Rappel

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Produits remarquables

a et b deux nombres complexes

$(a+ib)(c+id) = ac - bd + i(ad+bc)$

$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$

$(a-ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab$

$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$

$(1+i)^2 = 2i, (1-i)^2 = -2i$ et $(1+i)(1-i) = 2$

Retenons

1. Soit z un nombre complexe
   $M(z) \Leftrightarrow M(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$.
2. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
3. $I = A * B \Leftrightarrow z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Retenons

Soit z un nombre complexe non nul et $M(z)$ un point

- $\arg(z) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})[2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

Si θ est un argument de z alors :

$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$

Retenons

1. a et b deux réels ,
   $\overline{a+ib} = a - ib$ et $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$.
2. Soit z un nombre complexe.
   - $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
   - $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
   - $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
   - $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$
3. $z = a + ib, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

Retenons

1. a et b des réels, $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$
2. z at z' des nombres complexes.
   - ♣ $|zz'| = |z||z'|$ $\qquad z \neq 0, \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
   - ♣ $z \neq 0, \left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ $\qquad |z^n| = |z|^n$
   - ♣ $|\overline{z}| = |z|,$ $\qquad |z|^2 = z\overline{z}$
   - ♣ $|z| = 1 \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$
3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$,
   $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   - ♠ $OM = |z|$, M d' affixe z
   - ♠ $AB = |z_B - z_A|$

Arguments (1)

✓ $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$

✓ $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)[2\pi]$

✓ $\arg(z^n) \equiv n \cdot \arg(z)[2\pi], n \in \mathbb{Z}$

✓ $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$

✓ $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$

✓ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

✓ $z \in i\mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

✓ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Arguments (2)

- $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \arg(z_B - z_A)\,[2\pi]$
- $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)[2\pi]$
- $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$
- Soit w et w' deux vecteurs non nuls.
  - $\left(\widehat{\vec{w}, \vec{w'}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_{\vec{w'}}}{z_{\vec{w}}}\right)[2\pi]$
  - $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ sont orthogonaux $\Longleftrightarrow \dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w'}}} \in i\mathbb{R}$
  - $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow \dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w'}}} \in \mathbb{R}$

Relations entre forme algébrique et forme trigonométrique

$$r=\sqrt{a^2+b^2};\quad \cos\theta=\frac{a}{r}\quad \text{et}\quad \sin\theta=\frac{b}{r}$$

Forme algébrique $z=a+ib,(a,b)\in\mathbb{R}^2$ $\iff$ Forme trigonométrique $z=r(\cos\theta+i\sin\theta), r>0$

$$a=r\cos\theta\quad \text{et}\quad b=r\sin\theta$$

Forme exponentielle

Définition

Pour tout réel α , on pose $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ et on lit exponentielle $i\alpha$

Propriétés

✓ $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \left|e^{i\theta}\right|=1$ et $\arg\left(e^{i\theta}\right)\equiv\theta[2\pi]$

✓ $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta},\qquad -e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)},\qquad ie^{i\theta}=e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

✓ $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \forall k\in\mathbb{Z}:\qquad e^{i(\theta+2k\pi)}=e^{i\theta}$

✓ $\forall\theta,\theta'\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{Z}$, on a : $\quad e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$

✓ $\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta};\quad \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')};\quad \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$

Exemples

$e^{i0}=1; e^{i\frac{\pi}{2}}=i; e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$

$e^{i\pi}=-1;\qquad e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad e^{-i\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

Définition

Soit z un nombre complexe de moduler $(r>0)$ et d'argument θ . On écrit $z=r.e^{i\theta}$, Cette écriture s'appelle forme exponentielle de z.

Formules d'EULER

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\qquad :\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\ \text{ et }\ \sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$$

Formules utiles

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad 1+e^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}\quad \text{et}\quad 1-e^{i\theta}=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$$

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad e^{i\alpha}+e^{i\beta}=2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\quad \text{et}\quad e^{i\alpha}-e^{i\beta}=2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Equation : $z^n=a,\ \ n\geq 1,\ \ a\in\mathbb{C}^*$

Théorème et Définition

♣ Pour tout entier naturel non nul n, l'équation: $z^n=1$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes définies par : $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}},\quad k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$

♣ Les solutions de l'équation: $z^n=1$ sont appelées racines nièmes de l'unité.

Conséquences

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Lorsque $n\geq 3$, les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Théorème et Définition

Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ et n un entier naturel non nul, l'équation: $z^n=a$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par :
$z_k=\sqrt[n]{|a|}e^{\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)},\quad k\in\{0,1,2,\ldots.n-1\}$.
Les solutions de l'équation: $z^n=a$ sont appelées les racines nièmes de a.

Conséquences

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Lorsque $n\geq 3$, les points images des racines nièmes de a sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|a|}$

Equation : $az^2+bz+c=0, \quad a\in\mathbb{C}^*$

Racine carrée

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées
- Soit Δ un nombre complexe non nul.

1. $z=x+iy$ où x et des réels est une racine carré de Δ si et seulement si $\begin{cases} x^2-y^2=2\,\mathrm{Re}(\Delta) \\ x^2+y^2=|\Delta| \\ 2xy=\mathrm{Im}(\Delta) \end{cases}$
2. Les racines carrées de Δ sont $\pm\sqrt{|\Delta|e^{i\left(\frac{\arg(\Delta)}{2}\right)}}$.

Théorème et Définition

Soit a,b et c des nombres complexes tels que $a\neq 0$.
L'équation $az^2+bz+c=0$, admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions définies par: $z_1=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_i=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée de $\Delta=b^2-4ac$

ATTENTION
Si $\Delta\notin\mathbb{R}_+$ éviter d'écrire $\delta=\sqrt{\Delta}$

Conséquences

- ✓ Soit Δ un nombre complexe non nul et δ une racine carrée de Δ.
- ✓ Si $\Delta=-2$ Alors $\delta=\pm i\sqrt{2}$.
- ✓ Si $\Delta=b, b\in IR-$ Alors $\delta=\pm i\sqrt{|b|}$
- ✓ Si $\Delta=2i$ Alors $\delta=\pm(1+i)$.
- ✓ Si $\Delta=-2i$ Alors $\delta=\pm(1-i)$
- ✓ Si $\Delta=5i=\frac{5}{2}(2i)$ Alors $\delta=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}(1+i)$
- ✓ $Si\Delta=-5i=\frac{5}{2}(-2i)$ Alors $\delta=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}(1-i)$

Conséquences

Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0, a\neq 0$
Alors $az^2+bz+c=a(z-z_i)(z-z_z)$

$$z_1+z_2=-\frac{b}{a}\quad,\quad z_1z_2=\frac{c}{a}$$

Exemples d'équations de degré supérieur ou égal à 3

Théorème

Soit $a_1,a_2,\ldots,a_n$ des nombres complexes tels que $a_n=0$ et $n\geq 2$.
Soit $P(z)=a_nz^n+a_{n\text{-}1}z^{n-1}+\ldots+a_1z_1+a_0$
Si z_0 est un zéro de $P(z)$ alors $P(z)=(z-z_0)g(z)$ où $g(z)$ est un polynôme de degré $n-1$.

Nombres complexes et transformations

Symétrie orthogonale d'axe $\left(O,\ \vec{u}\right)$

L'application du plan dans lui qui â tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $\overline{z}$ est la symétrie orthogonale d'axe $\left(O,\ \vec{u}\right)$.

Symétrie centrale de centre O

L'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $-z$ est la symétrie centrale de centre O.

Translation de vecteur $\vec{w}$

$\vec{w}$ est un vecteur d'affixe b.
L'écriture complexe de la translation $t_{\vec{w}}$ qui transforme $M(z)$ en $M'\left(z'\right)$ est $z'=z+b$.

Rotation

Soit Ω un point d'affixe z_0 et θ un réel. L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ ,qui transforme $M(z)$ en $M'\left(z'\right)$ est :
$z'=e^{i\theta}(z-z_0)+z_0$.

Homothétie

Soit Ω un point d'affixe z_0 et k un réel. L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k, qui transforme $M(z)$ en rapport k, qui transforme $M(z)$ en $M'\left(z'\right)$ est : $z'=k(z-z_0)+z_0$

Théorème

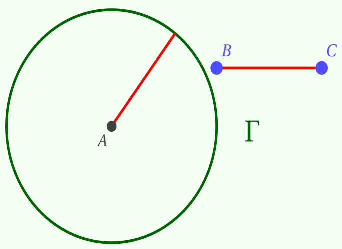
Soit f l'application: $M(z)\mapsto M'\left(z'=az+b\right)$ oi a et b sont des nombres complexes:

1. Si $a=1$ alors f est la translation de vecteur $\vec{w}$ in d'affixe b .
2. Si $|a|=1$ et $a\neq 1$ alors f est la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\arg(a)$.

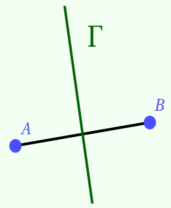
Lieux géométriques

A, B et C désignent trois points du plan P deux à deux distincts.

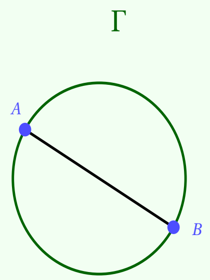
L'ensemble $\Gamma = \{M \in \mathscr{P} / MA = BC\}$ est le cercle de centre A et de rayon BC.



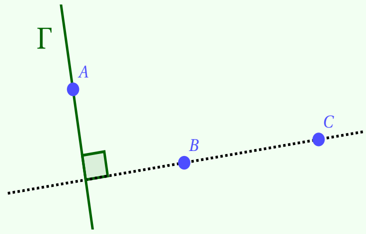
L'ensemble $\Gamma = \{M \in \mathscr{P} / MA = MB\}$ est la médiatrice de $[AB]$.



L'ensemble $\Gamma = \{M \in \mathscr{P} / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}$ est le cercle de diamètre $[AB]$.



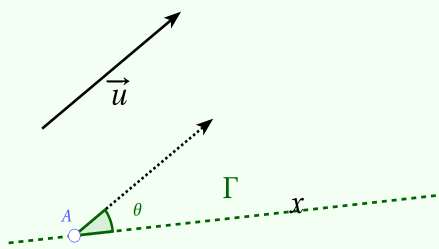
L'ensemble $\Gamma = \{M \in \mathscr{P} / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\}$ est la perpendiculaire à (BC) passant par A .



L'ensemble $\Gamma = \{M \in \mathscr{P} / \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{AM})} \equiv \theta[\pi]\}$ la droite $(Ax) \backslash \{A\}$ tel que $\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{Ax})} \equiv \theta[2\pi]$

Cas particulier:

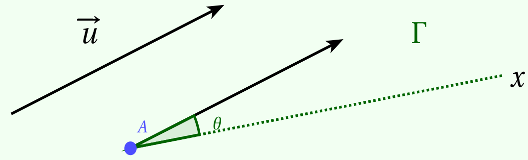
$\Gamma = \{M \in P / \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{AM})} \equiv 0[\pi]\}$ est la droite $\Delta(A, \vec{u}) \backslash \{A\}$.



L'ensemble $\Gamma = \{M \in \mathscr{P} / (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}) \equiv \theta[2\pi]\}$ la demi droite $[Ax) \setminus \{A\}$ tel que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{Ax}}) \equiv \theta[2\pi]$

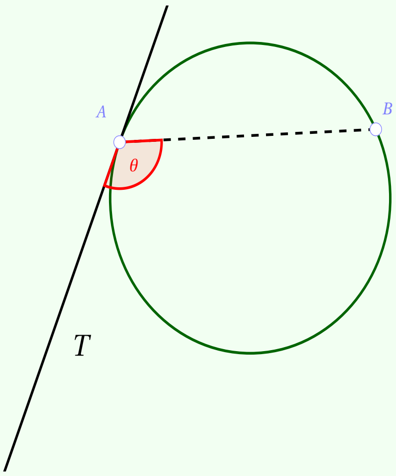
Cas particulier:

$\Gamma = \{M \in P / (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}) \equiv 0[2\pi]\}$ est la demi droite $[A, \vec{u}) \setminus \{A\}$.



L'ensemble $\Gamma = \left\{M \in \mathscr{P} / \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \theta[\pi]\right\}$

- Si $\theta \equiv 0[\pi]$ alors $\Gamma = (AB) \setminus \{A, B\}$.
- Si $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ alors $\Gamma =$ le cercle $\mathscr{C} \setminus \{A, B\}$ où $\mathscr{C}$ est le cercle passant par A et B et tangent à $[AT)$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \theta[\pi]$.

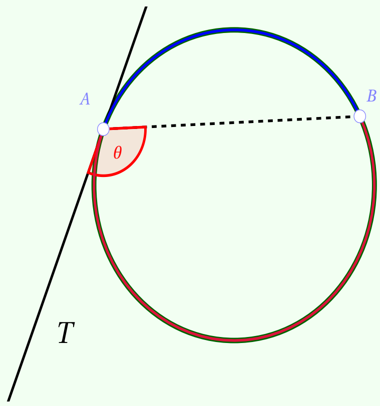


Cas particuliers:

$\Gamma = \left\{M \in P / (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\right\}$ est le cercle $\mathscr{C}_{[AB]} \setminus \{A, B\}$.

L'ensemble $\Gamma = \left\{M \in \mathscr{P} / \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \theta[2\pi]\right\}$ est :

- Si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $\Gamma = (AB) \setminus [AB]$.
- Si $\theta \equiv \pi[2\pi]$ alors $\Gamma = [AB] \setminus \{A, B\}$
- Si $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors $\Gamma =$ l'arc $\widehat{AB}$ ou $\widehat{BA}$ privé de A et B du cercle $\mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est le cercle passant par A et B et tangent à $[AT)$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \theta[2\pi]$.



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, si pour tout y de $f(I)$, il existe une unique réel x de I tel que $f(x)=y$ alors f est une bijection de I sur $f(I)$.

Théorème

Si f est strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

- On note f^{-1} la fonction réciproque de f
- f^{-1} est définie sur $f(I)$
- $\forall y \in I$ et tout x de $f(I)$: $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

Courbe d'une bijection réciproque

Les courbes, dans un repère orthonormé, d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.

Théorème

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J=f(I)$.
La bijection réciproque f^{-1} est continue et a le même sens de variation que f sur $J=f(I)$.

Théorème

Soit f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I.
* Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$ Alors f^{-1} est dérivable en $b=f(a)$ et $\left(f^{-1}\right)'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$.
* Si f est dérivable sur I et pour tout x de I; $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et pour tout x de $f(I)$ on a : $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Points méthode

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $J=f(I)$.
* Si on te demande d'étudier la dérivabilité de f^{-1} en b La première chose à faire c'est : chercher $a=f^{-1}(b)$ puis étudier la dérivabilité de f en a.
* Si on te demande d'étudier la dérivabilité de f^{-1} sur un intervalle K La première chose à faire c'est : déterminer $L=f^{-1}(K)$ puis étudier la dérivabilité de f sur L.

Propriétés

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. x et y sont des réels positifs.

- $x^n=y \Leftrightarrow x=\sqrt[n]{y}$.
- $(\sqrt[n]{x})^n=x, \quad \sqrt[n]{x^n}=|x|=x$.
- La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x}=+\infty$.

Propriétés

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. x et y sont des réels positifs.

- $\sqrt[n]{xy}=(\sqrt[n]{x})(\sqrt[n]{y})$.
- $y>0, \quad \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[mn]{x}$.
- $\sqrt[n]{x^m}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^m$, $\sqrt[mn]{x^m}=\sqrt[n]{x}$, $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}} \quad x>0$

Théorème

- La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0, \quad (\sqrt[n]{x})'=\dfrac{1}{n}\dfrac{\sqrt[n]{x}}{x}=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
- Si f est dérivable et strictement positive sur I alors $\sqrt[n]{f}$ est dérivable sur I et $(\sqrt[n]{f})'=\dfrac{1}{n}\dfrac{f'\sqrt[n]{f}}{f}$.

Définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
On dit que F est une primitive sur I de f si F est dérivable sur I et pour tout x de I. $F'(x) = f(x)$

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur cet intervalle.
Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle I diffèrent d'une constante. $(F = G + cte)$.
Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$ alors $\forall b \in \mathbb{R}$ il existe une unique primitive F de f telle que $F(a) = b$.

Retenons

Fonction f	Primitive F
$f(x) = (x+b)^n, \quad n \geq 1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}(x+b)^{n+1}$
$f(x) = (ax+b)^n, n \geq 1$ et $a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$F(x) = \frac{-1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$
$f(x) = \frac{1}{(ax+b)^n}, n \geq 2$	$F(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$F(x) = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$f(x) = \sqrt{ax+b}$	$F(x) = \frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$
$f(x) = \sqrt[3]{ax+b}$	$F(x) = \frac{3}{4a}(ax+b)\sqrt[3]{ax+b}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$F(x) = \frac{n}{n+1}x\sqrt[n]{x}$
$f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$	$F(x) = \frac{n}{(n+1)a}(ax+b)\sqrt[n]{ax+b}$
$f(x) = \sin(ax+b), a \neq 0$	$F(x) = \frac{-1}{a}\cos(ax+b)$
$f(x) = \cos(ax+b), a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$

Retenons

Fonction f	Primitive F
$f(x) = \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$F(x) = \frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$u' \cdot u^n, \quad n \geq 1$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}$
$u'\sqrt[n]{u}$	$\frac{n}{n+1}u\sqrt[n]{u}$
$\frac{u'}{\sqrt[n]{u}}$	$\frac{n}{n-1}\frac{u}{\sqrt[n]{u}}$
$u'v + uv'$	uv
$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\frac{u}{v}$
$u' \cdot (v' \circ u)$	$v \circ u$

Définition et conséquences

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. a et b deux réels de I.
On appelle : intégrale de f entre a et b le réel noté : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Conséquences

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . a et b deux réels de I.

- $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b cte\ dx = (b-a)\times cte$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. a , b et c trois réels de I.

Propriétés algébriques

1. Relation de Chasles
$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
2. Pour tous réels α et β
$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$
3. Intégrations par parties
$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$
u et v sont des fonctions dérivables et leurs fonctions dérivées sont continues.

Intégrales et inégalités

1. Si $\left.\begin{array}{l} a\le b \\ \forall x\in I, f(x)\ge 0\end{array}\right\}$ Alors : $\int_a^b f(x)dx \ge 0$
2. Si f est positive sur $[a,b]$, $(a<b)$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de réel , alors $\int_a^b f(x)dx > 0$.
3. Si $\left.\begin{array}{l} a\le b \\ \forall x\in I, f(x)\le g(x)\end{array}\right\}$ Alors : $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.
4. Si f est continue sur $[a,b]$ alors :
$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, $(a<b)$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Théorème (inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, $(a<b)$. Soit m et M deux réels.
Si pour tout x de $[a,b]$
$m\le f(x)\le M$ alors $m\le \overline{f}\le M$

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
Il existe $c\in[a,b]$ tel que $\overline{f} = f(c)$.

Fonction définie à l'aide d'une intégrale

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a\in I$.
Alors la fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Conséquences

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a\in I$.
Alors la fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $\forall x\in I$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J. Si

$\left.\begin{array}{l} u \text{ est dérivable sur } I \\ f \text{est continue sur} J \\ \forall x\in I,\quad u(x)\in J \\ a\in J\end{array}\right\}$ Alors la fonction $F: x\mapsto \int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'(x) = u'(x)\cdot f(u(x))$

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et $a \in I$.

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

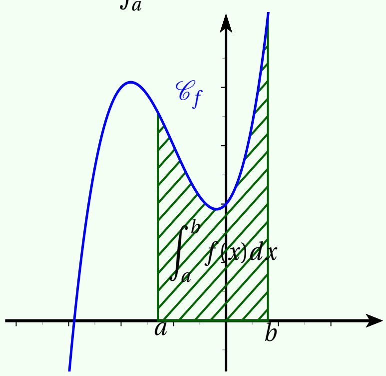
Théorème

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$,périodique de période T .
Pour tout réel a, $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

Calcul d'aire

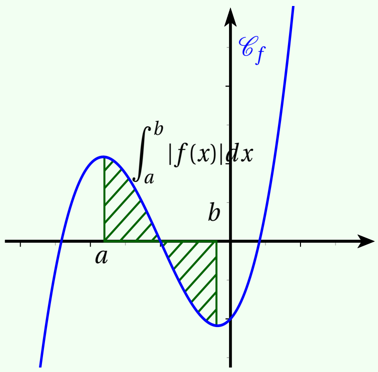
Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b], (a<b)$.
L'aire (en ua) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x=a$ et $x=b$ est le réel $\int_{a}^{b} f(x)dx$



Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.Soit f une fonction continue sur $[a,b], (a<b)$. L'aire (en ua) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x=a$ et $x=b$ est le réel $\int_{a}^{b} |f(x)|dx$



Interprétation de la valeur moyenne

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$, $(a<b)$.
L'aire de la surface du plan limitée par la courbe de f, les droites $x=a$, $x=b$ et $y=0$ est égale à celle du rectangle de côtés $(b-a)$ et $\overline{f}$.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b], (a<b)$. L'aire (en ua) de la partie du plan limitée par la courbe de f, celle de g et les droites $x=a$ et $x=b$ est le réel $\int_{a}^{b} |f(x)-g(x)|dx$

Calcul de volume

Définition

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Le volume $\mathscr{V}$ du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe de f dans le plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$autour de l'axe $\left(O, \vec{i}\right)$est le réel $\mathscr{V} = \pi\int_{a}^{b} f^2(x)dx$

Equations différentielles de type : $y' = ay + b$

Théorème

Soit a un réel non nul. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto ke^{ax}$ où k est une constante.

Théorème

Soit a et b deux réels tels que a non nul. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est une constante réelle.

Conséquences

Soit a et b deux réels tels que a non nul. Pour tous réels x_0 et y_0 , léquation différentielle $y' = ay + b$ admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0 c'est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

Equations différentielles de type : $y'' + w^2 y = 0$

Théorème

Soit w un réel non nul. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + w^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = a\cos(wx) + b\sin(wx)$ où a et b sont des réels quelconques.

Conséquences

Soit w un réel non nul et x_0, y_0 deux réels. L'équation différentielle $y'' + w^2 y = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = x_0$ et $f'(0) = y_0$.
C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{y_0}{w}\sin(wx) + x_0 \cos(wx)$

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Diviseurs et multiples d'un entier

Définition :
Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$.

✓ On dit que b divise a sill existe un entier relatif q tel que : $a = bq$. On note $b|a$.

✓ On dit également que a est un multiple de b ou que b est un diviseur de a.

Remarque : si a n'est pas un multiple de b alors b ne divise pas a.
Conséquences :

✓ Tout entier a est divisible par 1 et -1 .

✓ Soit a un entier non nul. Si a divise 1 alors $a = 1$ ou $a = -1$

✓ Soit a et b deux entiers tels que $b \neq 0$. Si b divise a alors $\forall k \in Z$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, b$ divise ak et b divise a^n.

Propriétés :
Soient a , b et c trois entiers.

✓ Si $a|b$ et $b|a$ alors $a = \pm b$.

✓ Si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$

✓ si $c|a$ et $c|b$ alors $c|(au + bv)$ quels que soient u et v entiers relatifs.
On dit que c divise toute combinaison linéaire de a et de b a coefficients entiers.

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Théorème :
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, il existe un unique couple (q, r) d'entiers relatifs tels que : $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < |b|$.
q est le quotient et r est le reste.
Détermination du quotient :

$$\text{Si } \; b > 0 \; \text{ alors } \; q = E\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{Si } \; b < 0 \; \text{ alors } \; q = -E\left(-\frac{a}{b}\right)$$

Congruence modulo n

Définition :
Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul. On dit que a est congru à b modulo n ou que a et b sont congrus modulo n si $a - b$ est un multiple de n . On note $a \equiv b \pmod{n}$
Conséquences :
Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

✓ $a \equiv b \pmod{n} \iff n$ divise $a - b$

✓ $a \equiv 0 \pmod{n} \iff n$ divise a

✓ Soit d un entier naturel non nul.
Si $a \equiv b \pmod{n}$ et d divise $n \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$

Théorème :
Soit n un entier naturel non nul. Pour tout entier a, il existe un unique entier r appartient a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que $a \equiv r (\bmod\ n)$.
On dit que r est le reste modulo n de a.

Congruence modulo n (suite)

Propriété réciproque :
Soient a entier relatif et n entier naturel non nul.
Si $a \equiv r(\bmod n)$ et $0 \leq r < n$ alors r est le reste dans la division euclidienne de a par n.
Propriété :
Soient a, b et c trois entiers et n un entier naturel non nul.

✓ $a \equiv a(\bmod n)$.

✓ $a \equiv b(\bmod n) \Leftrightarrow b \equiv a(\bmod n)$

✓ $a \equiv b(\bmod n) \Leftrightarrow b \equiv a(\bmod n)$

✓ Si $a \equiv b(\bmod n)$ et $b \equiv c(\bmod n)$ alors $a \equiv c(\bmod n)$

Propriété :
Soient a, b, a' et b' quatre entiers relatifs et n entier naturel non nul. La congruence est compatible avec l'addition.

1. si $a \equiv b \pmod n$ et $a' \equiv b' \pmod n$ alors : $a + a' = b + b' \pmod n$
2. Quel que soit $c \in \mathbb{Z}$: si $a = b(\bmod n)$ alors : $a + c = b + c(\bmod n)$
3. Si $a = b(\bmod n)$ et $a' = b'(\bmod n)$ alors : $a \times a' = b \times b'(\bmod n)$
4. Quel que soit k entier naturel non nul: si $a \equiv b(\bmod n)$ alors : $a^k \equiv b^k(\bmod n)$
5. Quel que soit $c \in \mathbb{Z}$: si $a = b(\bmod n)$ alors : $a \times c = b \times c(\bmod n)$
   En particulier: si $a \equiv b(\bmod n)$ alors : $(-a) \equiv (-b)(\bmod n)$
6. si $a = b(\bmod n)$ et $a' = b'(\bmod n)$ alors : $a - a' = b - b'(\bmod n)$

Petit théorème de Fermat

Pour tout entier naturel a et pour tout nombre premier p ne divisant pas a. On a : $a^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$.
Remarque : si p est premier alors a est premier avec p si et seulement si p ne divise pas a

Corollaire

Soit p un nombre premier, quel que soit a entier naturel: $a^p \equiv a(\bmod p)$

Identité de Bezout

$PGCD$ de deux entiers

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Notons $D(a)$ l'ensemble des diviseurs de a et $D(b)$ celui des diviseurs de b.
L'ensemble de leurs diviseurs communs est noté: $D(a, b)$ avec $D(a, b) = D(a) \cap D(b)$.
1 divise a et b donc $D(a, b)$ n'est pas vide.
De plus, a et b admettant un nombre fini de diviseurs, leurs diviseurs communs sont en nombre fini.
$D(a, b)$ étant un sous ensemble fini et non vide de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus grand élément d.
Définition du pgcd de deux entiers naturels non nuls :
Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On appelle plus grand commun diviseurs de a et b l'entier naturel noté $d = \operatorname{pgcd}(a, b)$ ou $d = a \wedge b$ tel que :

✓ d divise a et b

✓ Tout diviseur commun à a et b est un diviseur de d.

Remarque :
Soient a et b deux entiers naturels non nuls,

✓ si $a = bq + r$ avec q et r entiers naturels non nuls alors $pgcd(a, b) = pgcd(b, r)$

✓ si b divise a alors $pgcd(a, b) = b$.

✓ $a \wedge b$ est le dernier reste non nul dans la succession des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide de a par b.

PGCD de deux entiers (suite)

Définition :
Si a et b sont deux entiers non nuls alors il existe un unique entier naturel d qui vérifie les deux conditions suivantes:

♠ d divise a et b.

♠ L'entier d est appelé plus grand commun diviseurs de a et b et noté $d = a \wedge b$ ou $d = \text{pgcd}(a, b)$

Conséquences :

✓ Pour tous entiers non nuls a et b , $a \wedge b$ est un entier naturel non nul.

✓ Pour tous entiers non nuls a et b , $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a)$.

✓ Si a et b sont des entiers relatifs non nuls: $p\text{gcd}(a, b) = p\text{gcd}(|a|, |b|)$

Propriétés :
soient a et b deux entiers non nuls

✓ si $b|$ a alors pgcd $(a, b) = |b|$.

✓ Si $a = bq + r$ avec q et r entiers naturels non nuls alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.

✓ $a \wedge b = b \wedge a$.

✓ Pour tout entier non nul $k, (ka) \wedge (kb) = |k|(a \wedge b)$.

✓ Pour tout entier non nul $c_s a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

Nombres premiers

Définition :
Soit p un entier naturel. On dit que p est un nombre premier s'il admet exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts. Diviseurs qui sont 1 et lui-même. (puisque 1 divise tout nombre et tout nombre est diviseur de lui-même.)
Remarque : A ce jour, il n'existe toujours pas de critère ou de formule qui permette instantanément de dire si un nombre quelconque est premier.
Théorème 1 :
Soit $n \in \mathbb{N}$ si $n \geq 2$ alors n admet au moins un diviseur premier.
Théorème 2 :
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Si n n'est pas premier admet au moins un diviseur premier p tel que : $p \leq \sqrt{n}$
Théorème 3 : (contraposée du théorème 2) :
Si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ alors n est premier.
Théorème 4 :
L'ensemble P des nombres premiers est infini.
Théorème 5 : (DECOMPOSITION D'UN ENTIER EN PRODUIT DE FACTEURS PREMIERS)
Tout entier $n \geq 2$ se décompose de façon unique sous la forme : $\mathrm{n} = \mathrm{p}_1^{\alpha_1} \mathrm{x} \mathrm{p}_2^{\alpha_2} \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} \mathrm{p}_\mathrm{m}^{\alpha_\mathrm{m}}$ $O\dot{u}: p_1, p_2, \ldots p_m$ sont des nombres premiers tels que : $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont des entiers naturels non nuls.
L'écriture de n sous cette forme est appelée décomposition de n en produit de facteurs premiers.

Nombres premiers entre eux

Définition :
Soient a et b deux entiers relatifs non tous nuls. a et b sont dits premiers entre eux si pgcd $(a, b) = 1$
Remarques :

1. Deux nombres premiers entre eux ont donc 1 pour seul diviseur positif commun.
2. Si a est un nombre premier et que a ne divise pas b alors a et b sont premiers entre eux.

Théorème :
Soient a et b deux entiers non nuls. pgcd $(a, b) = d \Leftrightarrow$ il existe a' et b' entiers tels que:$a = da'$ et $b = db'$ avec pgcd $\left(a', b'\right) = 1$

Nombres premiers entre eux (suite)

Lemme de Gauss :
Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si a divise bc et a et b premiers entre eux alors a divise c.
Théorème :
Soient a et b deux entiers naturels non nuls et n un entier.

$$\text{Si} \quad \left.\begin{array}{r} a \wedge b = 1 \\ n = 0(\operatorname{mod} a) \\ n = 0(\operatorname{mod} b) \end{array}\right\} \text{ alors } \quad n = 0(\operatorname{mod} ab)$$

Conséquence :
Soient n et m deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux . x et x_0 deux entiers.

$$\left.\begin{array}{r} x = x_0(\operatorname{mod} n) \\ x = x_0(\operatorname{mod} m) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x = x_0(\operatorname{mod} m.n)$$

PPCM de deux entiers

Théorème et définition :
Pour tous entiers non nuls a et b , il existe un unique entier naturel non nul M qui vérifie les deux conditions suivantes:

- M est un multiple de a et de b.
- Tout multiple de commun de a et b est un multiple de M .
  L'entier M ainsi défini est le plus petit commun multiple de a et b et est noté $a \vee b$

Conséquence :

- $a \vee b = |a| \vee |b|$.
- $a \vee b = d \cdot \left|a' \cdot b'\right|$ tels que $d = a \wedge b, a = a' \cdot d$ et $b = b' \cdot d$.
- $(a \vee b)(a \wedge b) = |a \cdot b|$

Propriétés :
Soient a et b deux entiers non nuls.

- si b divise a alors $a \wedge b = |a|$.
- Pour tout entier non nul k, $\quad (ka) \vee (kb) = |k|(a \vee b)$.
- Pour tout entier non nul c, $\quad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

Théorème :
Soient a et b deux entiers non nuls tels que $b \geq 2$ et $a \wedge b = 1$.
Il existe un unique entier non nul u appartenant $\&\{1, \ldots, b-1\}$ tel que $au \equiv 1(\operatorname{mod} b)$.
On dit que u est un inverse de a modulo b.
EXEMPLE : 3 est un inverse de 5 modulo 7.

Identité de Bezout

Théorème de Bezout :
Deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$
Application :
Soient a, b et c trois entiers non nuls. Montrer que

✓ Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$ alors $a \wedge (bc) = 1$.

✓ si $a \wedge b = 1$ alors $a \wedge b^2 = 1$

✓ Pour tout entier naturel n, si $a \wedge b = 1$ alors $a \wedge b^n = 1$

Corollaire :
Si a et b deux entiers non nuls et $d = a \wedge b$ alors il existe deux entiers u et v tels que $d = au + bv$.
Attention : La réciproque n'est pas vraie.

Définition :
Toute équation (E) du type : $ax+by=c$ où a,b et c sont des entiers relatifs et où les inconnues x et y sont des entiers relatifs est appelée équation diophantienne.
Théorème :
Soient a,b et c trois entiers et $d=a\wedge b$. L'équation $ax+by=c$ admet des solutions dans Z^2 si et seulement si, d divise c.

EQUATIONS DIOPHANTIENNES : EXISTENCE DE SOLUTIONS

Étape 1 :
A quelle condition (E) admet-elle au moins une solution?
L'équation $(E): ax+by=c$ admet au moins une solution si et seulement si $a\wedge b$ divise c.
Remarque :

1. La premiere chose a faire est évidemment de calculer le PGCD de a et de b
2. Si a et b sont premiers entre eux, (E) admet des solutions quel que soit c.

Étape 2 : Recherche d'une solution particulière.
Trois cas de figure sont possibles:

- Soit la solution particulière est donnée par le texte et il ne reste qu'a vérifier qu'elle est bien solution de (E).
- Soit il y a une solution particulière évidente.
- Soit il faut trouver cette solution par le calcul.

Prenons un exemple concret: $(E): 616x+585y=12$

Première méthode
$616=585\times 1+31$
$585=31\times 18+27$
$31=27\times 1+4$
$27=4\times 6+3$
$4=3\times 1+1$
$3=1\times 3+0$

Le dernier reste non nul est 1 donc $pgcd(616,585)=1$. 1 divise 12 donc ce qui est certain c'est que l'équation a des solutions. Voici maintenant la technique a adopter pour remonter la suite de divisions.

Exprimer le PGCD : $1=4-3\times 1$
Remplacer le reste précédent : $1=4-(27-4\times 6)\times 1$
Factoriser : $1=4\times 7-27\times 1$
Remplacer le reste précédent : $1=(31-27\times 1)\times 7-27\times 1$
Factoriser : $1=31\times 7-27\times 8$
Remplacer le reste précédent : $1=31\times 7-(585-31\times 18)\times 8$
Factoriser : $1=31\times 151-585\times 8$ Remplacer le reste précédent : $1=(616-585\times 1)\times 151-585\times 8$ Factoriser : $1=616\times 151+585\times(-159)$
Multiplier par 12 : $12=616\times 1812+585\times(-1908)$

Et vue la probabilité de se tromper dans ce genre de manipulation, il est conseillé de vérifier le résultat trouvé:
En effet, la calculatrice confirme que : $616\times 1812+585\times(-1908)=12$
Une solution particulière de (E) est donc le couple ($1812;-1908$).

Deuxième méthode

		1	18	1	6	1	3
0	1	1	19	20	139	159	616
1	0	1	18	19	132	151	585

Suites arithmétiques, suites géométriques

Suites arithmétiques

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.
- Pour tous entiers naturels n et m on a : $u_n = u_m + (n-m)r$.
- En particulier : $u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r$.
- $\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\dfrac{u_p + u_n}{2}$.

Suites géométriques

Soit (u_n) est une suite géométrique de raison q.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = q.u_n$.
- Pour tous entiers naturels n et m on a : $u_n = q^{n-m}u_m$.
- En particulier : $u_n = q^n.u_0 = q^{n-1}.u_1$.
- Si $q \neq 1$, $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p\dfrac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}$.
- $\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ n'\text{existe pas} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$

Suite majorée - suite minorée - suite bornée

- Une suite u est dite majorée s'il existante M telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- Une suite u est dite minorée s'il existante m telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$.
- Une suite u est dite bornée s'il existe deux constantes m et M telles que : $\forall n \in IN, m \leq u_n \leq M$.

Suite monotone

Définition

Soit u une suite réelle :

- u est croissante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$.
- u est décroissante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$.
- u est constante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.

Suites

Soit $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $I = [0, +\infty[$. Si f est monotone sur I alors la suite u a le même sens de variation que f.

Suites récurrentes

Soit u une suite réelle définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans I.

- Si $\forall x \in I, f(x) \geq x$ alors la suite u est croissante.
- Si $\forall x \in I, f(x) \leq x$ alors la suite u est décroissante.

Suite convergente

Définition

Une suite réelle est dite convergente si elle admet une limite finie.

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Théorème

- Toute suite (u_n) croissante et majorée converge vers un réel a et $\forall n, u_n \leq a$.
- Toute suite (u_n) décroissante et minorée converge vers un réel b et $\forall n, u_n \geq b$.

Théorème

Soit u une suite réelle et ℓ un réel (ℓ peut être infinie).
$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$

Théorème

Soit $u_n = f(n)$ où f est une fonction.
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ (a fini ou infini) Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

Suite du type : $v_n = f(u_n)$

Théorème

Si $\begin{cases} f & \text{est continue sur un intervalle ouvert } I \\ u_n & \text{une suite d'élément de } I \ (u_n \in I) \\ u_n & \text{converge vers } a \ (a \in I) \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$

Théorème

Si $\begin{cases} f & \text{est définie sur un intervalle } I \\ u_n & \text{une suite d'élément de } I \ (u_n \in I) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \ , & \ell \text{ fini ou infini} \\ \lim\limits_{x\to\ell} f(x) = b & \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$

Limites et ordre

Théorème 1

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers a.

- Si $u_n \geq 0$ ou $u_n > 0$, a partir d'un certain rang alors $a \geq 0$.
- Si $u_n \leq 0$ ou $u_n < 0$, a partir d'un certain rang alors $a \leq 0$.
- Si $m \leq u_n \leq M$ ou $m < u_n < M$, à partir d'un certain rang alors $m \leq a \leq M$.

Théorème 2

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Si $\begin{cases} w_n \leq u_n \leq v_n & \text{à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell, & \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Théorème 3

Soit deux suites (u_n) et (v_n)

Si $\begin{cases} u_n \leq v_n & \text{à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty & \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Si $\begin{cases} u_n \leq v_n & \text{à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty & \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Théorème 4

Soit deux suites (u_n) et (v_n)

Si $\begin{cases} |u_n| \leq v_n & \text{à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 & \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Suites récurrentes

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction.
Si (u_n) est convergente vers un réel a et si f est continue en a alors $f(a) = a$.

Suites adjacentes

Définition

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence converge vers 0.

Théorème

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante alors ces deux suites sont convergentes et convergent vers la même limite a et pour tout n, $u_n \leq a \leq v_n$.

Isometries

Définition

Une isométrie du plan est une application du plan dans lui-même qui conserve les distances.

Isométrie et produit scalaire

f est une isométrie du plan ssi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'}$. Pour tous points A, B et C d'images respectives A', B' et C' par f.

Propriétés

- ♠ Les images de deux points distincts par une isométrie sont detux points distincts.
- ♠ Les images de 3 points non alignés par une isométrie sont 3 points non aligneś.
- ♠ Une isométrie conserve les mesures des angles géométriques.
- ♠ Soit f une isométrie

$$\left.\begin{array}{l}(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \text{ est un repere orthonormé}\\ \text{Si } \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\\ f(A)=A',\quad f(B)=B'_{\prime},\quad f(C)=C', f(M)=M'\end{array}\right\}\text{ Alors }\left\{\begin{array}{l}\left(A',\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right) \text{ est un repère orthonormé}\\ \overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'}+y\overrightarrow{A'C'}\end{array}\right.$$

- ♠ Soit f une isométrie.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{EF} = \alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{CD}\\ f(A)=A', f(B)=B', f(C)=C', f(E)=E' \text{ et } f(F)=F'\end{array}\right\}\text{ Alors } \overrightarrow{E'F'} = a\overrightarrow{A'B'}+\beta\overrightarrow{C'D'}$$

- ♠ Une isométrie conserve : Les barycentres en particulier les milieux, le parallélisme ,l'orthogonalité et le contact.

Théorème

Toute isométrie est une application bijective et sa réciproque est une isométrie.

Définition

La composée d'une translation de vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\overrightarrow{u}$ est directeur de Δ est appelée symétrie glissante.

Théorème

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et D une droite.
Si $\vec{u}$ est vecteur directeur de D alors : $t_{\overrightarrow{u}}\circ S_D = S_D\circ t_{\vec{u}}$

Composition d'isométries

Théorème

- ♡ La composée de deux isométries est une isométrie.
- ♡ Soit f et g deux isométries $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$
- ♡ Soit f et g deux isométries $S_\Delta ofot_{\overrightarrow{u}} = g$ signifie $f = S_\Delta\circ g\circ t_{-\overrightarrow{u}}$

1. Composée de deux translations : $t_{\overrightarrow{u}}\circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}}\circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$
2. Composée de deux symétries orthogonales :
   Soit Δ et Δ' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$
   - Si $\Delta//\Delta'$ alors $S_{\Delta'}\circ S_\Delta = t_{2\overrightarrow{IJ}}$ où I est un point de Δ et J son projeté orthogonal sur Δ'.
   - Si Δ et Δ' sont sécantes en I alors $S_{\Delta'}oS_\Delta = R_{\left(I,2\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}}\right)\right)}$.
   - Si $\Delta = \Delta'$ alors $S_{\Delta'}OS_\Delta = Id_P$
   - Si Δ et Δ' sont perpendiculaires en I alors $S'_\Delta\circ S_\Delta = S_\Delta\circ S_{\Delta'} = S_I$
3. Composée de deux rotations
   La composée de deux rotations est soit une translation si la somme des angles est nulle soit une rotation si la somme des angles n'est pas nulle.

4. Composée de deux symétries centrales
   La composée de deux symétries centrales est une translation : $S_B \circ S_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$

5. Composée de deux symétries glissantes

- Soit f une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{u}$ alors $f \circ f = t_{2\overrightarrow{u}}$.
- Soient f et g deux symétries glissantes d'axes respectifs Δ et Δ'.
  - ✓ Si $\Delta // \Delta'$ alors $f \circ g$ est une translation
  - ✓ Si Δ et Δ' sont sécants alors $f \circ g$ est une rotation.

6. Composée d'une translation et d'une rotation

- La composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\theta \neq 2k\pi$ est une rotation d'angle θ.
- La composée d'une translation et d'une symétrie centrale est une symétrie centrale.

7. Composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale
   Soit D une droite et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.

- Si $\overrightarrow{u}$ est normal a D alors : $S_D \circ t_{\overrightarrow{u}} = S_{D'}$ avec $D' = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(D)$
- Si $\vec{u}$ est directeur de D alors : $S_D \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_D$ symétrie glissante.
- Si $\overrightarrow{u}$ n'est ni directeur ni normal à D alors : $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ où $\vec{v}$ directeur et $\vec{w}$ normal à D et $S_D \circ t_{\overrightarrow{u}} = S'_D \circ t_{\overrightarrow{v}}, D' = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(D)$: symétrie glissante d'axe D' et de vecteur $\overrightarrow{v}$.

8. Composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale (à démontrer)
   Soit I un point et D une droite. On désigne par R la rotation de centre I et d'angle $\theta \neq 0$ et par S_D la symétrie orthogonale d'axe D.

- Si $I \in D$ alors $R \circ S_D$ et $S_D \circ R$ sont des symétries orthogonales.$(R \circ S_D \neq S_D \circ R)$
- Si $I \notin D$ alors $R \circ S_D$ et $S_D \circ R$ sont des symétries glissantes.$(R \circ S_D \neq S_D \circ R)$

Théorème

✓ Toute translation est la composée de deux symétries axiales d'axes parallèles.

✓ Toute rotation est la composée de deux symétries axiales d axes sécants.

✓ Toute isométrie est la composée d'au plus trois symétries axiales.

Isométries et points fixes

Théorème

- Soit f une isométrie distincte de l'identité. Soit A un point d'image A' par f tel que $A \neq A'$. SiM est invariant par f alors M est un point de la médiatrice de $[AA']$.
- Une isométrie qui fixe 3 points non alignés est égale a l'identité..
- Deux isométries qui coincident en trois points non alignés sont égales.
- Une isométrie distincte de l'identité qui fixe deux points distincts A et B est $S_{(AB)}$.
- Une isométrie qui fixe un seul point I est une rotation de centre I.
- Une isométrie qui fixe un point est soit l'Idp, soit une rotation soit une symétrie orthogonale.

Théorème

Soit O un point du plan.Toute isométrie du plan se décompose d'une manière unique en la composée d'une translation et d'une isométrie g qui fixe O.

Conséquences

Une isométrie est soit l'identité soit une rotation soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante.

Théorème

Une isométrie sans point fixe est soit une translation de vecteur non nul, soit une symétrie glissante.

Déplacements - Antidéplacements

Théorème

Toute symétrie orthogonale transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées.
On dit qu'une symétrie orthogonale change l'orientation.

Conséquences

- La composée d'un nombre pair de symétries orthogonales conserve les mesures des angles orientés.
- La composée d'un nombre impair de symétries orthogonales transforme les mesures des angles orientés en leurs opposés.

Théorème

Soit f une isométrie du plan

- La composée de 2 déplacements est un déplacement.
- La composée de 2 antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.
- Les déplacements sont : $l'idp$ les rotations et les translations.
- La réciproque d'un déplacement est un déplacement et la réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Définition

On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les mesures des angles orientés.
On appelle antidéplacements toute isométrie qui transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Conséquences

Soit f une isométrie du plan

- f est un déplacement si et seulement si f est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales.
- f est un antidéplacement si et seulement si f est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales.
- Toute isométrie du plan est soit un déplacement, soit un antidéplacement.
- Les déplacements sont : $l'idp$ les rotations et les translations.
- Les antidéplacements sont : les symétries axiales et les symétries glissantes.

Les déplacements

Théorème

- Un déplacement qui fixe deux points distincts est égal à l'identité.
- Deux déplacements qui coincident sur deux points distincts sont égaux.

Théorème

Soit $A, B,$ Cet $D4$ points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$ et $AB \neq 0$ alors il existe un unique déplacement tel que $f(A) = Cetf(B) = D$.

Attention

Soit A, B , C et D , 4 points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$ alors il existe deux déplacements qui envoient le segment $[AB]$ au segment $[CD]$.

Angle d'un déplacement

Définition

Soit $A, B,$ Cet D, 4 points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$ et $AB \neq 0$ Si $A', B', C'etD'$ sont les images respectives de A, B, C et D par f alors
$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}}\right) [2\pi]$

En désignant par θ une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right)$,
On dit que f est un déplacement d'angle θ

Théorème

- Un déplacement d'angle nul est une translation.
- Un déplacement d'angle non nul est une rotation.
- Si f est un déplacement d'angle θ et g un déplacement d'angle θ' alors :
  - ✓ f^{-1} est un déplacement d'angle $-\theta$
  - ✓ $f \circ g$ est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$

Déplacements et nombre complexes

Théorème

L'écriture complexe d'un déplacement f est : $z' = az + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $|a| = 1$

- Si a= 1 alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b .
- Si $a \neq 1$ alors f est une rotation de centre I d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$ et d'angle $\arg(a)$

Théorème

Soit f une rotation de centre I d'affixe z_0 et d'angle θ . L'écriture complexe de f est : $z' = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$

Les antidéplacements

Théorème

Soit f une isométrie.

- f est un antidéplacement ssi f est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales..
- f est un antidéplacement ssi f est une symétrie orthogonale ou la composée de trois symétries.

Conséquences

- Une isométrie est un antidéplacement ssi c'est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.
- Un antidéplacement est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante.

Théorème

- Deux antidéplacements qui coincident sur deux points distincts sont égaux.
- Soit A, B, Cet D, 4 points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$ alors il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$.

Attention

Soit A, B, Cet D, 4 points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$ alors il existe deux antidéplacements qui envoient le segment $[AB]$ au segment $[CD]$.

Théorème

Un antidéplacement qui fixe un point est une symétrie orthogonale

Symétrie glissante

Théorème et Définition

Soit f une symétrie glissante. Il existe un unique vecteur non nul $\vec{u}$ et une droite D unique tels que
$f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de D.
Cette décomposition est appelée forme réduite de f .
$\vec{u}$ et D sont les éléments caractéristiques de f .

Propriétés

Soit f une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe D.
Soit M un point d'image M' par f
✓ $M * M' \in D$.

✓ Si $M \in D$ alors $M' \in D$ et $\overline{MM'} = \vec{u}$.

✓ $f \circ f = t_{2\vec{u}}$.

DETERMINATION DES ELEMENTS CARACTÉRISTIQUES D'UNE SYMÉTRIE GLISSANTE

Soit f une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{u}$ et d'axe Δ

1. Soient A, B et C trois points. Si $f(A) = B$ et $f(B) = C$ alors $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\Delta = (IJ)$ avec $I = A * B$ et $J = B * C$
2. Soient A, B et C trois points. $I = A * B$
   Si $f(A) = B$ et $f(I) = C$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{IC}$ et $\Delta = (IC)$
3. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre I.
   Si $f(A) = C$ et $f(B) = D$ alors Δ est la perpendiculaire à (AB) issue de I et $\vec{u} = \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de A sur (CD) (à démontrer).

Homothéties et translations

Définition

Soit I un point et k un réel non nul. On appelle homothétie de centre I et de rapport k l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

Théorème

La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $k \neq 1$ est une homothétie de rapport k .

Théorème

Soit k un réel non nul et différent de I. Une application f est une homothétie de rapport k, si et seulement si, pour tous points M et $Nd'imagesM'etN'$ par f, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Théorème

Toute homothétie conserve les mesures des angles.

Théorème

La composée de deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2 est une homothétie de rapport k_1k_2 si $k_1k_2 \neq 1$, une translation si $k_1k_2 = 1$

Théorème

Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
L'application f est une homothétie de rapport $k \neq 1$, si et seulement si, il existe un nombre complexe b tel que
$z' = kz + b$.
De plus, l'affixe z_A du centre A de l'homothétie f vérifie :
$z_A = \dfrac{b}{1-k}$.

Similitudes

Définition

Soit k un réel strictement positif. On appelle similitude de rapport k, toute application du plan dans lui-même telle que pour tous points A et B d'images respectives A' et B' par f où $A'B' = k.AB$

Théorème

La composée de deux similitudes de rapports respectifs k et k'est une similitude de rapport kk'.

Théorème

Une application du plan dans lui-même est une similitude, si et seulement si, elle est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Théorème

Pour tous points A, B, C et D, d'images respectives $A'_\prime$, $B'_\prime$, C' et D' par une similitude de rapport k , on a :
$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = k^2.\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

Propriétés

- Une similitude de rapport k est une bijection et sa réciproque est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$
- Une similitude conserve les angles géométriques
- Une similitude conserve l'orthogonalité
- Une similitude conserve l'alignement et le barycentre.
- Une similitude transforme un segment en un segment
- Une similitude transforme une droite en une droite
- Une similitude transforme un cercle en un cercle et conserve le contact
- Une similitude conserve le parallélisme
- Soit A, B, C, D, E, F des points du plan A', B', C, D', E', F' leurs images respectives par une similitude
  Si $\overrightarrow{AB} = a.\overrightarrow{CD} + b.\overrightarrow{EF}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = a.\overrightarrow{C'D'} + b.\overrightarrow{E'F'}$

Théorème

Deux similitudes qui coincident sur trois points non alignés sont égales.

Propriétés

Soit f, g et h trois similitudes

- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- $f = g \Longleftrightarrow h \circ f = h \circ g$

Définition

On dit qu'une similitude est directe si elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement .
On dit qu'une similitude est indirecte si elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

Théorème

- ✓ La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
- ✓ La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.
- ✓ La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
- ✓ La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.
- ✓ La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

Conséquences

Toute similitude directe conserve les mesures des angles orientés.
Toute similitude indirecte change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Théorème

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

- ♣ Il existe une unique similitude directe qui envoie A sur C et B sur D.
- ♣ Il existe une unique similitude indirecte qui envoie A sur C et B sur D .

Théorème et Définition

Soit f une similitude directe et A, B, C et D des points tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$.
Soit A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D. Alors $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}}\right) [2\pi]$.

En désignant par θ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right)$, on dit que f est une similitude directe d'angle θ.

Théorème

Soit f et g deux similitudes directes d'angles respectifs θ et θ'
La similitude directe $f \circ g$ est d'angle $\theta + \theta'$.
La similitude directe f^{-1} est d'angle $-\theta$.

Théorème

Toute similitude directe de rapport différent de 1 admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Conséquences

Une similitude directe de rapport différent de 1 est parfaitement déterminée par la donnée de son centre, son rapport et son angle.
Le centre, le rapport et l'angle d'une similitude directe sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.
Une similitude directe de rapport k différent de 1 , fixe un unique point I appelé centre de la similitude directe f.
Une application f est une similitude directe de rapport $k \neq 1$, de centre I et d'angle θ , si et seulement si, pour tout point M distinct de I, d'image M', on a :
$IM' = k.IM$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}\right) \equiv \theta [2\pi]$

Théorème

Une similitude indirecte de rapport différent de 1 admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Théorème

Toute similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et d angle θ se décompose sous la forme $f = h \circ r = r \circ h$ ou h est l'homothétie de centre I et de rapport k et r est la rotation de centre I et d'angle θ . Cette décomposition s'appelle forme réduite de f.

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit f une application du plan dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
L'application f est une similitude directe de centre I de rapport $k \neq I$ et d'angle θ, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$ et $z_1 = \dfrac{b}{1-a}$.

Théorème

Soit f une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$ et h l'homothétie de centre 1 et de rapport k. Il existe une droite D telle que f se décompose de manière unique sous la forme $f = h \circ S_D = S_D \circ h$ où S_D est la symétrie orthogonale d'axe D.
Dans ce cas, la droite D est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$, où $M' = f(M)$.
Cette décomposition est appelée forme réduite de f.
La droite D est appelée axe de la similitude indirecte f.

Conséquences

Une similitude indirecte de rapport différent de 1, est parfaitement déterminée par son rapport,son centre et son axe, qui sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.
L'axe D d'une similitude indirecte de centre I et la perpendiculaire à D passant par I sont globalement invariants par f.
Si f est une similitude indirecte de centre I et de rapport k alors $f \circ f$ est une homothétie de rapport k^2.

Propriétés

Soit f une similitude indirecte de centre I, de rapport different de 1 et d'axe D.
Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D, alors $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{IM'}}\right) \equiv -(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{IM}})[2\pi]$ pour tout M distinct de I , d'image M' .
La droite D porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{MIM'}$.

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit f une application du plan dans lui-même qui a tout point M d'affixe associe le point M' d'affixe z'.
L'application f est une similitude indirecte de centre I , de rapport $k \neq 1$ si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = a\bar{z} + b$.
Dans ce cas : $k = |a|$ et $z_1 = \dfrac{ab+b}{1-|a|^2}$ est l'affixe du point I.

Relations métriques dans un triangle quelconque

I) Notations utilisées:

Nous utiliserons les notations suivantes pour un triangle ABC donné. On désignera par :

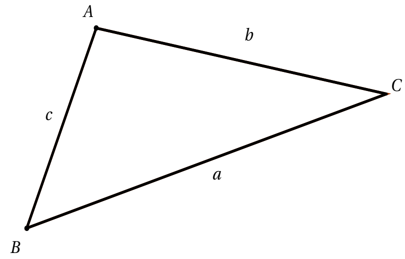
◊ a, b, c: les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B et C.

◊ $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$:: les angles géométriques $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

◊ S l'aire du triangle.

◊ R le rayon du cercle circonscrit du triangle ABC.

Rappel : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$



II) Relation d'El Kashi

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

Remarques :

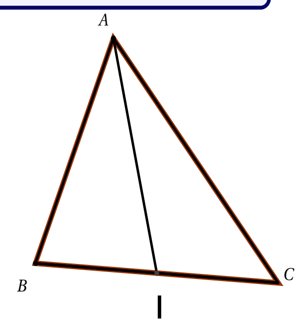
Cette relation peut être appliquée :

- Soit pour calculer l'angle si le triangle est donné par les longueurs a, b et c de ses trois côtés .
- Soit pour calculer le côté manquant, lorsque le triangle est donné par deux longueurs et un angle.
- On pourrait donner deux autres relations , une commençant par $b^2 =$ et l'autre par $c^2 =$. En fait, on retiendra la configuration.

III) Théorème de la médiane :

Soit I le milieu du segment $[BC]$ et m_A la longueur de la médiane $[AI]$.

- $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$
- $m_A^2 = \frac{1}{2}\left(b^2+c^2\right) - \frac{1}{4}a^2$.



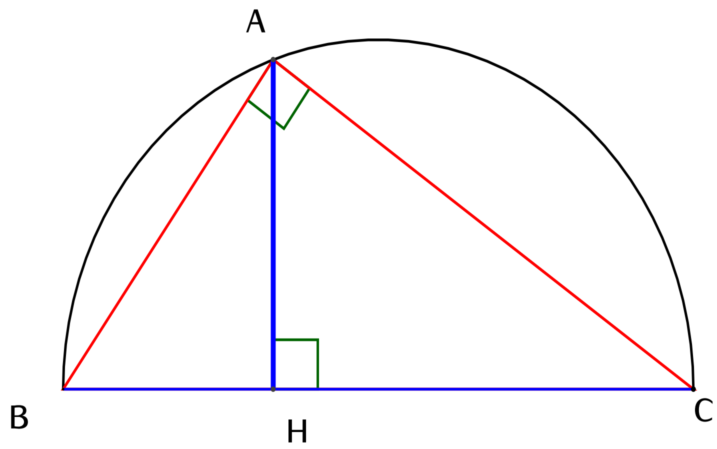
IV) Compléments : formules de l'aire et des sinus :

- Formule de l'aire : $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$
- Formule des sinus $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$

Remarque : Cette relation peut être utilisée :

- Soit pour calculer la longueur d'un côté, lorsque le triangle est donné par deux angles et un côté .
- Soit pour calculer un angle si le triangle est donné par 2 longueurs et un angle opposé à l'un des côtés précédents.

ATTENTION : Dans ce cas, on déterminera si l'angle cherché est obtus ou aigu.



Théorème de Pythagore :

Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Réciproque du théorème de Pythagore :

Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$,alors ABC est rectangle en A.

Théorème de la hauteur :

Si ABC est un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A alors $AH^2 = BH \times HC$.

Théorème d'Euclide :

Si ABC est un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A alors $AB^2 = BH \times BC$ et $CA^2 = CH \times CB$.

Théorème :

Si ABC est un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A alors $AB \times AC = BC \times AH$..

Produit scalaire dans l'espace :

Définition :

Soit A, B *et* C des points. Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et le réel défini par :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC.\cos BAC$ si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

Propriétés :

Pour tout vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{v}$ et tous réels α et β, on a :

- ✓ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- ✓ $\vec{u}\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$
- ✓ $\left(\alpha\vec{u}\right)\vec{v} = \vec{u}\left(\alpha\vec{v}\right) = \alpha\left(\vec{u}\vec{v}\right)$
- ✓ $\left(\alpha\vec{u}\right)\left(\beta\vec{v}\right) = \alpha\beta\left(\vec{u}\vec{v}\right)$

Théorème :

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.

Pour tout vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

- ✓ $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et on a :
  $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- ✓ Pour tous points $M\left(x, y, z\right)$ et $M'\left(x', y', z'\right)$
  $MM' = \sqrt{\left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2 + \left(z - z'\right)^2}$

Produit vectoriel :

Définition :

Soit A, B *et* C des points de l'espace.

Le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et défini par :

- ✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires, alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
- ✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaire alors :
  - $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$
  - $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$ est une base directe
  - $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = AB \times AC \times \sin\left(BAC\right)$

Propriétés :

Pour tout vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ et tous réel α et β .

- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right)$
- $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) + \left(\vec{u} \wedge \vec{w}\right)$
- $\alpha\vec{u} \wedge \beta\vec{v} = \alpha\beta\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)$.

Propriétés : :

L'espace est muni d'une base orthonormée $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$.

$\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w} = \left(\vec{u} \wedge \vec{w}\right).\vec{u} = \left(\vec{w} \wedge \vec{u}\right).\vec{v} = \det\left(\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}\right)$

Aire de parallélogramme :

L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est égale à $A = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$

Composantes du produit vectoriel : :

L'espace est muni d'une base orthonormé directe $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Pour tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ on a :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}b & b'\\c & c'\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a & a'\\c & c'\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

Volume d'un tétraèdre-volume d'un parallélépipède :

L'aire d'un triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est égale à : $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$

Equations d'une droite, d'un plan et d'une sphère :

Droite :

Soit A un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'ensemble D des points M tel que $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ où k est un réel est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Plan :

Soit A un point, $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. L'ensemble P des points M tels que : $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ où α et β sont des réels est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

$p=\left\{M;\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\right)=0\right\}$.

Sphère :

Soit A un point et R un réel strictement positif. La sphère S de centre A et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $AM=R$.

Distance d'un point à un plan :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit un plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$ un point de l'espace. La distance de A au plan P est égale à :

$$d\left(A,P\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Théorème :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit S la sphère de centre A et de rayon R. Soit un plan P et H le projeté orthogonal de A sur P.

- ✓ $S\cap P=\varnothing$ si $d\left(A,P\right)>R$.
- ✓ $S\cap P=\left\{H\right\}$ et $d\left(A,P\right)=R$.
- ✓ $S\cap P$ est un cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-d\left(A,P\right)^2}$ si $d\left(A,P\right)<R$

Distance d'un point à une droite :

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de D. La distance d'un point M de l'espace à la droite D est :

$$d\left(M,D\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

Translation :

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. L'application qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ est appelée translation de vecteur $\vec{\mu}$ et notée $t_{\vec{u}}.t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

Théorème :

L'image par une translation t :

- D' une droite est une droite qui lui es parallèle.
- D' un plan est un plan qui lui est parallèle.

Définition :

Toute translation conserve, les distances, le produit scalaire les milieux, le barycentre, le parallélisme et l'orthogonalité.

Pyramide régulière :

Une pyramide $IABCD$ de sommet I et dite régulière si, sa base $ABCD$ est un carré et le projeté orthogonal de I sr le plan $(ABCD)$ est le centre du carré $ABCD$.

Expérience analytique d'une translation :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace si $M(x,y,z)$ est un point de l'espace et $M'(x',y',z')$ est son image par la translation de vecteur $\vec{u}$ alors $\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\\z'=z+c\end{cases}$

L'application qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ est tel que $\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\\z'=z+c\end{cases}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$.

Homothétie de l'espace :

Définition :

Soit I un point de l'espace et k un réel non nul. L'application qui à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$ est appelée homothétie de centre I et de rapport k, elle est notée $h_{(I,k)}$

Pour tout points M et M' de espace $h_{(I,k)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$.

Définition :

Toute homothétie conserve :

- Les milieux, le barycentre, le parallélisme et l'orthogonalité.
- Le contact.

Théorème :

L'image par une homothétie h de rapport k :

- D' une droite est une droite qui lui es parallèle.
- D' un plan est un plan qui lui est parallèle.

Théorème :

- Toute homothétie de centre I et de rapport non nul k est une bijection de l'espace et sa réciproque est une homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$.
- Soit h une homothétie. Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par h on a : $M'N' = |k| MN$.

Expérience analytique d'une translation :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

- Soit h l'homothétie de centre $I\left(a,b,c\right)$ et de rapport non nul k.

  Soit $M\left(x,y,z\right)$ est nul de l'espace et $M'\left(x',y',z'\right)$ est on image par h ors $\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \\ z' = kz + (1-k)c \end{cases}$

- L'application qui à tout point $M\left(x,y,z\right)$ associe le point $M'\left(x',y',z'\right)$ tel que $\begin{cases} x' = kx + \alpha \\ y' = ky + \beta \\ z' = kz + \gamma \end{cases}$ où

  $k \neq 1$ est l'homothétie de centre $I\left(\frac{\alpha}{1-k},\frac{\beta}{1-k},\frac{\gamma}{1-k}\right)$ et de rapport k

Probabilité discrête

Rappel sur les probabilités et variables aléatoires

$p(\emptyset)=0 \quad , \quad 0 \le p(A) \le 1 \quad , \quad p(\Omega)=1$
$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Espérance : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

Variance :
$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$

Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé :
$P_A(B) = P(B/A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ avec $P(A) \neq 0$.

Cas d'équiprobabilité sur Ω : $P_A(B) = p(A/B) = \dfrac{\text{card}(A\cap B)}{\text{card}(A)}$

Probabilités composées :
$P(A\cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

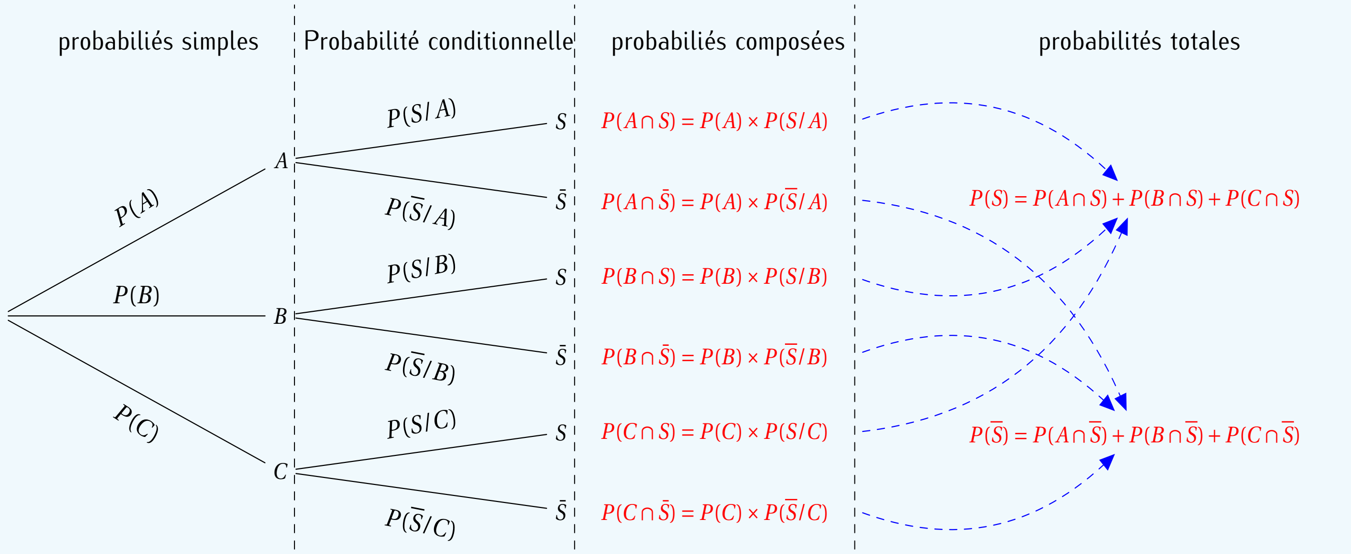
Probabilités totales avec $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ formant une partition de Ω :
$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$
$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n)P_{A_n}(B)$

Indépendance de deux événements

A et B indépendants $\iff P(A\cap B) = P(A) \times P(B) \iff P_A(B) = P(B) \iff P_B(A) = P(A)$

A et B indépendants $\iff A$ et B indépendants $\iff A$ et $\overline{B}$ indépendants $\iff \overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants

Arbre de probabilité



Formule de Bayes :

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini. Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ des événements formant une partition de l'univers E tels que $p(B_i) \neq 0$, $i \in 1, 2, \dots, n$ et A un événement tel que $p(A) \neq 0$. $p_A(B_k) = \dfrac{p(B_k \cap A)}{p(A)}$

Cas particulier : Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements tels que $p(B) \neq 0$, $p(B) \neq 1$ et $p(A) \neq 0$. $p_A(B) = \dfrac{p(B).p_B(A)}{p(B).p_B(A) + p(\overline{B}).p_{\overline{B}}(A)}$.

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini. On appelle aléa numérique ou variable aléatoire tout application $X : E \longrightarrow \mathbb{R}$.
Notation : L'événement $\{a \in E, X(a) = x_i\}$ est noté $\{X = x_i\}$.
L'ensemble $X(E)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par X.

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire. On appelle loi de probabilité de X ou distribution de X, l'application $P_X : X(E) \longrightarrow [0,1]$
$x_i \longmapsto p(X = x_i)$

Conséquences :
Soit $(E, \mathscr{P}P(E), p)$ un espace probabilité fini. Si X est une v.a sur E telle que $X(E) = \{x_1, x_2, \dots, x\}$ alors $\sum^{n} p(X = x_i) = 1$.

Fonction de répartition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une v.a sur E. On appelle fonction de répartition de X, l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ par $F : x \longmapsto p(X \leq x)$.

Définition

Soit E un ensemble fini, les parties $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de E lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est E.

Schéma de Bernoulli

Expérience qui n'a que deux issues possibles : ń succès ż de probabilité, p et ń échec ż de probabilité $1p$.

Notation : $\mathscr{B}(p)$

$P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$

$E(X)=p$

$V(X)=p(1-p)$

$\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$

Loi binomiale

Répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. X est égale au nombre de succès.

Notation: $\mathscr{B}(n;p)$; $q=1-p$

$P(X=k)=C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$; $k \in \{0,1,\ldots,n\}$

$E(X)=np$

$V(X)=npq$

$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

Probabilité continue

Variable aléatoire à densité sur I

Fonction de densité sur I : fonction f continue et positive sur I telle que : $\int_I f(t)\mathrm{d}t = 1$

♣ $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

♣ $P(X=a)=0$

♣ $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

♣ $P(X \leq t) = 1 - P(X \geq t)$

♣ $E(X) = \int_I t f(t)\mathrm{d}t$

Loi uniforme

Soit un intervalle $[a,b]$, $a<b$. La fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ est appelée densité de la loi de probabilité uniforme sur $[a,b]$. On appelle probabilité uniforme sur $[a,b]$ l'application qui à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$ associe le réel $p([c,d]) = \int_c^d f(x)dx = \dfrac{d-c}{b-a}$

Conséquences :

Pour tout réel c de $[a,b]$, $p(c) = \int_c^c f(x)dx = 0$.

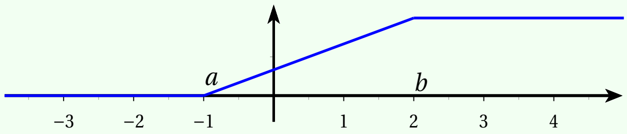
Si on désigne par $\overline{[c,d]}$ le complémentaire de $[c,d]$ dans $[a,b]$, alors $\overline{[c,d]} = 1 - p([c,d])$.

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle $[a,b]$ suit la loi uniforme si $p(c \leq X \leq d) = \dfrac{d-c}{b-a}$

Définition

Soit X une v.a qui suit la loi de probabilité uniforme p sur l'intervalle $[a,b]$. On appelle fonction de répartition de X, l'application $F:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$ définie par : $\begin{cases} 0, & \text{si } x<a \\ p(a\leq X\leq x)=\dfrac{x-a}{b-a}, & \text{si } x\in[a,b] \\ 1, & \text{si } x>b \end{cases}$



Loi exponentielle

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.
On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application p qui :

- à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,d])=\int_c^d \lambda e^{-\lambda t}dt$.
- à tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,+\infty[)=e^{-\lambda c}$

Conséquences :

1. Pour tout réel $c>0, p(\{c\})=\int_c^c f(x)dx=0.$
2. $c>0, p([0,c])=\int_0^c f(x)dx=1-e^{-\lambda c}$
3. $p([c,+\infty[)=1-p([0,c])=e^{-\lambda c}.$

Définition

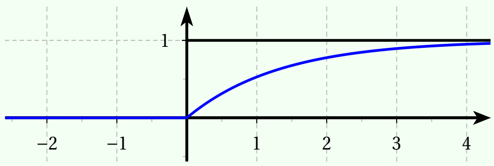
On dit qu'une v.a X suit loi exponentielle de paramètre λ, Si :

$$p(c\leq X\leq d)=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$$

et $\quad p(X\geq c)=e^{-\lambda c}$

Définition

Soit X une v.a qui suit la loi exponentielle p de la paramètre λ. On appelle fonction répartition de X, l'application $F:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$ définie par : $\begin{cases} 0, & \text{si } x<0 \\ p(0\leq X\leq x)=1-e^{-\lambda x}, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$



Statistiques

Définition : Distributions marginales

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n et soit $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$ les valeurs numériques prises respectivement par les variables X et Y .

✓ La distribution marginale de la variable X est la distribution des valeurs $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ prises par la variable X .

✓ La distribution marginale de la variable Y est la distribution des valeurs $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ prises par la variable Y.

Définition

Soit X une série statistique sur un échantillon de taille n .
Si $\overline{X}, V(X)$ et σ_X désignent respectivement la moyenne, la variance et l'écart type de la série,alors :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i, \qquad V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2, \qquad \sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

où les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent les valeurs distinctes prises par la variable X si elle est discrète ou les centres des classes si la variable X est continue. L'entier n_i désigne l'effectif de la valeur x_i .

Définition

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n .
On appelle covariance de (X, Y) le réel, noté $\operatorname{cov}(X, Y)$ défini par :

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$$

Où (x_i, y_i) est la valeur observée pour l'individu i si X et Y sont discrets, ou le centre de la classe s il'une des variables est continue.

Définition

Soit (X, Y) une série statistique double de taille n .
Soit n_{ij} le nombre de fois qu'apparaît le couple (x_i, y_i) alors :

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} n_{ij} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$$

Définition : Nuage de points

Soit (X, Y) une série statistique double de valeurs $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$.
L'ensemble des points M_i de coordonnées (x_i, y_i) dans un repère orthogonal est appelé nuage de points représentant la série statistique.
Le point moyen du nuage est le point dont les coordonnées sont les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{Y}$.

Principe de la méthode de Mayer

Soit un nuage de points représentant une série statistique double (X, Y) et G son point moyen.
On scinde le nuage de points (X, Y) en deux parties contentent à peu prés le même nombre de points.
On considère alors les points moyens G_1 et G_2 des deux nuages obtenus.
La droite (G_1G_2) définit un ajustement affine du nuage de points représentant la série statistique double (X, Y).
La droite (G_1G_2) est appelée droite de Mayer et passe par le point moyen G du nuage global.

Théorème

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n et telle que $\sigma_X \neq 0$.

Soit $\left(x_i, y_i\right)_{1 \leq i \leq n}$ les valeurs observées de la série. Alors la somme $\sum_{i=1}^{n} \left(a x_i + b - y_i\right)^2$ est minimale pour le couple (a_0, b_0) tel que : $a_0 = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}$ et $b_0 = \overline{Y} - \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2} \overline{X}$.

Définition

Soit (X, Y) une série statistique double. On appelle **coefficient de corrélation** linéaire le réel noté : r_{XY} défini par

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

.

Propriétés

Soit (X, Y) une série statistique double. Alors $-1 \leq r_{XY} \leq 1$.
Le coefficient de corrélation linéaire est invariant par le changement d'unité ou d'origine.

Interprétation du coefficient de corrélation linéaire

Les statisticiens conviennent que lorsque $|r_{XY}| >$ [redacted] 0,75 , l'ajustement affine est justifié et les prédictions faites au moyen de cet ajustement sont raisonnables.

Théorème et Définition

Lors d'un ajustement affine de Y en X par **la méthode des moindres carrés**,
La droite $\mathscr{D}$ obtenue passe par le point moyen du nuage et a pour équation :

$$\mathscr{D} : y = ax + b \quad \text{où} \quad a = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)} \quad \text{et} \quad b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

Cette droite s'appelle **la droite de régression de Y en X**.

La droite $\mathscr{D}'$ **de régression de X en Y** obtenue par la méthode des moindres carrées, lors d'un ajustement affine, passe par le point moyen du nuage et a pour équation :

$$\mathscr{D}' : y = a'y + b' \quad \text{où} \quad a' = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(Y)} \quad \text{et} \quad b' = \overline{X} - a\overline{Y}$$

Cette droite s'appelle la droite de régression de X en Y .

Remarque

On suppose ici que les points du nuage ne sont pas tous alignés sur une même droite verticale, ni sur une droite horizontale. On a donc $\sigma(X) \neq 0$ et $\sigma(Y) \neq 0$.

- ✓ Les deux droites de régression $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ passent par le point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$.
- ✓ Les deux coefficients a et a' sont de même signe.
- ✓ Le coefficient de corrélation linéaire r vérifie $r^2 = aa'$

corollaire

Les droites des moindres carrés de Y en X et de X en Y passent par le point moyen G du nuage associe a la série (X, Y).