leq f_1(t) \leq e^{-\frac{1}{2}t}$$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ma E_n est située au dessus de $E_1 \Rightarrow 0 \leq f_n(t) \leq f_1(t) \leq e^{-\frac{1}{2}t}$

$$\Rightarrow \forall t \geq 0, 0 \leq f_n(t) \leq e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$b) \text{ ma } 0 \leq x \Rightarrow 0 \leq \int_0^x f_n(t) dt \leq \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq \left[-2e^{-\frac{1}{2}t} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq 2 - 2e^{-\frac{1}{2}x} \leq 2$$

$$\text{alors } \forall x \geq 0, \boxed{0 \leq F_n(x) \leq 2}$$

$$C) \forall x \geq 0, G_n(u) = \int_0^u t^n e^{-t} dt$$

$$1) \text{ Ma } \forall n \geq 2, G_n(u) = -u^n e^{-u} + n G_{n-1}(u)$$

$$\text{on pose } \begin{cases} A(t) = t^n & \rightarrow A'(t) = n t^{n-1} \\ B'(t) = e^{-t} & \rightarrow B(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow G_n(u) = \left[-t^n e^{-t} \right]_0^u + n \int_0^u t^{n-1} e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{G_n(u) = -u^n e^{-u} + n \cdot G_{n-1}(u)}$$

$$b) \text{ Ma } \forall n \geq 2, G_n(u) = -n! e^{-u} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^k}{k!} + n! G_1(u)$$

$$\text{Pour } n=2, G_2(u) = -2! e^{-u} \frac{u^2}{2!} + 2! G_1(u)$$

$$\text{ma } G_2(u) = -u^2 e^{-u} + 2 G_1(u) \Rightarrow \text{valeur}$$

Supposons $G_n(u) = -n! \cdot e^{-u} \sum_{p=2}^n \frac{u^p}{p!} + n! \cdot G_1(u)$

Donc $G_{n+1}(u) = -(n+1)! \cdot e^{-u} \sum_{p=2}^{n+1} \frac{u^p}{p!} + (n+1)! \cdot G_1(u)$

en effet: $G_{n+1}(u) = -u^{n+1} \cdot e^{-u} + (n+1) G_n(u)$

$$\begin{aligned} G_{n+1}(u) &= -u^{n+1} \cdot e^{-u} + (n+1) \left[-n! \cdot e^{-u} \sum_{p=2}^n \frac{u^p}{p!} + n! \cdot G_1(u) \right] \\ &= -u^{n+1} \cdot e^{-u} - (n+1)! \cdot e^{-u} \sum_{p=2}^n \frac{u^p}{p!} + (n+1)! \cdot G_1(u) \\ &= -(n+1)! \cdot e^{-u} \left[\sum_{p=2}^n \frac{u^p}{p!} + \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \right] + (n+1)! \cdot G_1(u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_{n+1}(u) = -(n+1)! \cdot e^{-u} \sum_{p=2}^{n+1} \frac{u^p}{p!} + (n+1)! \cdot G_1(u)$$

Compl: $\forall n \geq 2$ et $\forall u \geq 0$

$$G_n(u) = -n! \cdot e^{-u} \sum_{p=2}^n \frac{u^p}{p!} + n! \cdot G_1(u)$$

2) On $\lim_{u \rightarrow +\infty} G_n(u) = n!$

on a $G_n(u) = -n! \cdot e^{-u} \sum_{p=2}^n \frac{u^p}{p!} + n! \cdot G_1(u)$

$$\Rightarrow G_n(u) = -n! \cdot \sum_{p=2}^n \frac{u^p e^{-u}}{p!} + n! \cdot G_1(u)$$

or $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^p e^{-u}}{p!} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^p}{e^u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^u}{u^p}} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^p e^{-u}}{p!} = \frac{0}{p!} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}^+$$

$$\Rightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} \sum_{p=2}^n \frac{u^p e^{-u}}{p!} = \sum_{p=2}^n \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{u^p e^{-u}}{p!} \right)$$

$$= \sum_{p=2}^n 0 = (n-1) \cdot 0 = 0$$

car $n-1$: constante.

$$\Rightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} -n! \cdot \sum_{p=2}^n \frac{u^p e^{-u}}{p!} = (-n!) \cdot 0 = 0$$

et $G_1(u) = \int_0^u t e^{-t} dt = \int_0^u f_1(t) dt = S_u$

$$\Rightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} G_1(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} S_u = 1 \quad (\text{d'après A})$$

et $\lim_{u \rightarrow +\infty} (n!) = n!$: constante

$$\Rightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} G_n(u) = n!$$

3) a) On $\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad G'_n(nx) = n^n \cdot f_n(x)$

on a $G_n(nx) = \int_0^{nx} t^n e^{-t} dt$

or $h: t \mapsto t^n e^{-t} \in \text{fon } \mathbb{R}_+ \Rightarrow$ admet une primitive $H \in \text{fon } \mathbb{R}_+ / H'(t) = h(t)$

d'où $G_n(nx) = [H(t)]_0^{nx} = H(nx) - H(0)$

comme $nx \in \text{fon } \mathbb{R}_+ \Rightarrow G_n \in \text{fon } \mathbb{R}_+$

et $(nx) \in \mathbb{R} = \mathbb{D}_H$

$$[G_n(nx)]' = [H(nx)]' - [H(0)]'$$

or $G'_n(nx) = n \cdot H'(nx) - 0 = n \cdot h(nx)$

$$\Rightarrow G'_n(nx) = (nx)^n e^{-nx} = n^n \cdot x^n e^{-nx}$$

et $\forall x: \quad G'_n(nx) = n^n \cdot f_n(x)$

b) On $f_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}} G'_n(nx)$

on a $G'_n(nt) = n^n f_n(t) \Rightarrow f_n(t) = \frac{1}{n^n} G'_n(nt)$

$$\Rightarrow \int_0^x f_n(t) dt = \frac{1}{n^n} \int_0^x G'_n(nt) dt$$

$$\Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{n^n} \left[\frac{1}{n} G_n(nt) \right]_0^x$$

$$\Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}} [G_n(nx) - G_n(0)]$$

or $G_n(0) = \int_0^0 h(t) dt = 0$

$$\Rightarrow \forall x \geq 0, \quad f_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}} G_n(x)$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_n(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} G_n(u) = n!$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{n!}{n^{n+1}}$$



Problème 14 : BAC 1998 - Session Principale

A) $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$

1) a) f existe ssi $\begin{cases} 4x^2 + 1 \geq 0 \\ 2x + \sqrt{4x^2 + 1} > 0 \end{cases}$

ou $1 > 0 \Rightarrow 4x^2 + 1 > 4x^2$

$\Rightarrow \sqrt{4x^2 + 1} > |2x| \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 1} > 2x \\ \sqrt{4x^2 + 1} > -2x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 1} - 2x > 0 \\ \sqrt{4x^2 + 1} + 2x > 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{Df = \mathbb{R}}$ d'où $(-x) \in \mathbb{R}$

$f(x) + f(-x) = \ln(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x) + \ln(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x)$

$= \ln[(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x)]$

$= \ln(4x^2 + 1 - 4x^2) = \ln 1 = 0$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$: impaire

b) on a $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} 4x^2 + 1 > 0 \\ 2x + \sqrt{4x^2 + 1} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{(2x + \sqrt{4x^2 + 1})'}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}}}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}}$

$= \frac{2\sqrt{4x^2 + 1} + 4x}{(2x + \sqrt{4x^2 + 1})\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x)}{(2x + \sqrt{4x^2 + 1})\sqrt{4x^2 + 1}}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}}}$

2) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}))}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}})}{x} \right) = 0$

$\Rightarrow E_f$ admet une branche infinie au voisinage de $(+\infty)$ de direction $(\vec{OC})$

Comme f est impaire $\Rightarrow$ par symétrie par rapport à O , E_f admet une autre branche infinie au voisinage de $(-\infty)$ de direction $(\vec{OC})$ aussi

b) $T_O: y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

ou $f'(0) = 2$ et $f(0) = 0$

$\Rightarrow T_O: \boxed{y = 2x}$

c) Position de E_f et T_O

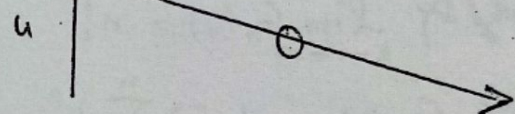
on pose $u(x) = f(x) - y = f(x) - 2x$

$D_u = \mathbb{R}, u'(x) = f'(x) - 2 = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}} - 2$

$\Rightarrow u'(x) = \frac{2 - 2\sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{-8x^2}{\sqrt{4x^2 + 1}(2 + 2\sqrt{4x^2 + 1})}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, u'(x) \leq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
u'	-	0	-

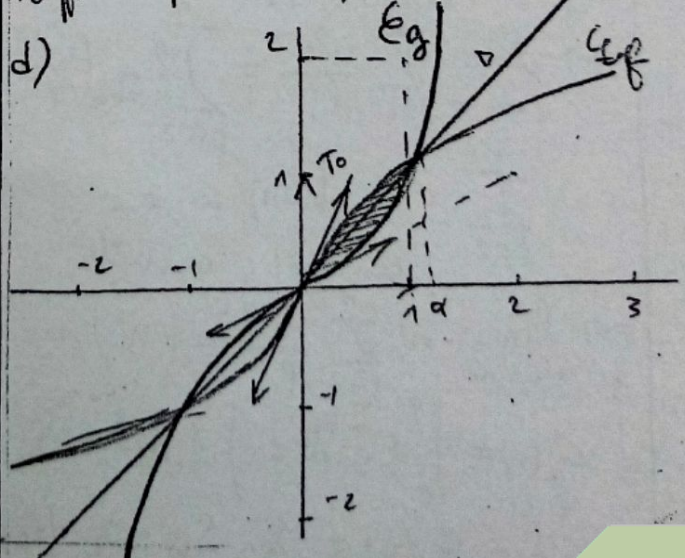


$u(0) = 0 \Rightarrow \forall x \in]-\infty, 0[\Rightarrow u(x) \geq 0$

et $\forall x \geq 0, u(x) \leq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
u(x)	+	0	-

Position de E_f par rapport à T_O



$$3) \lambda > 0 \quad A(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx = \int_0^\lambda \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) dx \quad \lim_{x \rightarrow 0} V(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{f(x)}{x} - 1 \right)$$

$$\text{on pose } u(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) \rightarrow u'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow A(\lambda) = \left[x f(x) \right]_0^\lambda - \int_0^\lambda \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} dx$$

$$\Rightarrow A(\lambda) = \left[x f(x) \right]_0^\lambda - \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}} dx$$

$$\Rightarrow A(\lambda) = \left[x f(x) - \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + 1} \right]_0^\lambda$$

$$\Rightarrow A(\lambda) = \left(\lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} \sqrt{4\lambda^2 + 1} \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow A(\lambda) = \frac{1}{2} + \lambda f(\lambda) - \frac{1}{2} \sqrt{4\lambda^2 + 1} \quad (u.a)$$

B) 1) a) $f \in \text{strict } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R} = \mathbb{I}$

$$b) E_{f^{-1}} = E_g = S_D(E_f) \quad / \Delta: y = x$$

$$c) g = f^{-1} \text{ définie par: } \begin{cases} \forall y \in \mathbb{R} \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ y = g(x) \end{cases}$$

$$\text{on effect: } g(y) = x \Leftrightarrow \ln(2y + \sqrt{4y^2 + 1}) = x$$

$$\Leftrightarrow 2y + \sqrt{4y^2 + 1} = e^x \Leftrightarrow \sqrt{4y^2 + 1} = e^x - 2y$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 + 1 = (e^x - 2y)^2 = e^{2x} - 4ye^x + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow 4ye^x = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{4e^x}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{4} (e^x - e^{-x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) a) g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\text{on pose } V(x) = f(x) - x \quad D_V = \mathbb{R}_+^*$$

$$V \in \text{sur }]0, +\infty[, \quad V'(x) = f'(x) - 1$$

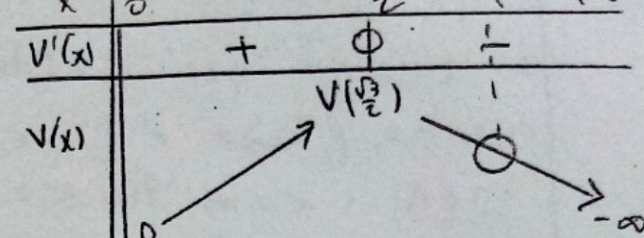
$$\Leftrightarrow V'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}} - 1 = \frac{2 - \sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow V'(x) = \frac{4 - (4x^2 + 1)}{\sqrt{4x^2 + 1} (2 + \sqrt{4x^2 + 1})} = \frac{3 - 4x^2}{D} > 0$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} V(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - x)$$

$$V\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(\sqrt{3} + 2) - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$



• si $x \in]0, \frac{\sqrt{3}}{2}[$, $V \in \text{strict } \nearrow$
 et $0 \notin]0, V(\frac{\sqrt{3}}{2})] \Rightarrow$ l'éq $V(x) = 0$ n'admet pas de solution.

• si $x \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[$, $V \in \text{strict } \searrow$
 et $V(\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[) =]-\infty, V(\frac{\sqrt{3}}{2})]$
 or $0 \in V(\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[) \Rightarrow \exists ! \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} / V(\alpha) = 0$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$$

$$b) A = \int_0^\alpha (f(x) - g(x)) dx = 2 \int_0^\alpha (f(x) - x) dx$$

$$= 2 \int_0^\alpha f(x) dx - \int_0^\alpha 2x dx$$

$$= 2A(\alpha) - [x^2]_0^\alpha$$

$$A = 1 + 2\alpha f(\alpha) - \sqrt{4\alpha^2 + 1} - \alpha^2$$

$$\text{or } f(\alpha) = \alpha \Rightarrow A = (\alpha^2 + 1 - \sqrt{4\alpha^2 + 1}) \quad (u.a)$$

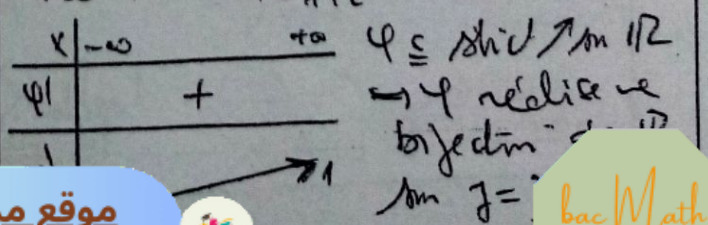
$$c) \varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$1) a) \varphi \in \text{sur } \mathbb{R} \text{ car } e^{2x} + 1 \neq 0$$

$$\varphi'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1 \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$$



b) φ réalise une bijection $\Rightarrow$
 φ admet une fonction réciproque $\varphi^{-1} = h$
 définie par : $\begin{cases} \forall y \in \mathbb{R} \\ \varphi(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in]-1,1[\\ y = h(x) \end{cases}$

en effet : $\varphi(y) = x \Leftrightarrow \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = x$

$\Leftrightarrow e^{2y}-1 = xe^{2y}+x \Leftrightarrow e^{2y}(1-x) = 1+x$

$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} > 0, \forall x \in]-1,1[$

$\Rightarrow 2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

on $y = h(x) \Rightarrow \boxed{h(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{1-x} \cdot \frac{1-x}{1-x} - \frac{2}{1+x} \cdot \frac{1-x}{1-x}}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-x}{1+x}$

$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)} \Rightarrow \boxed{h'(x) = \frac{1}{1-x^2}}$

2) $\forall x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$S_n(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

a) on a $S_n(x)$ p.s. $= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$S'_n(t) = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots + t^{2n-2}$
 $= 1 + t^2 + (t^2)^2 + (t^2)^3 + \dots + (t^2)^{n-1}$

$\Rightarrow S'_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (t^2)^k = \frac{1-(t^2)^n}{1-t^2} = \frac{1-t^{2n}}{1-t^2}$

$\Leftrightarrow S'_n(t) = \frac{1}{1-t^2} - \frac{t^{2n}}{1-t^2} = h'(t) - \frac{t^{2n}}{1-t^2}$

on $S'_n(t) \in m[0, \pi] / x \in]0,1[$

et $h'(t) \in m[0, \pi]$

$\frac{t^{2n}}{1-t^2} \in m[0, \pi]$

$\int_0^x S'_n(t) dt = \int_0^x h'(t) dt - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$

$\Rightarrow [S_n(t)]_0^x = [h(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$

$\Rightarrow S_n(x) - S_n(0) = h(x) - h(0) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$

on $S_n(0) = 0$ et

$\Rightarrow \forall x \in]0,1[, S_n(x) = h(x) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$

b) $U_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) 3^{2n-1}}$

$\Rightarrow U_n = \frac{1}{3} + \frac{(\frac{1}{3})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{3})^5}{5} + \dots + \frac{(\frac{1}{3})^{2n-1}}{2n-1}$

$\Rightarrow U_n = S_n\left(\frac{1}{3}\right) = h\left(\frac{1}{3}\right) - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$

on $0 \leq t \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq \frac{1}{9}$

$\Rightarrow -\frac{1}{9} \leq -t^2 \leq 0 \Rightarrow \frac{8}{9} \leq 1-t^2 \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1-t^2} \leq \frac{9}{8} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1-t^2} \leq \frac{9}{8}$

$t^{2n} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{t^{2n}}{1-t^2} \leq \frac{9}{8} t^{2n}$

Comme $0 < \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt \leq \frac{9}{8} \int_0^{\frac{1}{3}} t^{2n} dt$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt \leq \frac{9}{8} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt \leq \frac{9}{8} \cdot \frac{(\frac{1}{3})^{2n+1}}{2n+1}$

$\Rightarrow -\frac{9}{8} \frac{(\frac{1}{3})^{2n+1}}{2n+1} \leq -\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt \leq 0$

on $h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{9}{8} \frac{(\frac{1}{3})^{2n+1}}{2n+1} \leq h\left(\frac{1}{3}\right) - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt \leq \frac{1}{2} \ln 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{9}{8} \frac{(\frac{1}{3})^{2n+1}}{2n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2} \ln 2$

on $\frac{1}{3} \in]-1,1[\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} = 0$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{8} \frac{(\frac{1}{3})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{0}{\infty} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{1}{2} \ln 2$

Concl : $\boxed{U_n \text{ converge vers } \ln(\sqrt{2})}$

7

Exercice 15 : BAC 1998 - Session de Contrôle

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \quad D_f = \mathbb{R}$$

1) a) $f \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car $x^2 - 4x + 5 > 0$

$$f'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(x)		-	+
f(x)	$+\infty$	1	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} = +\infty \quad (\text{B.I.})$$

$$f(2) = \sqrt{4 - 8 + 5} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 5}{x(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}) + x} = -2$$

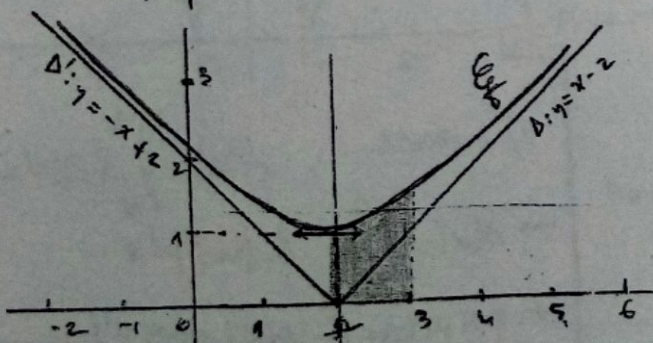
$$\Rightarrow D: y = x - 2 \quad \text{A.O en } (+\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 5 - x^2}{-x\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 5}{-x(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1)} = 2$$

$$\Rightarrow D: y = -x + 2 \quad \text{A.O en } (-\infty)$$



$$2) \vec{OM}(2,0), M(x,y) \in \mathcal{C}_f \Rightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$M(x,y) \in \mathcal{C}_f \Rightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\text{ou } \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = 2\vec{i} + y\vec{j} + y\vec{j}$$

par identif: $\begin{cases} x = x+2 \\ y = y \end{cases}$

$$\text{ou } M(x,y) \in \mathcal{C}_f \Rightarrow y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{(x+2)^2 - 4(x+2) + 5} = \sqrt{x^2 + 4x + 4 - 4x - 8 + 5} = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \sqrt{x^2 + 1}} \in \mathcal{C}_f \text{ de } \mathcal{C} \text{ dans } \mathbb{R}'$$

$$b) M(x,y) \in \mathcal{C}_f \Rightarrow y = g(x)$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \mathcal{C}_f = \mathcal{C}_g \text{ dans } \mathbb{R}'$$

$$3) F(x) = \int_0^x (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) g(t) dt \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$a) \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) = 1 \Rightarrow (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2) e^{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow e^x - 2e^{\frac{x}{2}} - 1 = 0$$

$$D' = 1 + 1 = 2 \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} = 1 + \sqrt{2} < 0 \text{ Absolu}$$

$$e^{\frac{x}{2}} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \ln(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow x = 2 \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow S_{\mathbb{R}} = \{2 \ln(1 + \sqrt{2})\}$$

$$b) \text{ ou } x \mapsto \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$$

$$\text{et } g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \Rightarrow F \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$$

$$F'(x) = \left[\frac{1}{2} (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) \right]' \cdot g\left(\frac{1}{2} (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})\right)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{4} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) \cdot \sqrt{\frac{1}{4} (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 + 1}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{8} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) \cdot \sqrt{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{8} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) \sqrt{e^x + e^{-x} + 2}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{8} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2 = \frac{1}{8} (e^x + e^{-x} + 2)$$

$$c) A = \int_2^3 f(t) dt = \int_0^1 g(x) dx$$

$$\text{con } (x=2)_{\mathbb{R}} \Rightarrow (x=0)_{\mathbb{R}'}$$

$$\text{et } (x=3)_{\mathbb{R}} \Rightarrow (x=1)_{\mathbb{R}'}$$

$$\Rightarrow A = F(2 \ln(1 + \sqrt{2})) = F(\ln((1 + \sqrt{2})^2))$$

$$\text{ou } F(x) = \frac{1}{8} (e^x - e^{-x} + 2x) + k$$

$$\text{con } F(0) = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{8} (e^{\ln((1+\sqrt{2})^2)} - e^{-\ln((1+\sqrt{2})^2)} + 2 \ln((1+\sqrt{2})^2))$$

$$= \frac{1}{8} ((1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} + 4 \ln(1+\sqrt{2}))$$

$$= \frac{1}{8} ((1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} + \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2})$$

Problème 16: BAC 1997 - Session Principale

$$D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\quad \text{et} \quad D^* =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

$$f(x) = x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in D^* \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} 1a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x [\ln(x+1) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x+1) - x \ln x] = 0 \\ &= f(0) \Rightarrow f \text{ est continue en } 0^+ \end{aligned}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = +\infty$$

$\Rightarrow f$ n'est pas $\leq$ en 0^+ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ admet en $O(0,0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

$$2a) f \leq \text{ssi } x \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x}$	$+$	0	$+$	$+$

$\Rightarrow f \leq \text{ssi } x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$
d'où $f \leq \text{ssi } x \in D^*$

$$f'(x) = \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]' = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$b) \text{ variations de } f': f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$$\text{sgn}(f'') = \text{sgn}\left[-\frac{1}{x}\right] = \text{sgn}[-x]$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$+$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$

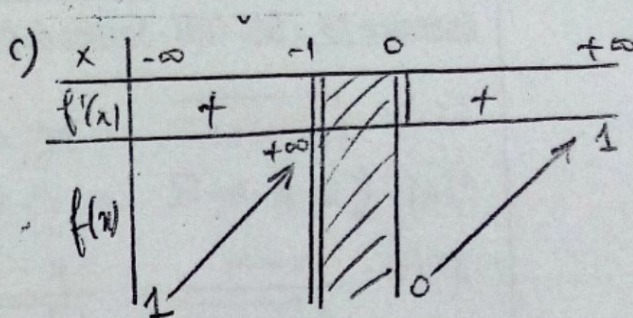
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \ln(-1-x) - \ln(-x) + \frac{1}{-x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(-x-1) \ln(-x-1) + 1}{(-x-1)} - \ln(-x) \end{aligned}$$

$$\text{on pose } t = -x-1 \quad \text{si } x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow t \rightarrow 0^+$$

$$L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t \ln t + 1}{t} - \ln(t+1) = +\infty$$

d'après le TV de f' en a :

$$\forall x \in D^* \quad f'(x) > 0$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{on pose } t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$$

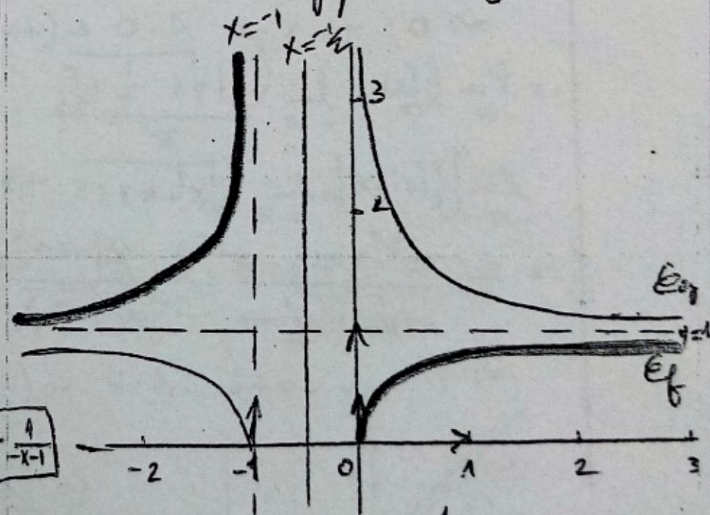
$$\text{si } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= (-1) \cdot (-\infty) = +\infty \end{aligned}$$

d'où $D_1: x = -1$ Asymptote verticale

et $D_2: y = 1$: asymptote horiz en $(\pm\infty)$



$$3) 0 < \alpha < 1, \quad A(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow A(\alpha) = \int_{\alpha}^1 x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\begin{aligned} \text{on pose } u(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow u'(x) = \frac{-1}{x(x+1)} \\ v'(x) &= x \rightarrow v(x) = \frac{1}{2} x^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]_{\alpha}^1 + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 \frac{x+1}{x} dx$$

$$\Rightarrow A(x) = \int \frac{1}{2} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{2} \left[x - \ln(x+1) \right]_{-x}^{+1}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} x f(x) + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln(x+1)$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x f(x) + \frac{1}{2} \ln(x+1) \quad (1a)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} A(x) = \frac{1}{2} \quad (1a) \text{ car } f(0) = 0$$

B $\Delta: x = -\frac{1}{2}$

1) $E' = S_D(E) /$

2) $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ $\begin{cases} x' = -x-1 \\ y' = y \end{cases}$

a) $\Omega \cap S_D(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x-1 \\ y' = y \end{cases}$

car $S_D(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} (MM') \perp \Delta \\ M \neq M' \in \Delta \end{cases}$

car $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = y$

$\Rightarrow y' = y \quad (1)$

et $M \neq M' = \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2} \right) \in \Delta: x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{x+x'}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x+x' = -1$

$\Rightarrow x' = -x-1 \quad (2)$

(1) et (2) $\rightarrow S_D(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x-1 \\ y' = y \end{cases}$

b) $M \in E' \Leftrightarrow M'(x', y') \in S_D(E')$

$\Leftrightarrow M'(x', y') \in E \Leftrightarrow y' = f(x')$

$\Rightarrow y = f(-x-1)$

c) $E' = E_g \Leftrightarrow g(x) = f(-x-1) \Leftrightarrow$

$g(x) = (-x-1) \ln\left(1 + \frac{1}{-x-1}\right) = (-x-1) \ln\left(\frac{-x}{-x-1}\right)$

$\Rightarrow g(x) = (-x-1) \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -(x+1) \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$\Rightarrow g(x) = (x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \Leftrightarrow g(x) = (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

C1 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) < 1 < g(n)$

car $\forall x > 0, f(x) < 1$

et car $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n) < 1$

$\forall x < -1, f(x) < 1$

car $x = -t-1 \Rightarrow \forall t > 0, f(-t-1) > 1$

d'où $g(t) > 1 \Rightarrow g(n) > 1$

Car : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) < 1 < g(n)$

2) $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $V_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

a) car $f(n) < 1 < g(n)$

$\Rightarrow n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] < 1 < \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$

$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$\Rightarrow U_n < e < V_n$

b) $V_n - U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow V_n - U_n = \frac{U_n}{n}$

car $U_n < e \Rightarrow \frac{U_n}{n} < \frac{e}{n}$ d'où $V_n - U_n < \frac{e}{n}$

c) car $U_n < e < V_n$

$\Rightarrow 0 < e - U_n < V_n - U_n < \frac{e}{n}$

d'où $0 < e - U_n < \frac{e}{n}$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (e - U_n) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e$

et $0 < e - U_n < V_n - U_n < \frac{e}{n}$

d'où $0 < V_n - U_n < \frac{e}{n}$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e$

Rq : on peut montrer que $U_n \nearrow$ et $V_n \searrow$
alors U_n et V_n sont 2 suites
adjacentes et convergent vers la
limite e

Exercice 17: BAC 1997 - Session de Contrôle

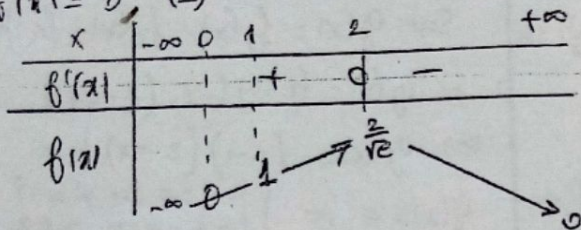
$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1-x}{2}} \quad \text{Df} = \mathbb{R}$$

1) a) $f \in \mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = e^{\frac{1-x}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{\frac{1-x}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x\right) e^{\frac{1-x}{2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{\frac{1-x}{2}} = -\infty \quad (\text{BS})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{\frac{1-x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{e}}{\frac{e^x}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{+\infty} = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \text{ A. H. et } \infty$$

$$f(2) = 2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1,2$$

b) Point d'inflexion: $f' \in \mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} e^{\frac{1-x}{2}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}x\right) e^{\frac{1-x}{2}}$$

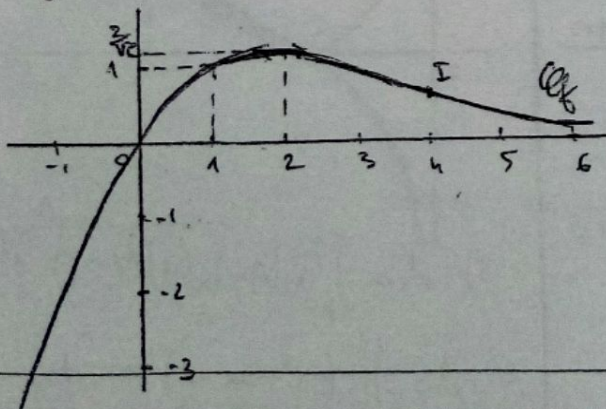
$$\Rightarrow f''(x) = \left(\frac{1}{4}x - 1\right) e^{\frac{1-x}{2}} \quad \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 4 & +\infty \\ \hline f'' & - & 0 & + \end{array}$$

f'' s'annule en 4 échange de signe.

$$f(4) = 4e^{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{e\sqrt{e}} \Rightarrow I\left(4, \frac{4}{e\sqrt{e}}\right) \text{ d'inflexion}$$

c) BI: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1-x}{2}} = +\infty$

$\Rightarrow$ Cf. est une BI en $-\infty$ de dir. (0, $+\infty$)



d) f sur $(0, 1) \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

$$\Rightarrow \forall x \in (0, 1), \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n! \cdot 2^{n+1}} \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}} dx$

$$U_n = 1 + \frac{1}{1! \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \dots + \frac{1}{n! \cdot 2^n}$$

a) $I_1 = \frac{1}{2^2} \int_0^1 x e^{\frac{1-x}{2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{4} x e^{\frac{1-x}{2}} dx$

on pose $u(x) = \frac{1}{2}x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{2}$
 $v'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1-x}{2}} \rightarrow v(x) = -e^{\frac{1-x}{2}}$

$$\Rightarrow I_1 = \left[-\frac{1}{2}x e^{\frac{1-x}{2}} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2} e^{\frac{1-x}{2}} dx$$

$$\Rightarrow I_1 = \left[-\frac{1}{2}x e^{\frac{1-x}{2}} - e^{\frac{1-x}{2}} \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2} - 1\right) - (0 - e^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$$

$$\bullet I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^{n+2}} \int_0^1 x^{n+1} e^{\frac{1-x}{2}} dx$$

on pose $u(x) = x^{n+1} \rightarrow u'(x) = (n+1)x^n$
 $v'(x) = e^{\frac{1-x}{2}} \rightarrow v(x) = -2e^{\frac{1-x}{2}}$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^{n+2}} \left(\left[-2x^{n+1} e^{\frac{1-x}{2}} \right]_0^1 + 2(n+1) \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}} dx \right)$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{-2}{(n+1)! \cdot 2^{n+2}} + \frac{2(n+1)}{(n+1)! \cdot 2^{n+2}} \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}} dx$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} + \frac{1}{n! \cdot 2^{n+1}} \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}} dx$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}}$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 1 + \frac{1}{1! \cdot 2} = \frac{3}{2} \neq$

$$I_1 = \sqrt{e} - \frac{3}{2} = \sqrt{e} - U_1 \Rightarrow \boxed{U_1 = \sqrt{e} - I_1} \rightarrow \sqrt{e}$$

Supposons $U_n = \sqrt{e} - I_n$ vrai.

$$\text{Df } U_{n+1} = \sqrt{e} - I_{n+1}$$

en effet: $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} = U_n + I_n - I_{n+1}$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \sqrt{e} - I_n + I_n - I_{n+1} = \sqrt{e} - I_{n+1}$$

c) $0 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x e^{\frac{1-x}{2}} \leq 1$

$$x^{n-1} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x^n e^{\frac{1-x}{2}} \leq x^{n-1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}} dx \leq \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n(n!) \cdot 2^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

Problème 18 : BAC 1996 - Session Principale

(A) $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2}$

1) f existe si $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x}$	$+$	0	$-$	$+$

$$\Rightarrow D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

$f \in \mathcal{C}^1$ sur $D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{4x^3} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x(x+1) - (x+1)}{2x^2 \cdot x(x+1)} = \frac{x-1}{2x^2 \cdot x(x+1)}$$

$\text{sgn}(f') = \text{sgn}(x-1)$ car $x(x+1) > 0$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0		$+\infty$		0

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} \right] = 0$$

$\Rightarrow y=0$ Asymptote horizontale en $(\pm\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} \right] = -\infty$$

$\Rightarrow x=-1$ Asymptote verticale

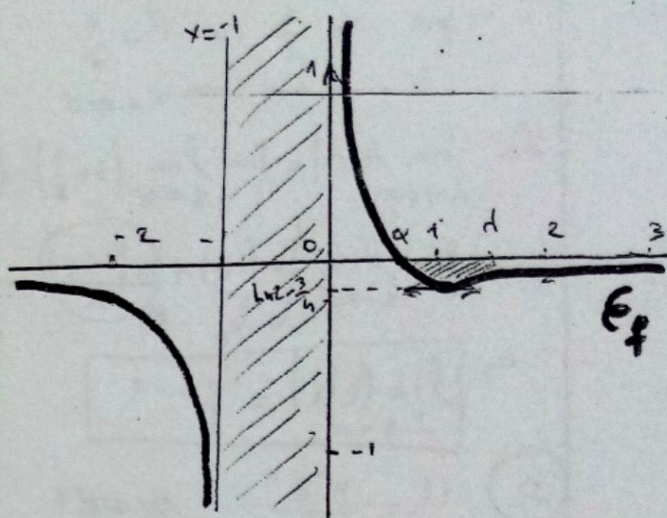
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln(1+x) - \frac{1}{4x^2} \ln x + 4x - 1 \right] = +\infty$$

$\Rightarrow x=0$ Asymptote verticale
à la courbe $\mathcal{C}_f$

$$f(1) = \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \ln 2 - \frac{3}{4}$$



2) a) $f \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[\Rightarrow f$ réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $[\ln 2 - \frac{3}{4}, +\infty[$
or $0 \in [\ln 2 - \frac{3}{4}, +\infty[\Rightarrow$ il existe un unique $\alpha \in]0, 1[$ / $f(\alpha) = 0$

b) on a $\forall x \geq \alpha$, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessous de l'axe (Ox)

$$\Rightarrow \forall x \geq \alpha, f(x) \leq 0$$

$$3) A(d) = \int_{\alpha}^d -f(x) dx = \int_{\alpha}^d \left[-\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} \right] dx$$

$$\Rightarrow A(d) = \left[\ln x + \frac{1}{4x} \right]_{\alpha}^d - \int_{\alpha}^d \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\text{on pose } u(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow u'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

$$v'(x) = 1 \rightarrow v(x) = x$$

$$\Rightarrow I = \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]_{\alpha}^d + \int_{\alpha}^d \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln(1+x) \right]_{\alpha}^d$$

$$\Rightarrow A(d) = \left[\ln x + \frac{1}{4x} - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(1+x) \right]_{\alpha}^d$$

$$\Rightarrow A(d) = \left[(-1-x) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4x} \right]_{\alpha}^d$$

$$= (-1-d) \ln\left(1 + \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{4d} + (1+\alpha) \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{4\alpha}$$

$$\Rightarrow A(d) = (1+\alpha) \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{4\alpha} - (1+d) \ln\left(1 + \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{4d}$$

$$\text{on pose } \beta = (1+\alpha) \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{4\alpha} : \text{cte}$$

$$\Rightarrow A(d) = \beta - (1+d) \ln\left(1 + \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{4d} \quad (14)$$

on pose $x = \frac{1}{d}$ ($\Rightarrow d = \frac{1}{x}$)
 si $d \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow 0^+$

d'où $\lim_{d \rightarrow +\infty} A(d) = \beta - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) - \frac{1}{4}x$
 $= \beta - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\underbrace{\ln(1+x)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}_{\rightarrow 1} - \frac{1}{4}x \right]$
 $\Rightarrow \lim_{d \rightarrow +\infty} A(d) = \beta - 1$

B) $U_n = \frac{n^n e^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) on a $\forall x \geq \alpha, f(x) \leq 0$
 or $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq \alpha$ d'où $f(n) \leq 0$

($\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2} \leq 0$)

$\Rightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}$

$\Rightarrow \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}$

$\cdot \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \right) \cdot n$

$\Rightarrow \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right] \leq 1 - \frac{1}{4n}$

e[↑] $\Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^{n+1} e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n e^n} = \frac{(n+1)^{n+1} e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n e^n}$

$= \frac{(n+1) \cdot (n+1) \cdot e \cdot e^{-1}}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n e^n}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1}$

or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}} \Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$

$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}} \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n e^{-\frac{1}{4n}}$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} \leq U_n e^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}$

Pour $n=1$: $U_2 \leq U_1 e^{-\frac{1}{4}}$ vérifie

Supposons $U_n \leq U_1 e^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}$ va

Ds $U_{n+1} \leq U_n e^{-\frac{1}{4n}}$

en effet: $U_n \leq U_1 e^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}$

$\& U_{n+1} \leq U_n e^{-\frac{1}{4n}}$

Produit: $U_{n+1} \leq U_1 e^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}}$

$\Rightarrow U_{n+1} \leq U_1 e^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}$

Cad: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} \leq U_1 e^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}$

3) on a $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{4k^2}$

d'où $\sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \sum_{k=1}^n \ln k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

• Comme $-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 0$

$\Rightarrow \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

d'où $-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq -\frac{1}{4} \ln(n+1)$

e[↑] $\Rightarrow e^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \leq e^{-\frac{1}{4} \ln(n+1)}$

$U_n > 0 \Rightarrow U_1 e^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \leq U_n e^{-\frac{1}{4} \ln(n+1)}$

or $U_{n+1} \leq U_1 e^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}} \leq U_n e^{-\frac{1}{4} \ln(n+1)}$

also $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} \leq U_1 e^{-\frac{1}{4} \ln(n+1)}$

4) comme $U_n > 0$ et $U_n \leq U_1 e^{-\frac{1}{4} \ln(n)}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n \leq U_1 e^{-\frac{1}{4} \ln(n)}$

$U_1 = \frac{1 \cdot e^{-1}}{1!} = e^{-1}$

$\Rightarrow 0 < U_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4} \ln(n)}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-1 - \frac{1}{4} \ln(n)}) = 0$

$\Rightarrow \lim U_n = 0$

on a: $\lim U_n$ fini $\Rightarrow$

U_n est convergente.

Problème 19 : BAC 1996 - Session de Contrôle

Ⓐ $f_n(x) = (x-1)^n \cdot \ln x$ $D_f =]0, +\infty[$

1) $\varphi_n(x) = n \ln x + 1 - \frac{1}{x}$ $D_\varphi = \mathbb{R}^*$

a) $\varphi_n \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$; $\varphi'_n(x) = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

x	0	1	$+\infty$
φ'_n		+	
φ	$-\infty$		$+\infty$

$$\lim_{0^+} \varphi_n = \lim_{0^+} n \ln x + 1 - \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{+\infty} \varphi_n = \lim_{+\infty} n \ln x + 1 - \frac{1}{x} = +\infty$$

b) $\varphi_n(1) = 0 + 1 - 1 = 0$

d'où si $x \in]0, 1[$, $\varphi_n(x) \in]-\infty, 0[\Rightarrow \varphi_n < 0$

si $x \in]1, +\infty[$, $\varphi_n(x) \in]0, +\infty[\Rightarrow \varphi_n(x) > 0$

Caract :

x	0	1	$+\infty$
$\varphi_n(x)$	-	0	+

2) a) f_n : continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f'_n(x) = n(x-1)^{n-1} \ln x + \frac{1}{x} (x-1)^n$$

$$\Rightarrow f'_n(x) = (x-1)^{n-1} \left[n \ln x + 1 \right]$$

$$\Rightarrow f'_n(x) = (x-1)^{n-1} \varphi_n(x)$$

• Si $(n-1)$: pair $\Leftrightarrow n$: impair $\Rightarrow (x-1)^{n-1} \geq 0$

alors le signe $[f'_n(x)] =$ signe de $\varphi_n(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$		$+\infty$

• Si $(n-1)$: impair $\Leftrightarrow n$: pair

x	0	1	$+\infty$
$(x-1)^{n-1}$	-	0	+
$\varphi_n(x)$	-	0	+
$f'_n(x)$	+	0	+
$f_n(x)$	$-\infty$		$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^n \ln x = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{0^+} f_n(x) = \lim_{0^+} (x-1)^n \ln x = (-1)^n (-\infty)$$

• Si n : pair $\Rightarrow f_n = -\infty$
• Si n : impair $\Rightarrow f_n = +\infty$

• $f_n(1) = 0$

b) Position de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$:

Soit $g(x) = f_1(x) - f_2(x) = (x-1) \ln x - (x-1)^2 \ln x$

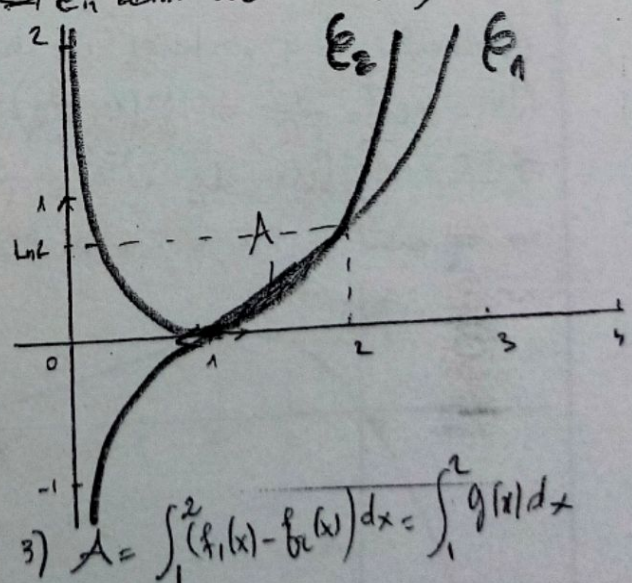
$$\Rightarrow g(x) = (x-1) \ln x \cdot (1-x+1)$$

$$\Rightarrow g(x) = (x-1)(2-x) \ln x$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ 2-x=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \ln x=0 \Leftrightarrow x=1 \end{cases}$$

x	0	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$2-x$	+	+	0	-
$\ln x$	-	0	+	+
$g(x)$	+	0	+	0
Position de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$	$\mathcal{E}_1$ $\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_1$ $\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_1$ $\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_2$ $\mathcal{E}_1$

B.I. : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^n \ln x}{x} = +\infty$
car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^n}{x} = +\infty$
 $\Rightarrow$ En admettant un B.I. et $(+\infty)$ de $\ln(x)$



$$3) A = \int_1^2 (f_1(x) - f_2(x)) dx = \int_1^2 g(x) dx$$

$$\Leftrightarrow A = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) \ln x dx$$

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \longrightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = -x^2 + 3x - 2 \longrightarrow v(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow A = \left[\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right) \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x - 2 \right) dx$$

$$\Rightarrow A = \left[\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right) \ln x + \frac{1}{9}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2x \right]_1^2$$

$$= \left[\left(-\frac{8}{3} + 6 - 4 \right) \ln 2 + \frac{8}{9} - 3 + 4 \right] - \left[0 + \frac{1}{9} - \frac{3}{4} + 2 \right]$$

$$= -\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{17}{9} - \frac{49}{36}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{19}{36} - \frac{2}{3} \ln 2} \text{ (ua)}$$

B) $V_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$

1) $U_n = \int_1^2 T_n(x) dx$

a) $(n+1)U_n = \int_1^2 (n+1)(x-1)^n \cdot \ln x dx$

on pose $\begin{cases} h(x) = \ln x \longrightarrow h'(x) = \frac{1}{x} \\ k'(x) = (n+1)(x-1)^n \longrightarrow k(x) = (x-1)^{n+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow (n+1)U_n = \left[(x-1)^{n+1} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x} dx$$

$$\Rightarrow (n+1)U_n = \ln 2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x} dx$$

b) $\int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x} dx = \ln 2 - (n+1)U_n$

or $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$

or $(x-1)^{n+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(x-1)^{n+1} \leq \frac{(x-1)^{n+1}}{x} \leq (x-1)^{n+1}$

Comme $1 < 2 \Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{2}(x-1)^{n+1} dx \leq \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x} dx \leq \int_1^2 (x-1)^{n+1} dx$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} \frac{(x-1)^{n+2}}{n+2} \right]_1^2 \leq \ln 2 - (n+1)U_n \leq \left[\frac{(x-1)^{n+2}}{n+2} \right]_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2(n+2)} \leq \ln 2 - (n+1)U_n \leq \frac{1}{n+2}}$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+2)} = 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln 2 - (n+1)U_n) = 0$
 $\Rightarrow \ln 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)U_n = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)U_n = \ln 2}$$

2) $S_n(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - \dots + (-1)^n (x-1)^n$

a) Si $x = 1 \Rightarrow S_n(1) = 1$ vérifie

Si $x \neq 1$: on considère la suite géométrique w_n

définie par $w_0 = 1$ et $q = -(x-1)$
 $\Rightarrow S_n(x) = \sum_{k=0}^n w_k = w_0 \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right]$

$$\Rightarrow S_n(x) = \frac{1 - [-(x-1)]^{n+1}}{1 + (x-1)} = \frac{1 - (-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{x}$$

$$\Rightarrow S_n(x) = \frac{1}{x} - (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{x}$$

Car: $\forall x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a:

$$\boxed{S_n(x) = \frac{1}{x} - (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{x}}$$

b) or $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (x-1)^k$

d'où $\sum_{k=0}^n (-1)^k (x-1)^k = \frac{1}{x} - (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{x}$

d'où $\int_1^2 \sum_{k=0}^n (-1)^k (x-1)^k dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{n+1}}{x} dx$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_1^2 (x-1)^k dx = \left[\ln x \right]_1^2 + (-1)^{n+1} \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x} dx$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{(x-1)^{k+1}}{k+1} \right]_1^2 = \ln 2 + (-1)^{n+1} \left[\ln 2 - (n+1)U_n \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^{n+1} \left[\ln 2 - (n+1)U_n \right]$$

$$\Rightarrow V_n = \ln 2 + (-1)^{n+1} \left[\ln 2 - (n+1)U_n \right]$$

$$\Rightarrow \ln 2 - V_n = -(-1)^{n+1} \left[\ln 2 - (n+1)U_n \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln 2 - V_n = (-1)^{n+1} \left[\ln 2 - (n+1)U_n \right]}$$

3) $|\ln 2 - V_n| = |(-1)^{n+1}| \cdot |\ln 2 - (n+1)U_n|$

$$\Rightarrow |\ln 2 - V_n| = |\ln 2 - (n+1)U_n|$$

or $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln 2 - (n+1)U_n) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln 2 - V_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \ln 2$$

Car: $\boxed{V_n \text{ converge vers } \ln 2}$

Problème 20 : BAC 1995 - Session de Contrôle

$$I) f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2} \text{ si } x \in]0,1]; f(0)=0$$

$$f(x) = \ln x + \frac{1+x^2}{1-x^2} \quad D_f =]0,1[$$

$$a) f \in \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,1[\text{ car } x > 0 \text{ et } 1-x^2 \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x(1-x^2) + 2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{x} + \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]0,1[, f'(x) > 0$$

x	0	α	1
f'		+	
f	$-\infty$	$\emptyset$	$+\infty$

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \left(\ln x + \frac{1+x^2}{1-x^2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{1^-} f(x) = \lim_{1^-} \left(\ln x + \frac{1+x^2}{1-x^2} \right) = +\infty$$

b) $f \in \mathcal{C}^1$ sur $]0,1[\Rightarrow f$ réalise une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$

comme $0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists ! \alpha \in]0,1[/ f(\alpha) = 0$

$$\begin{cases} f(\frac{1}{4}) = -\ln 4 + \frac{17}{15} < 0 \\ f(\frac{1}{3}) = -\ln 3 + \frac{5}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3}}$$

x	0	α	1
$f(x)$		-	+

$$2) a) \lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{-x \ln x}{1+x^2} = 0 = f(0)$$

$\Rightarrow f$ est continue en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0^+} \frac{-x \ln x}{1+x^2} = \lim_{0^+} \frac{-\ln x}{x}$$

$$= \lim_{0^+} \frac{-\ln x}{1+x^2} = +\infty \Rightarrow f \text{ n'est pas dérivable en } 0$$

et E_f admet en $0(0,0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

$$b) \forall x \in]0,1[, \ln x : \frac{1}{x} \text{ et } 1+x^2 \neq 0$$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $]0,1[$

$$f'(x) = \frac{-(\ln x + 1)(1+x^2) + 2x^2 \ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{-\ln x - x^2 \ln x - (1+x^2) + 2x^2 \ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(x^2-1)(\ln x + \frac{1+x^2}{1-x^2})}{(1+x^2)^2} = \frac{(x^2-1)}{(1+x^2)^2} \varphi(x)$$

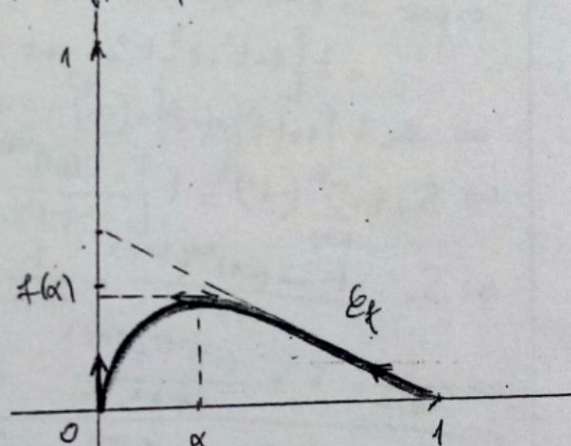
$$c) \forall x \in]0,1[, (x^2-1) < 0 \Rightarrow \text{sgn}(f') = -\text{sgn}(\varphi)$$

x	0	α	1
f'		+	-
$f(x)$	0	$\nearrow$	0

$$T_1: y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\text{on } f'(\alpha) = -\frac{1}{2} \text{ et } f(\alpha) = 0$$

$$\text{pm } E_f: \text{ on peut } \alpha \geq 0,3 \Rightarrow f(\alpha) \geq 0,3^3$$



$$D) I = \int_0^1 f(x) dx$$

$$g_n(t) = -t^n \ln t \text{ si } t > 0 \text{ et } g_n(0) = 0$$

$$a) g_n \text{ intégrable sur }]0,1[\Leftrightarrow g_n \in \mathcal{M}(]0,1[)$$

$$\text{or } g_n \in \mathcal{M}(]0,1[) \text{ équivaut à } \lim_{t \rightarrow 0^+} g_n(t) = 0$$

$$\lim_{0^+} g_n(t) = \lim_{0^+} -t^n \ln t = 0 \Rightarrow g_n \in \mathcal{M}(]0,1[)$$

$$\text{alors } g_n \in \mathcal{M}(]0,1[) \Rightarrow g_n \text{ intégrable sur }]0,1[$$

$$I_n = \int_0^1 g_n(t) dt$$

$$b) G_n(t) = -\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} \text{ et } G_n(0) = 0$$

$$\text{on } G_n \text{ primitive de } g_n \text{ sur }]0,1[$$

$$\text{or } G_n \in \mathcal{M}(]0,1[) \text{ si } t > 0 \Rightarrow G_n \in \mathcal{M}(]0,1[)$$

$$\text{donc } I_n = \int_0^1 g_n(t) dt = G_n(1) - G_n(0) = G_n(1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G_n(t) - G_n(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t^{n+1} \ln t + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{t^n \ln t}{n+1} + \frac{t^n}{(n+1)^2} = 0 \Rightarrow G_n \in \mathcal{C}^1 \text{ en } 0^+$$

$$G'_n(t) = -\frac{1}{n+1} \left[(n+1)t^n \ln t + t^{n+1} \left(\frac{1}{t} \right) \right] + \frac{(n+1)t^n}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow G'_n(t) = -t^n \ln t - \frac{t^n}{n+1} + \frac{t^n}{n+1} = g_n(t)$$

$$\Rightarrow G_n \text{ est une primitive de } g_n \text{ sur }]0, 1[$$

$$U_n = \int_0^1 g_n(t) dt = [G_n(t)]_0^1 = G_n(1) - G_n(0)$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

$$2) a) \text{ on a } \frac{t}{1+t^2} = t - t^3 + t^5 - \dots + (-1)^n t^{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+3}}{1+t^2}$$

$$\text{on pose } S = t - t^3 + t^5 - \dots + (-1)^n t^{2n+1}$$

$$= t [1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n}]$$

$$\Rightarrow S = t [1 + (-t^2) + (-t^2)^2 + \dots + (-t^2)^n]$$

$$\Rightarrow S = t \sum_{k=0}^n (-t^2)^k = t \left[\frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)} \right] = t \left[\frac{1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2} \right]$$

$$\Rightarrow S = \frac{t - (-1)^{n+1} t^{2n+3}}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} - \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+3}}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{1+t^2} = S + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+3}}{1+t^2} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{t}{1+t^2} = t - t^3 + t^5 - \dots + (-1)^n t^{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+3}}{1+t^2}$$

$$b) \frac{-t \ln t}{1+t^2} = -t \ln t + t^3 \ln t - t^5 \ln t + \dots + (-1)^n t^{2n+1} \ln t - \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+3} \ln t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow f(t) = g_1(t) - g_3(t) + \dots + (-1)^n g_{2n+1}(t) + \frac{(-1)^{n+1} g_{2n+3}(t)}{1+t^2}$$

g) on intègre l'expression précédente :

$$\Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 g_1(t) dt - \int_0^1 g_3(t) dt + \dots + (-1)^n \int_0^1 g_{2n+1}(t) dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} dt$$

$$\Rightarrow I = U_1 - U_3 + U_5 - \dots + (-1)^n U_{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} dt$$

$$3) S_n = U_1 - U_3 + U_5 - \dots + (-1)^n U_{2n+1}$$

$$a) I = S_n + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} dt$$

$$\Rightarrow I - S_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} dt$$

$$\text{et } |(-1)^{n+1}| = 1 \quad \text{et } g_{2n+3}(t) = -t^{2n+3} \ln t > 0$$

$$\Rightarrow |I - S_n| = \int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} dt$$

$$\text{or } 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+t^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \leq 1$$

$$g_{2n+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} \leq g_{2n+3}(t)$$

$$\text{d'où } \int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 g_{2n+3}(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{g_{2n+3}(t)}{1+t^2} dt \leq U_{2n+3}$$

$$\text{alors } |I - S_n| \leq U_{2n+3}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n+3} = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} (I - S_n) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = I}$$

$$c) |I - S_n| \leq 10^{-2}$$

$$\text{or } |I - S_n| \leq U_{2n+3} \leq 10^{-2}$$

$$\text{or } U_{2n+3} = \frac{1}{(2n+3+1)^2} = \frac{1}{(2n+4)^2} \leq 10^{-2}$$

$$\Rightarrow (2n+4)^2 \geq 10^2 \quad \text{d'où } 2n+4 \geq 10$$

$$\Rightarrow 2n \geq 6 \Rightarrow n \geq 3$$

$$\text{alors } \boxed{n_0 = 3}$$

$$S_3 = U_1 - U_3 + U_5 - U_7$$

$$\text{or } U_1 = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}, \quad U_3 = \frac{1}{(3+1)^2} = \frac{1}{16}$$

$$U_5 = \frac{1}{(5+1)^2} = \frac{1}{36}, \quad U_7 = \frac{1}{(7+1)^2} = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{36} - \frac{1}{64} = \frac{115}{576}$$

$$\text{d'où } \boxed{I \approx \frac{115}{576}} \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Problème 21 : BAC 1993 - Session Principale

(A) $f_m(x) = m \cdot x \cdot \ln|x| - x$ si $x \neq 0$
 $f_m(0) = 0$

1) a) $\subseteq$ de f_m en 0 :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} m \cdot x \cdot \ln(x) - x = 0 = f_m(0)$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [m \cdot x \cdot \ln(-x) - x]$
 $= \lim_{t \rightarrow 0^+} [-m(t \cdot \ln t) + t] = 0 = f_m(0)$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = f_m(0) = 0$

$\Rightarrow f_m \subseteq$ en 0 $\forall m \in \mathbb{R}^*$

$\frac{d}{dx}$ de f en 0 :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_m(x) - f_m(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (m \ln|x| - 1) = \pm \infty$

$\Rightarrow f_m$ n'est pas $\frac{d}{dx}$ en 0 et E_m admet une tangente verticale en 0, $\forall m \in \mathbb{R}^*$

b) on a $\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}$

$f_m(-x) = m(-x) \cdot \ln|-x| + x = -m \cdot x \cdot \ln|x| + x$
 $= -[m \cdot x \cdot \ln|x| - x] = -f_m(x)$

$\Rightarrow f_m$ est une fonction impaire

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'_m(x) = m \ln|x| + m \cdot x \cdot \frac{1}{x} - 1$

$\Rightarrow f'_m(x) = m \ln|x| + m - 1$

comme f_m impaire $\Rightarrow D = \mathbb{R}^+$

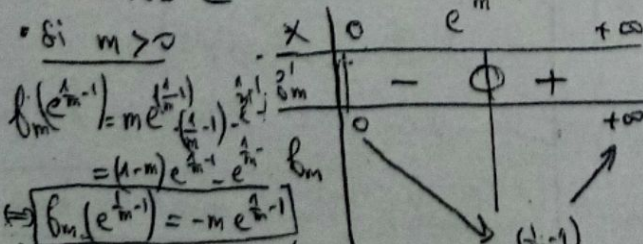
$\Rightarrow f'_m(x) = m \ln x + m - 1$

on résout : $f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow m \ln x + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m \ln x = 1 - m \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{m} - 1$

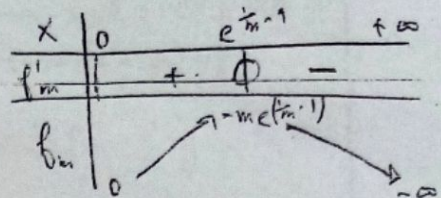
$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{m}-1}$

• Si $m > 0$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(m \ln x - 1) = +\infty$

• Si $m < 0$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(m \ln x - 1) = -\infty$

$f_m(e^{\frac{1}{m}-1}) = -m e^{\frac{1}{m}-1}$

c) A_m et B_m extrêmes de E_m

comme f_m impaire $\Rightarrow B_m = S_0(A_m)$

et $A_m(e^{\frac{1}{m}-1}, -m e^{\frac{1}{m}-1})$

Ensemble des points A_m : on pose $A_m(x, y)$

$\Rightarrow \begin{cases} x = e^{\frac{1}{m}-1} \\ y = -m e^{\frac{1}{m}-1} \end{cases}$ d'où $\ln x = \frac{1}{m} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} = 1 + \ln x$

$\Rightarrow m = \frac{1}{1 + \ln x}$ d'où $y = \frac{-x}{1 + \ln x}$ / $x > 0$ et $x \neq e^{-1}$

$\Rightarrow A_m$ varie sur la courbe $C: y = \frac{-x}{1 + \ln x}$ / $x > 0$ et $x \neq e^{-1}$

2) $\begin{cases} g(x) = \frac{-x}{1 + \ln x} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq e^{-1} \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) $\subseteq$ de g en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{1 + \ln x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{1 + \ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0 = g(0)$

$\Rightarrow g \subseteq$ en 0

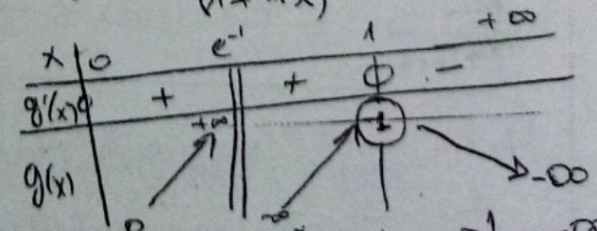
$\frac{d}{dx}$ de g en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} =$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-x}{1 + \ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{1 + \ln x} = 0$

$\Rightarrow g \subseteq$ en 0 et $g'(0) = 0$

b) $\forall x > 0$ et $x \neq e^{-1}$, $g'(x) = \frac{-(1 + \ln x) + x(\frac{1}{x})}{(1 + \ln x)^2}$

$\Rightarrow g'(x) = \frac{-\ln x}{(1 + \ln x)^2}$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{1 + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{1}{x} + \ln x} = -\infty$

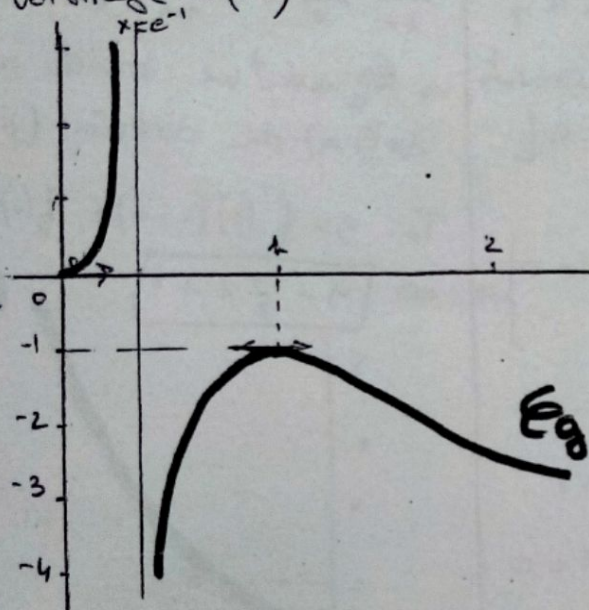
$$\begin{aligned} \lim_{(e^-)^-} g(x) &= \lim_{(e^-)^-} \frac{-x}{(1+\ln x)} = +\infty \\ \lim_{(e^-)^+} g(x) &= \lim_{(e^-)^+} \frac{-x}{(1+\ln x)} = -\infty \end{aligned} \Rightarrow$$

$x = e^-$ Asymptote verticale

$$f(1) = \frac{-1}{1+0} = -1$$

$$\text{BI: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1+\ln x} = 0$$

$\Rightarrow$ E_g admet une branche infime au voisinage de $(+\infty)$ de direction $(O\vec{T})$.



(B) $f(x) = f_1(x) = x \ln x - x$ si $x > 0$
 $f(0) = 0$

1/a) d'après (A) 1) $f \in \text{en ot } f \text{ non d'ot}$

$$f'(x) = \ln x + x \left(\frac{1}{x} \right) - 1 = \ln x$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	0		$+\infty$

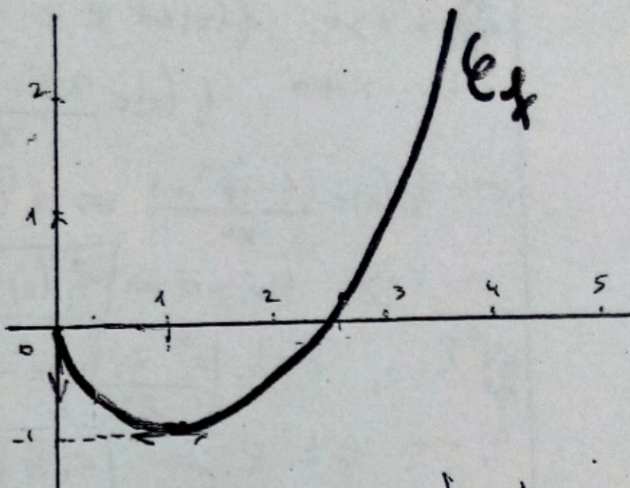
Diagram illustrating the behavior of the function $f(x)$ near the critical point $x=1$. The function decreases from $x=0$ to $x=1$ and then increases towards $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - 1) = +\infty \quad (\text{BI})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1) = +\infty \Rightarrow E_g \text{ admet}$$

une BI en $(+\infty)$ de direction $(O\vec{T})$

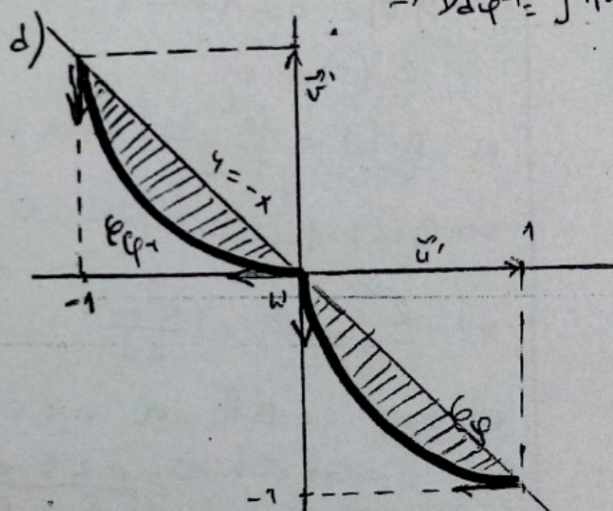
$$\begin{aligned} E_g \cap (O\vec{T}) &\Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln x - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(\ln x - 1) = 0 \end{aligned} \begin{cases} x = 0 \\ \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \end{cases}$$



$$\varphi(x) = f(x) \text{ si } x \in [0,1]$$

$f \in \text{ot} \downarrow \text{en } [0,1] \Rightarrow \varphi$ réalise une bijection de $[0,1]$ en $[-1,0] = J$

c) $\varphi \in \text{en }]0,1[\Rightarrow \varphi' \in \text{en }]-1,0[$
 $\varphi'(x) \neq 0 \Rightarrow \varphi' \in \text{en }]-1,0[$
 $\Rightarrow D\varphi =]-1,0[$



$$2/a) I(a) = \int_a^1 (-x - \varphi(x)) dx = \int_a^1 (x - x \ln x + x) dx$$

$$\Rightarrow I(a) = \int_a^1 -x \ln x dx$$

$$\text{on pose } u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = -x \Rightarrow v'(x) = -\frac{1}{2} x^2$$

$$\Rightarrow I(a) = \left[-\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_a^1 + \frac{1}{2} \int_a^1 x dx$$

$$\Rightarrow I(a) = \left[-\frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 \right]_a^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} a^2 \ln a - \frac{1}{4} a^2$$

$$\Rightarrow I(a) = \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} (2 \ln a - 1)$$



$$b) S = 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 (y - \varphi(x)) dx$$

$$\Leftrightarrow S = 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 (-x - \varphi(x)) dx$$

$$\Leftrightarrow S = 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} (2 \ln a - 1) \right]$$

$$\Leftrightarrow S = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} + \frac{a^2 \ln a}{6} - \frac{1}{6} a^2 \right) = \frac{1}{2}$$

$$3) U_0 = e \quad U_n > 0$$

$$U_{n-1} \cdot f'(U_n) = f(U_{n-1})$$

$$a) U_{n-1} \cdot \ln(U_n) = U_{n-1} \ln(U_n) + U_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow U_{n-1} \cdot [\ln(U_n) - \ln(U_{n-1}) + 1] = 0$$

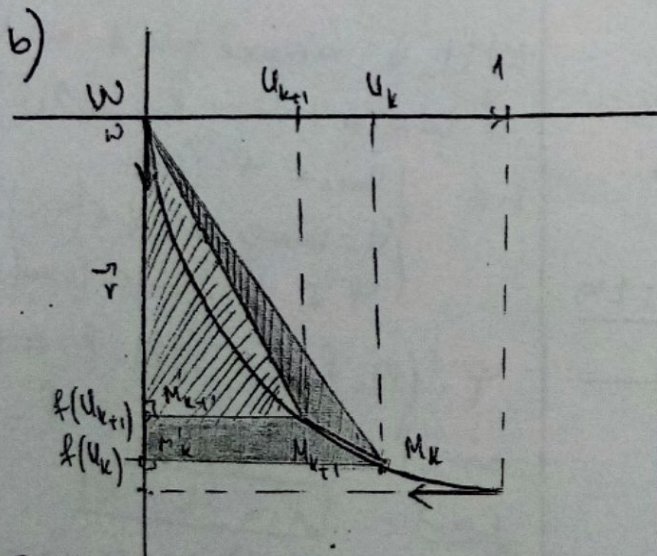
$$\text{or } U_{n-1} \neq 0 \Rightarrow \ln(U_n) - \ln(U_{n-1}) = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{U_n}{U_{n-1}} \right) = -1 \Rightarrow U_n = e^{-1} \cdot U_{n-1}$$

$\Rightarrow U_n$ est une suite géométrique de raison $q = e^{-1}$ et de 1^{er} terme $U_0 = e$

$$\Rightarrow U_n = U_0 \cdot q^n = e \cdot (e^{-1})^n = e^{1-n}$$

on a: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{U_n = e^{1-n}}$



Soit M'_k et M'_{k+1} : les proj orth de M_k et M_{k+1} sur l'axe des ordonnées

$\Rightarrow S_k$: l'aire du triangle $OM_k M_{k+1}$

S_1 : l'aire du triangle

S_2 : l'aire du triangle $OM_{k+1} M'_{k+1}$
 et S_3 : l'aire du triangle $M_k M_{k+1} M'_{k+1}$
 $\Rightarrow S_n = S_1 - (S_2 + S_3)$

$$\text{or } S_1 = \frac{1}{2} U_k \cdot |f(U_k)| = -\frac{1}{2} U_k \cdot f(U_k)$$

$$\text{et } S_2 = \frac{1}{2} U_{k+1} \cdot |f(U_{k+1})| = -\frac{1}{2} U_{k+1} \cdot f(U_{k+1})$$

$$\text{et } S_3 = \frac{|f(U_{k+1}) - f(U_k)| \cdot (U_k + U_{k+1})}{2}$$

$$\Rightarrow S_k = -\frac{1}{2} U_k f(U_k) + \frac{1}{2} U_{k+1} f(U_{k+1}) -$$

$$\left[\frac{1}{2} U_k f(U_{k+1}) + \frac{1}{2} U_{k+1} f(U_k) - \frac{1}{2} U_k f(U_k) - \frac{1}{2} U_{k+1} f(U_{k+1}) \right]$$

$$\Rightarrow S_k = \frac{1}{2} U_{k+1} f(U_k) - \frac{1}{2} U_k f(U_{k+1})$$

$$\Rightarrow S_k = \frac{1}{2} [U_{k+1} \cdot f(U_k) - U_k \cdot f(U_{k+1})]$$

$$\text{or } U_k = e^{1-k} \text{ et } f(U_k) = e^{(1-k)-2k} = e^{1-3k}$$

$$\Leftrightarrow f(U_k) = -k e^{1-2k}$$

$$\Rightarrow S_k = \frac{1}{2} \left[e^{-k} \cdot (-k e^{1-2k}) - e^{1-k} \cdot (-k-1) e^{-k} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-k e^{1-2k} + k e^{1-2k} + e^{1-2k} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{S_k = \frac{1}{2} e^{1-2k}}$$

$$c) S_n = \sum_{k=0}^{n-1} S_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} e \cdot (e^{-2})^k$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2} e \left[\frac{1 - (e^{-2})^n}{1 - e^{-2}} \right]$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2} e \left[\frac{1 - e^{-2n}}{1 - e^{-2}} \right] \cdot \frac{e^2}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2} \frac{e^3}{e^2 - 1} (1 - e^{-2n})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n} = 0 \Rightarrow$$

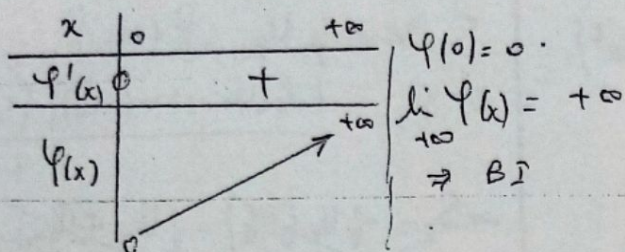
$$S = \frac{e^3}{2(e^2 - 1)}$$

Problème 24 : BAC 1992 - Session de Contrôle

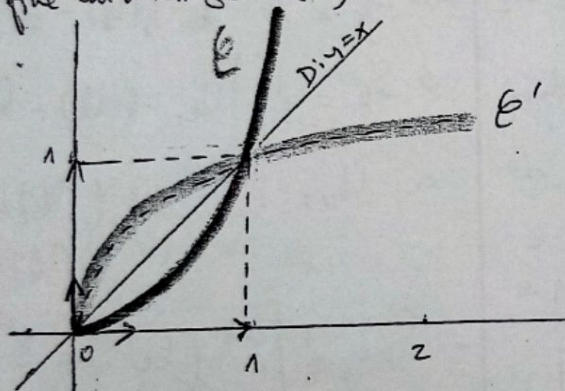
I) $\varphi(x) = (x-1)e^x + 1 \quad D\varphi = \mathbb{R}_+$

1) a) $\varphi \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

$\varphi'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = +\infty$
 $\Rightarrow \varphi$ admet une branche infini au voisinage de $(+\infty)$ de direction $(0, \vec{j})$



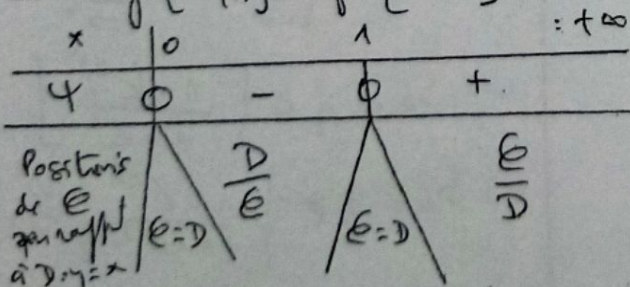
b) on pose $\psi(x) = \varphi(x) - x \quad D\psi = \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow \psi(x) = (x-1)e^x - (x-1)$

$\Rightarrow \psi(x) = (x-1)(e^x - 1)$

or $\forall x \geq 0, e^x \geq 1 \Rightarrow e^x - 1 \geq 0$

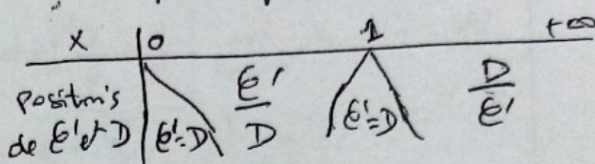
d'où $\text{sgn}(\psi'(x)) = \text{sgn}(x-1)$



2) a) $\varphi \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+ \Rightarrow \varphi$ admet une bijection de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 alors φ est une bijection sur $\mathbb{R}_+$

b) $\mathcal{E}' = S_D(\mathcal{E}) \quad D: y=x$

Comme $\mathcal{E}' = S_D(\mathcal{E}) \Rightarrow$ la position de $\mathcal{E}'$ par rapport à D sont inverses



3) $U_0 = 2, \quad U_{n+1} = \varphi^{-1}(U_n)$

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n > 1$

pu $n=0, U_0 = 2 > 1$ vérifie

Supposons que $U_n > 1$ vrai $\rightarrow n$

or $\varphi \uparrow \Rightarrow \varphi' \uparrow \Rightarrow \varphi'(U_n) > \varphi'(1)$

$\Rightarrow U_{n+1} > 1$ car $\varphi(1) = 1 \Rightarrow \varphi'(1) = 1$

concl: $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n > 1$

b) $\forall n \quad U_n \searrow$

ma $\forall x \in]1, +\infty[; \mathcal{E}'$ est située au dessous de $D \Rightarrow \varphi'(x) < x$

comme $U_n \in]1, +\infty[\Rightarrow \varphi'(U_n) < U_n$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow U_n$ strict $\searrow$

c) $U_n \searrow$ minorée par 1 $\Rightarrow U_n$ converge et converge vers $l \in [1, 2]$

ma $\begin{cases} U_{n+1} = \varphi^{-1}(U_n) \\ U_n \text{ converge vers } l \in [1, 2] \\ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } [1, 2] \subset]0, +\infty[\end{cases} \Rightarrow$

$\varphi^{-1}(l) = l \Leftrightarrow \varphi(l) = l \Leftrightarrow \varphi(l) = 0$

$\Rightarrow l = 0 \notin [1, 2]$ ou $l = 1$

concl: $\lim U_n = 1$

II) $\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) si $x > 0, f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \in]0, +\infty[$
 1. $f(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x} = 1 = f(0)$

f est continue en 0^+
d'où f est continue sur $[0, +\infty[$

2) si $x > 0$, $f(x)$ est $\leq$ sur $]0, +\infty[$

Car $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{x e^x - (e^x - 1)}{x^2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$

or $\forall x > 0$, $\varphi(x) > 0 \Rightarrow \boxed{f'(x) > 0} \forall x > 0$

3) $h > 0$, $g(x) = \left(\frac{e^h - 1 - h}{h^2}\right)x^2 - e^x + x + 1$

a) on a $g \leq 0$ sur $[0, h] \subset \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$ d'après le théorème des accroissements finis, il existe au moins $c \in]0, h[$

tel que $g'(c) = \frac{g(h) - g(0)}{h - 0}$

or $g(h) = \left(\frac{e^h - 1 - h}{h^2}\right)h^2 - e^h + h + 1 = 0$

et $g(0) = 0 - 1 + 1 = 0$

$g'(c) = 0$

or $g'(x) = \left(\frac{e^h - 1 - h}{h^2}\right)2x - e^x + 1$

$\Rightarrow g'(c) = \left(\frac{e^h - 1 - h}{h^2}\right)2c - e^c + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{e^h - 1 - h}{h^2} = \frac{e^c - 1}{2c}$

on pose $c = \theta h$ or $0 < c < h$

$\Leftrightarrow 0 < \theta h < h \Leftrightarrow 0 < \theta < 1$

$\Rightarrow$ il existe $\theta \in]0, 1[$ / $\boxed{\frac{e^h - 1 - h}{h^2} = \frac{e^{\theta h} - 1}{2\theta h}}$

b) $\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^h - 1 - h}{h^2}\right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{\theta h} - 1}{2\theta h} = l$

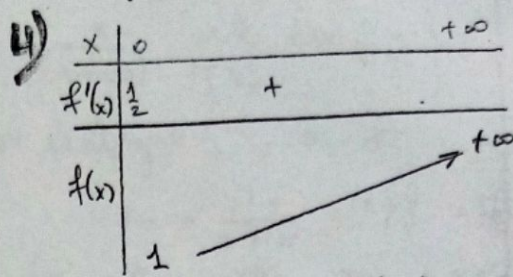
on pose $t = \theta h$ si $h \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow 0^+$

$\Rightarrow l = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{2t} = \frac{1}{2}$

Concl: $\boxed{\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^h - 1 - h}{h^2}\right) = \frac{1}{2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow f$ est dérivable en 0^+ et $f'(0) = \frac{1}{2}$



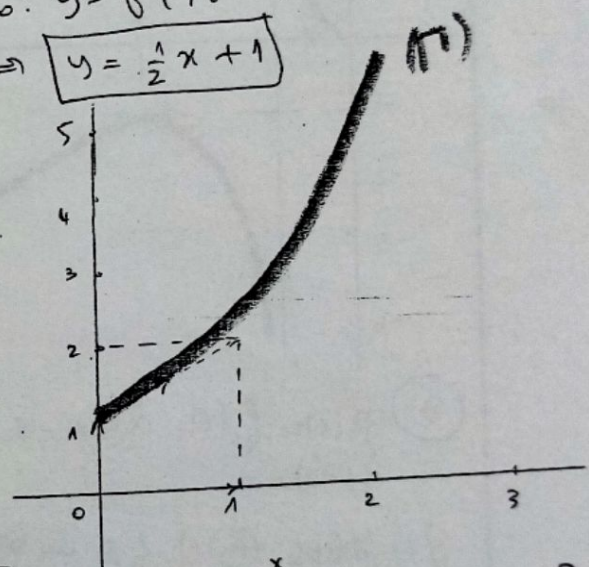
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

$\Rightarrow f$ admet une branche inférieure au voisinage de $(+\infty)$ de direction $(0, \frac{1}{2})$.

To: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ or $\left. \begin{matrix} f'(0) = \frac{1}{2} \\ f(0) = 1 \end{matrix} \right\}$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + 1}$



III $F(x) = \int_0^{e^x} f(t) dt$ $DF = \mathbb{R}$

1) a) on a $f(t)$ continue sur $\mathbb{R}^+$
et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0 \Rightarrow f \leq$ sur $[0, e^x]$
d'où F existe sur $\mathbb{R}$

b) f étant $\leq$ sur $\mathbb{R}^+ \Rightarrow f$ admet au moins une primitive H de $\mathbb{R}^+$
et telle que $H'(t) = f(t)$

$\Rightarrow F(x) = [H(t)]_0^{e^x} = H(e^x) - H(0)$

on $x \mapsto e^x \leq$ sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \in]0, +\infty[\subset \mathcal{LC}[0, +\infty[$
 $\Rightarrow f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
 $f'(x) = [H(e^x)]' - [H(0)]'$
 $= e^x \cdot H'(e^x) - 0$
 $= e^x \cdot f(e^x) = e^x \cdot \frac{e^x - 1}{e^x}$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = e^x - 1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \Rightarrow e^x > 1$
 $\Rightarrow \boxed{f'(x) > 0} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) si $x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^x \rightarrow 0$
 $\Rightarrow F(x) \rightarrow \int_0^0 f(t) dt = 0$

concl: $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$

3) a) on pose $u(t) = e^t - t \quad \text{Du} = \mathbb{R}^+$

$u \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

$u'(t) = e^t - 1 \geq 0 \quad \forall t \geq 0$

t	0	$+\infty$
u'	0	+
u	1	$+\infty$

$u(0) = 1$

$\Rightarrow \forall t \geq 0, u(t) \geq 1 \Rightarrow u(t) > 0$

alors $e^t \geq t \Leftrightarrow e^t - 1 \geq t - 1$

d'où $\forall t \geq 0, \frac{e^t - 1}{t} \geq \frac{t - 1}{t}$

Comme $e^x \geq 1 \Rightarrow \int_1^{e^x} \frac{e^t - 1}{t} dt \geq \int_1^{e^x} \frac{t - 1}{t} dt$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{e^x} f(t) dt \geq \int_1^{e^x} \frac{t - 1}{t} dt + \int_0^1 f(t) dt$

$\Rightarrow \int_0^{e^x} f(t) dt \geq \int_1^{e^x} \frac{t - 1}{t} dt + F(0)$

$\Rightarrow f(x) \geq F(0) + \int_1^{e^x} \frac{t - 1}{t} dt$

or $f(t) \geq 0$ et $0 < e^x = F(x) > 0$

d'où $F(0) > 0 \Rightarrow F(0) + \int_1^{e^x} \frac{t - 1}{t} dt \geq \int_1^{e^x} \frac{t - 1}{t} dt$

alors $\boxed{F(x) \geq \int_1^{e^x} \frac{t - 1}{t} dt} \quad \forall x \geq 0$

b) $\int_1^{e^x} \frac{t - 1}{t} dt = \int_1^{e^x} (1 - \frac{1}{t}) dt = [t - \ln t]_1^{e^x}$
 $= e^x - x - 1 \Rightarrow \int_1^{e^x} \frac{t - 1}{t} dt = e^x - x - 1$

d'où $F(x) \geq e^x - x - 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

• pour $x > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq \frac{e^x - x - 1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \geq \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \quad \Bigg| \Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$

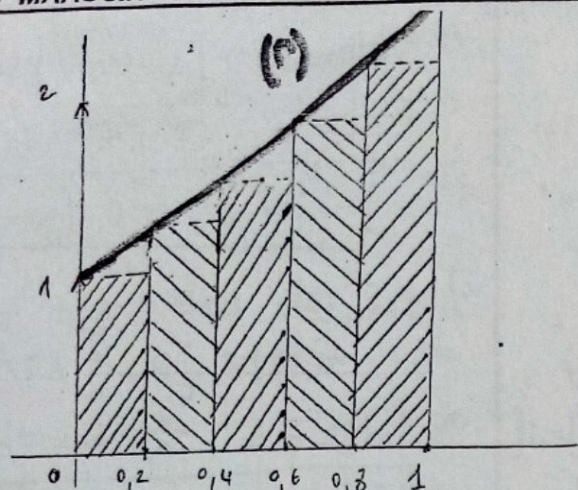
$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$

alors la courbe E_f admet une branche infinie au voisinage de $(+\infty)$ de direction $(0, 1)$.

4) $F(0) = \int_0^1 f(t) dt$: l'aire limitée par la courbe E_f , l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1$

on divise $[0, 1]$ en 5 intervalles d'amplitude $0,2 = \frac{1}{5}$





$$A = \frac{1}{5} \left[\frac{f(0)+f(0.2)}{2} + \frac{f(0.2)+f(0.4)}{2} + \frac{f(0.4)+f(0.6)}{2} + \frac{f(0.6)+f(0.8)}{2} + \frac{f(0.8)+f(1)}{2} \right]$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{10} \left[f(0) + 2f(0.2) + 2f(0.4) + 2f(0.6) + 2f(0.8) + f(1) \right]$$

or $f(0)=1$, $f(0.2) \approx 1.107$, $f(0.4) \approx 1.229$
 $f(0.6) \approx 1.37$, $f(0.8) \approx 1.532$, $f(1) \approx 1.718$

$\Rightarrow A \approx 1.32$ Concl: $F(0) \approx 1.32$

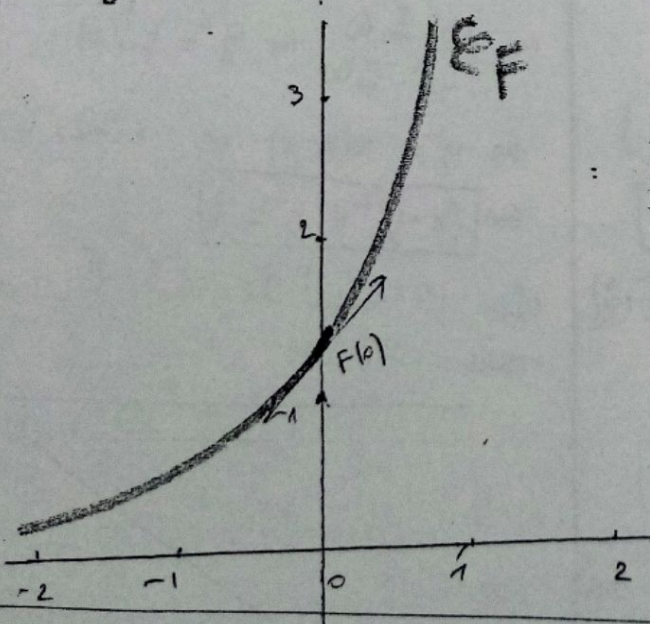
5) $D_f = \mathbb{R}$

$F'(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$F'(x)$		+
$F(x)$		$\nearrow +\infty$

$\cdot Y=0$ Asym en $(-\infty)$

$\cdot E_f$ admet une BI en $(+\infty)$ de direction $(O\vec{f})$.



$T_0: y = F'(0)(x-0) + F(0)$ avec $F'(0) = 0$

Problème 26 : BAC 1991 - Session de Contrôle

(A) $\begin{cases} f_0(x) = \sqrt{x(2-x)} \\ f_n(x) = x^n \sqrt{x(2-x)} \end{cases} \quad D_f = [0, 2]$

1) $f_n \in \text{Roi } x(2-x) \geq 0$
 $\Rightarrow f_n \in \text{Roi } [0, 2] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\cdot f_n \in \text{Roi } x(2-x) > 0$
 $\Rightarrow f_n \in \text{Roi }]0, 2[$

étudions alors la $\leq$ de f_n en 2^- .

$\cdot \leq$ en 2^- : $f_n(2) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f_n(x) - f_n(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^n \sqrt{x(2-x)}}{x - 2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^{n+1} (2-x)^{1/2}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{2-x} (x-2)} = \frac{-2^{n+1}}{0^+} = -\infty$

$\Rightarrow f_n$ n'est pas $\leq$ en $2^- \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 et E_n admet en $(2, 0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

$\cdot \leq$ en 0^+ : $f_n(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^n \sqrt{x(2-x)}}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} \sqrt{x(2-x)} = 0 \quad \text{si } n \geq 1$
 $= +\infty \quad \text{si } n = 0$

$\Rightarrow \text{si } n = 0, f_n \in \text{Roi }]0, 2[$

$\text{si } n \geq 1, f_n \in \text{Roi } [0, 2]$

2) Points fixes: $A(x, y) \in E_n$ then

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow y=1 \\ \text{ou } x=0 \rightarrow y=0 \\ \text{ou } \sqrt{x(2-x)}=0 \end{cases}$
 $\sqrt{x(2-x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=2 \rightarrow y=0 \end{cases}$

Concl: $\{0(0,0), A(1,1), B(2,0)\} \subset E_n$

3) $\text{si } n=0, f'_0(x) = (\sqrt{2x-x^2})' = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$

$\text{si } n \geq 1, f'_0(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}$

x	0	1	2	
$f'_0(x)$		+	0	-
$f_0(x)$	0	↗ 1 ↘	0	

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $f'_n(x) = (x^n \sqrt{2x-x^2})'$

$$\Rightarrow f'_n(x) = nx^{n-1} \sqrt{2x-x^2} + x^n \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$$

$$\Rightarrow f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}(x(2-x) + x^n(1-x))}{\sqrt{x(2-x)}}$$

$$\Rightarrow f'_n(x) = \frac{x^n(2n-nx+1-x)}{\sqrt{x(2-x)}}$$

$$\Rightarrow f'_n(x) = \frac{x^n[(2n+1)-(n+1)x]}{\sqrt{x(2-x)}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

on résoud : $f'_n(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^n = 0 \rightarrow x=0 \\ x = \frac{2n+1}{n+1} < 2 \end{cases}$

x	0	$\frac{2n+1}{n+1}$	2
$f'_n(x)$	0	+	0
$f_n(x)$	0	$f_n\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$	0

$$f_n\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n \sqrt{\frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{1}{n+1}\right)} = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{\frac{2n+1}{n+1}}$$

f'_n s'annule en $\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = U_n$ et change de signe de $\oplus \rightarrow \ominus$

$\Rightarrow f_n$ admet un maximum absolu en

$$U_n = \frac{2n+1}{n+1} \text{ égal à } V_n = f_n(U_n)$$

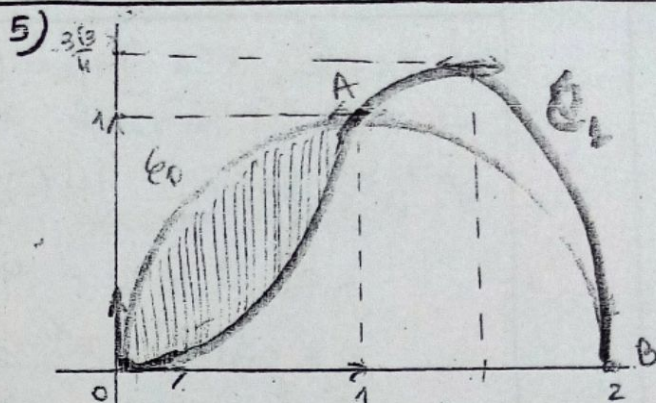
$$\text{avec } V_n = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{\frac{2n+1}{n+1}}$$

$$4) a) \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln[f(U_n)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln[x] = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(U_n) = f(2) = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(V_n) = -\infty \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0^+$$



⑤ $g(x) = \ln[f_0(x)] = \ln(\sqrt{x(2-x)})$

1) $D_g =]0,2[$, $g'(x) = \frac{f'_0(x)}{f_0(x)}$

x	0	1	2	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	↗ 0 ↘	$-\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(f_0(x)) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(f_0(x)) = -\infty$$

$$g(1) = \ln[f_0(1)] = \ln 1 = 0$$

2) $h(x) = g(x)$ si $x \in]0,1[$

$g \in \text{strat sur }]0,1[\Rightarrow h$ réalise

une bijection de $]0,1[$ sur $]-\infty, 0[= g$

alors h admet une fonction réciproque h^{-1} définie par

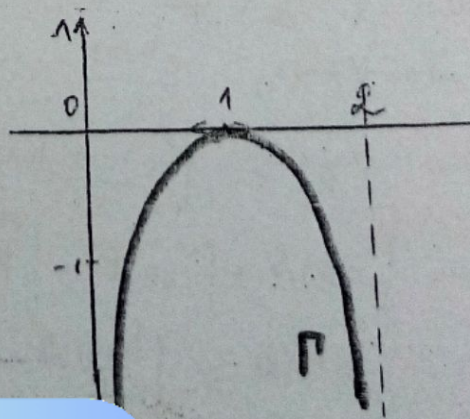
$$\begin{cases} \forall y \in]-\infty, 0[\\ h(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in]0,1[\\ y = h^{-1}(x) \end{cases}$$

$$\bullet h(y) = x \Leftrightarrow \ln(\sqrt{y(2-y)}) = x \Leftrightarrow y(2-y) = e^{2x}$$

$$\Rightarrow y^2 - 2y - e^{2x} = 0, \quad \Delta' = 1 - e^{2x} \geq 0$$

$$\text{d'où } \begin{cases} y' = 1 - \sqrt{1 - e^{2x}} \geq 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0[\\ y'' = 1 + \sqrt{1 - e^{2x}} > 0 \end{cases} \text{ et } [0,1[\text{ n'est pas atteinte}$$

Donc : $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 - e^{2x}} \quad \forall x \leq 0$



$$3) a) \alpha \in]0, 1[$$

$$g(x) = g(\alpha) \Rightarrow \ln[f(\alpha)] = \ln[g(\alpha)]$$

$$\Rightarrow f_0(x) = f(\alpha) \Rightarrow \sqrt{2x-x^2} = \sqrt{2\alpha-\alpha^2}$$

$$\Rightarrow 2-x^2 = 2\alpha-\alpha^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + (2\alpha - \alpha^2) = 0$$

$$\Delta' = 1 - (2\alpha - \alpha^2) = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = |\alpha - 1| = 1 - \alpha \quad \text{car } \alpha \in]0, 1[$$

$$\Rightarrow x' = 1 - (1 - \alpha) = \alpha \in]0, 2[$$

$$x'' = 1 + (1 - \alpha) = 2 - \alpha \in]0, 2[$$

$$\Rightarrow S_{]0, 2[} = \{ \alpha, 2 - \alpha \}$$

$$b) G = h^{-1} \circ g \Rightarrow h^{-1}[g(x)] = G(x)$$

$$\text{or } \forall x \in]0, 2[, g(x) \in]-\infty, 0] = D_{f^{-1}}$$

$$\Rightarrow DG =]0, 2[$$

$$\cdot \text{ si } x \in]0, 1[, G(x) = h^{-1}(h(x)) = x$$

$$\cdot \text{ si } x \in [1, 2[, G(x) = h^{-1}(g(x)) = 2 - x$$

$$c) f_n(\theta) = \int_0^{1+\sin\theta} f_n(t) dt \quad \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$1) a) \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], -1 \leq \sin\theta \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 + \sin\theta \leq 2$$

$$\Rightarrow [0, 1 + \sin\theta] \subset [0, 2]$$

$$\text{comme } f_n \in \mathcal{M}([0, 2])$$

$$\Rightarrow f_n \text{ est intégrable sur } [0, 1 + \sin\theta]$$

$$\text{alors } f_n \text{ est définie sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$b) \text{ on a } \theta \mapsto 1 + \sin\theta \in \mathcal{M}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{et } (1 + \sin\theta) \in [0, 2] = D_{f_n}$$

$$\Rightarrow f_n \text{ est } \mathcal{M}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$F'_n(\theta) = (1 + \sin\theta)' \cdot f_n(1 + \sin\theta)$$

$$\Rightarrow F'_n(\theta) = \cos\theta \cdot (1 + \sin\theta)^n \sqrt{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}$$

$$\Rightarrow F'_n(\theta) = \cos\theta (1 + \sin\theta)^{n+1/2}$$

$$\Rightarrow F'_n(\theta) = \cos\theta (1 + \sin\theta)^n |\cos\theta|$$

$$\text{or } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\theta \geq 0$$

$$\text{donc } F'_n(\theta) = \cos^2\theta \cdot (1 + \sin\theta)^n$$

$$2) a) F'_0(\theta) = \cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

$$\Rightarrow f_0(\theta) = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + k_0$$

$$\text{or } f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + k_0 = 0 \Rightarrow k_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow F_0(\theta) = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} F'_1(\theta) &= \cos^2\theta (1 + \sin\theta) \\ &= \cos^2\theta + \sin\theta \cdot (\cos\theta)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F'_1(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) - (\sin\theta)(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow F_1(\theta) = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) - \frac{1}{3}(\cos\theta)^3 + k_1$$

$$\text{or } F_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{8} + k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{\pi}{8}$$

$$\text{donc } F_1(\theta) = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) - \frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{\pi}{8}$$

$$b) A = \int_0^1 (f_0(x) - f_1(x)) dx = \int_0^1 f_0(x) dx - \int_0^1 f_1(x) dx$$

$$\Rightarrow A = F_0(1) - F_1(1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{3} + \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow A = \frac{1}{3} \quad (\text{car})$$

$$3) E'_0: y = -f_0(x), \quad E = E_0 \cup E'_0$$

$$M(x, y) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} M \in E_0 \\ \text{ou} \\ M \in E'_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = f_0(x) \\ \text{ou} \\ y = -f_0(x) \end{cases} \Rightarrow y^2 = f_0^2(x)$$

$$\Rightarrow y^2 = x(2-x) \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$\text{alors } M \text{ décrit le cercle } \mathcal{C}(1, 1)$$

$$\text{avec } M(1, 0)$$

