ÉQUIPE ACADEMIQUE MATHEMATIQUES

Academy

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

FICHES DE METHODE

MATHÉMATIQUES

ÉQUIPE ACADEMIQUE MATHEMATIQUES

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

FICHES DE METHODE

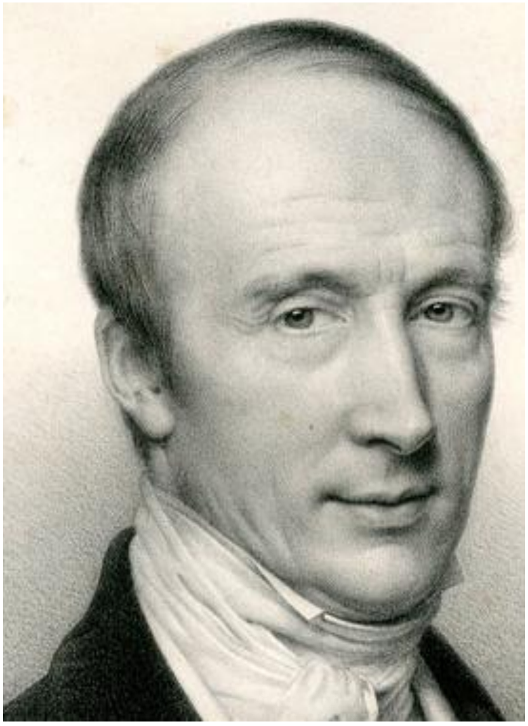
MATHÉMATIQUES

WWW.TAKIACADEMY.COM

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : ÉQUIPE ACADEMIQUE MATHEMATIQUES

Continuité et limites



Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Catholique fervent, il est le fondateur de nombreuses œuvres charitables, dont l'Œuvre des Écoles d'Orient. Royaliste légitimiste, il s'exila volontairement lors de l'avènement de Louis-Philippe, après les Trois Glorieuses. Ses positions politiques et religieuses lui valurent nombre d'oppositions.

Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps, quoique devancé par Leonhard Euler, Paul Erdős et Arthur Cayley avec près de 800 parutions et sept ouvrages ; sa recherche couvre l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

Son œuvre a fortement influencé le développement des mathématiques au XIXe siècle mais la négligence dont il fit consécutivement preuve sur les travaux d'Évariste Galois et de Niels Abel entacha son prestige. Il rejeta en effet le mémoire de Galois car « incompréhensible » et celui d'Abel sous le prétexte « encre trop pâle », alors que ces deux mathématiciens morts avant Cauchy dans des conditions misérables devaient marquer profondément les mathématiques du XXe siècle.

RESUME DU COURS

CONTINUITÉ

Soit f et g deux fonctions définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

✱Si f est continue en a **si et seulement si** $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = f(a)$

✱Si f est continue en a alors αf ; $|f|$ et $f^n (n \in IN)$ sont continue en a.

✱ $\left.\begin{array}{l} \text{Si f est continue en a} \\ f(a) \neq 0 \end{array}\right\}$ **alors** $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n} (n \in IN)$ sont continues en a.

✱ $\left.\begin{array}{l} \text{Si f est positive sur } I \\ \text{f est continue en a} \end{array}\right\}$ **alors** $\sqrt{f}$ est continue en a.

Conséquences

✱Toute fonction polynôme est continue sur IR.

✱Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

✱ $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur IR.

✱Les fonctions obtenues par opérations sur les fonctions usuelles **(somme, produit, quotient, composé)** sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

Prolongement par continuité :

Si f est définie sur I ; sauf peut-être en x_0 de I, et si $\lim\limits_{x_0} f = \mathscr{L}$ ($\mathscr{L}$ finie), on dit que g est un prolongement par continuité de f en x_0 **si et seulement si :** $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \text{ si } x \neq x_0 \\ \mathscr{L} & ; \text{ si } x = x_0 \end{cases}$

Branches Infinies :

interprétation mathématique	interprétation graphique
$\lim_{a^+} f = +\infty$ **ou** $\lim_{a^+} f = -\infty$ $\lim_{a^-} f = +\infty$ **ou** $\lim_{a^-} f = -\infty$	**D :(x = a)** asymptote verticale
$\lim_{+\infty} f = \mathscr{L}$ **ou** $\lim_{-\infty} f = \mathscr{L}$	**D : (y = $\mathscr{L}$)** asymptote horizontale
$\lim_{+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ **ou** $\lim_{-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$	**D :(y = ax+b)** asymptote oblique
Si $\lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$	Branche parabolique de direction $(O\vec{j})$
Si $\lim_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	Branche parabolique de direction $(O\vec{i})$

$$\lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \in IR^*)$$

et si $\lim_{\pm\infty} f(x) - ax = b \quad (b \in IR)$
alors
$y = ax + b$ asymptote oblique
oblique au voisinage de $\pm\infty$.

et si $\lim_{\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$
alors
la courbe de f admet une branche parabolique de direction $y = ax$

Axe de symétrie :

La droite $\Delta : x = a$;$(a \in IR)$ est un axe de symétrie pour $(\mathscr{C}_f)$ si pour tout x de D_f .

$$\begin{cases} (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

Continuité d'une fonction composée :

$\left.\begin{array}{l}\text{Si } U \text{ est continue en } a \\ \text{et } V \text{ est continue en } U(a)\end{array}\right\}$ alors $V \circ U$ est continue en a.

Théorème :

Soit **a**, **b** et **c** finis ou infinis. **Si** $\left.\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to a} U(x) = \mathbf{b} \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to b} V(x) = \mathbf{c}\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to a} V \circ U(x) = \mathbf{c}$

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ,a et b $\in I$ tels que $a < b$ pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) l'équation f(x) = k possède **au moins une solution** dans $[a,b]$ **en particulier** , si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans $]a,b[$, Si de plus **f est strictement monotone** la solution **est unique** dans $[a,b]$

Limites et ordres :

✱**Si** $\left.\begin{array}{l} U(x) \le V(x) \text{ pour } x \neq a \\ \lim\limits_{a} U = \mathscr{L} \\ \lim\limits_{a} V = \mathscr{L}' \end{array}\right\}$ alors $\mathscr{L} \le \mathscr{L}'$

✱ **Si** $\left.\begin{array}{l} U(x) \le f(x) \le V(x) \text{ pour } x \neq a \\ \lim\limits_{a} U = \lim\limits_{a} V = \mathscr{L} \end{array}\right\}$ alors

$\lim\limits_{a} f = \mathscr{L}$

✱ **Si** $\left.\begin{array}{l} f(x) \ge U(x) \text{ pour } x \neq a \\ \text{et } \lim\limits_{a} U = +\infty \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{a} f = +\infty$

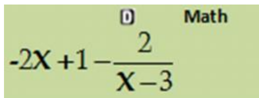
$U(x) \le U(x)$ pour $x \neq a$

CASIO fx-570 ES ou fx-570 ES PLUS

EXPRESSION d'une fonction

1°) Soit $f(x) = -2x + 1 - \dfrac{2}{x-3}$ **(mode COMP)+(MthIO)**

Pour la valeur de x , utiliser la touche  et la touche .



2°) Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} + x + 1$ **(mode COMP)+(MthIO)**

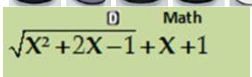
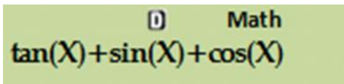
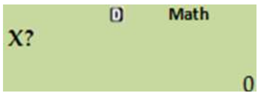


Image d'un nombre réel par une fonction

Soit $f(x) = \text{tg}x + \sin x + \cos x$

$f(\pi) = -1$ 





Limites d'une fonction

Pour avoir une idée de la valeur de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,donner à x des valeurs proches de x_0 et calculer f(x).

❑ *Limite en un point*

Exemple : $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-3x}{x^2-1}$ (Entrer $\frac{-3x}{x^2-1}$) [■/■] [(−)] [3] [ALPHA] [)] [REPLAY] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [1]

X	f(X) ≈	Appuyez sur ces touches :
-0.9	-14.21052632	[CALC] [(−)] [0] [·] [9] [=]
-0.99	-149.2462312	[CALC] [(−)] [0] [·] [9] [9] [=]
-0.999	-1499.249625	[CALC] [(−)] [0] [·] [9] [9] [9] [=]

ce qui confirme les valeurs (**et surtout les signes!**) que nous avons trouvées $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-3x}{x^2-1} = -\infty$

❑Limite à l'infini

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x^2-1}$ (Entrer $\frac{\cos x}{x^2-1}$) [■/■] [cos] [ALPHA] [)] [)] [REPLAY] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [1]

X	f(X)≈	Appuyez sur ces touches :
10	-0.00847546999	[CALC] [1] [0] [=]
100	0.00008624051	[CALC] [1] [0] [0] [=]
1000	0.00000056237	[CALC] [1] [0] [0] [0] [=]

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x^2-1} = 0 \ (0^+)$

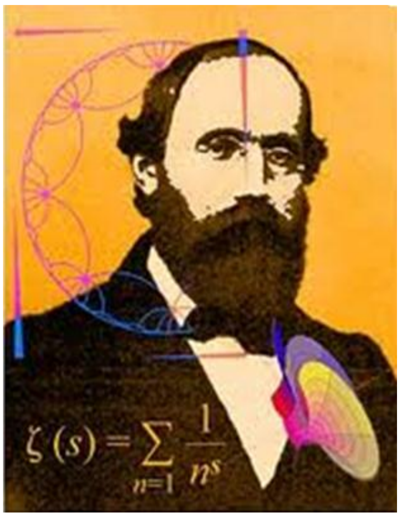
MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Primitives

Henri-Léon Lebesgue

(28 juin 1875 à Beauvais - 26 juillet 1941 à Paris) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée initialement dans sa dissertation Intégrale, longueur, aire à l'Université de Nancy en 1902. Il fut l'un des grands mathématiciens français de la première moitié du vingtième siècle.



Bernhard Riemann

(**allemand, 1826-1866**) Ce très grand mathématicien, élève de Gauss à Göttingen de Jacobi à Königsberg et de Dirichlet à Berlin, fut professeur en la célèbre université de Göttingen, succédant à ce dernier en 1859 (Dirichlet avait lui-même succédé à Gauss quatre ans plus tôt). Riemann mourut prématurément, atteint de tuberculose à Selesca (lac Majeur, Italie) où il se soignai.

RESUME DU COURS

1°) Définition

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.

F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

Théorème1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème 2

Si une fonction f admet une fonction primitive F sur un intervalle I alors f admet une infinité de fonctions primitives sur I et qui sont toutes de la forme F + c où c désigne une constante réelle arbitraire. C'est-à-dire l'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I est $\{F + c\ ;\ c \in \mathbb{R}\}$.

Théorème 3

Etant donnés un intervalle I, un réel a de I et un réel b.

Toute fonction f continue sur I admet une unique fonction primitive F sur I telle que $F(a) = b$.

2°) Opérations sur les fonctions primitives

Théorème 4

Etant donnés deux fonctions continues f et g sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et deux réels α et β.

Si F et G sont respectivement deux fonctions primitives de f et g sur I alors $(\alpha.F + \beta.G)$ est une fonction primitive de la fonction $(\alpha.f + \beta.g)$ sur I.

3°) Fonctions primitives des fonctions usuelles

I est intervalle de	Fonction f définie sur I par	Fonctions primitives F de f définies sur I par
$\mathbb{R}$	$x \mapsto a\,;\,(a \in \mathbb{R})$.	$x \mapsto ax + c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x^n\,;\,(n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto x^n\,;\,(n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^*_+$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \operatorname{tg}x + c\ ;\,(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\operatorname{cotg}x + c\ ;\,(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(ax+b)$ $(a \in \mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R})$.	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(ax+b)\,;$ $(a \in \mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R})$.	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c\,;\,(c\in\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}$ tel que $ax+b=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$x\mapsto 1+\tan^2(ax+b)$; $(a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R})$.	$x\mapsto\frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}$ tel que $ax+b=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}\}$	$x\mapsto(1+\cotan^2(ax+b))$ $(a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R})$.	$x\mapsto-\frac{1}{a}\cotan(ax+b)+c$; $(c\in\mathbb{R})$.

4°) Fonctions primitives des fonctions usuelles

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que :	**Fonction f**	**Fonctions primitives F de f sur I**
u et v deux fonctions dérivables sur I.	$u'+v'$	$u+v+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u une fonction dérivable sur I.	au' ; a réel.	$au+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u et v deux fonctions dérivables sur I.	$u'.v+v'.u$	$(uv)+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I.	$u'.u^n$; $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'}{u^n}$; $n\in\mathbb{N}-\{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u une fonction dérivable et strictement positive sur I.	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u une fonction dérivable et positive sur I.	$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u et v deux fonctions dérivables sur I et v ne s'annulant pas sur I.	$\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$	$\frac{u}{v}+c$; $(c\in\mathbb{R})$.
u et v deux fonctions telles que vou soit dérivable sur I.	$(v'\circ u).u'$	$(v\circ u)+c$; $(c\in\mathbb{R})$.

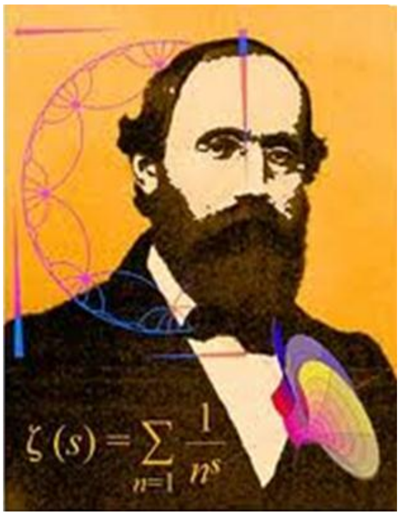
MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

INTEGRALES

Henri-Léon Lebesgue

(28 juin 1875 à Beauvais - 26 juillet 1941 à Paris) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée initialement dans sa dissertation Intégrale, longueur, aire à l'Université de Nancy en 1902. Il fut l'un des grands mathématiciens français de la première moitié du vingtième siècle.



Bernhard Riemann

(**allemand, 1826-1866**) Ce très grand mathématicien, élève de Gauss à Göttingen de Jacobi à Königsberg et de Dirichlet à Berlin, fut professeur en la célèbre université de Göttingen, succédant à ce dernier en 1859 (Dirichlet avait lui-même succédé à Gauss quatre ans plus tôt). Riemann mourut prématurément, atteint de tuberculose à Selesca (lac Majeur, Italie) où il se soignait.

RESUME DU COURS

★★★★★★★★★

I- Notion d'intégrale :

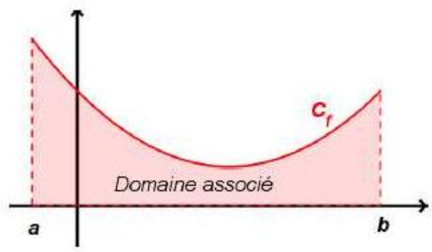
Le but de l'intégration est de calculer la surface délimitée entre la courbe et l'axe des abscisses.

Aire du domaine associé à une fonction positive

Le domaine associé :

Nous appellerons domaine associé à une fonction f positive sur $[a;b]$, le domaine ξ délimité par la courbe ζ_f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations :

x=a et x=b ($a \leq b$).

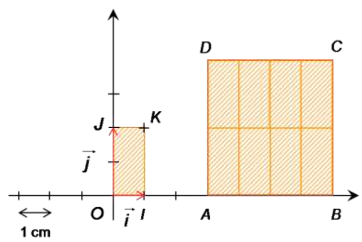


Ce domaine est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Unité d'aire :

le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, I, J), l'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle bâti à partir des points O, I K et J.

Si l'on a : OI=1cm et OJ=2cm alors l'unité d'aire est égale à 1×2=6 cm^2.



Définition 1 :

Soit une fonction **continue** (ou continue par intervalle) **positive** sur l'intervalle $[a;b]$. On appelle intégrale de *a* à *b* de la fonction *f*, l'aire du domaine associé à *f* sur l'intervalle $[a;b]$ exprimé en u.a, le nombre noté : $\int_a^b f(x)dx$.

Remarque :

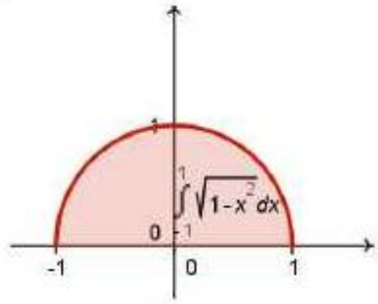
- $\int_a^b f(x)dx$ se lit : « somme ou intégrale de *a* à *b* de *f*(*x*) d*x* »
- *a* et *b* sont les bornes de l'intégrale.
- La variable '' x '' est une variable muette, c'est-à-dire qu'elle n'est plus présente lorsque le calcul est effectué.

• La variable x peut être remplacé par : t, u, ou toute autre lettre à l'exception de a et b.

• Le symbole dx n'a pas de signification sinon on rappelle la démarche des concepteurs du XVIIe siècle (Leibniz). Il signifiait à l'époque une quantité infinitésimale (largeur des rectangles).

Exemple : Calculer l'intégrale suivante : $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

Le demi cercle de centre O et de rayon 1 a pour équation : $x^2+y^2=1$.



On en déduit alors que le demi-cercle de centre O et de rayon 1 pour $y\geq 0$ a pour équation $y=\sqrt{1-x^2}$. On en déduit que l'intégrale est l'aire du demi-cercle de rayon 1 soit $\frac{\pi}{2}$.

Conclusion : $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

II- Fonction continue d'un signe quelconque :

Définition 2 :

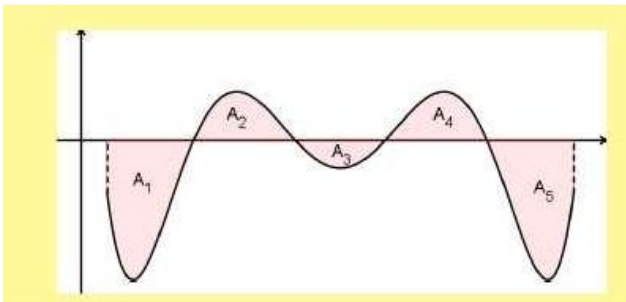
Soit une fonction continue (ou continue par intervalle) sur l'intervalle $[a;b]$.

• Si *f* est négative sur $[a;b]$, on a alors

$$\int_a^b f(x)dx=-A$$

• Si *f* a une signe quelconque sur $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)dx=-A_1+A_2-A_3+A_4-A_5+...$$



III- Propriété algébriques :

Propriété 1: Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I alors :

1°) Pour tout $a\in I$ on a : $\int_a^a f(x)dx=0$

2°) Pour tous *a*, *b* et *c* de I tels que $a<b<c$, on a : $\int_b^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

Remarque : Ces deux propriétés résultent directement de la définition de l'intégrale en termes d'aire.

Définition 3 :

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, alors : $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

A partir de cette définition, on en déduit le théorème (admis) suivant :

Théorème 1 : Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, contenant a,b et c, alors :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Remarque :

• Si une fonction est paire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$
$$= 2\int_0^a f(x)dx$$

• Si une fonction est impaire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$
$$= 0$$

Théorème 2 : Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b, alors pour tous les réels α et β, on a :
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

Exemple : soit une fonction f continue sur $[0,1]$ définie par : $f(x) = 5x^2 - 3x$.

$$\int_a^b f(x)dx = 5\int_0^1 x^2dx - 3\int_a^b xdx\ .$$

Or on a vu par avec la quadrature de la parabole que : $\int_0^1 x^2dx = \dfrac{1}{3}$

Quand à la deuxième intégrale, il s'agit de l'aire d'un triangle rectangle de côté 1 donc :

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

On en déduit alors que :

$$\int_0^1 f(x)dx = 5\times\frac{1}{3} - 3\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6} u.a.$$

VI - Inégalité et valeur moyenne

Théorème 3 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ $(a \leq b)$.

1°) Positivité :

Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

2°) Intégration d'une inégalité :

Si $f \geq g$ sur $[a;b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

3°) Inégalité de la moyenne :

$\forall x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Exemple : Encadrement de l'intégrale suivante : $\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$

On encadre la fonction sur $[0,9]$:

$$0 \leq x \leq 9$$
$$0 \leq \sqrt{x} \leq 3$$
$$1 \leq 1+\sqrt{x} \leq 4$$
$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \leq 9$$

On applique ensuite l'inégalité de la moyenne :

$$\frac{1}{4}(9-0) \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \leq 1(9-0)$$

$$\frac{9}{4} \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \leq 9$$

Théorème 4 : Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$. Il existe alors un réel $c \in [a;b]$ tel

que : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

On pose alors : µ =f(c) qui est appelée **valeur moyenne** de fonction.

V- Primitive d'une fonction continue :

Théorème 7 : soit f une fonction continue sur un intervalle I. soit un réel $a \in I$. La fonction F définie sur I par :
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$

est alors l'unique primitive de f sur l qui s'annule en a.

Règles d'intégration :

Du fait des règles de deriviation et de la linéarisation de l'intégrale, on en déduit les règle suivantes en reprenant comme constante d'intégration k=0 :

IV- Primitives élémentaires et règles d'intégration :

Primitive de la somme	$\int (u+v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un scalaire	$\int (ku) = k \int u$
Primitive de u'u''	$\int u' u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\frac{u'}{u}$ **n≠1**	$\int \frac{u'}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive $\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$

IIV- Calculs d'intégrales

1°) Calcul à partir d'une primitive

Théorème 8 : f est une fonction continue sur un intervalle I. F est une primitive quelconque de f sur I, alors pour tous réels a et b on a : $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

On note alors : $F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$

Exemple

1) Calculer l'intégrale suivante : $\int_{-1}^{2}(x^2-4x+3)dx$

$$\int_{-1}^{2}(x^2-4x+3)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(\frac{8}{3}-2\times4+3\times2\right)-\left(-\frac{1}{3}-2-3\right)$$

$$=\frac{8}{3}-8+6+\frac{1}{3}+2+3$$
$$=6$$

2) Calculer l'intégrale : $\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx$

$$\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{3}{2}\int_0^2\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_0^2$$

$$=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{5}+1\right)$$

$$=\frac{6}{5}$$

2°) Intégration par parties

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$ et admettant des dérivées u' et v' continues.

Alors $\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$

Calcul des surfaces et des volumes :

Théorème : Etant donné deux fonction f et g continues sur l'intervalle $[a;b]$ l'aire du domaine délimité par les représentations graphiques de f et g et les droites d'équation x=a et x=b est, en unités d'aire, égale à :

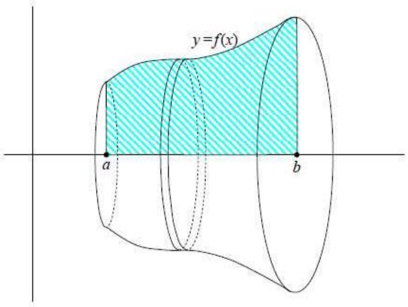
$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$$

IIIV- Calcul de volumes :

1°) Volume d'un solide de révolution

Théorème : Etant donné une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$, le volume du solide de révolution engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, du domaine délimité par l'axe des abscisses , la représentation graphique de f et les droites d'équation x = a et x=b en unités de volume, égale à : $\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$

Exemples :



2°) Calculer le volume d'une boule de rayon R.

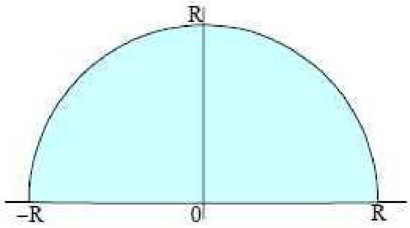
Une boule de rayon R est engendrée par la ratotion d'un demi-disque autour de son diamètre. Pour simplifier des choses, utilisons un demi-disque centré en O et dont le diamètre est sur l'axe des abscisses. Il est défini par :

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le R^2 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \le R^2-x^2 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$$

Ce qui montre est sous la courbe représentant la fonction $f : x \mapsto \sqrt{R^2-x^2}$.

$$V=\int_{-R}^{R} \pi\left[f(x)^2\right]dx=\int_{-R}^{R} \pi(R^2-x^2)dx=2\int_0^R \pi(R^2-x^2)dx \text{ (fonction paire)}$$

$$V=2\pi\int_0^R (R^2-x^2)dx=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3$$



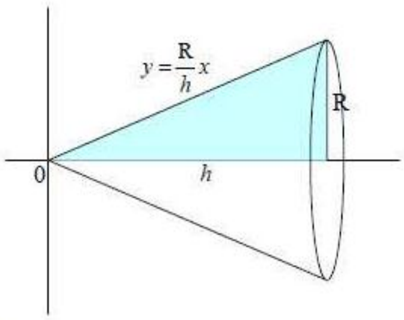
3°) Calculer le volume d'un cône de hauteur h et dont le cercle de base a pour rayon R.

Le cône est engendré par la rotation d'un triangle rectangle . le cours de seconde donne immédiatement une équation de la droit sous laquelle se trouve le triangle. Elle représente la fonction : $f : x \mapsto \frac{R}{h}x$.

$$V = \int_0^h \pi[f(x)]^2dx = \int_0^h \pi\frac{R^2}{h^2}x^2dx$$

$$V = \pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx = \pi\frac{R^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi\frac{R^2}{h^2}\times\frac{h^3}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

En remarquant que πR^2 est l'aire du disque de base, que l'on désigne souvent par B, la formule devient : $V = \frac{Bh}{3}$.



MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Fonction Exponentielle

né vers 783, originaire de Khiva dans la région du Khwarezm[2] qui lui a donné son nom, mort vers 850 à Bagdad, est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome musulman perse dont les écrits, rédigés en langue arabe, ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe[3]. Sa vie s'est déroulée en totalité à l'époque de la dynastie Abbasside. Il est à l'origine des mots « algorithme » (qui n'est autre que son nom latinisé: "algoritmi" [3]) et « algèbre » (issu d'une méthode et du titre d'un de ses ouvrages) ou encore de l'utilisation des chiffres arabes dont la diffusion dans le Moyen-Orient et en Europe provient d'un autre de ses livres (qui lui-même traite des mathématiques indiennes).

Son apport en mathématiques fut tel qu'il est également surnommé « le père de l'algèbre », avec Diophante d'Alexandrie, dont il reprendra les travaux. En effet, il fut le premier à répertorier de façon systématique des méthodes de résolution d'équations en classant celles-ci.

né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg[1], est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme pour la notion d'une fonction mathématique[2]. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie. Euler est considéré comme un éminent mathématicien du XVIII[e] siècle et l'un des plus grands de tous les temps. Il est aussi l'un des plus prolifiques, et une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous »[3].

RESUME DU COURS

- exp définie continue dérivable sur IR et $\exp'(x) = \exp(x)$.

- Pour tout réel x $e^x > 0$.

- Pour tout réel x et tout réel. $\boxed{y > 0 \ , \ e^x = y \iff x = \ln y}$

- Pour tout réel x , $\boxed{\ln(e^x) = x}$

- Pour tout réel $\boxed{x > 0 \ , \ e^{\ln x} = x}$

- **Propriétés :**

Pour tous réel $a \in IR$, $b \in IR$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$\left(e^a\right)^n = e^{a \times n} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

- **Remarque :** $e^1 = e$; $e^0 = 1$, $\ln e = 1$;

$e \cong 2.718\ldots$;

$\boxed{e^{-1} = \frac{1}{e}}$ $\boxed{e^{-x}e^x = e^0 = 1}$ $\boxed{e^x e^x = e^{2x}}$

Applications : $\boxed{e^{\ln 4} = 4}$ $\boxed{e^{2\ln 4} = e^{\ln 4^2} = e^{\ln 16} = 16}$ $\boxed{e^{\ln 4} = 4}$

$\boxed{e^{1+\ln 2} = e^1 \times e^{\ln 2} = e \times 2 = 2e}$

$\boxed{2\ln(e^{-2}) = 2\times(-2) = -4}$ $\boxed{2\ln(\sqrt{e^{-2}}) = \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}(-2) = -2}$

LIMITES

Départ

☑ $\exp(A) = +\infty$ ($+\infty$) ☑ $\exp(A) = 0$ ($-\infty$)

Forme indéterminée

☑ $\lim_{+\infty} \frac{\exp(nu)}{u^m} = +\infty$, $(n,m) \in IN^2$ ☑ $\lim_{-\infty} u^m \exp(nu) = 0$, $(n,m) \in IN^2$

☑ $\lim_{0} \frac{\exp(u)-1}{u} = 1$ ☑ $\lim_{+\infty} \frac{\exp(u)}{u^r} = +\infty$, $r \in \mathbb{Q}_+^*$

DERIVEE

☑ $(\exp(x))' = \exp(x)$ ☑ $(\exp(ax+b))' = a\exp(ax+b)$ ☑ $(\exp(u))' = u'\exp(u)$

Primitive

☑ $\int e^x = e^x$ ☑ $\int e^{ax+b} = \frac{1}{a}e^{ax+b}$ (a≠0) ☑ $\int u'\exp(u) = \exp(u)$

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Fonction logarithme népérien

né vers 783, originaire de Khiva dans la région du Khwarezm[2] qui lui a donné son nom, mort vers 850 à Bagdad, est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome musulman perse dont les écrits, rédigés en langue arabe, ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe[3]. Sa vie s'est déroulée en totalité à l'époque de la dynastie Abbasside. Il est à l'origine des mots « algorithme » (qui n'est autre que son nom latinisé: "algoritmi" [3]) et « algèbre » (issu d'une méthode et du titre d'un de ses ouvrages) ou encore de l'utilisation des chiffres arabes dont la diffusion dans le Moyen-Orient et en Europe provient d'un autre de ses livres (qui lui-même traite des mathématiques indiennes).
Son apport en mathématiques fut tel qu'il est également surnommé « le père de l'algèbre », avec Diophante d'Alexandrie, dont il reprendra les travaux. En effet, il fut le premier à répertorier de façon systématique des méthodes de résolution d'équations en classant celles-ci.

né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg[1], est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme pour la notion d'une fonction mathématique[2]. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie. Euler est considéré comme un éminent mathématicien du XVIII^{e} siècle et l'un des plus grands de tous les temps. Il est aussi l'un des plus prolifiques, et une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous »[3].

★★★★★★★★★★

RESUME DU COURS

★★★★★★★★★★

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln, la fonction $x \mapsto \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$, $x > 0$.

☑ **ln définie continue dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.**

☑ ln ($\boxed{A.}$) existe *ssi* $\boxed{A.} > 0$

EXEMPLE $f(x) = \ln(5x - 1)$ $D_f = ?$

Il faut que $5x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{5} \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{5}, +\infty[$

Donc $D_f =]\frac{1}{5}, +\infty[$

☑ **ln | $\boxed{A.}$ | existe *ssi* $\boxed{A.} \neq 0$**

EXEMPLE $f(x) = \ln|x - 1|$ $D_f = ?$

Il faut que $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow D_f = IR \setminus \{1\}$

☑ **$a > 0, b > 0$, $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$**

$$\ln(\boxed{A}) = \ln(\boxed{B}) \Leftrightarrow \boxed{A} = \boxed{B}$$

☑ **$a > 0, b > 0$, $\ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$**

$$\ln(\boxed{A}) \geq \ln(\boxed{B}) \Leftrightarrow \boxed{A} \geq \boxed{B}$$

☑ $\ln(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1 \quad (x > 0)$

$\ln(\boxed{A.}) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A.} \geq 1.$

☑ $\ln(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \leq 1 \quad (x > 0)$

$\ln(\boxed{A.}) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \boxed{A.} \leq 1.$

☑ ***Propriétés :***

Pour tous réel $a > 0$, $b > 0$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln a$

$\ln(a^n) = n \ln a \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$

Soit a un réel strictement positif.

- Pour tout entier p, $\ln\left(a^p\right) = p \ln a$
- Pour tout entier $p \geq 2$, $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right) = \frac{1}{p} \ln a$.

☑ ***Remarque :***

$\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $e \cong 2.718...$;

$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$, $a > 0$ $\quad \ln \sqrt[p]{a} = \frac{1}{p} \ln a \quad (p \geq 2) \quad a > 0$

LIMITES

Départ

☑ $\lim\limits_{+\infty} \ln(A) = +\infty$ $\quad$ ☑ $\lim\limits_{0^+} \ln(A) = -\infty$

Forme indéterminée

☑ $\overset{+\infty}{\dfrac{\ln(A)}{A^r}}=0 \quad , r\in Q_+^*$

☑ $\overset{0^+}{A^r\ln(A)}=0 \quad , r\in Q_+^*$

☑ $\overset{1}{\dfrac{\ln(A)}{A-1}}=1$

Pour tous entiers naturels non nuls n et m, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^n x}{x^m}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^m\ln^n x=0$.

DERIVEE

$x>0, ax>0$ et $u(x)>0$

☑ $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$

☑ $(\ln(ax))'=\dfrac{1}{x}$

☑ $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$

Primitive

☑ $\int\dfrac{1}{x}=\ln x$

☑ $\int\ln x=x\ln x-x$

☑ $\int\dfrac{u'}{u}=\ln|u|$

☑ $\int\dfrac{(\ln x)^n}{x}=\dfrac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$

☑ $\int\dfrac{1}{x\ln x}=\int\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\ln|\ln x|$

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : ÉQUIPE ACADEMIQUE MATHEMATIQUES

Nombres Complexes

Historiquement, les nombres complexes prennent naissance au XVIIème siècle lorsqu'un italien, Gerolamo Cardano(1501-1576), au nom francisé de Jérôme Cardan, introduisit la racine de $-i^2$ pour résoudre des équations du troisième degré. En 1572, un autre italien, Rafaele Bombelli (1526 ; 1573) publie "Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri" dans lequel il présente des nombres de la forme a + b et poursuit les travaux de Cardansur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré.

A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne lesconsidère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.La notation i apparaît en 1777 siècle avec Leonhard Euler (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires. Euler établie également une célèbre relation de l'algèbre qui lie quatre nombres fondamentaux e, i, π et 0 : $e^{i\pi} + 1 = 0$. C'est avec Carl Friedrich Gauss (1777 ; 1855) que les nombres complexes acquièrent le statut de nombre à part entière.

En 1837, William Hamilton (1805 ; 1865) propose de les définir comme couple de nombres réels tels qu'ils le sont aujourd'hui.

RESUME DU COURS

Aspect algébrique :

- $a+ib = a'+ib'$ **si et seulement si** $a = a'$ et $b = b'$.
- • z est réel **si et seulement si** $\mathrm{Im}(z) = 0$.
  • z est imaginaire **si et seulement si** $\mathrm{Re}(z) = 0$.
- $\overline{z+z} = \overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$; $\overline{(z)^n} = \left(\overline{z}\right)^n$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\,i}$;

$z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$;

- $z = \overline{z}$ **si et seulement si** z est réel.
- $z = -\overline{z}$ **si et seulement si** z est imaginaire.

Module :

Soit $z = a+ib$ d'image M

- $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
- si $|z| = 0$ alors $z = 0$
- $|zz'| = |z||z'|$; $|\overline{z}| = |z|$; $|z|^2 = z\overline{z}$; $|z^n| = |z|^n$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z| = OM$; $MN = |z_N - z_M|$

Argument :

Soit $z \in \mathbb{C}$, l'argument de z est un réel θ tel que $\theta \equiv \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$

✱ $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right) \equiv \arg(z)[2\pi]$; $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;

$\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

✱ $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$; $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

✱ $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$; $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$

✱ Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z)[2\pi]$

✱ Si $k < 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

Affixe d'un vecteur :

$\operatorname{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Aspect trigonométrie :

✱ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$, c'est la **forme trigonométrique** de z et $|z|\ e^{i\theta}$ est son **écriture exponentielle.**

✱ $z = a + ib = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

✱ **Si** M est l'image de z dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ alors $M \in \mathscr{C}(O, |z|)$ et à la droite **[OA)** tel que $\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$

Propriétés

- Pour tout réel θ ; $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = -i$; $e^{i0} = 1$; $e^{i\pi} = -1$.
- $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$; $\left|e^{i\theta}\right| = 1$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$; $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;

$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$

Formule de Moivre :

Pour tout réel $n \in IN$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Formule d'Euler :

$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ et $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

Angles orientés :

- $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.
- $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.
- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{CD}{AB}(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \theta[2\pi]$.

Nombres complexes et géométrie

✱ $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ sont colinéaires, $\Leftrightarrow$ **det** $(\vec{w}, \vec{w_1}) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w_1}}}$ ($\vec{w_1} \neq \vec{0}$) est réel.

✱ $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ sont orthogonaux, $\Leftrightarrow$ $\vec{w_1} \bullet \vec{w_1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w_1}}}$ ($\vec{w_1} \neq \vec{0}$) est imaginaire pur.

✱ Soit ABCD un quadrilatère du plan.

- ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow$

$z_A + z_C = z_B + z_D$

- ABCD est un rectangle $\Leftrightarrow$ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ et $AC = BD \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$ et

$|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$

- ABCD est un rectangle $\Leftrightarrow$ $z_B - z_A = z_C - z_D$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

- ABCD est un losange $\Leftrightarrow$ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ et $AB = AD \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$ et

$|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

- ABCD est un losange $\Leftrightarrow$ $z_B - z_A = z_C - z_D$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

- ABCD est un carré $\Leftrightarrow$ ABCD est à la fois un rectangle et un losange.

$\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$ et $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = i$ **OU** $-i$.

Remarques importantes dans la pratique :

* $\cos\theta = \cos\theta' \Leftrightarrow \begin{cases}\theta = \theta' + 2k\pi \\ \theta = -\theta' + 2k\pi\end{cases}$; $(k \in \mathbb{Z})$; $\begin{cases}\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\ \cos\theta' - \sin\theta\ \sin\theta' \\ \cos(\theta-\theta') = \cos\theta\ \cos\theta' + \sin\theta\ \sin\theta'\end{cases}$

* $\sin\theta = \sin\theta' \Leftrightarrow \begin{cases}\theta = \theta' + 2k\pi \\ \theta = \pi - \theta' + 2k\pi\end{cases}$; $(k \in \mathbb{Z})$; $\begin{cases}\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\ \cos\theta' + \sin\theta\ \cos\theta' \\ \sin(\theta-\theta') = \sin\theta\ \cos\theta' - \sin\theta\ \cos\theta'\end{cases}$

* $tg\theta = tg\theta' \Leftrightarrow \theta = \theta' + k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$

* $\sin(2\theta) = 2\ \sin\theta \cdot \cos\theta$

* $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$\Rightarrow 1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$ et $1 - \cos(2\theta) = 2\sin^2\theta$

* $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}\right)$

* $e^{i\theta} + 1 = e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

* $e^{i\theta} - 1 = e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = 2\ i\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

* $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \begin{cases}0\ [2\pi]\ ,\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires de } \textbf{même} \text{ sens.} \\ \pi\ [2\pi]\ ,\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires de sens contraires.}\end{cases}$

Ensemble des points M :

Etant donnés deux points distincts A et B et un réel θ.

✱ L'ensemble des points M tels que $\boxed{MA = MB}$ est : la médiatrice de segment $[AB]$.

✱ L'ensemble des points M tels que $\boxed{MA = r \in IR_+^*}$ est : le cercle de centre A et de rayon r.

✱ L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires est : la droite (AB)

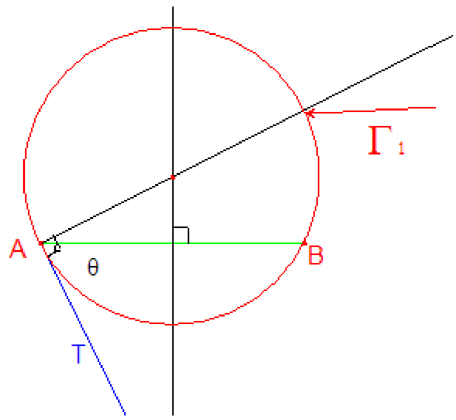
✱ L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux est : le cercle de diamètre $[AB]$.

✱ L'ensemble des points M tels que $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \theta[\pi]}$ est :

$$\begin{cases} \text{si } \theta \equiv 0[\pi], \boxed{\text{la droite (AB) privée des points A et B}} \\ \text{si } \theta \not\equiv 0[\pi], \text{le cercle } \Gamma \text{ passant par A et B et tangante en A à la droite AT} \\ \text{telle que } (\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) \equiv \theta[\pi], \text{ privé des points A et B.} \end{cases}$$

✱ L'ensemble des points M tels que $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \theta[2\pi]}$ est :

$$\begin{cases} \text{si } \theta \equiv 0[2\pi], \boxed{\text{la droite (AB) privée du segment } [AB]} \\ \text{si } \theta \equiv \pi[2\pi], \boxed{\text{le segment } [AB] \text{ privée des points A et B.}} \\ \text{si } \theta \not\equiv 0[2\pi] \text{ et si } \theta \not\equiv \pi[2\pi], \text{un arc de cercle } \Gamma_1 \text{ d'extrémités A et B privée des points A et B} \\ \text{situé dans le demi-plan de frontiére (AB) et ne contenant pas la demi-droite} [At) \text{ définie par:} \\ (\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) \equiv \theta[2\pi] \text{ où } \Gamma_1 \text{ cercle passant par A et B et tangante en A à la droite AT} \\ \text{telle que } (\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$



Racine nième d'un nombre complexe :

✱ Soit $u = R\,e^{i\theta}$; $R > 0$ et $n \in$ IN*.

On appelle racines nième de z, les nombres complexes solutions de l'équation **$z^n = u$**.

L'ensemble de solution de **$z^n = u$** est $S = \left\{ \sqrt[n]{R}\; e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \;/\; k \in \{0,1,\ldots(n-1)\} \right\}$.

✱ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points d'affixes les solutions de l'équation **$z^n = u$** sont les sommets d'un polygone régulier à n cotes et inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{R}$.

✱ Tout nombre complexe non nul admet n racines nième.

✱ Les racines de l'équation **$z^n = 1$** sont appelées **racines nième de l'unité.**

✱ L'équation **$z^2 = u$** admet, dans $\mathbb{C}$ deux solutions opposées :

$z_1 = \sqrt{|u|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ et $z_2 = -\sqrt{|u|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ Ces solutions sont appelés racines carrées du nombre complexe u

✱ Les racines carrées de $u = a + bi$ (**ou les solutions de l'équation $z^2 = u$**) sont de la forme

$z = x + iy$ tel que : $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

Equation du second degré :

✱ L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c sont trois complexes tel que $a \neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions : $z' = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z'' = \frac{-b-\delta}{2a}$ avec δ est une racine carrée du nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$

✱ Soit L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c sont trois complexes tel que $a \neq 0$)

Si z' et z'' sont les solutions de cette équation **alors** :

$az^2 + bz + c = a(z-z')(z-z'')$; $z' + z'' = -\frac{b}{a}$ et $z' . z'' = \frac{c}{a}$

✱ Soit L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c sont trois nombres réels tel que $a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet dans IR deux solutions distinctes :

$$z' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet dans IR une solution double : $z' = z'' = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, l'équation admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions conjuguées :

$$z' = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

✱ Soit L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c sont trois complexes tel que $a \neq 0$)

- Si $a + b + c = 0$, l'équation admet deux solutions : $z' = 1$ et $z'' = \frac{b}{a}$

- Si $a - b + c = 0$, l'équation admet deux solutions : $z' = -1$ et $z'' = -\frac{b}{a}$

Equation de degré supérieure à deux :

✱ Soit (E) une équation du 3ième degré ayant une racine z_0 alors (E) s'écrit sous la forme :

$(z - z_0)(az^2 + bz + c) = 0$ où a, b et c sont trois nombres réels tel que $a \neq 0$.

✱ Une équation de degré n supérieur à 3 nécessite un changement de variable ou la donnée de **n–2 racines apparentes.**

Nombres complexes et transformations du plan :

Translation

Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan d'affixe $b \in \mathbb{C}$. $t_{\vec{v}} : P \to P, M(z) \mapsto M'(z')$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow z' - z = b \Leftrightarrow z' = z + b.$$

Propriété :

($F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \to z' = z + b$) est la transformation complexe associée à la translation de vecteur $\vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur d'affixe b.

Homothétie

Soit $h_{(\Omega, k)}$ une homothétie de centre Ω et de rapport k

$h_{(\Omega, k)} : M(z) \mapsto M'(z') \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega) \Leftrightarrow z' = kz + (1 - k)z_\Omega$

Propriété :

Pour tout réel $k \in IR^*\backslash\{1\}$ et pour tout complexe b, l'application :

$f : P \to P, M(z) \mapsto M'(z') / z' = kz + b$ est l'homothétie de rapport k et de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-k}\right)$

Rotation

Soit $R_{(\Omega, \theta)}$ la rotation de centre Ω et d'angle θ.

$R_{(\Omega, \theta)} : M(z) \mapsto M'(z') \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z - z_\Omega| = |z' - z_\Omega| \\ \arg\left(\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|z' - z_\Omega|}{|z - z_\Omega|} = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega) \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)z_\Omega$$

Propriété :

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$ et $a \neq 1$

L'application $f : P \to P, M(z) \mapsto M'(z') / z' = az + b$ est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\theta \equiv \arg(a)\ [2\pi]$.

CASIO fx-570 ES ou fx-570 ES PLUS

▸ Le mode CMPLX : 

CMPLX comme « **complexes** » est le mode dans lequel il faut mettre la calculatrice pour réaliser des calcul contenant des nombres complexes. Il s'obtient en pressant successivement la touche  et la touche 

▸ Forme algébrique : 

Exemple : $(1+2i)^2=-3+4i$

Appuyez sur ces touches : 

▸ Forme Trigonométrique : 

Spécifier l'unité d'angle par défaut <u>en radians</u> : 

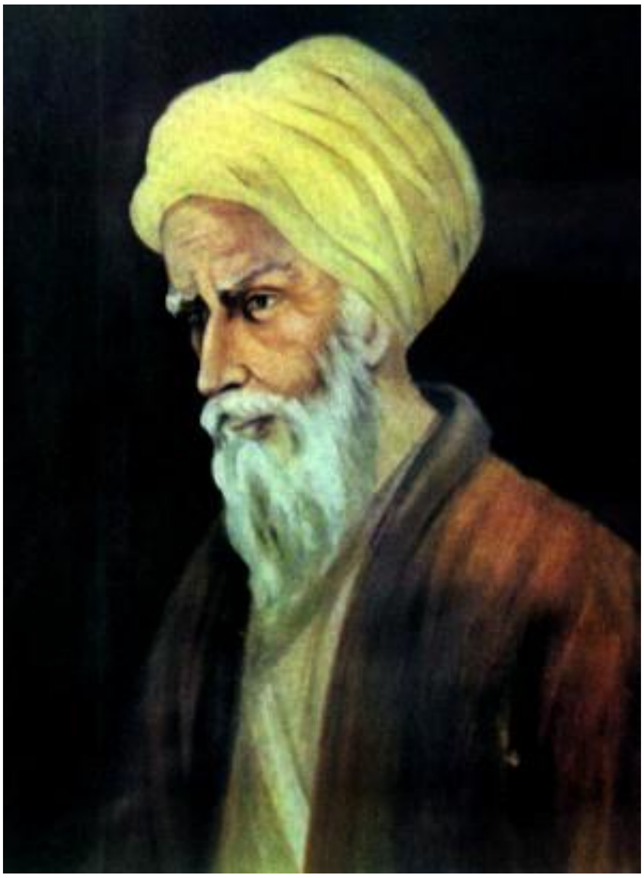
Exemple : $-1+i=\sqrt{2}\,(\cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4}))$

Appuyez sur ces touches : 

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Géométrie dans l'espace



Ibn al-Ḥasan ibn al-Haytham (Perse: ابن هيثم, arabe : ابو علي، الحسن بن الحسن بن الهيثم) dit *Alhazen* (Bassorah 965 - Le Caire 1039) est un mathématicien, un philosophe et un physicien persan de confession. Il est l'un des pères de la physique quantitative et de l'optique physiologique.

RESUME DU COURS

Produit scalaire

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et soit α la mesure en radian de l'angle géométrique déterminé par deux représentants quelconques de même origine des vecteurs $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ le réel défini par :

$\vec{u}\,.\,\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\alpha$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

$\vec{u}\,.\,\vec{v}=0$, si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormé de l'espace. Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$:

$\vec{u}\,.\,\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Si A(x , y , z) et B(x' , y' , z') sont deux points de l'espace muni d'un repère orthonormée , alors $AB=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$.

Produit vectoriel

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et soit $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\wedge\vec{v}$, le vecteur défini comme suit :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$; $\left(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$ est une base directe et $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=OA\times OB\times\sin\left(\widehat{AOB}\right)$.

Expression analytique du produit vectoriel de deux vecteurs dans une base orthonormée directe

L'espace est muni de base orthonormée directe $\left(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ de l'espace on a alors : $\vec{u}\wedge\vec{v}=(bc'-cb')\vec{i}+(ca'-ac')\vec{j}+(ab'-ba')\vec{k}$.

Distance d'un point à une droite

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de D. La distance d'un point M de l'espace à la droite D est le réel $d(M, \mathrm{D}) = \dfrac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

1°) Aires et volumes

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- L'aire d'un parallélogramme ABCD est égale à $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$.
- L'aire d'un triangle ABD est égale à $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$.
- Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égal à : $|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AE}| = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})|$.
- Le volume d'un tétraèdre ABCD est égal à : $\frac{1}{6}|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BA}| = \frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})|$.

2°) Distance d'un point à un plan

Soient P : ax + by + cz + d = 0 avec (a, b, c) ≠ (0,0,0) un plan de l'espace et A (x_0, y_0, z_0) un point. La distance de A à P est : $d(A,P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Sphère

Définition

Soit I un point de E et R un réel strictement positif, on appelle sphère de centre I et de rayon R l'ensemble : S = {M $\in$ E tel que IM = R}

Equation cartésienne d'une sphère dans un repère orthonormée

Soit I(a,b,c) un point et R > 0 .

l'ensemble des points M(x, y, z) tels que $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ est la sphère de centre I et de rayon R. L'équation précédente est dite équation réduite de la sphère.

Toute sphère S admet une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c et d quatre réel.

■ Pour tous points M et M de l'espace, $\left(t_{\vec{u}}(M)=M'\right)$ équivaut à $\left(\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\right)$

■ Toute translation de vecteur $\vec{u}$ est bijective, son application réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}: t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow t_{-\vec{u}}(M')=M$

■ Si $t_{\vec{u}}(M)=M'$ et $t_{\vec{u}}(N)=N'$ alors $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

■ Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de l'espace,

$$\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k} \quad M(x,y,z) \text{ et } M'(x',y',z');\ t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \\ z'=z+c \end{cases}$$

■ Toute homothétie de rapport non nul est bijective, son application réciproque est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{K}: h_{(I,K)}(M)=M' \Leftrightarrow h_{\left(I,\frac{1}{K}\right)}(M')=M$

■ Si $h_{(I,K)}(M)=M'$ et $h_{(I,K)}(N)=N'$ alors $\overrightarrow{M'N'}=K.\overrightarrow{MN}$

■ Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de l'espace , I (a,b,c) ; M(x,y,z) et M'(x',y' ;z') ;

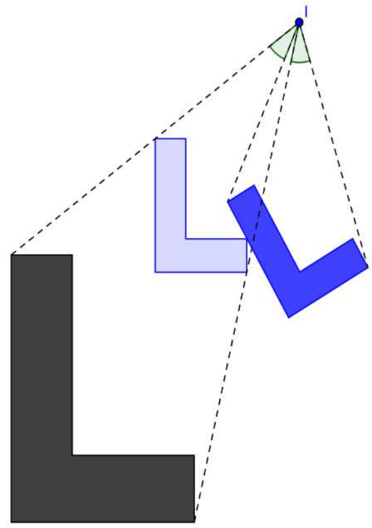
$$h_{(IK)}(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=Kx+(1-K)a \\ y'=Ky+(1-K)b \\ z'=Kz+(1-K)c \end{cases}$$

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

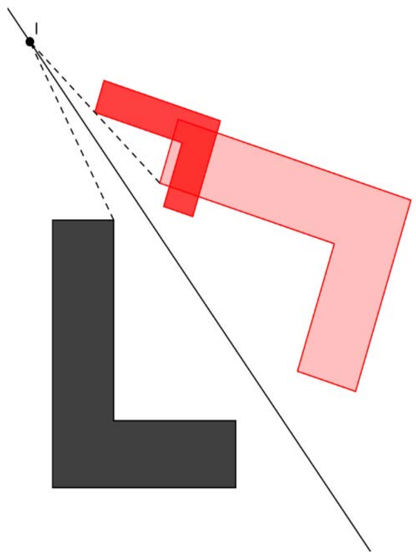
Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

SIMILITUDES

Le L bleu est l'image du L noir par la composée d'une homothétie et d'une rotation **(similitude directe)**



Le L inversé rouge est l'image du L noir par la composée d'une homothétie et d'une symétrie axiale **(similitude indirecte)**



RESUME DU COURS

I- Vocabulaire. (f est une application du plan dans lui-même).

Transformation du plan	C'est une bijection c'est-à-dire que tout point du plan a un, et un seul antécédent par f.
Identité	C'est la transformation qui laisse tous les points fixes, notée Id.
Transformation réciproque	Notée f^{-1}, est définie par : $f(M)=N \Leftrightarrow M=f^{-1}(N)$ On a : $fof^{-1}=Id$
Similitude	C'est une transformation du plan qui conserve les rapports de distances.
Rapport de similitude	C'est un réel **strictement positif** par lequel la similitude multiplie les distances.
Isométrie	Similitude de rapport 1, ou transformation qui conserve les distances.
Similitude directe	C'est une similitude qui conserve les angles orientés.
Déplacement	C'est une similitude directe de rapport **1** : **translation ou rotation**.
antidéplacement	C'est une similitude directe de rapport **1** : symétrie (**axiale ou glissante**)
Centre d'une similitude	C'est l'unique point fixe d'une similitude directe.
Angle d'une similitude direct	C'est l'angle constant θ q formé par un vecteur et son image, autrement dit : $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{f(M)f(N)})\equiv\theta[2\pi]$
Axe d'une similitude indirecte de centre Ω et de rapport k	• C'est l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{\Omega M}=k\overrightarrow{\Omega M}$ où $M'=f(M)$. • L'axe porte la bissectrice intérieure de l'angle $M\widehat{\Omega}M'$ où $M'=f(M)$.

II- Opérations sur les similitudes.

(1) Toute similitudes f de rapport k (**k≠1**) possède un unique point invariant Ω.

Ω est appelé le centre de f.

(2) La **composée de deux similitudes directes** de rapport k et k' et d'angles θ et θ' est une similitude directe de rapport $k \times k'$ et d'angle $\theta + \theta'$.

(3) La **composée d'une similitude directe et d'une indirecte** est une similitude indirecte.

(4) Si f est une similitude de rapport k, sa réciproque f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

(5) Si f est une similitude directe de rapport k et d'angle θ, alors sa réciproque f^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

(6) Si f est une similitude directe de rapport k et d'axe Δ alors sa réciproque f^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'axe Δ.

(7) L'axe Δ d'une similitude indirecte de centre Ω et **la perpendiculaire** à Δ passant par Ω sont globalement invariants par f.

(8) Si f et g deux similitudes coïncident en deux points distincts alors $f = g$.

III - Propriétés géométriques.

Une similitude plane de rapport k.

• conserve les rapports de distances ; • conserve les angles géométriques ; • conserve l'alignement des points ; • transforme une droite (un segment) en une droite (un segment) ; • conserve le parallélisme et l'orthogonalité ;	• conserve le barycentre ; • transforme un triangle en un triangle de même forme (semblable) ; • transforme un cercle de rayon R en un cercle de rayon k× R ; • multiplie les aires par k^2.

IV- Ecriture complexe et éléments caractéristiques des similitudes.

Similitude directe	Ecrire complexe	$z' = az + b$ avec $a \in C^*$ et $b \in C$
	Rapport k	$k = \lvert a \rvert$
	Angle θ	$\theta \equiv \arg(a)[2\pi]$
	Centre Ω, Si a ≠ 1	Ω d'affixes ω avec $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ où $f(\Omega) = \Omega$
Similitude indirecte	Ecriture	$z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in C^*$ et $b \in C$
	Rapport k	$k = \lvert a \rvert$
	Centre Ω, Si a ≠ 1	Ω d'affixes z_Ω avec $z_\Omega = \dfrac{a\bar{b}+b}{1-\lvert a \rvert^2}$ où $f(\Omega) = \Omega$

V- Existences et décompositions.

Propriété : Soient *A, B, A′* et *B′* quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Il existe une unique similitude *f* telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ et de rapport $\dfrac{A'B'}{AB}$

Décomposition d'une similitude directe :
Si ***f*** est une similitude directe de centre ***Ω***, de rapport ***k*** et d'angle ***θ***, alors ***f*** peut s'écrire comme la composée de l'homothétie ***h*** de centre ***Ω*** et de rapport ***k***, avec la rotation ***r*** de centre ***Ω*** et d'angle ***θ***.
On a ainsi : ***f = h o r = r o h.***

Décomposition d'une similitude indirecte

- Si ***f*** est une similitude indirecte de centre ***Ω***, de rapport ***k*** et d'angle ***Δ***, alors ***f*** peut s'écrire comme la composée de l'homothétie ***h*** de centre ***Ω*** et de rapport ***k***, avec une symétrie axiale d'axe ***Δ***. On a ainsi : $f = h \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h$.
- Si ***f*** est une similitude indirecte de centre ***Ω***, de rapport k, alors ***f o f*** est une homothétie de centre ***Ω*** et de rapport ***k²***.

VII- Points fixes.

Une similitude possédant **trois points fixes non alignés** est l'application identique (**ou l'identité**).
Une similitude possédant **deux points fixes** *A* et *B* est l'identité **ou** la symétrie d'axe (*AB*).
Une similitude **directe** possédant **deux points fixes** est l'application identique (**ou l'identité**).

Savoir …	Comment faire ?
… démontrer qu'une transformation *f* est une similitude	• Démontrer que *f* multiplie toutes les distances par un même nombre k. • Ecrire *f* sous la forme d'une composée de translations, rotations, homothéties, symétries axiales. • Etablir que l'écriture complexe de *f* dans un repère orthonormé direct du plan est de la forme : $z' = az + b$ ou bien $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

… déterminer le rapport k d'une similitude f : M $\mapsto$ M'	• Si A et B sont deux points distincts alors $k = \frac{A'B'}{AB}$. • Si f a pour écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$ dans un repère orthonormé direct, alors $k = \|a\|$. • Si f est la composée de deux similitudes de rapports k_1 et k_2, alors $k = k_1 \times k_2$. • Si f est la réciproque d'une similitude de rapport k', alors $k = \frac{1}{k'}$
… démontrer qu'une transformation f est une symétrie axiale	On peut établir que f est une similitude distincte de l'identité qui admet au moins deux points fixes. La droite passant par ces deux points fixes est l'axe de la symétrie.
… démontrer qu'une transformation f est une similitude directe	• Démontrer que f est une similitude qui conserve les angles orientés. • Ecrire f comme la composée de similitudes directes (en particulier : translations, rotations, homothéties) • Ecrire f sous la forme d'une composée de **deux** similitudes directes. • Etablir que l'écriture complexe de f est z' = az + b avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
… déterminer l'angle θ d'une similitude directe f : M $\mapsto$ M'	• Si A et B sont 2 points distincts alors $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{f(A)f(B)}\right) [2\pi]$. • Si f a pour écriture complexe z' = az + b, alors $\theta \equiv \arg a \, [2\pi]$. • Si f est la composée de deux similitudes directes d'angles θ_1 et θ_2 alors $\theta \equiv \theta_1 + \theta_2 \, [2\pi]$ • Si f est la réciproque d'une similitude d'angle θ' alors $\theta' \equiv -\theta \, [2\pi]$
… construire l'image M' d'un point M par une similitude directe f	• Si A' et B' sont les images de deux points distincts A et B, alors tout triangle ABM a pour image le triangle $A'B'M'$ directement semblable au triangle ABM. • Si f est la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, alors M' est le point tel que : $\Omega M' = k \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \, [2\pi]$.
… définir une similitude directe	• Soit avec le centre, le rapport et l'angle si f n'est pas une translation. • Soit avec deux points A et B et leurs images A' et B'. • Soit avec un point A et son image A', le rapport de f et l'angle de f.

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Equation différentielle

En mathématiques, une **équation différentielle** est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

Sir Isaac Newton (left) and Gottfried Wilhelm von Leibniz (right)

La notion d'équation différentielle apparaît chez les mathématiciens à la fin du **XVII$^{\text{ème}}$ siècle**.

Leibniz sera *l'inventeur* en **1686**, en même temps que **Newton**, du *calcul différentiel et intégral*.

A cette époque, les équations différentielles s'introduisent en mathématique par le biais de problèmes d'origine mécanique ou géométrique.

Ce n'est qu'au **XX$^{\text{ème}}$ siècle** que les équations différentielles trouvent de nombreuses applications dans les Sciences de la Vie

RESUME DU COURS

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable sur un intervalle I et qui fait intervenir cette fonction et ses dérivées successives.

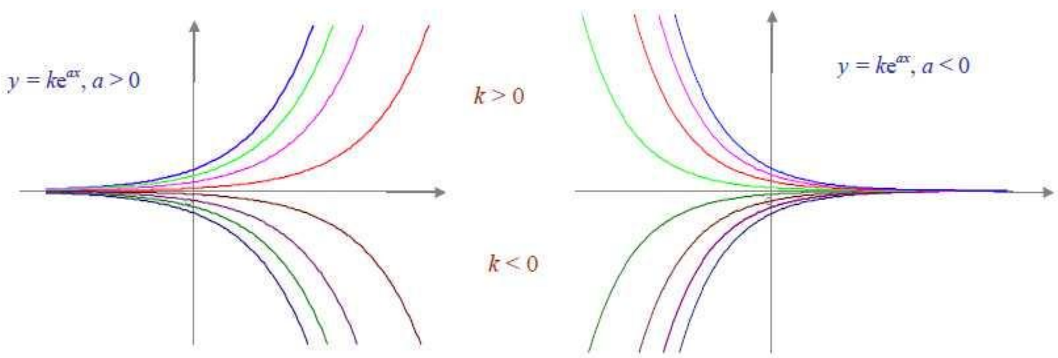
On a l'habitude d'appeler y la fonction inconnue d'une équation différentielle et y',y'' , $y^{(3)}$, ... $y^{(n)}$ ses dérivées successives.

☑ Résolution de l'équation différentielle y'=ay, a≠ 0

Théorème 1 : solution de l'équation différentielle y'=ay, a≠ 0

Soit a un réel non nul. Les solutions dans R de l'équation différentielle y'=ay sont les Fonctions f_k définies par f_k (x) = k e^{ax} ou k est un réel.

Illustration



Théorème2 :

Condition initiale

Pour tout couple de réels $(x_0 : y_0)$, l'équation y' = ay admet une unique solution f_k telle que $f_k(x_0) = y_0$

.

La condition $f_k(x_0) = y_0$ est souvent appelée **condition initiale**

☑ Résolution dans IR de l'équation y' = ay + b , a≠ 0 , b≠ 0

Théorème 3 :

Les solutions dans R de l'équation différentielle y' = ay +b, a $\neq$ 0, b $\neq$ 0 sont les fonctions f_k définies pour tout réel x par $f_k(x)=ke^{ax}-\frac{b}{a}$, ou k est un réel quelconque.

☑ Résolution de l'équation différentielle y''+ ω^2 y=0

Théorème

L'ensemble des solutions sur R de l'équation différentielle $y''+w^2y=0$ avec $w\in R^*$ est l'ensemble des fonctions f_{k_1,k_2} telles que pour tout $x\in$ R, $f_{k_1k_2}(x)=k_1\cos wx+k_2\sin wx$ avec $k_1\in\mathbb{R}$, $k_2\in\mathbb{R}$

Remarque 1 :

On peut aussi écrire les solutions sous la forme

$f_{A\varphi}(x)=A\cos(wx+\phi)$ *avec* $A\in R,\varphi\in R$

Exemple :

1°) Résoudre l'équation différentielle y '' + 9y =0

2°) trouver la solution de l'équation précédente qui satisfait les conditions $f(0)=1$ et $f'(x)=-2$.

Réponse

1°) Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $f_{k_1k_2}(x)=K_1\cos 3x+K_2\sin 3x$ avec

$k_1\in R$, $K_2\in R$

2°) Il s'agit de trouver une fonction f dont les constantes K_1 et K_2 vérifient les conditions imposées.

La condition $f(0)=1$ est équivalente à $f(0)=k_1\cos 0+k_2\sin 0=k_1=1 soit k_1=1$

De même, nous avons pour tout réel x, $f'(x)=-3k_1\sin 3x+3k_2\cos 3x$

La condition $f'(\pi)=-2$ est équivalente à

$f'(\pi)=-3k_1\sin 3\pi+3k_2\cos 3\pi=-3k_2=-2 soit k_2=\frac{2}{3}$

La solution cherchée est la fonction : $f_{1,\frac{2}{3}}:x\mapsto\cos 3x+\frac{2}{3}sin 3x$

Remarque 2 :

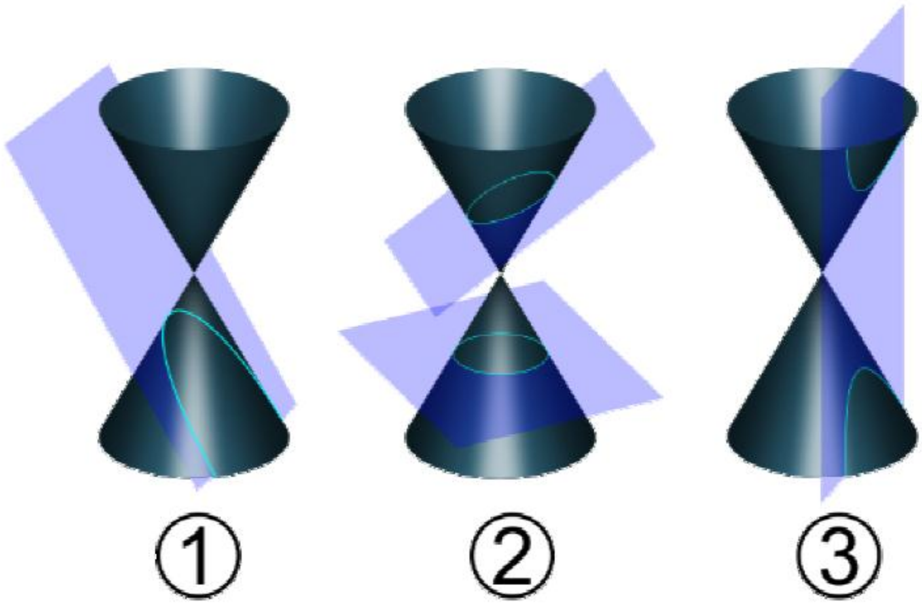
Une équation différentielle est d'ordre n si dans l'équation différentielle interviennent une fonction y ainsi que ses dérivées $y^{(k)}$ jusqu'à l'ordre n

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Coniques

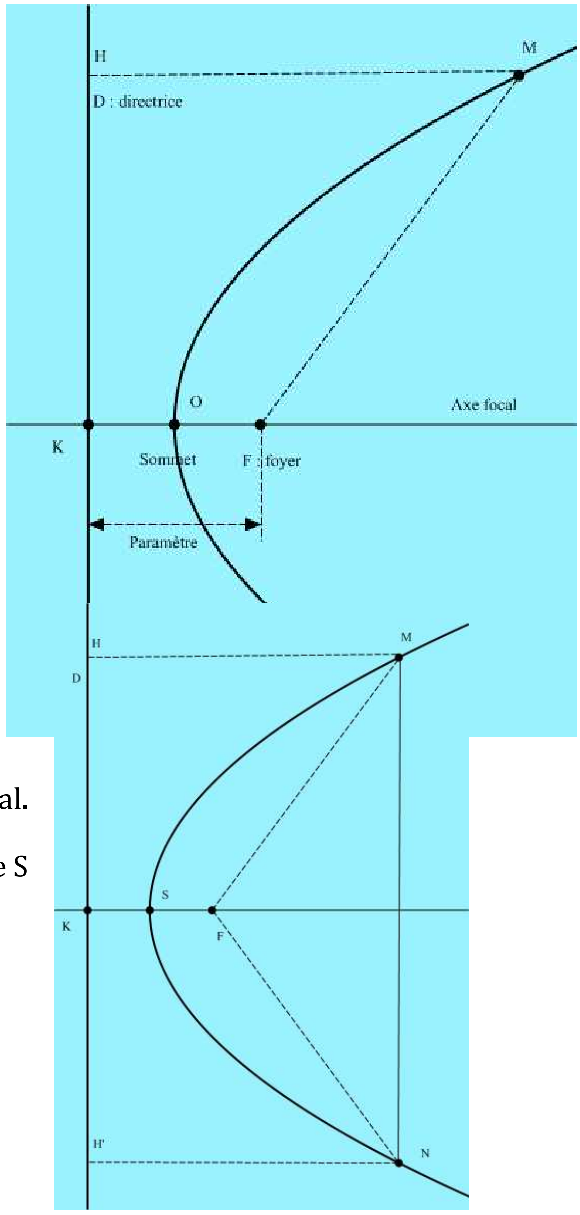
Sur la figure suivante, ① représente une **parabole**, ② un **cercle** et une e**llipse** et ③ une **hyperbole** :



Cette approche, qui a donné leur nom aux « **coniques** », en allemand « **Kegelschnitt** », en anglais « **conic section** », est cependant un peu difficile à mettre en oeuvre quand on veut obtenir des propriétés plus précises de ces figures puisqu'il faut travailler dans l'espace !

RESUME DU COURS

1°) La parabole



Définition

Etant donnés une droite D et un point F n'appartenant pas à D,

On appelle **parabole** de **foyer F** et de **directrice D** l'ensemble des points M du plan tels que **MF = MH** où H = $p_D^{\perp}(M)$ ou bien **MF = d(M, D)**.

On note $P_{(F, D)} = \{M \in P \ / \ MF = d(M, D)\}$.

Vocabulaire

P une parabole de foyer F et de directrice D.La perpendiculaire D menée de F est appelée **axe focal**d(F, D) est appelée **paramètre** de P .

Théorème

Toute parabole admet comme axe de symétrie son axe focal.

Toute parabole rencontre son axe focal en un point unique S appelé sommet de la parabole

Le sommet de $P_{(F, D)}$ est le milieu de [FK] où

K = $p_D^{\perp}(F)$.

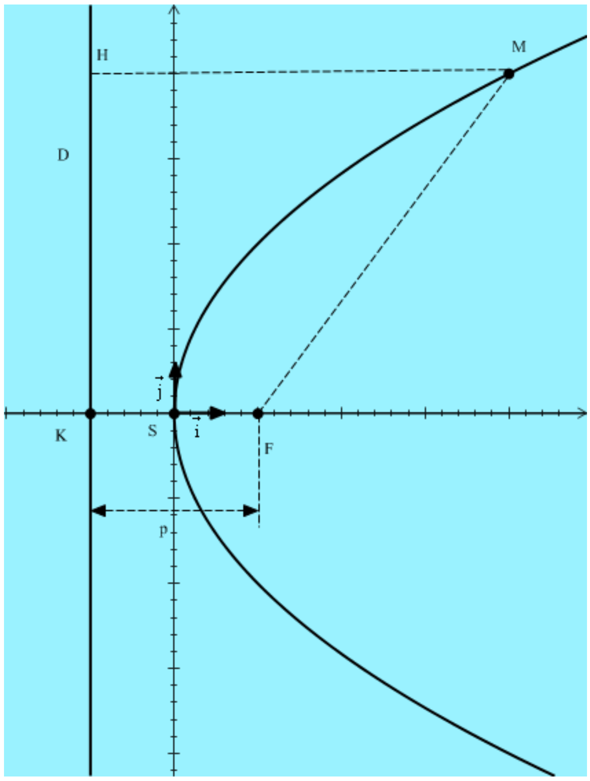
Equation réduite d'une parabole

Théorème

P une parabole de sommet S, de foyer F, de paramètre p et de directrice D.

On munit le plan à un repère orthonormé $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$ où $\vec{i}=\frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$

La parabole P a pour équation $\mathbf{y^2 = 2p}\boldsymbol{x}$, D : $x=-\frac{p}{2}$ et $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.



Inversement

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, l'ensemble des points M(x, y) tels que $\mathbf{y^2 = 2p}\boldsymbol{x}$ **(p > 0)** est la parabole de foyer $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, de directrice D : $x=-\frac{p}{2}$, de paramètre p et de sommet O.

$\mathbf{y^2 = 2p}\boldsymbol{x}$ est l'équation réduite de P.

Deuxième forme

R = $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan

Une courbe (Γ) ayant pour équation dans R : ($x^2 = 2ky$; $k \in IR^*$) est une parabole, son foyer est le point $F\left(0,\frac{k}{2}\right)$ et sa directrice est la droite D : $y=-\frac{k}{2}$

Le point Ω est le sommet de cette parabole, la droite $\left(\Omega,\vec{j}\right)$ est son axe

Le réel positif p = | k | est son paramètre.

Tangente à une parabole

Théorème

$\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan.

P est une parabole d'équation $y^2 = 2kx$; $k \in IR^*$

P admet en chacun de ses points $M_0(x_0, y_0)$ une tangente (T) ayant pour équation cartésienne dans le même repère : $yy_0 = k(x + x_0)$

En particulier : P admet en son sommet S une tangente dont l'équation cartésienne dans le même repère est celle de la droite $(S, \vec{j})$, elle est donc parallèle à la directrice D de P.

Deuxième forme

Si la parabole P a pour équation cartésienne dans $(S, \vec{i}, \vec{j})$: ($x^2 = 2ky$; $k \in IR^*$) alors la tangente (T) à P en un point $M_0(x_0, y_0)$ de P a pour équation cartésienne dans le même repère : $xx_0 = k(y + y_0)$.

En particulier :

La tangente à P en son sommet S a pour équation (y = 0), c'est la droite $(S, \vec{i})$ parallèle à la directrice D : $y = -\frac{k}{2}$.

2°) L'hyperbole

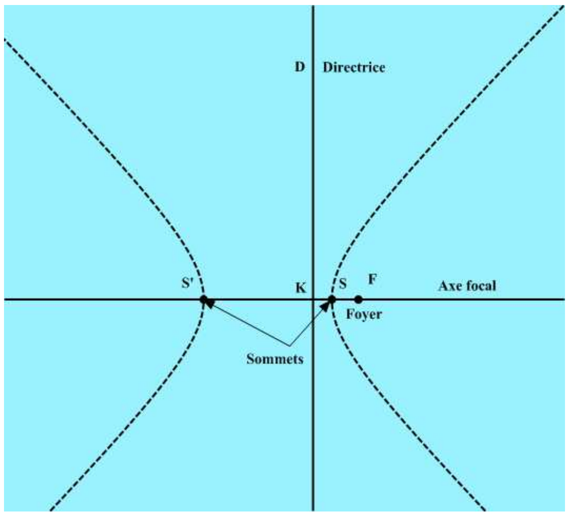
Définition

Etant donnés une droite D, un point F n'appartenant pas à D et un réel **e > 1**.

On appelle hyperbole de foyer F, de directrice D et

d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan tels que

$\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.



On note $H_{(F, D, e)} = \left\{ M \in P / \frac{MF}{MH} = e, \text{ où } H = p_D^{\perp}(M) \right\}$.

• La perpendiculaire à D passant par F est appelée axe focal de l'hyperbole.

• L'axe focal de H est un axe de symétrie pour H .

• H rencontre son axe focal en deux points S et S′ appelés sommets de H et ils sont les barycentres respectifs des points (F, 1) ; (K, e) et (F, 1) ; (K, - e) où K = $p_D^{\perp}(F)$

Equation réduite d'une hyperbole

Théorème

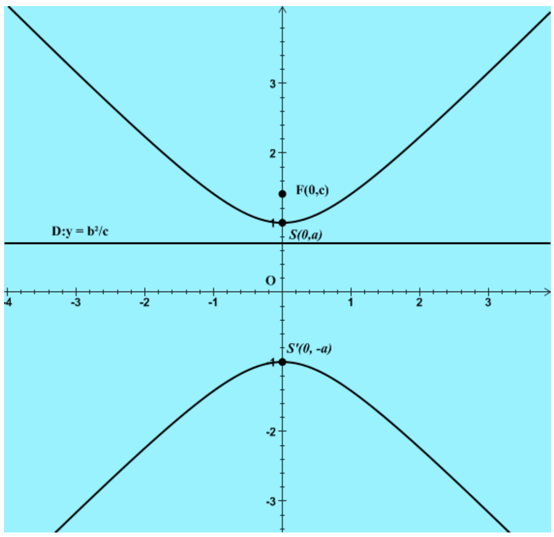
Soit H une hyperbole de foyer F, de directrice D, d'excentricité e et de sommets S et S′.

On désigne par O le milieu de [SS′], on pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$ directeur de D

Si S(a, 0) et F(c, 0) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ alors l'hyperbole H a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec

$\mathbf{b^2 = c^2 - a^2}$ Inversement : L'ensemble des points M(x, y) dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan tels que : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > 0 et b > 0) est une hyperbole de foyer F(c, 0), de directrice D : $x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité

e = $\frac{c}{a}$ et de sommets S(a, 0) et S′(-a, 0) avec c = $\sqrt{a^2 + b^2}$.

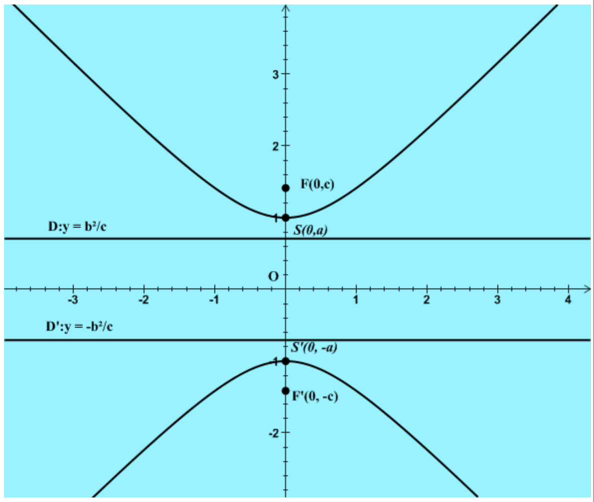


Deuxième forme

La courbe H : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan est une hyperbole de centre O, de foyer F(0, c), de directrice D : $y = \frac{b^2}{c}$, d'excentricité e = $\frac{c}{b}$ et de sommets S(0, b) et S′(0, -b) avec c = $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque

• Toute hyperbole admet un centre de symétrie, qui est le milieu de ses sommets (c'est une conique à centre)



• Toute hyperbole admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice passant par le centre appelé axe transverse.

• L'existence d'un centre de symétrie implique l'existence d'une deuxième directrice D′ et d'un autre foyer F′ symétriques respectifs de D et F.

On dit que F est le foyer associé à la directrice D et F ′ est le foyer associé à la directrice D′.

<u>Tangentes et asymptotes à une hyperbole</u>

<u>Théorème</u>

➧ Soit H : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

H admet deux asymptotes d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$ dans le même repère

La tangente à H en un point $M_0\left(x_0,y_0\right)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ dans le même repère.

➧ Si H : $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

H admet deux asymptotes d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$ dans le même repère

La tangente à H en un point $M_0\left(x_0,y_0\right)$ a pour équation $-\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ dans le même repère.

<u>Remarque</u>

➧ Si a = b alors H est dite équilatère, ses asymptotes sont perpendiculaires et son excentricité e = $\sqrt{2}$.

➧ La tangente au sommet d'une hyperbole est parallèle aux directrices.

<u>Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes</u>

<u>Théorème</u> :

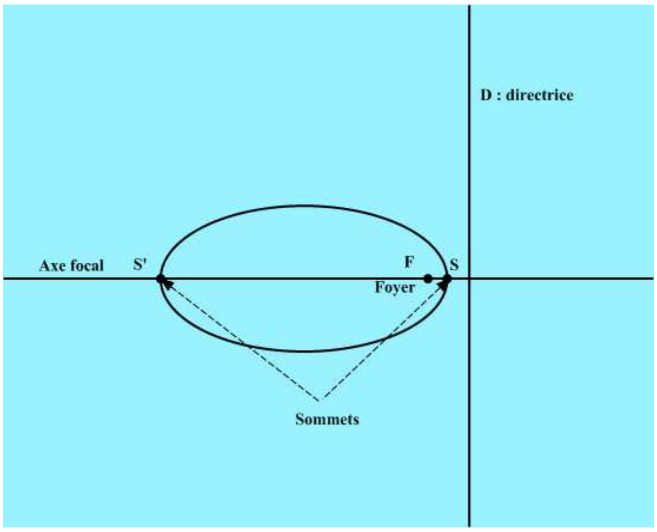
Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a pour équation XY = k où k est un réel non nul.

<u>3°) L'ellipse</u>

<u>Définition</u>

Etant donnés une droite D, un point F n'appartenant pas à D et un réel **0 < e < 1**.

On appelle ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.



On note E(F, D, e) = $\left\{ M \in P / \frac{MF}{MH} = e, \text{ où } H = p_D^{\perp}(M) \right\}$.

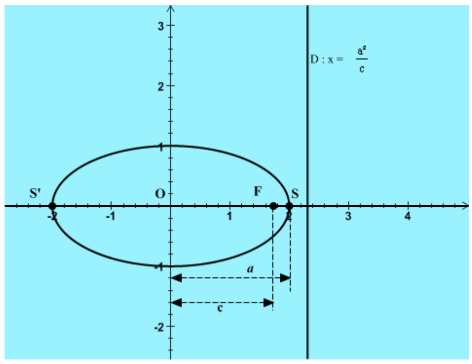
- La perpendiculaire à D passant par F est appelée axe focal de l'ellipse.
- L'axe focal de E est un axe de symétrie pour E .
- E rencontre son axe focal en deux points S et S′ appelés sommets principaux de E et ils sont les barycentres respectifs des points (F, 1) ; (K, e) et (F, 1) ; (K, - e) où K = $p_D^{\perp}(F)$

<u>Equation réduite d'une ellipse</u>

<u>Théorème</u>

Soit E une ellipse de foyer F, de directrice D, d'excentricité e et de sommets principaux S et S′.

On désigne par O le milieu de [SS′], on pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$ directeur de D

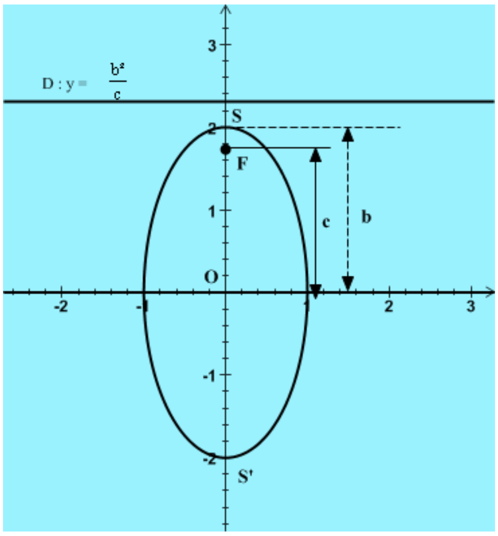


Si S(a, 0) et F(c, 0) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors l'ellipse E a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec

$b^2 = a^2 - c^2$

Inversement : L'ensemble des points M(x, y) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a >$ b > 0) est une ellipse de foyer F(c, 0), de directrice D : $x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité e = $\frac{c}{a}$ et de sommets principaux S(a, 0) et S′(-a, 0) avec c = $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Deuxième forme



La courbe E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan avec 0 < a < b est une ellipse de centre O, de foyer F(0, c), de directrice D : $y=\frac{b^2}{c}$, d'excentricité e = $\frac{c}{b}$ et de sommets principaux S(0, b) et S′(0, -b) avec c = $\sqrt{b^2-a^2}$.

Remarque

- Toute ellipse admet un centre de symétrie, qui est le milieu de ses sommets principaux (c'est une conique à centre)
- Toute ellipse admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice passant par le centre.
- Ce deuxième axe coupe l'ellipse en deux points appelés sommets secondaires.
- L'existence d'un centre de symétrie implique l'existence d'une deuxième directrice D′ et d'un autre foyer F′ symétriques respectifs de D et F.

On dit que F est le foyer associé à la directrice D et F ′ est le foyer associé à la directrice D′.

Tangentes à une ellipse

Théorème

Soit E : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ **a > 0 et b > 0**

La tangente à E en un point $M_0\left(x_0,y_0\right)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ dans le même repère.

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Probabilité conditionnelle

POISSON Siméon Denis, français, 1781 - 1840

Brillant polytechnicien, élève de Fourier et de Laplace, astronome et physicien. Il occupa de nombreux et importants postes d'enseignement : professeur à l'Ecole Polytechnique, professeur de mécanique à la faculté des sciences de Paris, directeur de *l'enseignement mathématique des collèges de France*. Élevé à la dignité de pair de France par Louis-Philippe (1837), Poisson fut nommé doyen de la faculté des sciences quelques mois avant sa mort.

On le connaît bien sûr pour sa célèbre loi de probabilités portant son nom (*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, 1837), mais ses travaux portent cependant principalement en électricité, magnétisme, mécanique céleste, mouvements vibratoires (théorie de la chaleur, théorie des ondes).

En introduisant de nombreux concepts mathématiques liés aux équations de Laplace (théorie du potentiel électrostatique, équations aux dérivées partielles), Poisson apparaît, à la suite de Daniel Bernoulli et Fourier comme le bâtisseur de la *physique mathématique* moderne : étude, au moyen de la seule analyse mathématique, du comportement d'un phénomène, en tant que conséquence des lois, attribuées par l'expérience, qui le régissent.

C'est à la demande de Poisson et de Fourier, dès 1834, qu'une chaire de *Calcul des probabilités et de physique mathématique* sera créée à la faculté des sciences de Paris (1850). Cette mise en place tardive s'explique par le manque de considération de ces branches nouvelles reposant, pour certains esprits, sur un manque de rigueur.

★★★★★★★★★

RESUME DU COURS

★★★★★★★★★

Dénombrement

Quel modèle choisir ?

Si l'énoncé contient le mot successif , il faut tenir compte de tous les ordres dans lesquels on peut obtenir un événement donné.
On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles,
le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

Si l'énoncé contient les mots successif et avec remise,cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.
Le modèle mathématique est la p-liste.

$$\boxed{n^p}$$

Si l'énoncé contient les mots successif et sans remise, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts
(ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments).
Le modèle mathématique est l'arrangement.

$$\boxed{A_n^p}$$

Si l'énoncé contient le mot simultanément, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments n'a pas d'importance.
Le modèle mathématique est la combinaison.

$$\boxed{C_n^p}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Calculatrice :

$C_{10}^3 \longrightarrow\longrightarrow 10 \boxed{SHIFT} \boxed{\div} 3 \boxed{=}$ $\boxed{10C3 = \quad 120}$

$A_{10}^3 \longrightarrow\longrightarrow 10 \boxed{SHIFT} \boxed{\times} 3 \boxed{=}$ $\boxed{10P3 = \quad 720}$

Probabilité

1°) Définitions et propriétés

Définition :

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ un univers. On associe à chaque événement élémentaire $\{a_i\}$ un nombre $p_i \geq 0$, appelé **« probabilité de l'événement** $\{a_i\}$ **»**, de telle sorte que :

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Plus généralement, la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A.

On a $p(\Omega) = 1$ et $p(\emptyset) = 0$.

Langage :

Vocabulaire ensembliste	*Langage probabiliste*
Ensemble Ω	**Univers,** ou encore univers des « possibles » ou des « éventualités »
$A \subset \Omega$	A est un **événement**
$x \in A$	x est une **éventualité favorable** à A
$A \subset \Omega \quad \overline{A} \subset \Omega$	A et $\overline{A}$ sont des **événements contraires**
$A \cap C = \varnothing$	A et C sont des événements **incompatibles**
Singleton $\{x\}$	$\{x\}$ est un événement **élémentaire**
$D = A \cap C$	D est l'événement « A et C »
$F = A \cup C$	F est l'événement « A ou C »
$\varnothing$	$p(\varnothing) = 0$ événement **impossible**
Ω	$p(\Omega) = 1$ événement **certain**

Propriétés des probabilités

Parties de Ω	***événement***	***propriétés***
$\varnothing, \Omega$	Evénement **impossible, certain**	$p(\varnothing) = 0, \ p(\Omega) = 1$
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont **incompatibles**	$P(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est l'événement **contraire** de A	$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
A, B	A et B quelconques	$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

On notera que, pour tout événement $A, 0 \leq p(A) \leq 1$.

Situations d'équiprobabilités :

Définition

Il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Théorème

Lorsqu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est : $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$

Probabilité Conditionnelle

Définition :

p désigne une probabilité sur un univers fini Ω.

A et B étant deux événements de Ω, B étant de probabilité non nulle.

- On appelle ***probabilité conditionnelle*** de l'événement A sachant que B est réalisé le réel noté $p\ (A/B)=\dfrac{P\ (A\cap B)}{p\ (B)}$.
- Le réel p(A /B) se note aussi $p_B(A)$ et se lit aussi probabilité de A sachant B.

Remarque :

Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles p(A/B) et p(B/A) sont toutes les deux définies et on a : $p(A\cap B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A)$.

C'est le **principe des probabilités composées**

Arbres pondérés

Lorsqu'on est en présence d'une situation de conditionnement, il est conseillé d'établir un arbre de probabilité

Règles de construction

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est **1.**

La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

Indépendance

Événements indépendants

Définition :

A et B sont 2 événements de probabilité non nulle.

- A et B sont ***indépendants*** lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.
- A et B sont ***indépendants*** si et seulement si p(A/B) = p(A) ou p(B/A) = p(B).

Théorème :

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** si et seulement si ils vérifient une des trois conditions :

$$p(A/B) = p(A) \text{ ou } p(B/A) = p(B) \text{ ou } p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

Remarque :

Ne pas confondre événements **indépendants** et événements **incompatibles.**

- 2 événements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
- 2 événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

Probabilités Totales

Définition :

Soient Ω un univers associé à une expérience aléatoire et n un entier ≥ 2.
Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une ***partition*** de Ω si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$, $A_i \neq \varnothing$.
- pour tous i et j (avec $i \neq j$) de $\{1 ;2 ;\ldots n\}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Formule des probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une ***partition*** de l'univers Ω constituée d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω.

Alors :

$$p(A) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots p(B \cap A_n) \quad \text{ou}$$

$$p(A) = p(B / A_1) \times p(A_1) + p(B / A_2) \times p(A_2) + \cdots p(B / A_n) \times p(A_n)$$

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Lois de probabilités continues

POISSON Siméon Denis, français, 1781- 1840

Brillant polytechnicien, élève de Fourier et de Laplace, astronome et physicien. Il occupa de nombreux et importants postes d'enseignement : professeur à l'Ecole Polytechnique, professeur de mécanique à la faculté des sciences de Paris, directeur de *l'enseignement mathématique des collèges de France*. Élevé à la dignité de pair de France par Louis-Philippe (1837), Poisson fut nommé doyen de la faculté des sciences quelques mois avant sa mort.

On le connaît bien sûr pour sa célèbre loi de probabilités portant son nom (*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, 1837), mais ses travaux portent cependant principalement en électricité, magnétisme, mécanique céleste, mouvements vibratoires (théorie de la chaleur, théorie des ondes).

En introduisant de nombreux concepts mathématiques liés aux équations de Laplace (théorie du potentiel électrostatique, équations aux dérivées partielles), Poisson apparaît, à la suite de Daniel Bernoulli et Fourier comme le bâtisseur de la *physique mathématique* moderne : étude, au moyen de la seule analyse mathématique, du comportement d'un phénomène, en tant que conséquence des lois, attribuées par l'expérience, qui le régissent.

C'est à la demande de Poisson et de Fourier, dès 1834, qu'une chaire de *Calcul des probabilités et de physique mathématique* sera créée à la faculté des sciences de Paris (1850). Cette mise en place tardive s'explique par le manque de considération de ces branches nouvelles reposant, pour certains esprits, sur un manque de rigueur.

RESUME DU COURS

Variable aléatoire continue

Définition :

Une variable aléatoire X est dite **continue** lorsqu'elle peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle I de IR.

On s'intéresse alors à des événements du type : << La valeur de X est comprise entre les réels a et b >> Nous noterons $(a \leq X \leq b)$ un tel événement.

Densité

On appelle densité de probabilité continue la fonction f positive et continue sur [a, b] telle que :

$\int_a^b f(t)dt = 1$ et pour tous x et y de [a, b], on a p($x \leq$ X $\leq$ y) = $\int_x^y f(t)dt$.

Exemples de variables aléatoires continues

Loi uniforme

Définition :

Soit un intervalle $[a,b]$. La fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ est appelée densité de la probabilité uniforme sur $[a,b]$.

On appelle probabilité uniforme sur $[a,b]$ l'application qui à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$ associe le réel $p([c,d])=\int_c^d f(x)dx$.

Conséquences :

- $p([a,b]) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = 1$
- Pour tout réel x_0 de $[a,b]$ on a : $p(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$
- $p([a,b]) = p(]a,b]) = p([a,b[) = p(]a,b[)$.
- si on désigne par $\overline{[c,d]}$ le complémentaire de $[c,d]$ dans $[a,b]$, alors $p(\overline{[c,d]}) = 1 - p([c,d])$.

Définition :

on dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[a,b]$ suit la loi de probabilité uniforme p

si : $p(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)dx = \frac{d-c}{b-a}$

Fonction de répartition d'une varaible qui suit une loi uniforme

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité uniforme p sur l'intervalle $[a,b]$.
On appelle fonction de répartition de X, l'application $F : IR \mapsto [0,1]$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \ x < a \\ p(a \le X \le x) & si \ x \in [a,b] \\ 1 & si \ x > b \end{cases}$$

Loi exponentielle

Définition :

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application p qui :

- à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx$

- à tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel

$$p([c,+\infty[)=\lim_{x\to+\infty}\int_c^x \lambda e^{-\lambda t}dt=e^{-\lambda c}$$

Propriétés :

- pour tout réel $t>0$, $p([0,t])=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda t}$.
- $p([t,+\infty[)=1-p([0,t])=e^{-\lambda t}$.

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ,

si : $p(c\le X\le d)=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$ et $p(X\ge c)=e^{-\lambda c}$

Fonction de répartition d'une varaible qui suit une loi exponentielle

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle p sur de paramètre λ.
On appelle fonction de répartition de X, l'application $F:IR\mapsto[0,1]$ définie par :

$$F(x)=\begin{cases}0 & si\ x<0\\ p(0\le X\le x)=1-e^{-\lambda x} & si\ x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

Exercice rédigé

On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

a) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie :

$$p(X>10)=1-p(X\le10)=1-\int_0^{10}0{,}1e^{-0{,}1t}dt=\frac{1}{e}.$$

b) On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?

$$p(X>12\ /\ x>10)=\frac{p(X>12)}{p(X>10}=\frac{e^{-0{,}1\times12}}{e^{-0{,}1\times10}}=e^{-0{,}2}\simeq0{,}82.$$

c) Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans :

$$p(X>2)=1-p(X\le2)=1-\int_0^2 0{,}1e^{-0{,}1t}dt=e^{-0{,}2}\simeq0{,}82$$

On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de son âge.

On dit que X est une loi de durée de vie sans vieillissement.

TAKIACADEMY.COM
" JAMAIS PLUS SIMPLE "

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Variables aléatoires discrètes

POISSON Siméon Denis, français, 1781- 1840

Brillant polytechnicien, élève de Fourier et de Laplace, astronome et physicien. Il occupa de nombreux et importants postes d'enseignement : professeur à l'Ecole Polytechnique, professeur de mécanique à la faculté des sciences de Paris, directeur de *l'enseignement mathématique des collèges de France*. Élevé à la dignité de pair de France par Louis-Philippe (1837), Poisson fut nommé doyen de la faculté des sciences quelques mois avant sa mort.

On le connaît bien sûr pour sa célèbre loi de probabilités portant son nom (*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, 1837), mais ses travaux portent cependant principalement en électricité, magnétisme, mécanique céleste, mouvements vibratoires (théorie de la chaleur, théorie des ondes).

En introduisant de nombreux concepts mathématiques liés aux équations de Laplace (théorie du potentiel électrostatique, équations aux dérivées partielles), Poisson apparaît, à la suite de Daniel Bernoulli et Fourier comme le bâtisseur de la *physique mathématique* moderne : étude, au moyen de la seule analyse mathématique, du comportement d'un phénomène, en tant que conséquence des lois, attribuées par l'expérience, qui le régissent.

C'est à la demande de Poisson et de Fourier, dès 1834, qu'une chaire de *Calcul des probabilités et de physique mathématique* sera créée à la faculté des sciences de Paris (1850). Cette mise en place tardive s'explique par le manque de considération de ces branches nouvelles reposant, pour certains esprits, sur un manque de rigueur.

RESUME DU COURS

Variable aléatoire

Pour décrire le résultat d'une expérience aléatoire associée à un univers Ω, on fait souvent correspondre un nombre à chaque élément de Ω.

Définition :

Soit Ω un univers muni d'une probabilité p.

On appelle **aléa numérique X** défini sur Ω une application qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Désignons par X(Ω) l'ensemble des valeurs possibles de X. $X(\Omega)=\{x_1;x_2;.....;x_n\}$.

La **loi de probabilité de X** est l'application qui à tout élément x de X(Ω) fait correspondre la probabilité que X prenne cette valeur x. Par abus de langage on dit que c'est la probabilité que « X soit égal à x ».

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Espérance mathématique

Définition

Soit un aléa numérique X prenant les valeurs $x_1, x_2,......, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2,......, p_n$. On appelle **espérance mathématique** de X le nombre E(X) défini par : $E(X)=\sum x_i\,p_i$.

Remarque :

L'espérance mathématique est la moyenne des x_i pondérées par les probabilités $p_i = p(X = x_i)$.

Dans le cas où la variable aléatoire X indique le gain algébrique réalisé dans un jeu, on dit que le jeu est :

- équitable si E(X) = 0
- favorable ou gagnant si E(X) > 0
- défavorable ou perdant si E(X) < 0

Propriétés :

Soient X et Y deux aléas numériques définies sur Ω et a un réel. L'espérance des variables aléatoires X + Y et a X est donnée par :

E(X + Y) = E(X) + E(Y) et E(a X) = a E(X).

Varaince et Ecart-type

Variance :

Soit un aléa numérique X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$.

On appelle **variance** de X, le nombre noté V(X) défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i^2 - E(X)^2.$$

Propriétés :

$V(X) \geq 0$.

V(X + a) = V(X).

V(a X) = a^2 V(X).

L'écart type

L'écart type d'un aléa numérique X est défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Fonction de répartition

Définition

Soit un aléa numérique X défini sur un univers Ω muni d'une probabilité p.

La fonction de répartition F de X est la fonction de IR vers [0 ; 1] qui, à tout réel x, associe la probabilité que X soit inférieure ou égale à x :

$F(x) = p(X \leq x)$.

La fonction de répartition est constante par intervalles.

Loi Binomiale

Définitions :

- On appelle schéma de Bernoulli, une suite d'épreuves identiques qui vérifient les conditions suivantes :
  - Chaque épreuve donne lieu à deux issues : « S » : succès et « E » : échec.
  - Les épreuves sont indépendantes les unes des autres.
  - La probabilité de S (respectivement de E) est la même pour chaque épreuve.
- Soit X l'aléa numérique qui à chaque série d'épreuves associe le nombre de succès obtenus.

Si l'épreuve est répétée n fois alors $X(\Omega) = \{0,1,2,\ldots\ldots,n\}$

et on a : $\boxed{\text{pour tout } k \in \{0,1,\ldots\ldots,n\},\ p(X=k) = C_n^k \times [p(S)]^k \times [p(E)]^{n-k}}$

$\rightarrow$ on dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p = p (S) ou aussi une loi de Bernoulli qu'on note

B (n, p).

Théorème :

Soit X un aléa numérique qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Alors E (X) = $n \times p$

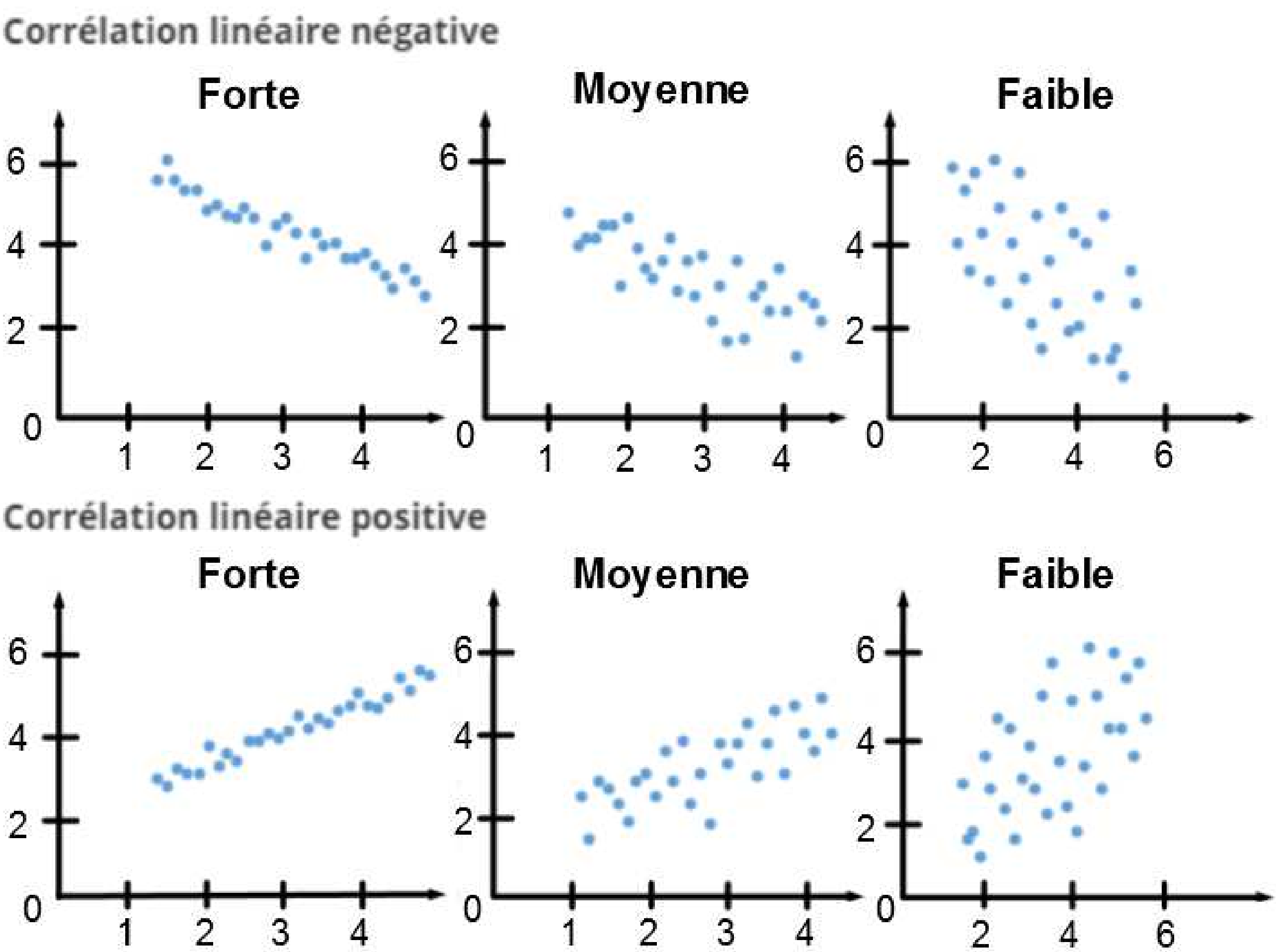
V (X) = $np(1-p) = n \times p \times q$ où $q = 1-p$

σ (X) = $\sqrt{npq}$

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

STATISTIQUES



★★★★★★★★★★

RESUME DU COURS

★★★★★★★★★★

I-RAPPELS

A- Série statistique double en données individuelles

Paramètres d'une série statistique :

Etant donnée une populations de n individus sur laquelle on étudie deux caractères X et Y.
(On dit que (X,Y) est une série statistique double sur un échantillon de taille n)
On désigne par $x_1, x_2, \ldots x_n$ les variations de X
On désigne par $y_1, y_2, \ldots y_n$ les variations de Y

X	x_1	x_2	……………………………….	x_n
Y	y_1	y_2	……………………………….	y_n

L'ensemble des points $A_i(x_i, y_i)$ du plan muni d'un repère orthogonal est appelé nuage de points associé à la série statistique double (X,Y)

1°) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ s'appelle moyenne arithmétique de X (espérance de $X = E(X)$)

$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ s'appelle moyenne arithmétique de Y (espérance de $Y = E(Y)$)

Le point $G(\overline{X}, \overline{Y})$ est appelé le point moyen

2°) $V(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\overline{X}\right)^2$ s'appelle variance de X

$V(Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\overline{Y}\right)^2$ s'appelle variance de Y.

3°) $6(X) = \sqrt{V(X)}$ écart type de X ; $6(Y) = \sqrt{V(Y)}$ écart type de Y.

Interprétation de l'écart type :

- L'écart type est un moyen qu'on utilise pour mesurer la dispersion des valeurs d'une variable statistique à variable quantitative autour de la moyenne de cette série.

Un écart type important signifie que les valeurs de la série s'éloignent souvent et de façon importante de la moyenne.

- Pour comparer deux séries statistiques qui n'ont pas le même ordre de grandeur, on peut comparer leurs écarts-type relatifs respectifs plus l'écart type est relatif est faible plus la dispersion au tour de la moyenne est faible.

$\frac{\sigma}{\overline{X}}$ est l'écart type relatif de X $\qquad$ $\frac{\sigma}{\overline{Y}}$ est l'écart type relatif de Y

B- Série statistique double en données groupées

Distribution marginale d'une série statistique double :

On désigne par $x_1, x_2, ..., x_i, ...x_p$ les valeurs de X et par $y_1, y_2, ..., y_i, ...y_q$ les valeurs de Y

Si le couple (x_i, y_i) se répètent plus qu'une fois soit n_{ij} l'effectif associé au couple.

Les effectifs n_{ij} associés aux couples (x_i, y_i) sont représentés à l'aide d'un tableau à double entrée de la forme :

y \ x	y_1	y_2	....	y_j	....	y_q	Distribution marginale de X
x_1	n_{11}	n_{12}		n_{1j}		n_{1q}	$n_1 = \sum_{j=1}^{q} n_{1j}$
x_2	n_{21}						$n_2 = \sum_{j=1}^{q} n_{2j}$
x_j	n_{i1}						
x_p	n_{p1}						n_p
Distribution marginale de Y	$n_1 = \sum_{i=1}^{p} n_{i1}$	n_2	....	n_j	....	n_q	n

D'où les deux tableaux ci-dessous représentent les distributions marginales de X et Y :

X	x_1	x_2	....	x_p
n_i	n_1	n_2	....	n_p

Y	y_1	y_2	....	y_q
n'_j	n'_1	n'_2	....	n'_q

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i x_i \ ; \ \overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}n'_i y_i$$

$$V(X)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{p}n_i x_i^2\right)-\left(\overline{X}\right)^2 \ ; \ V(Y)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{q}n'_i y_i^2\right)-\overline{Y}^2$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)} \ ; \ \sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}$$

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{p}\ \sum_{j=1}^{q}n_{ij}x_i y_i\right)-\overline{X}\,\overline{Y}$$

Remarque1 : Toutes les formules vues dans la partie précédente de ce cours restent valables pour le cas d'une Série statistique double

Remarque2 : Si les caractères sont continus on considère les centres des classes

II-COVARIANCE

1-Définition Soit (x_i,y_i) avec i=1,……..n une série statistique double .On appelle covariance x et y le nombre noté Cov(x,y) et définie par : $Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$

2-Théorème

* Soit (x_i,y_i) avec i=1,……..n une série statistique double : $Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\overline{X}\,\overline{Y}$

* $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

3-Interprétation de la covariance :

La covariance permet une mesure de la dispersion des points du nuage par rapport au point moyen

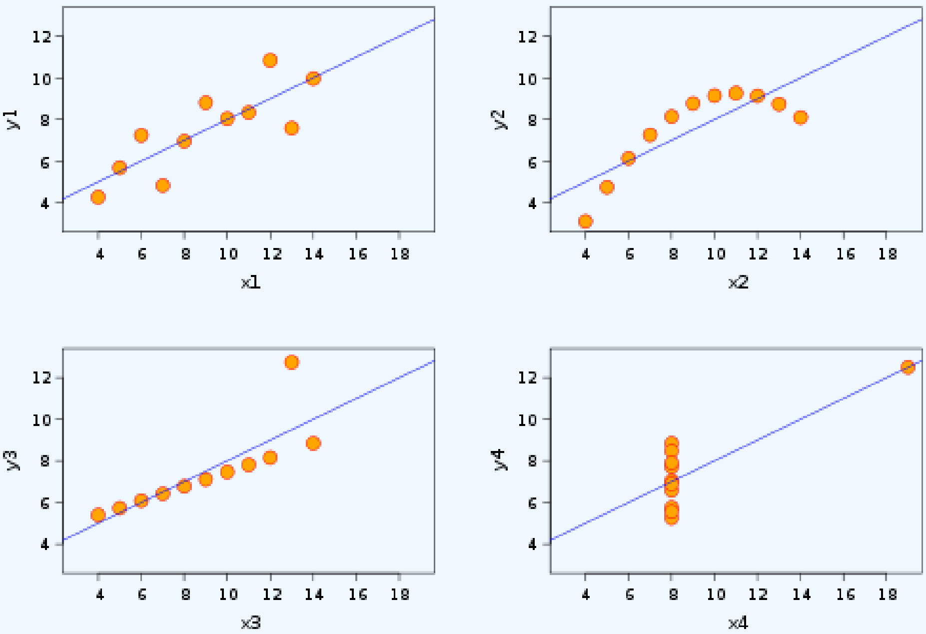
La covariance est positive si X et Y ont tendance à varier dans le même sens

La covariance est négative si X et Y ont tendance à varier en sens contraire.

III-AJUSTEMENT AFFINE

1-Ajustement affine

: La courbe peut être une droite ou une parabole.



ou bien il peut ne pas y avoir de courbe visible :

2- Méthode de Mayer:

Soit (X,Y) une série statistique double et G son point moyen

On scinde le nuage de point de (X,Y) en deux parties contenant à peu prés le même nombre de points obtenant ainsi deux nuages de points.

On désigne par $G_1 \, et \, G_2$ les points moyens de ces deux nuages.

La droite (G_1G_2) passe par le point G et définie un ajustement affine du nuage de points représentant la série statistique double (X,Y).

3- Méthode de Moindre carrés:

a- Principe de la méthode des moindre carrés

Le principe de cette méthode c'est de trouver la droite D « La plus proche possible » des points du nuage, c'est-à-dire que la somme des carrés des écarts entre les points M_i du nuage et les points P_i de la droite D de même abscisse, est la plus petite possible.

On dit qu'on a effectué un ajustement linéaire par la méthode des **moindres carrés**.

b-Théorème (admis)

La droite de régression de y en x est la droite qui passe par G $\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$ et de coefficient directeur le réel $a=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)}$

Remarque 1

- La droite de régression de Y par rapport à X est : $D: y-\overline{Y}=\dfrac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{V(X)}(x-\overline{X})$
- La droite de régression de X par rapport à Y est : $D': x-\overline{X}=\dfrac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{V(Y)}(y-\overline{Y})$

Remarque2 :

$G(\overline{X},\overline{Y})\in D\cap D' d'ou$:

$D: y=ax+b \; avec \; a=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)} et \; b=\overline{Y}-a\overline{X}$

$D': x=a'y+b' \; avec \; a'=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(Y)} et \; b'=\overline{X}-a'\overline{Y}$

Remarque3 :

Les deux coefficients a et a’ sont de même signe et le coefficient de corrélation r vérifie

4- Coefficient de corrélation linéaire :

a)-Définition : Le coefficient de corrélation linéaire de $\left(X,Y\right)$ est : $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{6\left(X\right),6\left(Y\right)}$

Remarque :

- On note encore ρ_{XY} par r.
- Le coefficient de corrélation linéaire de $\left(X,Y\right)$ est égal Le coefficient de corrélation linéaire de $\left(X,Y\right)$

- $-1\leq r\leq 1$
- r est invariant par changement d’unité ou d’origine.

b) Interprétation du coefficient de corrélation linéaire

- Si $|r|\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors la corrélation linéaire entre x et y est faible
- Si $|r|>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors la corrélation linéaire entre x et y est forte
- Les points du nuage de points sont alignés si et seulement si r = 1 ou r = −1.

IV-UTILISATION D'UNE CALCULATRICE

(Casio fx 570 ES ou fx 570 ES ou fx 991 ES plus)

Tous les calculs mentionnés ici s'effectuent dans le mode STAT MODE SETUP 3

Types de calculs statistiques

Touche	Elément du menu	Calcul statistique
1	**1-VAR**	**Une variable**
2	**A+BX**	**Régression linéaire**
3	**_+CX2**	**Régression quadratique**
4	**In X**	**Régression logarithmique**
5	**e^X**	**Régression exponentielle e**
6	**A•B^X**	**Régression exponentielle ab**
7	**A•X^B**	**Régression de puissance**
8	**1/X**	**Régression inverse**

Utilisation du menu STAT

Lorsque l'écran de l'éditeur STAT ou l'écran de calcul STAT est affiché, appuyez sur SHIFT 1 pour afficher le menu STAT.
Le contenu du menu STAT est différent selon qu'une variable ou deux variables sont utilisées pour le calcul statistique actuellement sélectionné.

1 : Type	5 : Data
2 : Edit	6 : Sum
3 : Var	7 : MinMax
7 : Distr	

Statistiques à une variable

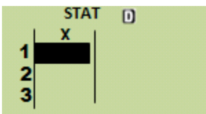
1 : Type	5 : Data
2 : Edit	6 : Sum
3 : Var	7 : MinMax
7 : Reg	

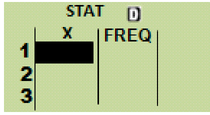
Statistiques à deux variables

Exemple 1 : On considère la série statistique à une variable :

X	**10**	**14**
Effectif	**40**	**20**

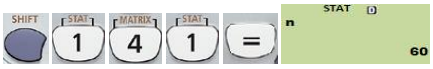
❑ On passe en mode statistique MODE SETUP 3 1

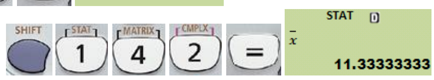


- Afficher la colonne des effectifs  (FREQ) 

- Introduction des données

X	Effectif
10	40
14	20

- Pour déterminer l'effectif total
  - On trouve : **N = 60** 

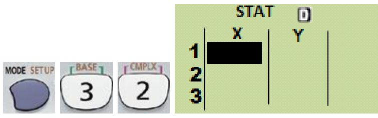
- Pour déterminer la moyenne
  - On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{X}} \approx 11{,}33$ 

- Pour déterminer l'écart type
  - On trouve l'écart type : $\sigma \approx 1{,}89$ 

- Pour déterminer la variance
  - On trouve la variance : **V** $\approx 3{,}56$ 

Exemple 2 : On considère la série statistique à deux variables :

X	10	14
Y	**40**	**20**

- On passe en mode statistique 

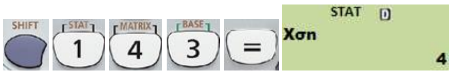
- Introduction des données

X	Y
10	40
14	20

- Pour déterminer la moyenne de **X**
  - ☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{X}} = 12$

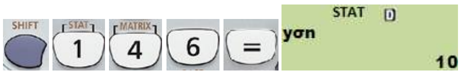
- Pour déterminer la moyenne de **Y**
  - ☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{Y}} = 30$

- Pour déterminer l'écart type **X**
  - ☞ On trouve l'écart type : $\sigma(\mathbf{X}) = 2$



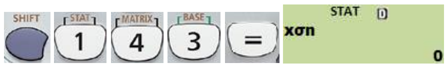
- Pour déterminer la variance de **X**
  - ☞ On trouve la variance de **X** : $V(\mathbf{X}) =$

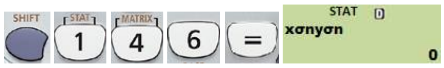
- Pour déterminer l'écart type **Y**
  - ☞ On trouve l'écart type : $\sigma(\mathbf{Y}) = 10$

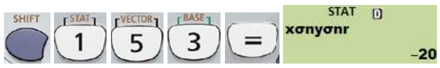


- Pour déterminer la variance de **Y**
  - ☞ On trouve la variance de **Y** : $V(\mathbf{Y}) = 100$

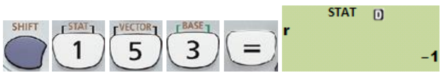
- Pour déterminer la covariance de **(X ,Y)**
  - ☞ On trouve la covariance : $Cov(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = -20$



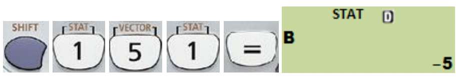




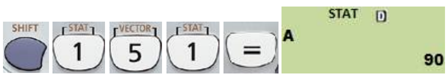
- Pour déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\mathbf{r_{xy}}$:
  - ☞ On trouve: $\mathbf{r_{xy}} = -1$



- Droite de moindre carrés de **Y** en **X** <u>**ou**</u> droite de régression de **Y** en **X. (Y=BX+A)**
  - ☞ On trouve: **B** $= -5$



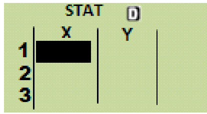
  - ☞ et on trouve: **A** $= 90$

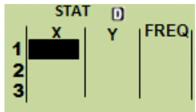


d'où Y = –5X+90

Exemple 3 : On considère la série statistique à double entrée :

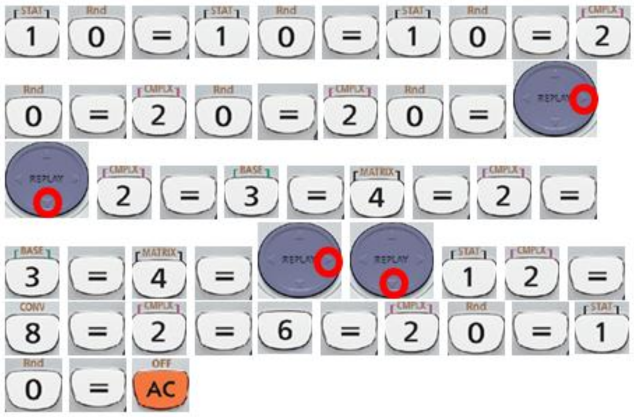
X \ Y	2	3	4
10	12	8	2
20	6	20	10

- On passe en mode statistique  

- Afficher la  colonne des effectifs (**FREQ**) 

- Introduction des données

X	Y	FREQ
10	2	12
10	3	8
10	4	2
20	2	6
20	3	20
20	4	10



- Pour déterminer la moyenne de **X**
  - On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{X}} \approx 16.2$ 
- Pour déterminer la moyenne de **Y**
  - On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{Y}} \approx 2.9$ 
- Pour déterminer l'écart type **X**
  - On trouve l'écart type : $\sigma(\mathbf{X}) \approx 4.85$ 
- Pour déterminer la variance de **X**
  - On trouve la variance de **X** : $V(\mathbf{X}) \approx 23.54$ 
- Pour déterminer l'écart type **Y**
  - On trouve l'écart type : $\sigma(\mathbf{Y}) \approx 0.71$ 

- Pour déterminer la variance de **Y**
  - On trouve la variance de **Y** : V(**Y**) ≈ 0.5 
- Pour déterminer la covariance de **(X ,Y)**
  - On trouve la covariance : **Cov(X ,Y)** ≈ 1.33 

- Pour déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\mathbf{r_{xy}}$:
  - On trouve: $\mathbf{r_{xy}} = 0.39$ 

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Arithmétiques

Euclide, en grec ancien Εὐκλείδης *Eukleidês* (né vers -325, mort vers -265 à Alexandrie) est un mathématicien de la Grèce antique ayant probablement vécu en Afrique, auteur des *Éléments*, qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques modernes.

Johann Carl Friedrich Gauß (traditionnellement transcrit **Gauss** en français) (30 avril 1777 — 23 février 1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

Bezout (Étienne), mathématicien, né à Nemours en 1730, m. en 1783, fut placé par M. de Choiseul en 1763 à la tête de l'instruction de la marine royale, fut chargé en 1768 de l'enseignement des élèves du corps de l'artillerie, et rédigea pour ses élèves des cours qui eurent un grand succès. Les principaux sont : *Cours de mathématiques à l'usage de l'artillerie*; *Cours de Mathématiques à l'usage de da marine*, 1764; *Théorie des équations algébriques*, 1779. Bezout est simple, clair, et sait se mettre à la portée des jeunes esprits : aussi ses ouvrages sont-ils restés classiques.

RESUME DU COURS

Divisibilité dans Z

1. Diviseurs et multiples d'entiers

Définition

Soit a un entier et d un entier non nul. On dit que :
d divise a $\Leftrightarrow$ il existe un entier k tel que $a = kd$

Remarque

Soit a un entier et d un entier non nul.
1/ Quand d divise a on dit aussi que a est un multiple de d.
2/ L'ensemble des multiples de d est $\{kd;\ k \in \mathbb{Z}\}$ noté $d\mathbb{Z}$.

Théorème

Soient a et b deux entiers non nuls et c un entier.
- **si** b divise a **alors** $(-b)$ divise a
- **si** b divise a **et** a divise b **alors** $a = b$ **ou** $a = -b$.
- **si** a divise b **et** b divise c **alors** a divise c.
- **si** a divise b **et** a divise c **alors** a divise $\alpha a+\beta c;\ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2$

2. Division euclidienne dans Z

Rappel

Pour tout réel x, il existe un entier unique n tel que $n \leqslant x < n+1$.
Cet entier n est appelé partie entière de x et il est noté $E(x)$.
Ainsi $E(x) \leqslant x < E(x)+1$

Définition

Soit a un entier et b un entier non nul.
- On appelle **quotient** de a par b l'entier q défini par :

Premier cas : b divise a alors $q=\frac{a}{b}$

Deuxième cas : b ne divise pas a alors

Si $b > 0$ **alors** q est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{a}{b}$.

autrement $q = E\left(\frac{a}{b}\right)$

Si $b < 0$ **alors** q est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{a}{b}$.

autrement $q = E\left(\frac{a}{b}\right) + 1$.

• • On apelle **reste** de a par b l'entier $r = a - bq$ où q est le quotient de a par b.

Conséquence

Pour tout entier a et pour tout entier b non nul, il existe un couple unique d'entiers (q, r) tels que $a = qb + r$ et $0 \leqslant r < |b|$.

Remarque

$0 \leqslant r < |b| \quad \Leftrightarrow \quad r \in \{0;1;2;\ldots;|b|-1\}$.

3. Congruence dans Z

Définition

Soit n un entier naturel non nul et a et b deux entiers. On dit que a est congru à b modulo n (ou a et b sont congru modulo n)

$\Updownarrow$

il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = kn$

On note $a \equiv b \pmod{n}$ ou aussi $a \equiv b \; [n]$

Théorème

Soient n un entier naturel non nul et a et b deux entiers. Désignons par r et r' les restes respectifs de a et b dans la division euclidienne par n. On a:

$a \equiv b \; [n] \quad \Leftrightarrow \quad r \equiv r' \; [n]$

Théorème

Soient a, b, c et d quatre entiers et n un entier naturel non nul.

⊙ **si** $a \equiv b \; [n]$ **alors** $b \equiv a \; [n]$

⊙ **si** $a \equiv b \; [n]$ **et** $b \equiv c \; [n]$ **alors** $a \equiv c \; [n]$

⊙ **si** $a \equiv b \; [n]$ **alors** $ca \equiv cb \; [n]$

⊙ **si** $a \equiv b \; [n]$ **alors** $a^m \equiv b^m \; [n]$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.

⊙ **si** $a \equiv b \; [n]$ **et** $c \equiv d \; [n]$ **alors** $a + c \equiv b + d \; [n]$

⊙ **si** $a \equiv b \; [n]$ **et** $c \equiv d \; [n]$ **alors** $a \times c \equiv b \times d \; [n]$

Identité de Bezout

1. PGCD de deux entiers

Définition

Soient a et b deux entiers non nuls.
Le plus grand élément de $D_a \cap D_b$ est dit le plus grand commun diviseur de a et b et il est noté $a \wedge b$.

Remarque:: $D_a \cap D_b = D_{|a|} \cap D_{|b|} \Rightarrow \boxed{a \wedge b = |a| \wedge |b|}$

Théorème

Soient a, b et k trois entiers non nuls et $d = a \wedge b$. On a :
k divise a et b $\Leftrightarrow$ k / d.

Propriétés

Soient a et b deux entiers non nuls.
- ⊙ **si** b divise a **alors** $a \wedge b = |b|$.
- ⊙ **si** $a \equiv c \ [b]$ et $c \in \mathbb{Z}^*$ **alors** $a \wedge b = b \wedge c$.
- ⊙ $a \wedge b = b \wedge a$.
- ⊙ Pour tout entier non nul k, $ka \wedge kb = |k| \ (a \wedge b)$.
- ⊙ $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

2. Entiers premiers entre eux

Définition

Soient a et b deux entiers non nuls.

a et b sont dits premiers entre eux $\Leftrightarrow$ $a \wedge b = 1$.

Remarque

Soient a et b deux entiers non nuls et $d = a \wedge b$. On a les entiers $a' = \frac{a}{d}$ et $b' = \frac{b}{d}$ sont premiers entre eux.

lemme de Gauss

$a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$ et $c \in \mathbb{Z}^*$. On a :

Si $a / (bc)$ **et** $a \wedge b = 1$ **alors** a / c

Théorème

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et n un entier.

Si $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ n \equiv 0 \pmod{a} \\ n \equiv 0 \pmod{b} \end{cases}$ **alors** $n \equiv 0 \pmod{ab}$

3. PPCM de deux entiers

Théorème **et** **Définition**

Si a et b sont deux entiers non nuls **alors** il existe un unique entier **naturel** non nul m qui vérifie les deux conditions suivantes:

1. m est un multiple de a et b.

2. **Si** un entier k est un multiple commun a et b **alors** k est un multiple de m

★ L'entier m défini plus haut est noté $a \vee b$ et appelé le plus petit commun multiple de a et b.

Propriétés

Soient a et b deux entiers non nuls.

1) $a \vee b = |a| \vee |b|$

2) $(a \vee b) \times (a \wedge b) = |ab|$

3) **si** b divise a **alors** $a \vee b = |a|$.

4) $a \vee b = b \vee a$.

5) Pour tout entier non nul k, $ka \vee kb = |k| (a \vee b)$.

6) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

4. Identité de Bezout

Théorème

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $b \geqslant 2$ et $a \wedge b = 1$.
Il existe un unique entier non nul u appartenant à $\{0, 1, 2, \dots, (b-1)\}$ tel que $ua \equiv 1 \pmod{b}$. On dit que u est l'inverse de a modulo b.

Théorème *(Identité de Bezout)*

Soient a et b deux entiers non nuls. On a:
$a \wedge b = 1 \iff$ Il existe $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

Conséquence

Soient a et b deux entiers non nuls. On a:
$d = a \wedge b \iff$ Il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$.

Théorème

Soient a, b et c trois entiers non nuls et $d = a \wedge b$. On a:
L'équation $ax + by = d$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si et seulement si d divise c.