LIMITES CLASSIQUES DE TOUTES LES FONCTIONS

fonction lnx: definie dans $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} xlnx = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha lnx = 0\ (\alpha > 0)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x^\alpha} = 0\ (\alpha > 0)$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(ax+1)}{x} = a$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ln|x|}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{ln|x|}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{ln(-x)}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{ln|x|}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{ln|x|}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{lnx}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(ax+1)}{ax} = 1\ (a\in\mathbb{R})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(ax+1)}{x} = a\ (a\in\mathbb{R})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{lnx}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} xlnx = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln(x-1)}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{lnx} = 1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{lnx} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{\frac{lnx}{x}} = -\infty$

Propriétés

$ln(xy) = lnx + lny$

$ln\left(\frac{x}{y}\right) = lnx - lny$

$ln\left(\frac{1}{x}\right) = -lnx$

$lnx^n = nlnx$

$lne = 1$

$ln1 = 0$

$ln0 = -\infty$

$lnx \geq lny \Leftrightarrow x \geq y$

$lnx = y \Leftrightarrow x = e^y$

$lne^x = x$

$ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = 2ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$

$ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^3 = 3ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^n =$

$\begin{cases} nln\left|\frac{x+1}{x}\right| \; si\ n\ est\ paire(2) \\ nln\left(\frac{x+1}{x}\right) \; si\ n\ impaire(3) \end{cases}$

Fonctions exponentielle définie dans $]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty\ (\alpha > 0)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0\ (\alpha > 0)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^\alpha e^x = 0\ (\alpha > 0)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{lnx} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (x - e^x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} |x|^x = \lim\limits_{x\to -\infty} e^{xln|x|}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} e^{xln(-x)} = e^{-\infty(+\infty)} = 0$

Propriétés

$e^x e^y = e^{x+y}$; $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$; $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

$(e^x)^n = e^{nx}\ (n\in\mathbb{R})$

$e^1 = e$; $e^0 = 1$; $e^{-\infty} = 0$

$e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y$;

$e^x = y \Rightarrow x = lny$; $e^{lnx} = x$;

U.L.M. Services: umlservices1@gmail.com +24206 4086712/069233730

Fonctions circulaires

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;$

$\lim\limits_{u\to0}\frac{\sin U}{U}=1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(x-1)}{x}=0$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

Notions de base des limites

$\forall l\in\mathbb{R}^*(l\ est\ un\ réel)$

$\frac{l}{0}=\infty$; $\frac{l}{\infty}=0$; $l\times\infty=\infty$; $\frac{0}{l}=0$

$\frac{\infty}{l}=\infty$; $l+\infty=\infty$; $\frac{\infty}{\infty}=\infty$;

$\frac{\infty}{0}=\infty \quad \infty+\infty=\infty$;

$-\infty-\infty=-\infty$; $\frac{0}{\infty}=0$

Formes indéterminées

$\frac{0}{0}$; $+\infty-\infty$; $0\times\infty$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Notion d'intervalle

$x<0$ $\quad -\infty \quad 0 \quad +\infty$

$\Rightarrow S=]-\infty;0[$

$x>0$ $\quad -\infty \quad 0 \quad +\infty$

$\Rightarrow S=]0;+\infty[$

$x\le0$ $\quad -\infty \quad 0 \quad +\infty$

$\Rightarrow S=]-\infty;0]$

$x\ge0$ $\quad -\infty \quad 0 \quad +\infty$

$\Rightarrow S=[0;+\infty[$

Exemple : $f(x)=x^2-1$; *solution sz f*

si $x\le0$ & *si* $x\ge0$

pour $x\le0$ *la solution de f est*

: $x^2-1=\begin{cases}x+1=0\\ et\\ x-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ et\\ x=1\end{cases}$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

$S=]-\infty;-1]$

pour $x\ge0$ *la solution de f est*

: $x^2-1=\begin{cases}x+1=0\\ et\\ x-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ et\\ x=1\end{cases}$

$+\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

$S=[-1;1]\cup[1;+\infty[$

NB : que l'intervalle est toujours ouverte a : < *ou* > *c.a.d* ($]a;b[$)

Est toujours fermée a : ≤ *ou* ≥ *c.a.d* ($[a;b]$)

Ensembles de définitions des fonctions

$f(x)=ax^2+bx+c \quad Ef=]+\infty;-\infty[$

Toutes fonctions polynômes est définie dans $\mathbb{R}$

Fonctions rationnelle

$f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$ *avec* $A(x)$&$B(x)$ Des polynômes f(x) $\Leftrightarrow B(x)\neq0$

Exemple : $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$; $f\exists\Leftrightarrow x^2-1\neq0\Rightarrow Ef=$

$]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]-1;+\infty[$

Fonctions irrationnelle

$f(x)=\sqrt{A(x)}$

$f(x)$ *exite ssi* $A(x)\ge0$

Exemple $f(x)=\sqrt{x-1}$,

$f_2(x)=\sqrt{x^2-1}$; $f_3(x)=\sqrt{x^2+1}$

f est definie $\Leftrightarrow x-1\ge0$

$\Rightarrow x\ge1$

$Ef_1=[1;+\infty[$

$Ef_2=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

$Ef_3=]-\infty;+\infty[$

Autres formes

$f(x)=\frac{\sqrt{A(x)}}{B(x)}$ $f\exists\Leftrightarrow\begin{cases}A(x)\ge0\ (1)\\ B(x)\neq0\ (2)\end{cases}$

$Ef=Ef_1\cup Ef_2$

$f(x)=\frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$ $f\exists\Leftrightarrow B(x)>0$

$Ef=]x_{0;+\infty}[$

$f(x)=\frac{\sqrt{A(x)}}{\sqrt{B(x)}}$ $f\exists\Leftrightarrow\begin{cases}A(x)\ge0\ (1)\\ B(x)>0\ (2)\end{cases}$

$Ef=Ef_1\cup Ef_2$

$f(x)=\sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}}$; $f\exists\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{A(x)}{B(x)}\ge0\\ B(x)\neq0\end{cases}$

$Ef=Ef_1\cup Ef_2$

Fonctions sinus, cosinus et tangente

Toutes fonctions circulaires est définie dans $\mathbb{R}$; *sur l'intervalle* $]-\infty;+\infty[$

FONCTION EXPONENTIELLE

Toutes fonctions exponentielle est définie dans

$\mathbb{R}$; *sur l'intervalle* $]-\infty;+\infty[$

FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN

$(\ln x)$

$f(x)=\ln x$ $f\exists\Leftrightarrow x>0$: $Ef=$

$]0;+\infty[$

$f(x)=\ln(u)$ *f est definie* $\Leftrightarrow$

$(u)>0\ \forall$ *la valeur de* x .

$f(x)=\ln|x|$ $f\exists\Leftrightarrow x\neq0$;

$Ef=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$f(x)$

$=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$ *f s'écrit* $2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$;

$f\exists \Leftrightarrow 2\left(\frac{x+1}{x}\right)\neq 0 \rightarrow$

$\begin{cases}2x+2\neq 0\\ x \qquad \neq 0\end{cases}\begin{cases}x=-1\\ x=0\end{cases}$

$Ef=]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$

$f(x)=ln(x-1)^3 f\exists \Leftrightarrow 3(x-1)>0$

$\Rightarrow Ef=]1;+\infty[$

<u>Equation de la tangente</u>

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

<u>Centre de symétrie</u>

Le point A (a, b) est centre de symétrie $\Leftrightarrow f(2a-x)+f(x)=2b$

<u>Axe de symétrie</u>

La droite d'équation x = a est axe de symétrie $\Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)$;

<u>Branches infinies</u>

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ La droite d'équation $x=x_0$ est asymptote verticale (AV) à la courbe (C_f)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ La droite d'équation $y=y_0$ est asymptote horizontale (AH) à la courbe (C_f);

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]=b$ La droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique (AO) à la courbe (C_f)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\begin{cases}0\\ \pm\infty\\ a\end{cases}$

(1) : branche parabolique de direction $y=ax$;

(2) : $y=ax$ est asymptote oblique (AO)

(3) : $y=ax+b$ est AO ;

<u>Position de la courbe par rapport à y</u>

$\begin{cases}[f(x)-y]>0\,;C_f \text{ est au dessus de } y\\ [f(x)-y]<0\,;C_f \text{ est en dessous de } y\\ [f(x)-y]=0\,;C_f \text{ coupe } y(y=ax+b)\end{cases}$

NB on a un extremum si la dérivée 1er s'annule & change de signe.

<u>Continuité & dérivabilité</u>

Une fonction est lorsque la limite à gauche est égale à celle a droite

Exemple

$f(x)\begin{cases}f(x)=2x^2+3x+1 \text{ si } x<0\\ f(x)=ln(3x-1)+3x \text{ si } x>0\end{cases}$

f est continue $\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x_0^+} f(x)$

$f(x)$ *est derivable* $\Leftrightarrow$ *la derivabilité à gauche = à celle à droite c.a.d*

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\,(l\in\mathbb{R})=$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\,(l\in\mathbb{R})$

<u>Différents points lorsque f n'est pas dérivable :</u>

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f_g'(x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_d(x_0)$

<u>Point de rebroussement Ψ (donne infinie de signe contraire)</u>

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f_g'(x_0)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_d(x_0)=-\infty$

$f_g'(x_0)$ & $f'_d(x_0)$ sont des nombres derivés

<u>Point d'inflexion (donne infinie de même signe)</u>

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f_g'(x_0)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_d(x_0)=+\infty$

<u>Point anguleux</u>

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f_g'(x_0)=\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_d(x_0)=(l\in\mathbb{R})$

<u>Point d'intersection de la courbe avec les axes</u>

Avec l'axe des abscisses : on pose y = 0 & on résous l'équation f(x) = 0.

Avec l'axe des ordonnées : on pose x = 0, on résous l'équation y = 0

Exemple

$f(x)=(2-x)ln(2-x)$

$y=0\Leftrightarrow(2-x)l(2-x)=0\rightarrow$

$\begin{cases}2-x=0\rightarrow x=2\\ ln(2-x)=0\rightarrow 2-x=1\rightarrow x=1\end{cases}$

On a deux points soient : $A(2;0)$ & $B(1;0)$

<u>EQUATIONS ET INEQUATIONS RACINES CARREES</u>

$\sqrt{A}=B\rightarrow\begin{cases}B\geq 0\,(1)\\ A=B^2\,(2)\end{cases}$ $S=S_1\cup S_2$

$\sqrt{A}=\sqrt{B}\rightarrow\begin{cases}A\geq 0\,(1)\\ B\geq 0\,(2)\\ A=B\,(3)\end{cases}$

$S=S_1\cup S_2\cup S_3$

$\sqrt{A}<B\rightarrow\begin{cases}A\geq 0\,(1)\\ B\geq 0\,(2)\\ A<B^2(3)\end{cases}$

$S=S_1\cup S_2\cup S_3$

$\sqrt{A} \le B \rightarrow \begin{cases} A \ge 0\ (1) \\ B \ge 0\ (2) \\ A \le B^2\ (3) \end{cases}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$\sqrt{A} < \sqrt{B} \rightarrow \begin{cases} A > 0\ (1) \\ B > 0\ (2) \\ A < B\ (3) \end{cases}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$\sqrt{A} \le \sqrt{B} \rightarrow \begin{cases} A \ge 0\ (1) \\ B \ge 0\ (2) \\ A \le B\ (3) \end{cases}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$\sqrt{A} > \sqrt{B} \rightarrow \begin{cases} A > 0\ (1) \\ B \ge 0\ (2) \\ A > B\ (3) \end{cases}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$\sqrt{A} \ge \sqrt{B} \rightarrow \begin{cases} A \ge 0\ (1) \\ B \ge 0\ (2) \\ A \ge B\ (3) \end{cases}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$\sqrt{A} > B \rightarrow$

$\begin{cases} A \ge 0\ (1) \\ B < A\ (2) \end{cases} (I) \begin{cases} A \ge 0 \\ A > B^2 \end{cases} (II)$

$S_I = S_1 \cup S_2$; $S_{II} = S_1 \cup S_2 \rightarrow$

$S = S_I \cap S_{II}$

$\sqrt{A} \ge B \rightarrow \begin{cases} A \ge 0\ (1) \\ B < 0\ (2) \end{cases} (I) \begin{cases} A \ge 0\ (1) \\ A \ge B^2 (2) \end{cases} (II)$

$S_I = S_1 \cup S_2$; $S_{II} = S_1 \cup S_2 \rightarrow$

$S = S_I \cap S_{II}$

NB avec l'intersection la solution est la partie que l'on achur sur la droite graduée.

<u>EQUATION DIFFERENTIELLE</u>

$ay' + by = 0 ; y = ke^{\frac{-b}{a}x}$

$ay'' + by' + cy = 0$

<u>L'équation caractéristique associée</u>

<u>est</u> : $ay^2 + br + c =$

0 *équation du* 2^e

si $\Delta = 0$; $y_G = (Ax + B)e^{rx}$

si $\Delta < 0$;

$y_G = (Acosbx + Bsinbx)e^{ax}$

$r' = a - ib ; r'' = a + ib$

si $\Delta > 0 ; y_G = Ae^{r'x} + Be^{r''x}$

<u>Différentes solutions particulières</u>

- solution particulière f dont la courbe admet le point I de coordonnées I (a ; b) comme point d'inflexion :

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = b\ (1) \\ f''(x) = 0\ (2) \end{cases}$

-solution particulière pour que la courbe de représentative de g admet au point d'abscisse $X_0 = \frac{\pi}{2}$ une tangente horizontale : $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

- solution particulière dont f admet au point A (a ; b) une tangente parallèle, horizontale un extremum à l'axe des abscisses

$\begin{cases} f(a) = b\ (1) \\ f'(a) = 0\ (2) \end{cases}$

<u>Exemple 1</u> : (E): y'' +ay' + by = 0 déterminer la de valeur de a & b pour que la solution particulière de cette équation soit : $f(x) = (Acos2x + Bsin2x)e^x$

<u>Exemple 2</u> (E) : a pour équation $y'' + 2y' + 2y = 0$ déterminer la solution particulier telle que f Cf passe par le point $A(\frac{\pi}{2} ; e^{-\frac{\pi}{2}})$ et admet en ce point une tangente horizontale $x = 5\frac{\pi}{4}$.

Solution des exercices

Détermination des valeurs de a & b

F est solution particulière de (E), ces deux racines sont : $r' = 1 - 2i$ *et* $r'' = 1 + 2i$

la somme est : $r' + r'' = \frac{-b}{a}$;

le produit est : $r'.r'' = \frac{c}{a}$

$r' + r'' = \frac{-b}{a} \rightarrow 1 - 2i + 1 + 2i = \frac{-a}{1} \rightarrow 2 = -a \rightarrow a = -2$

$r'.r'' = \frac{c}{a} \rightarrow (1 - 2i)(1 + 2i) = \frac{b}{1}$

$\rightarrow 1 + 2i - 2i + 4 = b \rightarrow b = 5$

$(E) : y'' - 2y' + 5y = 0$

$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{-\pi}{2}} (1) \\ f'\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 0\ (2) \end{cases}$

Apres calcul les expressions d'y et f sont :

$y_G = e^{-x}(Acosx + Bsinx)$

$f(x) = e^{-x}sinx.$

<u>ENSEMBLE ℂ DES NOMBRES COMPLEXES</u>

Exemple : L'équation $x^2+1=0$

Cette équation n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$

On décide alors d'imaginer un nombre qui soit solution de cette équation. On note i ce nombre. Ainsi:

$$i^2 = -1$$

Puis, on désigne:

$\mathbb{C}$

<u>1) Forme algébrique</u>

<u>Définition:</u>

Un nombre complexe est un élément de la forme:

$x+iy$

Avec x et y réels, et i vérifiant $i^2=-1$

Vocabulaire:

L'écriture d'un nombre complexe z=x+iy est la **forme algébrique** de z.

Ainsi:

x est appelé partie réelle de z; on la note Re(z)

y est appelé partie imaginaire de z, on la note Im(z)

$$z = Re(z) + i * Im(z)$$

- Si x=0, on dit que z est imaginaire pur ($z \in i\mathbb{R}$)
- Si y=0, z est un reel ($z \in \mathbb{R}$)

Définition-Théorème

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Ceci revient à dire qu'un nombre complexe possède une unique forme algébrique

2) Opérations dans C

Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ soient : simplement "étendues" à ce nouvel ensemble.

On pose:

$$z = x + iy$$
$$z' = x' + i'y$$

Somme:

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

Produit:

$$z * z' = (x + iy)(x' + iz')$$

$$= (xx' - yy') + i(y'x + yx')$$

On peut remarquer que:

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

(on a (x,y) différent de (0,0))

$$(x + iy) * \frac{(x - iy)}{x^2 + y^2} = 1$$

D'où:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Quotient

(On peut alors appliquer les formules de 1/z vues ci-dessus)

3) Conjugué

On appelle conjugué de z=x+iy le nombre:

$$\overline{z} = x - iy$$

$$z \in \mathbb{R} \to z = \overline{z}$$

Si z imaginaire pur:

$$z + \overline{z} = 0$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : z = \overline{\overline{z}}$$

<u>Propriétés</u>

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

<u>Module et argument</u>

<u>1) C et P</u>

On considère le plan rapporté à un repère orthonormé (0;u;v)

On note l'application:

$$\begin{array}{ccc} \varphi\mathbb{C} & \to & P \\ z = x + y & \to & M(x;y) \end{array}$$

φ est évidement une bijection.

Ainsi C est "identifié à P et "Réciproquement"

Vocabulaire:

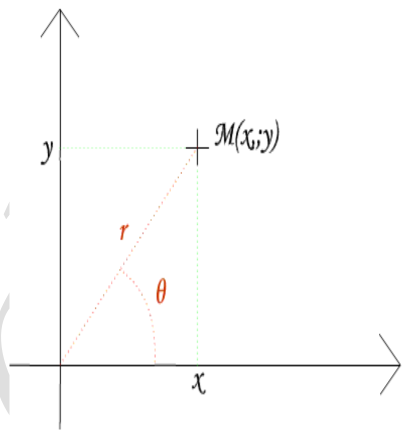
M, image de z par φ a pour affixe z

Par exemple:

Soit A(0,2) , on a φ(2i)=A donc 2i est l'affixe de A

<u>2) Coordonnées polaires et cartésiennes</u>

Tout point M du plan est repéré par un couple (r;θ) ou r=0M et θ une des mesures en radians de l'angle (u;0M)



<u>Théorème</u>

(M Différent de 0)

Si (r;θ) est un couple de coordonnées polaires de M, alors les coordonnées cartésiennes sont:

$$\begin{cases} x = r\ cos(\theta) \\ y = r\ sin(\theta) \end{cases}$$

Réciproquement, si (x;y) sont les coordonnées cartésiennes de M alors un couple de coordonnées polaire (r;θ) de M est tel que:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ cos(\theta) = \frac{x}{r} \; et \; sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

3) Définition

z un nombre complexe non nul, M point d'affixe z. (r;θ) un couple de coordonnées polaire de M.

Nous noterons que:

- r est le module de z. On le note |z|
- θ est un argument de z, on le note arg(z)

Par exemple:

z=2-2i

Alors: $|z| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$

$$\begin{cases} cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$$

Propriété

Considérons z=x+iy

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

En particulier si y=0, |z|=|x|, on peut donc dire que le module est "l'extension" de la valeur absolue dans C.

Si y=0, alors:

$$arg(z) = 0[\pi] \; donc \; z \in \mathbb{R}$$

En particulier:

$$arg(z) = 0[2\pi] \; \rightarrow \; z \in \mathbb{R}^+$$

$$arg(z) = \pi[2\pi] \; \rightarrow \; z \in \mathbb{R}^-$$

$$x = 0 \; \rightarrow \; arg(z) = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \rightarrow \; z \in i\mathbb{R}$$

Théorème:

z un nombre complexe non nul

Définition

L'écriture $Z = r(cos\theta + isin\theta)$ est l'écriture trigonométrique de z

Vocabulaire

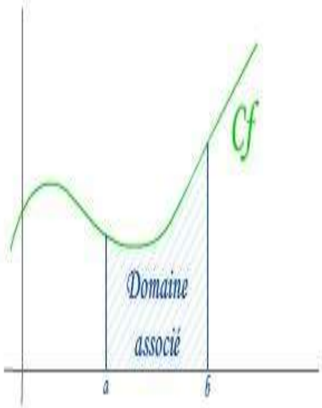
Domaine associé

Nous appellerons E domaine associé à une fonction f continue sur [a;b] le domaine délimité par:

Cf (la courbe représentative de f)

L'axe des abscisses

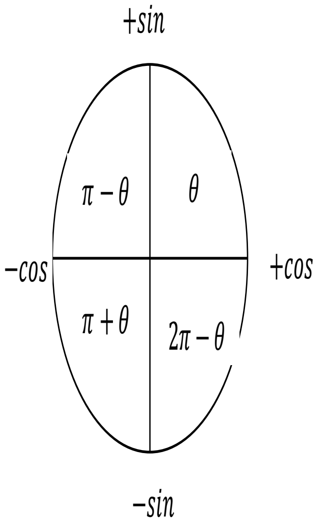
Les droites d'équation x=a et x=b



Unité d'aire

Le plan P muni d'un repère orthogonal (O;i;j) a pour unité d'aire u.a l'aire du rectangle bâti a partir de O;I;J.

Les différents cadrans



Racines nièmes

Exemple $\mathbb{Z}^3 \Leftrightarrow [r\,;\theta]^3 = [r^3\,;3\theta]$

$$\Leftrightarrow [r\,;\,\theta]^3 = \left[1\,;\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 \\ 3\theta \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ \frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi \\ (k=0;1;2) \end{cases}$$

Exemple 2 : z^{2010}

Calcul de z

$$z=e^{i\frac{\pi}{4}}\,; \leftrightarrow z^{2010}=e^{i\frac{2010\pi}{4}} \leftrightarrow 2010/_4 = 502\,;le\ reste\ est:2$$

$$\Leftrightarrow 502\pi+\frac{2\pi}{4} \leftrightarrow z^{2010}=cos\frac{2\pi}{4}+isin\frac{2\pi}{4}=[i]$$

Transformations

Translation

⇒ *fonction* $f\!:z \to f(z)\,z+a$; *ou a est un nombre complexe donné*

La transformation géométrique F associée à f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a.

Homothétie

⇒ **Fonction** $f: z \to f(z)=az+b$ **Ou a est un nombre réel non nul différent de 1 b un nombre complexe donné.** La transformation géométrique F associée à f est L'homothétie de rapport a et de centre le point Ω d'affixe $\omega=\frac{b}{1-a}$;

On a alors l'égalité caractéristique $f(z)-\omega=a(z-\omega)$

Rotation

⇒Fonction f: $z\to f(z)=az+b$ où a est un nombre complexe (non réel) donné vérifiant
$|a|=1$, b un complexe donné.
La transformation géométrique F associée à f est la rotation de centre
$\Omega\ d'affixe\ \omega=\frac{b}{1-a}$; $\&\ d'angle\ \theta\,;arg(\theta)$

$f(z)-\omega=a(z-\omega)=e^{iarga}(z-\omega)$

Exemple

K invariant ; $Z_{k=aZ+b\,(1)}$; *tanslation J en I* ; $Z_I=aZ_J+b\,(2)$

Simultude plane directe

$M_0 \to M_1 .M_1 \to M_2\,;si\,Z'=aZ+b$

$$\begin{cases} Z_{M1}=aZ_{M0}+b\,(1) \\ Z_{M2}=aZ_{M1}+b\,(2) \end{cases}$$

$si|a|\neq 1\ centre\,\sigma\,d'affixe\,\sigma=\frac{b}{1-a}\,;angle\,\theta\,;arg(\theta)\,;rapport\,k\!:k=|a|$

I - INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

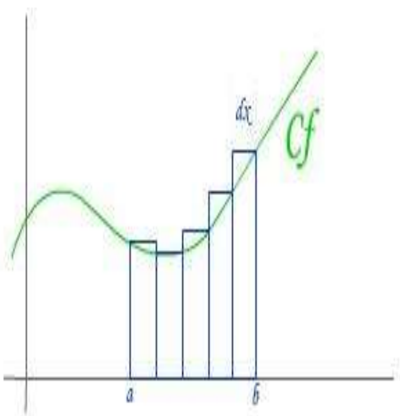
Définition:

Soit f continue et positive sur [a;b]. L'intégrale de a à b de f est l'aire du domaine associé à f sur [a;b], exprimée en u.a. On la note:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Cela se lit somme de a à b de f(x)dx, l'intégrale est une somme infinie

La théorie à d'abord été posée par **Riemann**, en prenant une somme d'aires simples (de rectangles) et en additionnant toutes ces aires on peut obtenir un résultat d'autant plus proche de la réalité que la variation entre chaque base de bâtonnet sera petite:



II - Intégrale d'une fonction continue

Définition:

Soit f une fonction continue sur [a;b] (a<b) Si f est négative alors:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -aire(E)$$

Si f est de signe quelquonque, par exemple positive sur E_1 et négative sur E_2 alors:

$$\int_a^b = aire(E_1) - aire(E_2)$$

III - Propriété

Théorème:

f et g continues sur un intervalle I contenant a, b et c. Pour tout a de I:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^c fx\,dx + \int_c^b fx\,dx = \int_a^b fx\,dx$$

Pour a et b de I, tous réels alpha et beta:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

Ces théorèmes sont admis (en réalité ils ne découlent pas de l'intégrale mais la définissent, mais c'est cette approche que l'on garde en Terminale S)

Encadrement / Valeur moyenne

Théorème:

f et g deux fonctions continues, pour a < b:

$$\forall t \in [a;b] \quad f(t) \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(t)dt \geq 0$$

$$\forall t \in [a;b] f(t) \leq g(t) \text{ alors } \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

$$\forall t \in [a;b] n \leq f(t) \leq M \text{ alors } n(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

Théorème:

f fonction continue sur [a;b] (a<b)
La valeur moyenne de f entre a et b est:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

De plus, il existe c ∈[a;b] tel que:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Preuve:
Supposons que f soit croissante.

$$\forall x \in [a;b] \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

$$f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(b)(b-a)$$

Donc:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \in [f(a);f(b)]$$

Et il existe c de [a;b] tel que (théorème des valeurs intermédiaires):

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Pour une fonction qui n'est pas croissante, il faudrait établir que la continuité de f est le caractère fermé de [a;b] implique l'existence d'un minimum et d'un maximum atteint par f sur [a;b]

IV - Primitives

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I, une primitive de f est une fonction F dérivable sur I telle que :

Théorème

f une fonction définie sur I et admettant une primitive F sur I, alors:

1. f admet une infinité de primitive
2. Pour G, également primitive de f:
   $\exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in I \; G(x) = F(x) + k$

Preuve:

F dérivable sur I, G dérivable sur I:
G'(x)=F'(x)=f, donc (G-F)'=0, et par conséquent:

$\exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in I \ (G-F)(x) = k$

Corollaire:

x_0 un réel donné de I, y_0 un réel, il existe une unique primitive G de f tel que:

$G(x_0)=y_0$

Donc:

$\exists k = y_0 - F(x_0)$

V - Intégrale et primitive

1) Définition/Théorème

f continue sur un intervalle I, a $\in$ I

F définie sur I par:

$$F(x) = \int_a^x f(t)d(t)$$

Est l'unique primitive de f s'annulant en a. la Preuve suivante :

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt$$

$$= \int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0}^{a} f(t)dt$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Nous savons (cf théorème précédent) qu'il existe $c_h \in [x_0;x_0+h]$ tel que:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = h * f(c_h)$$

Donc:

$\forall C_h \in [x_0 ; x_0 + h] : F(x_à + h) - F(x_0) =$
$h \times f(c)$

$$\lim_{h\to 0} c_h = x_0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Donc F Est bien une primitive de f, car:

$$\forall x_0 \in I : F'(x_0) = f(x_0)$$

Corollaire

f continue sur I, a et b deux réels de I et F une primitive de f, on note:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

2) Intégration par partie

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Car

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b \big((u(x)v(x)\big)'dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

SUITES NUMERIQUES

Relation de récurrence pour tout n appartenant a N

$U_{N+1}=U_n+r$; $V_{n+1}=q*V_n$

Terme général en fonction de n pour tout n appartenant a N

$U_n=U_0+r*n$; $V_n=q^n*V_0=q^{n-1}*V_1$

Somme des n premiers termes

$$\sum_{0\leq p\leq n} u_p = \frac{(n+1)}{2}(u_0+u_n)$$

$$V_0 * \frac{1-q^n}{1-q}$$

II - Raisonnement par récurrence

A) Introduction

Objet: étudier qu'une propriété dépendante de n est vraie pour tout n de N (ou a partir d'une certaine valeur n_0). Par exemple nous posons la propriété:

$$P_n : \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Passons maintenant au raisonnement.

B) Initialisation

La première étape est l'initialisation. On constate que la propriété est vraie pour k=1, c'est à dire la valeur de départ.

Pour notre exemple:

$1^2=1$

et

$$\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Donc P_1 est vraie

C) Hérédité

On suppose que la propriété est vraie pour un n quelquonque, c'est ce qu'on appelle l'hypothèse de récurrence. On démontre alors que l'hypothèse marche aussi pour n+1

Revenons a notre exemple, on suppose:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Par conséquent:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$$

On cherche les racines du polynôme $2n^2+7n+6$ qui sont -2 et -1.5, comme a=2 on peut le factoriser ainsi:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

D) Conclusion

On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \, Vrai \\ \forall n \in \mathbb{N} : P_n \, Vrai \Rightarrow p_{n+1} \, Vrai \end{array}\right\} \Rightarrow P_n \, Vrai$$

Comportement global d'une suite

1) Sens de variation

A) Définitions

Une suite U_n est croissante à partir du rang n_0 si:

$$\forall n \geq n_0, U_n \leq U_{n+1}$$

Une suite U_n est décroissante à partir du rang n_0 si:

Une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante a partir de son premier terme.

B) Méthodes

Pour une suite de la forme $U_n=f(n)$ on peut effectuer l'étude des variations de la fonction f(x)

On peut également étudier le signe de $U_{n+1}-U_n$

Ou comparer:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \; et \; 1$$

Suites majorées, minorées, bornées

Définition: Soit U_n une suite de réels. On dit que cette suite est majorée s'il existe un réel M tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \; U_n \leq M$$

On dit qu'elle est minorée s'il existe un réel m tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \; U_n \geq m$$

U_n est bornée si elle est majorée et minorée !

On peut aussi dire que:

- Une suite croissante est minorée par son premier terme
- Une suite décroissante est majorée par son premier terme

  Or, cette expression est la même que P_{n+1} donc si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi.

Si M est majorant de U_n, alors tout réel M'>M l'est également. Une suite majorée à donc une infinité de majorants ! On peut faire la même démarche pour une suite minorée.

Comportement asymptotique d'une suite

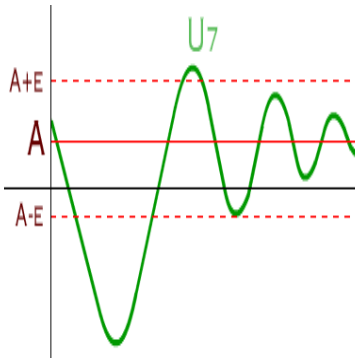
1) Suite convergente

1) Définitions

Soit U_n une suite numérique et a un réel.

On dit que U_n admet pour limite a si tout intervalle ouvert contenant a contient

Tous les termes de la suite a partir d'un certain rang.



Comme vous le voyez sur ce schéma, la limite est a a et a partir de U_7 toutes les valeurs sont comprises dans l'intervalle:

$I =]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\quad (\varepsilon>0)$

Le nombre de termes compris dans cet intervalle est illimité, en revanche le nombre de termes qui ne sont pas compris dans cet intervalle est fini (on peut presque les compter sur le schéma). On est parvenu à "Bloquer" la suite dans l'intervalle I

Lorsque U_n admet une limite finie a, on dit qu'elle converge et on le note:

$a = \lim U_n$

b) Théorème

Si une suite converge sa limite est unique.
(Démonstration à venir)

3) Suites ayant pour limite + ou - l'infini

a) Définition

Une suite U_n admet pour l'imite + l'infini (Respectivement - l'infini) si tout intervalle du type [A;+infini [(Respectivement]-infini; A] contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

b) Suites de référence

Les suites de termes généraux:
$U_n=n^{\alpha}$
Avec $\alpha>0$ admettent pour limite +infini

4) Suites divergentes

a) Définition

Une suite U_n est divergente lorsqu'elle n'admet pas de limite finie. C'est à dire qu'une suite diverge lorsque que:

- $\lim U_n = +\infty \text{ ou } -\infty$
- U_n n'admet pas de limite

Exemple de suite n'admettant pas de limites:

$U_n = (-1)^n$

Car $(-1)^n$ dépend de la parité de n, cette suite varie donc perpétuellement entre -1 et 1!

5) Opérations sur les limites

Théorème (admis)
(U_n) et (V_n) sont deux suites telles que:
$\lim U_n = a$
$\lim V_n = b$ Ou a et b sont 2 nombres, ou $+\infty$ ou $-\infty$

a \ b	reel	+∞	-∞
reel	a+b	+∞	-∞
+∞	+∞	+∞	?
-∞	-∞	?	-∞

a \ b	$b \in \mathbb{R}^*$	0	+∞	-∞
$a \in \mathbb{R}^*$	a*b	0	+/-∞	+/-∞
0	0	0	?	?
+∞	+/-∞	?	+∞	-∞
-∞	+/-∞	?	-∞	+∞

6) Théorème des gendarmes

a) Première partie

Soient (U_n), (V_n) et (W_n) trois suites.

$$\left.\begin{matrix} U_n \le V_n \le W_n \\ \lim U_n = \lim W_n = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim V_n = a$$

b) Deuxième partie

$$\left.\begin{matrix} U_n < V_n \\ \lim U_n = +\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim V_n = +\infty$$

c) Troisième partie

$$\left.\begin{matrix} V_n < W_n \\ \lim W_n = -\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim V_n = -\infty$$

7) Comportement asymptotique de (q^n)

Théorème:

1. $q>1 \Rightarrow \lim q^n = +\infty$
2. $q=1 \Rightarrow \lim q^n = 1$
3. $-1<q<1 \Rightarrow \lim q^n = 0$
4. q < ou égal a -1 => q^n diverge et n'a pas de limite.

8) Comportement Asymptotique de suites monotones

a) **Suite non bornée**

Théorème:

Si (U_n) est croissante et non majorée, $\lim U_n = +\infty$

SI (U_n) est décroissante et non minorée, $\lim U_n = -\infty$

Si (U_n) est une suite croissante et non majorée, pour tout réel M il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à M

Si (U_n) est une suite décroissante et non minorée, pour tout réel m il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à m

b) Suite bornée

Théorème de la convergence monotone:

Si une suite est croissante et majorée, elle converge.

Si une suite est décroissante et minorée, elle converge.

Sens de variation

La suite (U_n) est croissante $\Rightarrow U_{n+1} \geq U_n$

La suite (U_n) est décroissante $\Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 ; (U_n)\ est \nearrow$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 ; (U_n)\ est \searrow$

Suite arithmétiques

$(U_{n+1}) = U_{n+r}\ r = raison\ de\ (U_n);$

Expression du terme général

$(U_n) = (U_p) + (n-p)r$

$si\ p = 0 ; (U_n) = U_0 + nr$

$si\ p = 1 ; (U_n) = U_1 + (n-1)r$

$(U_{n+1}) = U_{n+r}\ r$

$si\ r < 0; (U_n) \searrow; r > 0\ (U_n) \nearrow$

$r = 0\ (U_n)\ est\ contante$

Somme de termes

$S_n = \frac{(n-p+1)}{2}(U_p + U_n)$

$si\ p = 0; S_n = \frac{(n+1)}{2}(U_0 + U_n)$

Termes en progressions arithmétiques

x, y & z sont en progressions arithmétiques $\Leftrightarrow 2y = x + z$

Suies géométriques

$U_{n+1} = qU_n ; q\ est\ la\ raison;$

$si\ q < 0; (U_n) \searrow; q > 0\ (U_n) \nearrow$

$q = 0\ (U_n)\ est\ contante$

Expression du terme général

$(U_n) = U_p q^{(n-p)}$

$si\ p = 1;\ U_n = U_1 q^{(n-1)}$

Somme de termes

$S_n = \frac{U_p(1-q^{n-p+1})}{1-q}$

$si\ p = 0 ; S_n = \frac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q};$

Termes en progressions géométriques

x, y, & z sont en progressions géométriques $\Leftrightarrow y^2 = x.z$

PROBABILITE

Loi de probabilité

Lorsqu'une expérience aléatoire comporte un nombre fini d'issues ou défini sur l'ensemble de ces issues, appelé univers est noté:

$$\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Une loi de probabilité associe à chaque x_i un nombre p_i tel que:

$$\forall i \in [1; n] \in \mathbb{N} : 0 \leq p \leq 1$$

Loi équirépartie

Soit $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ une loi de probabilité sur Ω

On dit que P est équirépartie lorsque : $P_1 = P_2 = \cdots P_n$

Par conséquent:

$$\forall i \in [1; n] \in \mathbb{N} : p_i = \frac{1}{n}$$

Paramètres associés

On appelle espérance de la loi P le nombre: μ

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i * p_i$$

On appelle variance de la loi P le nombre V

$$V=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-\mu)^2$$

On appelle écart type:

$$\sigma=\sqrt{V}$$

2) Définitions

Evènement: on appelle évènement toute partie A de Ω

Evènement élémentaire: un évènement réduit à une seul issue, par exemple A={x_i} est un évènement élémentaire

Evènement certain: L'univers constitue l'événement certain

Evènement impossible: L'ensemble vide est l'événement impossible

Evènement contraire: L'évènement contraire à A est:

$$\overline{A}=\Omega\backslash A$$

Evènements incompatibles: deux évènements A et B sont incompatibles si:

$$A\cap B=\varnothing$$

Partition de l'univers: Les évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de l'univers s'ils sont deux à deux incompatibles et que:

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$$

Probabilité d'un évènement

Par définition la probabilité d'un évènement A est la somme de toutes les probabilités des issues de A. Par convention la probabilité de l'ensemble vide est de 0.

$$P(A)=\frac{elements\ de\ A}{elements\ de\ \Omega}$$

Pour tout évènement A et tout évènement B:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)$$
$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

3) Variable aléatoire

Définition: Une variable aléatoire X est une application définie sur un ensemble Ω muni d'une loi de probabilité P a valeur dans $\mathbb{R}$

X Prend la valeur x_i avec la probabilité p_i

L'espérance de X est:

$$E(X)=\sum x_iP(X=x_i)$$

La variance de X est:

$$V(X)=\sum P(X=x_i)(x_i-E(X))^2$$

L'écart type est:

$$P_B(A)=P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{(V(X))}$$

Propriété

Soit X et Y deux variables aléatoires:

E(X+Y)=E(X)+E(Y) et E(aX)=aE(X)

Corollaire

On peut déduire les propriétés suivantes:

- E(X+b) = E(X) +b
- V(X) = E(X-E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2
- V(aX)=a^{2}V(X)
- V(X+b)=V(X)
- σ(ax)=|a|σ(x)
- σ(X+b)=σ(X)

II - Probabilités conditionnelles

Définition : Soit A et B deux évènements, B de probabilité non nulle. La probabilité de A sachant que B est réalisé -ou "de A sachant B"- est le nombre:

On peut remarquer que:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Donc

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} \times P_B(A)$$

Théorème: Formule de probabilité totale

Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements de probabilité formant une partition de l'univers Ω

Alors, pour tout évènement B:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots P(B \cap A_n$$

$$P(B) = \sum P(B \cap A_i)$$

I - Barycentre

1) Somme des poids nulle

$$\{(A_1, \alpha_1) ; (A_2 ; \alpha_2) ; ...; (A_n ; \alpha_n)\}$$

Un système de points pondérés, si:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$$

Alors il existe un vecteur u tel que:

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{u}$$

2) Somme des poids non nulle

Si:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

alors il existe un point G appelé barycentre du système tel que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

3) Preuves

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i})$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$

Si la somme des poids est nulle:

$$\forall M \in \mathcal{E} \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$

Si la somme des poids est différente de zéro

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \overrightarrow{OA_i}$$

II - Caractéristique barycentrique

1) Propriétés

A, B et C trois points non alignés.

- (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B.
- [AB] est l'ensemble des barycentres des points A et B de coefficients positifs
- (ABC) est l'ensemble des barycentre des points A,B et C
- L'intérieur du triangle ABC est l'ensemble des barycentres des points A,B et C de coefficient positifs

Preuve:

$$\forall M \in (AB) \exists \alpha \in \mathbb{R} \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AM} + \alpha \overrightarrow{MB}$$

$$(\alpha - 1)\overrightarrow{MA} - \alpha \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

M est donc barycentre de:

$$\{ (A, \alpha - 1); (B; -\alpha) \}$$

2) Relation fondamentale du barycentre

G barycentre d'un système de points pondérés:

$$\forall M \in \mathcal{E} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\overrightarrow{MG}$$

En considérant M=0, origine du repère, on obtient les coordonnées de G en fonctions de celle des points pondérés.

3) Associativité / Barycentres partiels

Le barycentre G d'un système de points pondérés peut être obtenu de la façon suivante: on regroupe certains points dont la somme des coefficients est non nulle, on les remplace par le barycentre (partiel) de ces points affecté de la somme des coefficients.

On garde les autres points, on obtient alors un nouveau système dont le barycentre sera le même que le premier.

III - Produit scalaire

Définition: Etant donné deux vecteurs u et v, on appelle produit scalaire le nombre réel:

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right]$$

Propriétés

Pour tous vecteurs u, v et w de l'espace et tous réels k, on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$

$$(k\vec{u})\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.k\vec{v}$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\vec{w} = \vec{u}\vec{w} + \vec{v}\vec{w}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|^2$$

STATISTIQUES

Cette résumée sera présenté sous forme d'exercice, 4 exercices seront résolues afin d'expliqué les différentes formules que l'on doit utiliser possibles, concernant les méthodes une sera mise en pratique.

Exercice 1

Soit le tableau statistique suivant :

$X \setminus Y$	0	1	2
-1	1	3	1
1	3	2	0

1) Déterminer la série marginale de X & Y ;
2) Représenter graphiquement le nuage statistique ;
3) Déterminer l'inertie du nuage par rapport au point A (2 ;-1) puis au point G $(\bar{X};\bar{Y})$;
4) Déterminer les équations des droites de régressions de y en x & de x en y ; puis en déduire le coefficient de corrélation r.

Exercice 2

X	-1	2	2	-1	2	3	-1	2	3	-1
Y	0	-1	1	0	1	-1	1	1	-1	0

1) Représenter graphiquement le nuage statistique ;
2) Déterminer par la méthode de moindre carrée les droites de régressions de y en x et de x en y ;

3) Déterminer l'inertie du nuage.

Exercice 3

On considère le tableau statistique ci-dessous

$X \backslash Y$	1	2	3
-1	1	3	a
2	b	0	3

1) Déterminer les réels a & b pour que le point $G\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, soit un point moyen
2) Représenter le nuage de la série statistique
3) Déterminer les droites de régressions de y en x puis de x en y

Exercice 4

$X \backslash Y$	1	2	3
1	2	0	1
3	4	3	a

1) Déterminer le réel a pour que le point $G\left(\frac{5}{2};\frac{7}{4}\right)$ soit un point moyen ;
2) Représenter le nuage de la série statistique
3) Déterminer les droites de régressions de cette série ;

Exercice 5

$X \backslash Y$	$[1;-1[$	$[1;3[$	$[3;5[$
$[-1;1[$	1	3	0
$[1;3[$	3	2	1

D'après le tableau statistique ci-dessus

1) Donner le tableau statistique à doubler entrée de cette série ;
2) Représenter graphiquement le nuage statistique de cette série ;
3) Déterminer les droites de régressions
4) Déterminer l'inertie du nuage par rapport à A(2 ;1) puis à G.

Résolutions pratique des exercices

Pour cette phase au début de chaque exercice sera déterminer la série marginale de x ainsi que de y afin de faciliter la résolution des autres questions ou des questions précédentes de l'exercice vous aussi vous pouvez appliquer la même procédure lors de votre résolutions car elle est très précise.

Exercice 1

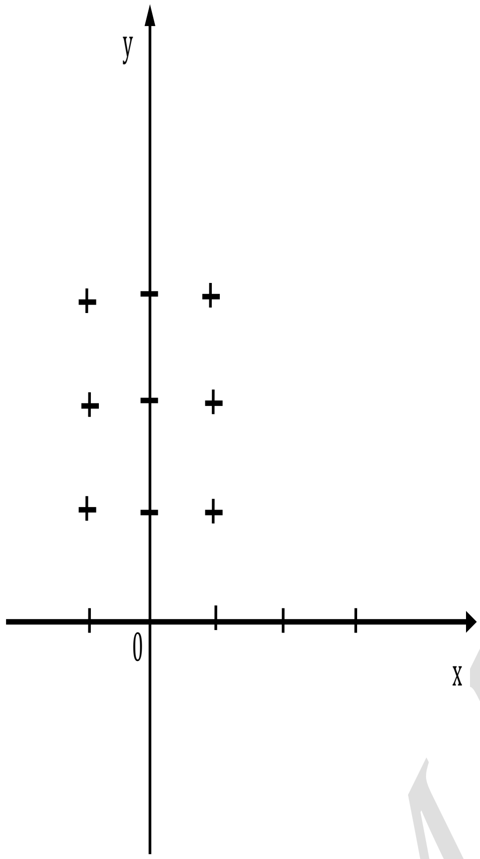
1) **série marginale de x et de y**

x_i	n_i	$x_i.n_i$	$x_i^2.n_i$
-1	5	-5	-5
1	5	5	5
	N=10	$\sum_{i=1}^{p} x_i.n_i = 0$	$\sum_{i=1}^{q} x_i^2.n_i = 10$

y_j	n_j	$y_j.n_i$	$y_j^2.n_j$
0	4	0	0

1	5	5	5
2	1	2	4
	N=10	$\sum_{j=1}^{p} y_j.n_j = 7$	$\sum_{j=1}^{q} y_j^2.n_j = 9$

2) <u>Représentation graphique du nuage</u>



3) <u>Détermination de l'inertie du nuage</u>

$$I_A = \sum_{i=1}^{p} ni.\sum_{j=1}^{q} nj.\overrightarrow{AM}_{ij}^2$$

Le nuage comprend 6 points dont $M_1(-1;0)$; $M_2(-1;1)$; $M_3(-1;2)$;

$M_4(1;0)$; $M_5(1;1)$; $M_6(1;2)$ & $I_A(2;-1)$

$\overrightarrow{AM}_1^2 = \binom{-1-2}{0+1} \to \overrightarrow{AM}_1^2 = 10\times 1$; $\overrightarrow{AM}_2^2 = \binom{-1-2}{1+1} \to \overrightarrow{AM}_2^2 = 13\times 3$

$\overrightarrow{AM}_3^2 = \binom{-1-2}{2+1} \to \overrightarrow{AM}_3^2 = 18\times 1$; $\overrightarrow{AM}_4^2 = \binom{1-2}{0+1} \to \overrightarrow{AM}_4^2 = 2\times 3$

$\overrightarrow{AM}_5^2 = \binom{1-2}{1+1} \to \overrightarrow{AM}_1^2 = 5\times 2$; $\overrightarrow{AM}_6^2 = \binom{1-2}{2+1} \to \overrightarrow{AM}_6^2 = 10\times 0$

$I_A = (10\times 1) + (13\times 3) + (2\times 3) + (5\times 2) + (10\times 0) + (18\times 1) \to$

$\boldsymbol{I_A = 83}$

$I_A = I_G + N\overrightarrow{AG}^2 \to I_G = I_A - N\overrightarrow{AG}^2$;

$G(\bar{X};\bar{Y})$; $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} x_i.n_i = \frac{1}{10}(0) \to \bar{X} = 0$

$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{p} y_j.n_j = \frac{1}{10}(7) \to \bar{Y} = 0{,}7 \Rightarrow \boldsymbol{G\left(0\,;\frac{7}{10}\right)}$

$\overrightarrow{AG}^2 = \binom{0-2}{0{,}7+1} \Rightarrow \overrightarrow{AG}^2 = 6{,}89\times 10$; *donc* $I_G = 83 - 68{,}9 \to \boldsymbol{I_G = 14{,}1}$

4) <u>Droites de régressions</u>

$\Delta y/_x : y = ax + b$; $a = \frac{cov(xy)}{V(x)}$;

$$cov(xy) = \sum_{i=1}^{p} n_{ij}x_{ij} - \bar{X}.\bar{Y} = \frac{1}{10}(-3-2+2) - (0\times 0{,}7) \to cov(xy) = \frac{-3}{10}$$

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{q} x_i^2.n_i - \bar{X}^2 ; \to V(x) = \frac{1}{10}(10) - (0)^2 \to V(x) = 1$$

$$V(y) = \sum_{j=1}^{q} y_j^2.n_j - \bar{Y}^2 \to V(y) = \frac{1}{10}(9) - (0{,}7)^2 \to V(y) = 0{,}41$$

$$a = \frac{cov(xy)}{V(x)} \to a = \frac{-0{,}3}{1} \to a = -0{,}3$$

$b = \bar{Y} - a\bar{X} \to b = (0{,}7) - (-0{,}3)(0) \to b = 0{,}7$

$\Delta y/_x : y = -0{,}3x + 0{,}7$

$\Delta x/_y : x = a'y + b'$ *avec* $a' = \frac{cov(xy)}{V(y)}$: $a' = \frac{-0{,}3}{0{,}41} \to a' = -0{,}73$

$b' = \bar{X} - a\bar{Y} \to b' = 0 - (-0{,}73)(0{,}7) \to b' = 0{,}51$

U.L.M. Services: umlservices1@gmail.com +24206 4086712/069233730

$\Delta x/_y : x = -0,73y + 0,51$

5) Coefficient de corrélation

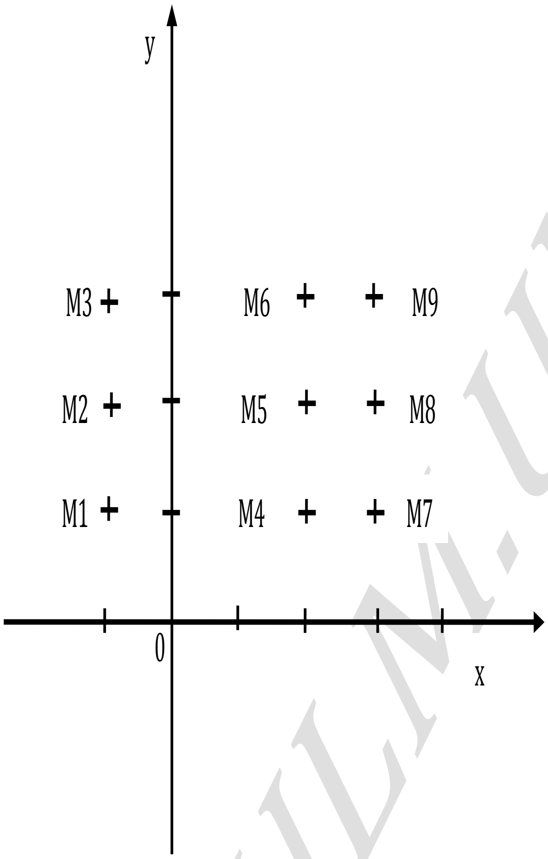
$r = \sqrt{a.a'} \rightarrow r = \sqrt{(-0,3)(-0,73)} \rightarrow r = 0,47$

Exercice 2

1) Représentation du nuage

Tableau statistique à double entrée

$X \setminus Y$	-1	2	3
0	3	0	0
-1	0	1	2
1	1	3	0



2) Détermination par la méthode de moindre carré les droites de régressions

Série marginale de x & y

x_i	n_i	$x_i.n_i$	$x_i^2.n_i$
-1	4	-4	4
2	4	8	16
3	2	6	18
	N=10	$\sum_{i=1}^{p} x_i.n_i = 10$	$\sum_{i=1}^{q} x_i^2.n_i = 38$

y_j	n_j	$y_j.n_i$	$y_j^2.n_j$
0	3	0	0
-1	3	-3	3
1	4	4	4
	N=10	$\sum_{j=1}^{p} y_j.n_j = 1$	$\sum_{j=1}^{q} y_j^2.n_j = 7$

$\Delta y/_x : y = ax + b$

$cov(xy) = \frac{1}{10}(-2 - 6 - 1 + 6) - (1)(0,1) \rightarrow cov(xy) = -0,4$

$\bar{X} = \frac{1}{10}(10)$; $\bar{Y} = \frac{1}{10}(1) \rightarrow G\left(1; \frac{1}{10}\right)$

$v(x) = \frac{1}{10}(38) - 1 \rightarrow v(x) = 2,8$; $v(y) = \frac{1}{10}(7) - (0,1)^2 \rightarrow v(y) = 0,69$

$a = \frac{-0,4}{2,8} \rightarrow a = -0,14$; $b = 0,1 - (-0,14)(1) \rightarrow b = 0,24$

$\Delta y/_x : y = -0,14x + 0,24$

$\Delta x/_y : x = a'y + b'$

$a' = \frac{-0{,}4}{0{,}69} \rightarrow a' = -0{,}58$; $b' = 1 - (-0{,}58)(0{,}1) \rightarrow b = 1{,}05$

$\Delta x/_y : x = -0,58y + 1,05$

3) L'inertie du nuage

$I_A = (10 \times 3) + (13 \times 1) + (4 \times 3) + (1 \times 2) \rightarrow I_A = 57$

$I_A = N\overrightarrow{AG}^2 + I_G$; $\overrightarrow{AG}^2 = 2{,}21 \rightarrow I_G = 57 - (2{,}21)(10) \rightarrow I_G = 34{,}9$

Exercice 3

1) Détermination des réels a & b Série marginale de x et y

x_i	n_i	$x_i.n_i$	$x_i^2.n_i$
-1	4+a	-4-a	$-16 - a^2$
2	3+b	6+2b	$18 + 2b^2$
	N=7+a+b	$\sum_{i=1}^{p} x_i.n_i = 2 - a + 2b$	$\sum_{i=1}^{q} x_i^2.n_i = 2 - a^2 + 2b^2$

x_i	n_i	$x_i.n_i$	$x_i^2.n_i$
1	1+b	1+b	$1 + b^2$
2	3	6	18
3	3+a	9+3a	$18 + 3a^2$
	N=7+a+b	$\sum_{j=1}^{p} y_j.n_j = 16 + 3a + b$	$\sum_{j=1}^{q} y_i^2.n_j = 37 + 3a^2 + b^2$

$\bar{X} = \frac{1}{(7+a+b)}(2 - a + 2b) \leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{2-a+2b}{7+a+b}$

$\leftrightarrow -2a + 4b - 3a - 3b = 21 - 4 \rightarrow -5a + b = 17\ (1)$

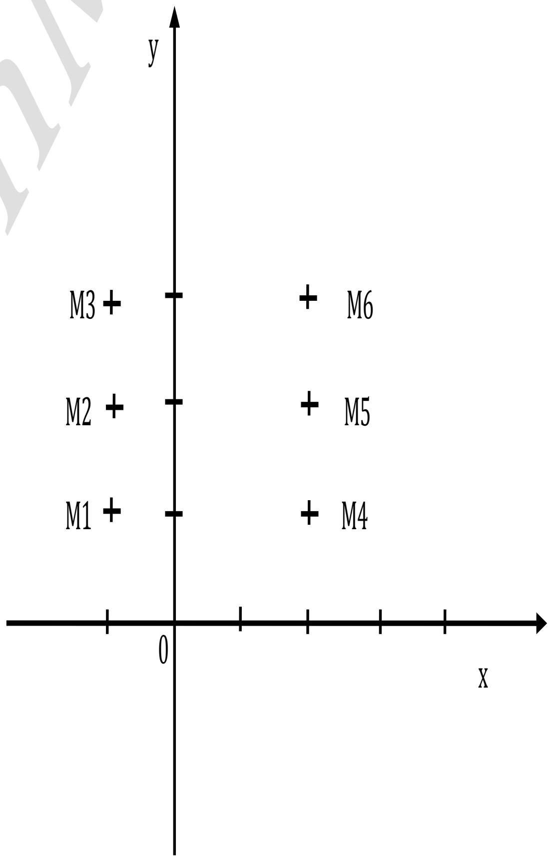
$\bar{Y} = \frac{1}{(7+a+b)}(16 + 3a + b) \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{16+3a+b}{7+a+b}$

$\leftrightarrow 3a + 3b - 6a - 2b = 32 - 21 \rightarrow -3a + b = 11\ (2)$

$\begin{cases} -5a + b = 17 \\ -3a + b = 11 \end{cases} \rightarrow dans\ (1) : 2a = -6 \rightarrow a = -3\ et\ dans\ (2):$

$b = 11 + 3a \rightarrow b = 2 \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$

2) Représentation du nuage



3) Droites de régressions

$cov(xy) = \frac{1}{6}(-14) - (1{,}5)(1{,}5) \rightarrow cov(xy) = -4{,}58$

$v(x) = \frac{1}{6}\left[2 - (-3)^2 + 2(2)^2\right] - (1;5)^2 \rightarrow v(x) = -2{,}08$

U.L.M. Services: umlservices1@gmail.com +24206 4086712/069233730

$v(y)=\frac{1}{6}\left[37+3(-3)^2+(2)^2\right]-(1;5)^2 \to v(y)=9,08$

$a=\frac{-4;58}{-2,08}\to a=2,2$; $b=1,5-(2,2)(1,5)\to b=-1,8$

$$a'=\frac{-4,58}{9,08}\to a'=-0,5\ ;\ b'=1,5-0,5\to b'=2$$

conclusion : $^{\Delta x}/_{y} : y=2,2x-1,8$ *et* $^{\Delta y}/_{x} : x=-\frac{1}{2}y+2$

Exercice 4

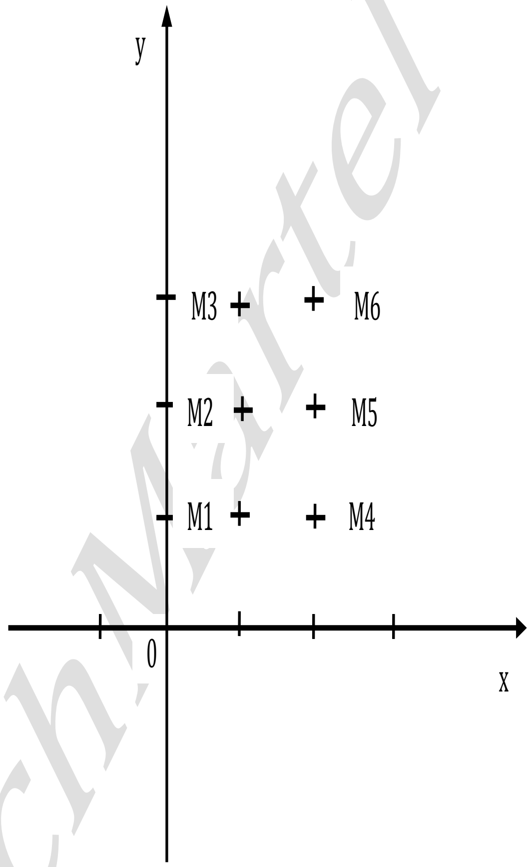
1) Détermination du réel a

x_i	n_i	$x_i.n_i$	$x_i^2.n_i$
1	3	3	9
3	7+a	21+3a	$147+3a^2$
	N=10+a	$\sum_{i=1}^{p} x_i.n_i=24+3a$	$\sum_{i=1}^{q} x_i^2.n_i=156+3a^2$

x_i	n_i	$x_i.n_i$	$x_i^2.n_i$
1	6	1+b	$1+b^2$
2	6	6	18
3	3+3a	9+3a	$18+3a^2$
	N=10+a	$\sum_{j=1}^{p} y_j.n_j=16+3a+b$	$\sum_{j=1}^{q} y_j^2.n_j=37+3a^2+b^2$

$\bar{X}=\frac{1}{10+a}(24+3a)\to\frac{5}{2}=\frac{1}{10+a}(24+3a)\to a=2$

2) Représentation des points du nuage



3) Droites de régressions

$cov(xy)=\frac{1}{12}(2+3+12+18+18)-\left(\frac{5}{2}.\frac{7}{4}\right)\to cov(xy)=0,04$

$v(x)=\frac{1}{12}\left(156+3(2^2)\right)-\left(\frac{5}{2}\right)^2\to v(x)=7,75$;

$v(y)=\frac{1}{12}(57+12)-\left(\frac{7}{4}\right)^2\to v(y)=2,68$;

$a=\frac{0,04}{7,75}\to a=5.10^{-3}$; $b=\frac{7}{4}-(0,005)\left(\frac{5}{2}\right)\to b=1,7$;

$a'=\frac{0,04}{2,68}\to a'=0,01$; $b'=\frac{5}{2}-\left(0,01\times\frac{7}{4}\right)\to b'=2,48$

conclusion : $^{\Delta x}/_{y} : y=5.10^{-3}(x)+1,7$ *et* $^{\Delta y}/_{x} : x=0,01y+2,48$

Exercice 5

Tableau statistique à double entrée

X/Y	0	2	2
0	1	3	0
2	3	2	1

Ce qui était difficile dans cet exercice c'est le tableau statistique à double entrée comme celui-ci est déterminer alors vous pouvez faire la suite en suivant la même procédure que les exercices résolus précédamment.

Relation fondamentale : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

- Relation entre fonction trigonométrique
- $\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$; $\cotan(a) = \frac{\cos(a)}{\sin(a)}$
- $\tan^2(a) + 1 = \frac{1}{\cos^2(a)}$; $\cotan^2(a) + 1 = \frac{1}{\sin^2(a)}$
- Arcs associés

a) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$; b) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$; pour le tour complet du cercle ;

c) $\sin(-x) = -\sin(x)$; d) $\cos(-x) = con(x)$; pour les angles opposés ;

e) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$; f) $\sin(x + \pi) = -\sin x$; pour un demi tour de cercle ;

g) $\cos(\pi - x) = -\cos x$; h) $\sin(\pi - x) = \sin x$; pour les angles supplémentaires ;

i) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$; j) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$; pour les angles complémentaires ;

k) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$; l) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$; pour un quart de tour ;

m) $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$; n) $\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \cotan^2(x)$

Formules d'additions & de différences

a) $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;

b) $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

c) $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;

e) $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

f) $(a + b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$;

$\cotan(a + b) = \frac{\cotan(a)\cotan(b)-1}{\cotan(a)+\cotan(b)}$

Formules de SIMPSON

Transformation de produit en somme

$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$;

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$,

Transformation de Sommes en produit

$\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$

$\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

$\sin p + \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$;

$\sin p - \cos q = 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$

$\tan(p) + \tan(q) = \frac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}$

Formules de réductions du carré

$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$; $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$; $\tan^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$

Autres formules

$$1+\cos(a)=2cos^2\left(\frac{a}{2}\right)\quad;\quad \cos\alpha=\frac{1-tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}\quad;\quad sin\alpha=\frac{2tan\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$1-\cos(a)=2sin^2\left(\frac{a}{2}\right);$$

Formule d'angle moitié

$$\left|cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|=\sqrt{\frac{1+cosx}{2}}\ ;\ \left|sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|=\sqrt{\frac{1-cosx}{2}}\ ;\ \left|tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|=\frac{sinx}{1+cosx}=\frac{1-cosx}{sinx}$$

Formule impliquant la tangente de l'angle moitié

$$cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad;\quad sinx=\frac{2t}{1+t^2}\quad;\quad tanx=\frac{2t}{1-t^2}\quad;\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Formules utilisant la tangent de l'arc moitié

$$cosx=\frac{1-tan^2\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}}\ ;\ sinx=\frac{2tan\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}}\ ;\ tanx=\frac{2tan\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}}$$

Formules de l'angle double

$$\cos(2x)=cos^2(x)-sin^2(x)=2cos^2(x)-1=1-2sin^2(x);$$

$$sin(2x)=2sin(x)cos(x);$$

$$tan(2x)=\frac{2tan(x)}{1-tan^2(x)}=\frac{2cota(x)}{cotan^2(x)-1}=\frac{2}{cotan(x)-tan(x)}$$

Formules de linéarisations

$$sin(x)cos(x)=\frac{1}{2}sin(2x)\ cos(a)+icos(b)^n=cos(na)+isin(na);$$

$$cos^n(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^{ix(2k-n)}$$

$$cos^n(x)=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n=\frac{1}{2i^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{n-k}e^{ix(2k-n)}$$

Formules de factorisation

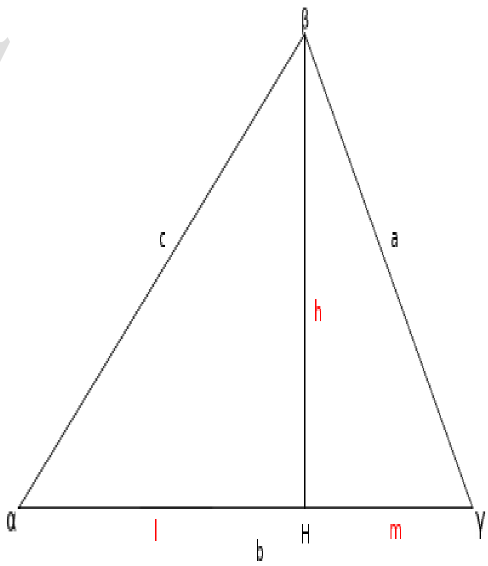
$$1+cos(x)=2cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\ ;\ 1-cos(x)=2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Equations trigonométriques

$$\cos(x)=\cos(y)\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\\ \quad ou\\ x=-y+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}\ ;\sin(x)=$$

$$\sin(y)\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\\ \quad ou\\ x=\pi-y+2k\pi(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

Théorèmes du triangle rectangle et autres



$$C^2=l^2+h^2;\ a^2=m^2+h^2\ \text{Et}\sin\alpha=\frac{h}{c}\ ;\ \cos\alpha=\frac{l}{c}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{h}{c}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2 = \frac{h^2}{c^2} + \frac{l^2}{c^2} = \frac{h^2+l^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Le théorème de Pythagore généralisé

Dans un premier temps il convient de définir les égalités suivantes

- $\sin\alpha = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c\sin\alpha$
- $\cos\alpha = \frac{l}{c} \Rightarrow l = c\cos\alpha$
- $b = l + m \Rightarrow b = c\cos\alpha + m \Rightarrow m = b - c\cos\alpha$

Nous arrivons donc aux résultats suivants

- $h^2 + m^2 = a^2$
- $c^2\sin^2\alpha + (b - c\cos\alpha)^2 = a^2$
- $c^2\sin^2\alpha + b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha = a^2$
- $c^2\sin^2\alpha + c^2\cos^2\alpha + b^2 - 2bc\cos\alpha = a^2$
- $c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + b^2 - 2bc\cos\alpha = a^2$
- $c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha = a^2$

Théorèmes d'Al Kashi

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\alpha$; $b^2 = a + c^2 - 2acCos\alpha$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCos\alpha$;

Propriétés liées au cercle trigonométrique

Symétries, parité

Parité - Réflexion d'axe ($\theta = 0$)	Réflexion d'axe ($\theta = \pi/4$)	Réflexion d'axe ($\theta=\pi/2$)
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(-\theta) = +\cos\theta$ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = +\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = +\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = +\cot\theta$ $\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = +\tan\theta$	$\sin(\pi - \theta) = +\sin\theta$ $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ $\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$

Périodicité, décalages

Décalage de $\pi/2$	**Décalage de π (Période de tan et cot)**	**Décalage de 2π (Période de sin et cos)**
$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = +\cos\theta$ $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$ $\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\cot\theta$ $\cot(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\tan\theta$	$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$ $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ $\tan(\theta + \pi) = +\tan\theta$ $\cot(\theta + \pi) = +\cot\theta$	$\sin(\theta + 2\pi) = +\sin\theta$ $\cos(\theta + 2\pi) = +\cos\theta$ $\tan(\theta + 2\pi) = +\tan\theta$ $\cot(\theta + 2\pi) = +\cot\theta$

Équations, trigonométrique

Certaines des équations ci-dessus sont renforcées par les équivalences suivantes :

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nombres complexes et trigonométrie c'est-à-dire en fonction de l'angle θ

Calcul du module

Cela nécessite de retenir et savoir démontrer les formules trigonométriques suivantes :

$cos2x = cos^2(x) - sin^2(x)$; $\sin(2x) = 2\sin(x).cos(x)$;

$1 + \cos(2x) = 2cos^2(x)$; $1 - \cos(2x) = 2sin^2(x)$

Calcul de l'argument

1er cas : $\begin{cases} cos\alpha = cos\theta \\ sin\alpha = sin\theta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \theta$; 2e cas $\begin{cases} cos\alpha = sin\theta \\ sin\alpha = cos\theta \end{cases} \Rightarrow$ il faut d'abord rendre les relations homogènes en utilisant les propriétés des angles complémentaires, on obtient : $\begin{cases} cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ sin\alpha = sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$

3e cas $\begin{cases} cos\alpha = cos\theta \\ sin\alpha = -sin\theta \end{cases} \Rightarrow$; on doit d'abord faire entrer le "moins" comme sinus est impair & cosinus est pair, on obtient : $\begin{cases} cos\alpha = \cos(-\theta) \\ sin\alpha = \sin(-\theta) \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\theta$;

4e cas $\begin{cases} cos\alpha = -cos\theta \\ sin\alpha = sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\alpha = -sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ sin\alpha = cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\alpha = sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ sin\alpha = cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} cos\alpha = cos(\pi - \theta) \\ sin\alpha = sin(\pi - \theta) \end{cases} \Rightarrow \alpha = \pi - \theta$

PARTIE EXERCICES

Exercice 1

Soit θ un nombre réel vérifiant $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; on considère les deux nombres complexes suivants :

$a = 1 + cos2\theta + isin2\theta$; $b = \bar{a}$ ($\bar{a}$ Désigne le nombre complexe conjugué de a)

1- Déterminer en fonction de θ, le module & l'argument de chacun des nombres a &b.

2- on appelle S_θ la transformation du plan complexe qui au point M d'affixe Z, associe le point M' d'affixe $Z' = (a-1)Z + b$. Dans chacun des cas $\theta = \frac{\pi}{4}$ *et* $\theta = \frac{\pi}{2}$;

Indiquer la nature de la transformation S_θ et préciser les éléments qui la caractérisent.

Exercice 2

1-Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante : $Z^4 = 8\sqrt{2}(1-i)$. Pour chacune des solutions, on donnera le module et l'argument.

2- situer dans le plan complexe les images des solutions et donner sans justification, la figure formée par ces images.

Exercice 3

On pose, pour tout nombre entier naturel n non nul :

$I_n = \int_1^e x^2(lnx)^n dx$, Ou ln désigne la fonction logarithme népérien, et $I_0 = \int_1^e x^2 dx$.

1 - calculer I_0 et I_1

2 - en utilisant une intégration par parties, démontez que pour tout nombre entier naturel non nul : $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$ (1)

3 - a - démontrez que pour tout nombre entier n non nul, I_n est positive.

b - déduisez de l'égalité (1) que, pour tout nombre entier naturel n non nul $I_n \le \frac{e^3}{n+1}$

$c-$ *calculer* $\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 4

1 - a - Intégrer l'équation différentielle : $2y'' + y' - y = 0$ (1)

b- déterminez la solution particulière f de l'équation (1) dont la courbe (C) admet le point I(0 ; 1) comme point d'inflexion.

2 - a - Déterminez les réels a et b pour que la fonction g : $x \to e^{\frac{1}{2}x}(2cosx + ksinx), k \in \mathbb{R}$ soit solution de l'équation différentielle (2) : $y'' - ay' + by = 0$.

b- déterminez le réel k pour que la courbe représentative de g admette au point d'abscisse $x_0 = \frac{\pi}{2}$ une tangente horizontale.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = -x + 1$, on cherche a déterminer l'ensemble des fonctions numériques g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel x $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 1 - x$.

1 - Résoudre l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + y = 0$.

2 - Déterminer deux nombres réels m & p tels que la fonction g u définie par u(x) = mx+p soit une solution de l'équation différentielle (E)

3- Démontez qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si la fonction (g - u) est solution de (E')

4 - Résoudre l'équation différentielle (E)

5 - Déterminer la solution particulière f dont la courbe admet au point A (-1 ; 0) une tangente parallèle.

Exercice 6

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4x\,dx \;\; ; \;\; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx \;\; ; \;\; K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2cos^2xsin^2xdx$$

1 - calculez $I - J$ & $I + J + K$

2 - Exprimez cos4x en fonction de $cosx$ et $sinx$

3 - Enduire la valeur de I +J - 3K puis celle de I, J et K.

Exercice 7

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2xcos^4xdx \;\; ; \;\; K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2xsin^4$$

Calculer successivement : $I + K$; $I - K$ *puis* I & K.

Exercice 8

On considère les intégrales I et J ci-dessous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)\,cos^2xdx \;\; ; \;\; J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)sin^2\,xdx$$

Calculer : $I + J$; $I - J$, *puis endeduire la valeur de I et J*

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ $par\ f(x) = \sqrt{2x+1}$

1 - Donnez une primitive de f sur son ensemble de définition.

2 - à l'aide d'une intégration par partie, calculer $I = \int_0^1 x\sqrt{2x+1}dx$

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ $par\ f(x) = 2\sqrt{x+1}$

1 - Déterminer la dérivé de f

2 - En utilisant une intégration par partie calculer $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

3 - Retrouver la valeur de I en utilisant l'identité de Janet : $x = (x+1) - 1$.

Exercice 11

Soit l'équation (E) :$Z^3 - (3i + \alpha)Z^2 + (5i - 1)Z - 2i + \alpha = 0$

1 - Démontrer que (E) admet une solution réelle

2 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

3 - soient les points $A_1 = 1$; $A_2(1;1)$; $A_3(0;2)$ Démontrer qu'il existe une simultude plane directe.

Exercice 12

On considère la suite (U_n) ; entier naturel, telle que : (U_n) :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \;\; et\ U_1 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + U_{n-1}}{2} \;\; ; \;\; \forall n > 1 \end{cases}$$

Soit la suite (V_n) ; $n \in \mathbb{N}$ $definie\ par\ V_n = U_{n+1} - U_n$

1 - Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme V_0 et la raison q

2 - Exprimer le terme V_n en fonction de n

3 - Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$

4 - Etudier la convergente de S_n

5 - Exprimer le terme général U_n en fonction de n, puis calculer la limite de U_n quant n tant vers l'infini.

Exercice 13

Soit la suite (U_n) définie par (U_n):$\begin{cases} U_1 = 2 \; ; \; U_2 = 1 \\ U_n = \frac{3U_{n-1} - U_{n-2}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0;1;2\} \end{cases}$

La suite (W_n) est définie par $W_n = U_n - U_{n-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\})$

1 – Exprimer (W_n) en fonction de W_{n-1}

2 – Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison puis exprimer (W_n) en fonction de n.

3 – calculer $S = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$ en fonction de n

4 – Calculer S en fonction de U_n et U_1

5 – Exprimez (U_n) en fonction n, puis en déduire la limite$(U_n) \to +\infty$

Exercice 14

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(\vec{O}, \vec{U}, \vec{V})$. On désigne par A le point d'affixe z=1 et par P* l'ensemble des points de P, distincts de A.

Soit f l'application de P* dans P qui, a tout point M d'affixe z associe le point M'=f(M) d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-2i}{z-1}$ *on note* $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'(x, y, x' et\ y' sont\ des\ réels)$

1 – Calculer x' et y' en fonction de x et y.

2 – Déterminer l'ensemble (D) des points M tels que z' soit un réel.

3 – Déterminer l'ensemble © des point M tels que z' soit imaginaire pur.

4 – Représenter (D) et (C) dans le repère.

Exercice 15

On note le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

1 – On considère les nombres complexes $z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z = \frac{(z_A)^2}{z_B}$

a- Ecrire z sous forme algébrique

b-Ecrire z_A & z_B sous forme trigonométrique

c-En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$

2 – soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})cosx + (\sqrt{6} + \sqrt{2})sinx$;

a-Démontrer que l'on peu écrire, pour tout x, $f(x) = 4cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right)$;

b-Résoudre l'équation$f(x) = 2\sqrt{2}$ *dans l'intervalle* $]-\pi;\pi[$.

Exercice 16

On considère le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$

1 – Ecrire z sous forme trigonométrique, puis calculer z^3.

2 – Déterminer les nombres complexes z tels que$z^2 = z$. Les écrire sous Forme $a + ib$ et a et b étant deux nombres réels.

3 – On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points$z_A = 1 - i\sqrt{3}$; $z_B = -8$ *et* $z_C = (-i + \sqrt{3})$. Déterminer les nombres réels α *et* β de façon que le point O soit barycentre des points A, B, C affectés des coefficients α, β, $-\sqrt{3}$

Exercice 17

On considère la suite (U_n) *definie par* $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ *, pour* $n \geq 1$.

1 – Montrer que cette suite est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2 – soit S_n la somme des n premier termes de cette suite

a-Montrer que l'on a : $S_n - \frac{2}{3}S_n = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

c- En déduire la valeur exacte de S_n *en fonction de n*

c – Quelle est la limite de S_n *quant* $n \to \infty$

3 – soit la suite(V_n) définie par$V_n = lnU_n$; $n \geq 1$.

a-Calculer V_1 ; V_2 ; V_3 *en fonction de* $ln2$ *et* $ln3$

b- Montrer que la suite(V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison.

c –Calculer la somme des 10 premiers termes de cette suite, sous forme d'un nombre décimal, on donne : $ln2 = 0{,}6931$ *et* $ln3 = 1{,}0986$

Exercice 18

Soit U et V deux applications de $\mathbb{N}$ *vers* $\mathbb{C}$ qui à tout entier naturel n associent respectivement les complexes définies par : $U_0 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (1 + i\sqrt{3})U_n + 3$, $V_n = U_n - i\sqrt{3}$

1 – Calculer V_0. *Determiner une relation entre* V_{n+1} *et* V_n en déduire la nature de la suite (V_n).

E – Exprimer (V_n) *en fonction de n, calculer* $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

Exercice 19

On considère la suite (U_n), $n \in \mathbb{N}$ *définie par* $U_0 = e$; $U_{n+1} = \sqrt{U_n}$.

1 – On pose pour tout entier naturel n $V_n = \ln(U_n)$ *ou* ln désigne la fonction logarithme népérien, e la base de logarithme neperien.demontrer que $(V_n), n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. en déduire l'expression de (V_n) *en fonction de , puis celle de* (U_n) en fonction de n.

2 –Calculer le produit $P_n = U_0.U_1.U_2 \ldots\ldots U_n$ *en fonction de n*.

Etudier sa limite éventuelle lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 20

$(\vec{i},\vec{j})$ est une base du plan vectoriel E, f désigne l'endomorphine de E tel que f :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j} \\ f(\vec{j}) = -\frac{3}{4}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j} \end{cases}$$

1 - Quelle est la matrice de f dans la base $(\vec{i},\vec{j})$

2 - Déterminer l'expression analytique de f

3 - Déterminer le noyau de f. En donner une base f est -elle bijective ?

4 - Déterminer l'image de f . en donner une base

5 - Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f. En décuire une base

6 - Soit $\vec{U} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{V} = 3\vec{i} + \vec{j}$

a-Montrer que $(\vec{u}, v)$ est une base de E

b-Quelle est la matrice de f dans la base$(\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 21

On considère la fonction f définie par :$f \begin{cases} f(x) = x + \sqrt{|x^2-1|} & si\ x < 1 \\ f(x) = xlnx & si\ x \geq 1 \end{cases}$

1 - Déterminer l'ensemble de définition de f

2 - Etudier la continuité et la dérivabilité de f aux points -1 et 1, donner une interprétation graphique des résultats obtenus.0

3 - Etudier les variations de f.

4 - Montrer que l'équation f(x) =0 admet une solution unique$\alpha \in]-1;0[$, puis déterminer α par le calcul.

5 - Ecrire une équation de la tangente (T) au point $x_0 = 0$

6 - Etudier les branches infinies à+∞, puis tracer soigneusement la courbe (C) de la fonction f dans un repère orthonormé$(o,\vec{i},\vec{j})$

7 - Soit la fonction h définie par $h(x) = x(lnx - 1)$

a-Vérifier que h est une primitive de $x \to lnx$; $sur\ ]1;+\infty[$

b- En déduire une primitive de f sur $[1;+\infty[$

8 - Soit g la restriction de f sur $[1;+\infty[$

a-Montrer que g est une bijection de f sur $[1;+\infty[$ vers un ensemble à déterminer.

b- Construire la courbe de (g^{-1}), fonction réciproque de g dans le même repère que (C)

c-Sans expliciter $(g^{-1})'(x)$, $Calculer\ (g^{-1})'(1)$.

Exercice 22

A - Soit f_m la fonction numérique qui a la variable réelle x, fait correspondre le nombre réel $f_m(x) = \frac{e^x}{e^x - m}$ ou m désigne un paramètre réel différent de zéro.

Soit (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé.

1 - Etudier la fonction f_m en précisant son ensemble de définition , son sens de variation, ses asymptotes suivant les valeurs de m.

2 - Démontrez que $\forall\ m \in \mathbb{R}^*$ le point de coordonnées $(lnm; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie pour la courbe C_m.

3 - Tracer dans un même repère orthonormé les courbes C_2 et C_{-2}

B- Soit F_m la fonction numérique qui à la variable réelle x, fait correspondre le nombre réel $F_m(x) = ln|e^x - m|$, ou m est un paramètre réel ≠ 0.

Et (T_m) sa courbe représentative, dans le repère orthonormé.

1 - Etudier F_m en précisant son ensemble de définition et son sens de variation suivant les valeurs de m.

2Demontrer que $F_m(x) = x + ln|1 - me^x|$. En déduire que la droite d'équation $y = x$ est asymptote a la courbe (T_m).

3 - Tracer dans un même repère orthonormé les courbes (T_2) et (T_{-2})

4 - Démontrer que la restriction de F_2 à $]ln2 + \infty[$ admet une fonction réciproque que l'on déterminera explicitement.

C- Soit la courbe(C_{-2}) représentative de la fonction (f_{-2}) on appelle $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_{-2}), la droite d'équation $y = 1$ $et\ les\ droites\ d'equations x = ln2\ et\ x = \alpha\ avec\ \alpha < ln2$

1 - Déterminer $A(\alpha) en\ fonction\ de\ \alpha$

2 - Déterminer $\alpha\ tel\ que\ A(\alpha) = ln\frac{3}{2}$

3 - Quelle est la limite de $A(\alpha)\ quant\ \alpha \to +\infty$?

Partie solution

Exercice 1

1 - Module et argument de a

$a = cos2\theta + isin2\theta$

$|a| = \sqrt{(1 + cos2\theta)^2 + sin^2 2\theta} = \sqrt{1 + 2cos2\theta + cos^2 2\theta + sin^2 2\theta}$

$|a| = \sqrt{2(1 + cos2\theta)} = \sqrt{2(1 + cos^2 2\theta - sin^2 2\theta)} = \sqrt{2.2cos^2\theta}$

$|a| = 2|cos\theta| = 2cos\theta\quad car\ \theta > 0\ puis\ que\ \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{cases} cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{1+cos2\theta}{2cos\theta} = \frac{2cos^2\theta}{2cos\theta} = cos\theta \\ sin\alpha = \frac{sin2\theta}{2cos\theta} = \frac{2sin\theta cos\theta}{2cos\theta} = sin\theta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \theta\ \ ccl: a = [2cos\theta;\ \theta]$$

Module et argument de b

a et b sont conjuguées ; donc ils ont le même module mais des arguments opposés d'où $b = [2cos\theta\ ;\ -\theta]$

U.L.M. Services: umlservices1@gmail.com +24206 4086712/069233730

$2 - S_\theta:\ Z' = (a-1)Z + b$

Nature et élément

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$; $a = 1 + cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2} = 1 + i\ ; b = 1 - i$

D'où $Z' = iZ + 1 - i$

Nature: $a = i \rightarrow |a| = 1$: *Rotation*

Angle : $\alpha = arg(a') = arg(i) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

Centre $Z_\Omega = \frac{b'}{1-a} = \frac{1-i}{1-i} = 1 \rightarrow \Omega = (1\,;0)$

Nature et élément de $S_{\frac{\pi}{2}}$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $a = 1\cos\pi + isin\pi = 0\ ; b = 0$

D'où Z'=-Z

Nature a'=-1 : Homothétie

Rapport: $k = a' \rightarrow k = -1$

Centre : $Z_\Omega = \frac{b'}{1-a'} = 0$ puis que b-=0⇒ $\Omega(0\,;0)$

Exercice 2

$Z^4 = 8\sqrt{2}(1-i)$

1 - Résolution de cette équation

- Module et argument de $Z_0 = 8\sqrt{2}(1-i)$

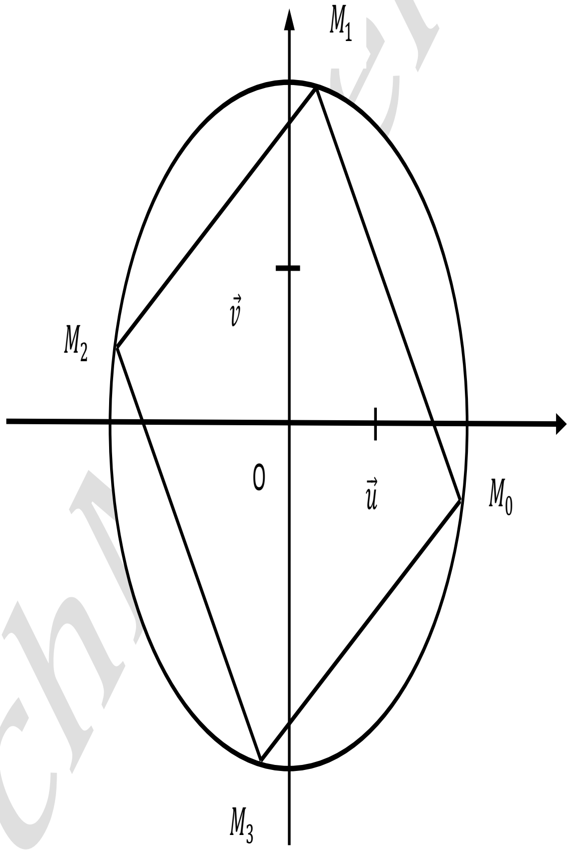
$$\begin{cases} |Z_0| = 8\sqrt{2}\sqrt{1^2+1^2} = 8\sqrt{2}.\sqrt{2} = 8.2 = 16 \\ cos\theta = \frac{8\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \\ sin\theta = \frac{-8\sqrt{2}}{16} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$Z^4 = 8\sqrt{2}(1-i) \leftrightarrow [r\,;\alpha]^4 = \left[16\,;-\frac{\pi}{4}\right] \leftrightarrow [r^4\,;4\alpha] = \left[16\,;-\frac{\pi}{4}\right] \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\alpha = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \alpha = \frac{-\pi+8k\pi}{16}\,; k = 0,1,2,3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{16} - isin\frac{\pi}{16}\right) = \left[2\,;-\frac{\pi}{16}\right] \\ Z_1 = 2\left(cos\frac{7\pi}{16} + isin\frac{7\pi}{16}\right) = \left[2\,;\frac{7\pi}{16}\right] \\ Z_1 = 2\left(cos\frac{15\pi}{16} + isin\frac{15\pi}{16}\right) = \left[2\,;\frac{15\pi}{16}\right] \\ Z_1 = 2\left(cos\frac{23\pi}{16} + isin\frac{23\pi}{16}\right) = \left[2\,;\frac{23\pi}{16}\right] \end{cases}$$

2 - Plaçons les images M_0, M_1, M_2 *et* M_3 dans le plan complexe



Le quadrilatère obtenu est un carré.

Exercice 3

$I_n = \int_1^e x^2(lnx)^n dx$; $I_0 = \int_1^e x^2 dx$

1 - Calcule de I_0

$$I_0 = \int_1^e x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} \rightarrow I_0 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}$$

2 - Calcule de I_1 par une intégration par partie

$$\begin{cases} U = lnx \rightarrow U' = \frac{1}{x} \\ V' = x^2 \rightarrow V = \frac{1}{3}x^3 \end{cases} \leftrightarrow I_1 = \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx\ ; soit$$

$$I_1 = \frac{1}{3}e^3 - 0 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e \leftrightarrow \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\right) \leftrightarrow \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} \rightarrow I_0 = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

3 - Démonstration de la relation : $3I_{n+1}+(n+1)I_n=e^3$

$I_n=\int_1^e x^2(lnx)^n dx \to I_{n+1}=\int_1^e x^2(lnx)^{n+1}dx$

$\begin{cases} U=(lnx)^{n+1}\to U'=(n+1)\frac{1}{x}(lnx)^n \\ V'=x^2\to V=\frac{1}{3}x^3 \end{cases} \to$

$I_{n+1}=\left[\frac{1}{3}x^3(lnx)^{n+1}\right]_1^e-\frac{1}{3}(n+1)\int_1^e x^2(lnx)^2dx \to$

$I_{n+1}=\frac{1}{3}e^3-0-\frac{1}{3}(n+1)I_n \leftrightarrow 3I_{n+1}=e^3-(n+1)I_n \leftrightarrow$

$3I_{n+1}+(n+1)I_n=e^3$ *vrai la relation est verifiée.*

4 - a - Démontrons que $I_n>0\,\forall\, n\in\mathbb{N}^*$

$e^2>0\,\forall\, x\in[1;e]$

$1\le x\le e\leftrightarrow ln1\le lnx\le lne\leftrightarrow 0\le lnx\le 1$; *donc* $lnx\ge 0$ *et* $(lnx)^n\ge 0$

$x^2(lnx)^n$ est positif car c'est le produit de deux positifs. D'où d'après le théorème de positivité de l'intégrale I_n **est positive** ; $I_n\ge 0\,\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

b-**Déduisons de l'égalité** (1) que $I_n\le\frac{e^3}{n+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$3I_{n+1}+(n+1)I_n=e^3$ (1)

$(n+1)I_n-e^3=-3I_{n+1}\leftrightarrow(n+1)I_n-e^3\le 0\leftrightarrow(n+1)I_n\le e^3\leftrightarrow$

$I_n\le\frac{e^3}{n+1}$

c-Calculons la limite de I_n

$I_n\le\frac{e^3}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^3}{n+1}=0$. D'où d'après le théorème de comparaison de limites. $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Exercice 4

$2y''+y'-y=0$ (1)

1 - a- Intégration de l'équation différentielle (1)

$2r^2+r-1=0$: $\Delta=b^2-4ac=1-4(2)(-1)=9>0\to$

$\begin{cases} r'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2} \\ r''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-3}{4}=-1 \end{cases}$ la solution générale est donc du type

$f(x)=Ae^{r'x}+Be^{r''x}\to f(x)=Ae^{\frac{1}{2}x}+Be^{-x}$ $(A,B\in\mathbb{R}^2)$

b- détermination de la solution particulière dont la courbe admet (0 ; 1)

$\begin{cases} f(0)=1 \\ f''(0)=0 \end{cases}\to f'(x)=\frac{1}{2}Ae^{\frac{1}{2}x}-Be^{-x}$; $f''(x)=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}+Be^{-x}$

$\leftrightarrow\begin{cases} f'(0)=A+B=1 \\ f''(0)=\frac{1}{4}A+B=0 \end{cases}\leftrightarrow\begin{cases} A+B=1 \\ A+4B=0 \end{cases}\to\begin{cases} A=\frac{4}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}$

$f(x)=\frac{4}{3}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{3}e^{-x}$

2 - a - Détermination des réels a et b pour que g soit solution de l'équation (2)

$$g(x)=e^{\frac{1}{2}x}(2cosx+ksinx)y''-ay'+by=0\,(2)$$

L'équation caractéristique de g est $r^2-ar+b=0$ *les racines complexes conjuguées sont* : $Z'=\frac{1}{2}+i$ *et* $Z''=\frac{1}{2}-i$

le produit : $Z'.Z''=\frac{b}{1}=\frac{1}{4}+1$; *la somme* : $Z'+Z''=\frac{a}{1}=1\to b=\frac{5}{4}$ $a=1$

b- Détermination de k

$g'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(2cosx+ksinx)+(-2sinx+kcosx)e^{\frac{1}{2}x}$

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}}(0+k)+(-2+0)e^{\frac{\pi}{4}}\to\frac{1}{2}ke^{\frac{\pi}{4}}-2e^{\frac{\pi}{4}}=0\leftrightarrow\frac{1}{2}ke^{\frac{\pi}{4}}=2e^{\frac{\pi}{4}}\leftrightarrow$

$ke^{\frac{\pi}{4}}=4e^{\frac{\pi}{4}}\leftrightarrow k=4$.

Exercice 5

1 - Résolution de l'équation (E')

$r^2-2r+1=0\leftrightarrow(r-1)^2\leftrightarrow r=1$: $y(x)=(Ax+B)e^x$ $(A,B\in R^2)$

2 - Détermination de m & p

$u(x)=mx+p$; $u'(x)=m$; $u''(x)=0\leftrightarrow u''-2u'+u=-x+1$

$0-2m+p=-x+1\leftrightarrow m=-1$ *et* $-2m+p=1$ *d'ou* $m=-1$ *et* $p=-1$

$u(x)=-x-1$

3- Démonstration

u solution de (E) : $u''-2u'+u=-x+1$

g solution de (E) : $g''-2g'+g=-x+1$

Soustraction membre à membre : $-u''+g''+2u'-2g'-u+g=0$

$(-u''+g'')-2(u'+g')+(-u+g)=0$

$on\ touve\ (-u+g)\ soulution\ de\ (E')$

4 - Résolution de l'équation (E)

$ici\ il\ s'agit\ de\ trouver\ g\ or\ -u+g\ est\ solution\ de\ (E');\ donc$

$g(x)-u(x)=y(x) \to g(x)=u(x)+y(x) \to \boldsymbol{g(x)=-x-1+(Ax+B)e^x}$

5 - Détermination de la solution particulière ***tel que*** $f(0)=-1;\ f'(0)=0$

$$\begin{cases} g(x)=-x-1+(Ax+B)e^x \\ g'(x)=-1+[Ae^x+(Ax+B)e^x] \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} f(0)=-1+B=-1 \\ f'(0)=-1+A+B=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{ccl: la\ solution\ particulièere\ cherchée\ est\ donc\ f(x)=-x-1+xe^x}$

Exercice 6

1 - Calcule de $I-J\ et\ I+J+K$

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx \leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x-sin^4x)dx \leftrightarrow$

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x+sin^2x)(cos^2x-sin^2x)dx \leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2xdx=\left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \to$

$\boldsymbol{I-J=0}$

$I+J+K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x+sin^4x+2cos^2xsin^2)dx \leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x+sin^2x)^2dx \leftrightarrow$

$\boldsymbol{I+J+K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=[x]_0^{\frac{\pi}{2}} \to I+J+K=\frac{\pi}{2}}$

2 - Expression de ***cos4x en fonction de cosx et sinx***

$cos2x=cos^2x-sin^2x \to cos4x=cos^22x-sin^22x \to$

$cos4x=(cos^2x-sin^2x)^2-(2sinxcosx)^2 \to$

$cos4x=cos^4x-2cos^2xsin^2x+sin^4x-4sin^2xcos^2x$

$\underline{\boldsymbol{cos4x=cos^4x+sin^4x-6sin^2xcos^2x}}$

3- Déduction de la valeur de $I+J-3K$

$I+J-3K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x+sin^4x-6sin^2xcos^2x)dx$

$\boldsymbol{I+J-3K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4xdx=\left[\frac{1}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \to I+J-3K=0}$

Déduction des valeurs de I, J et K

$$\begin{cases} I-J=0 \quad (1) \\ I+J+K=\frac{\pi}{2}\ (2) \\ I+J-3K=(3) \end{cases} \to \begin{cases} K=\frac{\pi}{8} \\ I=\frac{3\pi}{16} \\ J=\frac{3\pi}{16} \end{cases}$$

Exercice 7

1 - Calcul de $I+K;\ I-K\ et\ I\ et\ K$

$I+K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2x.cos^4xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2x.sin^4xdx$

$I+K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(sin^2x.cos^4x+cos^2x.sin^4x)dx$

$I+K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2x.cos^2x.(cos^2x+sin^2x)dx \to \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2x.cos^2xdx$

$avec\ sin2x=2sinxcosx\ et\ sin^22x=4sin^2x.cos^2x$

$\to sin^2x.cos^2x=\frac{1}{4}sin^22x \to I+K+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}sin^22xdx$

$or \begin{cases} cos^2x-sin^2x=cos2x\ (1) \\ cos^2x+sin^2x= \quad 1\ (2) \end{cases} \to (1)+(2): 2sin^2x=1-cos2x \to$

$2sin^22x=1-cos4x \to sin^22x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos4x$

$d'ou\ I+K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos4x\right)dx \leftrightarrow \left[\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \to \boldsymbol{I+K=\frac{\pi}{32}}$

$I-K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2x.cos^2x(cos^2x-sin^2x)dx \leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}sin^22x.cos2xdx$

$au\ lieu\ de\ linéariser\ sin^22x.cos2x, on\ peut\ utiliser\ la\ forme$

$\int u'u^n=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C\ comme\ la\ dérivée\ de\ sin2x=2cos2x$

$I-K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{8}sin^22x.cos2xdx \leftrightarrow \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2sin^22x.cos2xdx$

$\boldsymbol{I-K=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}sin^32x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \to I-K=\frac{1}{24}}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{I+K=\frac{\pi}{32}}\ (1) \\ \boldsymbol{I-K=\frac{1}{24}}\ (2) \end{cases} \to \begin{cases} \boldsymbol{I=\frac{\pi}{64}+\frac{1}{48}} \\ \boldsymbol{K=\frac{\pi}{64}-\frac{1}{48}} \end{cases}$$

Exercice 8

1 - Calcul de $I+J\ et\ I-J$

$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+1)cos^2xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+1)sin^2xdx$

$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+1)\,(cos^2x+sin^2x)dx \to I+J=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \to \boldsymbol{I+J=\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi}{4}}$

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+1)(cos^2x-sin^2x)dx \leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}}(x+1)cos2xdx$

$integration\ par\ partie\ u = x+1 \rightarrow u' = 1\ ; v' = \cos 2x \rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$I - J = \left[\frac{1}{2}(x+1)\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right) - 0 - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I - J = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}[\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} \rightarrow I - J = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

2 – Déduction de I et J

$$\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4}\ (1) \\ I - J = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ (2) \end{cases} \rightarrow I = \frac{\pi^2}{64} + \frac{3\pi}{16} + \frac{1}{8}\ et\ J = \frac{\pi^2}{64} + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$$

Exercice 9

1 – Primitive de f sur son ensemble de définition

$$F(x) = \int f(x)dx \leftrightarrow \int \sqrt{2x+1}dx \leftrightarrow \int (2x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{a}\right)(ax+b)^{n+1} + C \rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)(2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{6}(2x+1)\sqrt{2x+1}$$

2- Calcule de I

$$I = \int_0^1 x\sqrt{2x+1}dx$$

$$u = x \rightarrow u' = 1\ ;\ v' = \sqrt{2x+1} \rightarrow v = \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$I = \left[\frac{x}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{6}\int_0^1 (2x+1)^{\frac{3}{2}}dx \leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}+1}\left(\frac{1}{2}\right)(2x+1)^{\frac{3}{2}+1}\right]_0^1$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)(2x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\left[\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)(2x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 \rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{30}\left[(2x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{30}\left(4\sqrt{2}-1\right) \rightarrow I = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{15} + \frac{1}{30}$$

Exercice 10

$$f(x) = 2\sqrt{x+1} \quad ; \quad I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$$

1 – Dérivée de f

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

2 - Calcul de I

$$u = x \rightarrow u' = 1\ ;\ v' = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \rightarrow v = 2\sqrt{x+1}$$

$$I = \left[2x\sqrt{x+}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{x+1}dx \leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$$

$$\leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2\int_0^1 (x+1)^{\frac{1}{2}}dx \leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x+1)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 \leftrightarrow$$

$$2\sqrt{2} - 2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \leftrightarrow 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \leftrightarrow 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) \leftrightarrow$$

$$2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) \leftrightarrow 2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{4}{3} \rightarrow I = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

3 – D'après l'identité de Janet

$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx \leftrightarrow \int_0^1 \frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}}dx \leftrightarrow \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1+x}}dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx \leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)\sqrt{1+x}}{1+x}dx - f'(x)dx \leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{1+x}dx - \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1 \leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}dx - (2\sqrt{2} - 2 \leftrightarrow \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1+x)^{\frac{1}{2}+1} - (2\sqrt{2}+2\right]_0^1$$

$$\leftrightarrow \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right] - (2\sqrt{2}+2 \leftrightarrow \frac{2}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - (2\sqrt{2}+2$$

$$\leftrightarrow \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right)(2\sqrt{2}+2 \leftrightarrow \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) - 2\sqrt{2} + 2 \leftrightarrow \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} - 2\sqrt{2} + 2$$

$$\leftrightarrow 2 - \frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} \rightarrow I = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Exercice 11

1 – Solution réelle

(E) : *admet une solution réelle* $\leftrightarrow z = x$

$(x)^3 - (3i+2)x^2 + (5i-1)x - 2i + 2 = 0 \leftrightarrow$

$x^3 - 3ix^2 - 2x^2 + 5ix - x - 2i + 2 = 0$

$\leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 + i(-3x^2 + 5x - 2) = 0$

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\ (1) \\ -3x^2 + 5x - 2 \quad = 0\ (2) \end{cases}$$

Dans $(2) : -3x^2 + 5x - 2 = 0 \leftrightarrow \Delta = 25 - 24 \leftrightarrow \Delta = 1 : x' = \frac{2}{3}\ et\ x'' = 1$

Vérification $: 1 - 2 - 1 + 2 = 0$ *Vrai alors* $z = 1$

2 - Résolution

$(z-1)(z^2+az+b)=0$ Par la methode d'Horner

	1	$-3i+2$	$5i-1$	$-2i+2$
1	$\downarrow$	1	$-3i-1$	$2i-2$
	1	$-3i-1$	$2i-2$	0

$(E):(z-1)[(z^2+(-3i-1)z+2i-2]=0$

$\Delta=(-3i-1)^2-4(2i-2)\rightarrow\Delta=-2i$

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\ (1)\\ x^2-y^2=0\ (2)\\ 2xy\ \ =-2\ (3)\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}(1)+(2):2x^2=2\rightarrow x=\pm1\ (1)-(2)\rightarrow y=\pm1\\ \delta_1=1-i\ et\ \delta_2=-1+i\rightarrow z_1=\frac{3i+1+1-i}{2}\\ \rightarrow \mathbf{z_1=1+i}\,;\,z_2=\frac{3i+1-1+i}{2}\rightarrow \mathbf{z_2=2i}\end{cases}$$

$\mathbf{S=\{1\,;1+i\,;2i\}}$

3 - Démonstration qu'il existe une S.P.D

$A_1=1$; $A_2(1;1)$; $A_3(0;2)$

$S(A_1)=A_2$ et $S(A_2)=A_3$ $z'=az+b$

$$\begin{cases}zA_2=azA_1+b\,(1)\\ zA_3=azA_2+b\,(2)\times(-1)\end{cases}\begin{cases}zA_2=azA_1+b\,(1)\\ -zA_3=-azA_2-b\,(2)\end{cases}$$

$(1)+(2):zA_2-zA_3=a(zA_1-zA_2)\rightarrow a=\frac{zA_2-zA_3}{zA_1-zA_2}\leftrightarrow\frac{1+i-2i}{1-1+i}\leftrightarrow\frac{1-i}{-i}\leftrightarrow\frac{1+i}{1}$

$\rightarrow \mathbf{a=1+i}\,;\mathbf{z'=(1+i)z}$

$$1+i\begin{cases}|1+i|=\sqrt{2}\\ \arg(1+i)=\frac{\pi}{4}[2\pi]\end{cases}\begin{cases}\textit{alors il existe une SPD de centre O, de rapport}\\ \sqrt{2}\ \textit{et d'angle}\ \frac{\pi}{4}\end{cases}$$

Exercice 12

$$\begin{cases}U_0=1\\ U_1=4\\ U_{n=1}=\frac{U_n+U_{n-1}}{2};\ \forall n>1\end{cases}\qquad V_n=U_{n+1}-U_n$$

1 - Démonstration de V_n S.G

$V_n=U_{n+1}-U_n\leftrightarrow V_{n+1}=U_{n+2}-U_{n+1}\leftrightarrow V_{n+1}=\frac{U_{n+1}+U_n}{2}-U_{n+1}$

$\leftrightarrow V_{n+1}=\frac{U_{n+1}+U_n-2U_{n+1}}{2}\leftrightarrow\frac{-U_{n+1}+U_n}{2}\leftrightarrow-\frac{1}{2}(U_{n+1}-U_n)\rightarrow V_{n+1}=-\frac{1}{2}V_n$

$\mathbf{V_{n+1}=-\frac{1}{2}V_n\,;(V_n)}$ ***est une SG de raison*** $\mathbf{q=-\frac{1}{2}}$ ***; de 1^er terme*** $\mathbf{V_0=3}$

2 - Expression de V_n *en fonction de n*

V_n *etant géométrique :* $V_n=V_i.q^{n-i}\leftrightarrow V_0.q^{n-0}\rightarrow V_n=3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

3 - Calcul de la somme S_n

$S_n=V_0+V_1+\ldots..+V_{n-1}$

$S_n=\frac{V_p(1-q^{n-p+1})}{1-q}\leftrightarrow\frac{V_0(1-q^{n+1})}{1-q}\rightarrow S_n=\frac{3\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}{1+\frac{1}{2}}\leftrightarrow\frac{3\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{3}{2}}\rightarrow$

$S_n=2\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

4 - Convergente de S_n

$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0\rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=2$; ***ccl*** S_n ***est convergente car puisque sa limite est finie.***

5 - Expression de U_n *en fonction de n*

$S_n=V_0+V_1+\ldots..+V_{n-1}$; *or* $V_n=U_{n+1}-U_n$

$$\begin{cases}V_0=U_1-U_0\\ V_1=U_2-U_1\\ V_{n-1}=U_n-U_{n-1}\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}\textit{somme membre à membre } S_n=U_n-U_0\rightarrow\\ U_n=S_n+U_0\rightarrow \mathbf{U_n=2\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+1}\end{cases}$$

Limite de U_n à l'infini

$\lim_{n\to+\infty}2\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+1=3\rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=3$

Exercice 13

$$\begin{cases}U_1=2\ ;\ U_2=1\\ U_n=\frac{3U_{n-1}-U_{n-2}}{2}\\ W_n=U_n-U_{n-1}\end{cases}$$

1 - Expression de W_n *en fonction de* W_{n-1}

$W_n=U_n-U_{n-1}\leftrightarrow\frac{3U_{n-1}-U_{n-2}}{2}-U_{n-1}\leftrightarrow\frac{3U_{n-1}-U_{n-2}-2U_{n-1}}{2}\leftrightarrow\frac{U_{n-1}-U_{n-2}}{2}$

$\leftrightarrow \mathbf{W_n=\frac{1}{2}(U_{n-1}-U_{n-2})\rightarrow W_n=\frac{1}{2}W_{n-1}}$

2 - Démonstration de W_n suite géométrique

$W_n=\frac{1}{2}W_{n-1}\rightarrow \mathbf{W_n=\frac{1}{2}W_n}$ *c'est une rélation de la forme* $W_n=qW_n$

la suite (W_n) *est donc géométrique de raison* $q=\frac{1}{2}$; *du 1^er terme* $W_2=-1$

W_n *en fonction de n*

(W_n) *etant géométrique* $\leftrightarrow W_n = W_p.q^{n-p} \leftrightarrow W_n = W_2.q^{n-2}$

$\rightarrow \boldsymbol{W_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$

3 - Somme de S

$S = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$ (W_n) *est une SG* $\rightarrow \boldsymbol{S} = \frac{W_p(1-q^{n-p+1})}{1-q} \leftrightarrow \frac{W_2(1-q^{n-p+1})}{1-q}$

$\rightarrow \boldsymbol{S} = \frac{-\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}} \leftrightarrow \frac{-\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{\frac{1}{2}} \rightarrow \boldsymbol{S = -2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}$

4 - Calcul de en fonction de U_n et U_1

$S = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$ or $W_n = U_n - U_{n-1}$

$\begin{cases} W_2 = U_2 - U_1 \\ W_3 = U_3 - U_2 \\ W_n = U_n - U_{n-1} \end{cases} \rightarrow$ *somme membre à membre* : $S = U_n - U_1$

5 - Expression de U_n *en fonction de n*

$S = U_n - U_1 \rightarrow U_n = S + U_1 \rightarrow U_n == \boldsymbol{-2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] + 2}$

$\rightarrow \boldsymbol{U_n = -2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \rightarrow U_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0} \rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

Exercice 14

$Z' = \frac{Z-2i}{Z-1}$; $Z \neq 1$; $M(1;0)$

1 - Calcul de x' et y' en fonction de x et y

$Z' = \frac{x+iy-2i}{x+iy-1} = \frac{(x+iy-2i)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2} \leftrightarrow \frac{x^2-x-ixy+ixy-iy+y^2-2ix+2i-2y}{(x-1)^2+y^2}$

$\leftrightarrow \frac{x^2+y^2-x-2y+i(-y-2x+2)}{(x-1)^2+y^2} \leftrightarrow \left(\frac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2}\right) + i\left(\frac{-y-2x+2}{(x-1)^2+y^2}\right) \rightarrow$

$x' = \frac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2}$ et $y' = \frac{-y-2x+2}{(x-1)^2+y^2}$

2 - Détermination de l'ensemble D des points M tel que Z' soit un réel

Z' *est réel* $\leftrightarrow im(Z') = 0 \rightarrow y' = 0 \leftrightarrow -y - 2x + 2 = 0 \leftrightarrow -y = -2x + 2$

$\leftrightarrow y = -2x + 2$: **ccl l'ensemble D est la droite d'équation** $y = -2x + 2$ **privée du point** $\boldsymbol{A(1;0)}$.

3 - Détermination de l'ensemble C des point M tels que Z' soit imaginaire pur

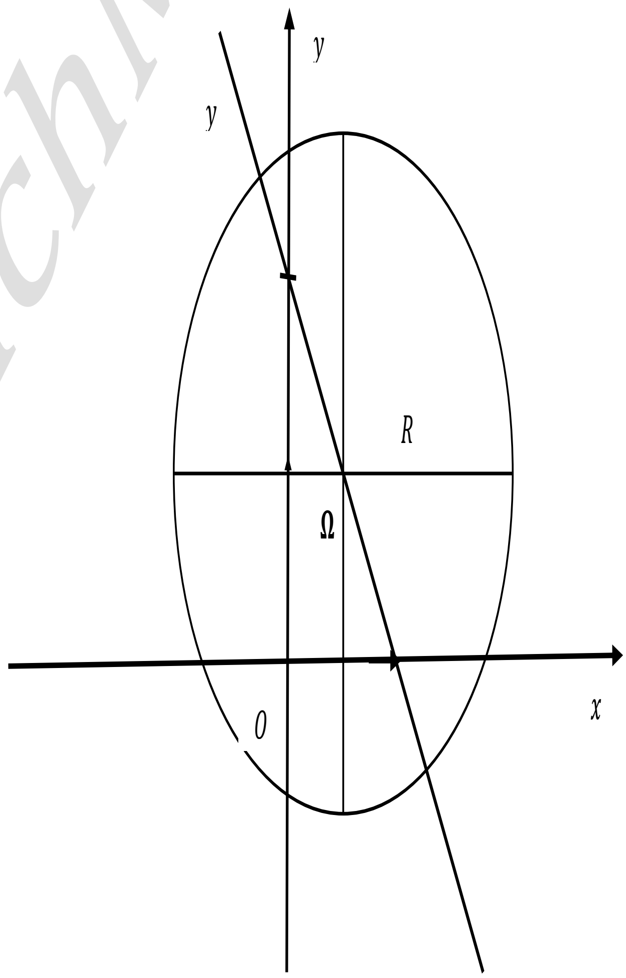
Z' *est imaginaire pur* $\leftrightarrow Re(Z') = 0 \rightarrow x' = 0 \leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 2y = 0$

$\leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y-1)^2 - 1 = 0 \leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 1 + \frac{1}{4}$

$\leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$

ccl : l'ensemble des points C est le cercle d'equation : $\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$ *de centre* $\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$; *de rayon* $\boldsymbol{R} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ *privée du point* $\boldsymbol{A(1;0)}$.

4 - Représentation de (D) et (C)



U.L.M. Services: umlservices1@gmail.com +242064086712/069233730

Exercice 15

1 – a - Ecriture de Z sous forme algébrique

$$Z=\frac{Z_A^2}{Z_B}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\leftrightarrow\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\leftrightarrow\frac{-2+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\leftrightarrow\frac{\left(-2+2i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{2+2}$$

$$\leftrightarrow\frac{-2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}+2i\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{4}\rightarrow Z=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$$

b - Ecriture de $Z_A\,;Z_B$ *et* Z *sous forme trigonométrique*

$$Z_A=1+i\sqrt{3}\leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\rightarrow \boldsymbol{Z_A=2\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$Z_B=\sqrt{2}+i\sqrt{2}\leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\rightarrow \boldsymbol{Z_B=2\left(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$Z=\frac{Z_A^2}{Z_B}\leftrightarrow\frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}\leftrightarrow\frac{4e^{i\frac{2}{3}\pi}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}\leftrightarrow 2e^{i\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)}\leftrightarrow 2e^{i\frac{5\pi}{12}}\rightarrow \boldsymbol{Z=2\left(cos\frac{5\pi}{12}+isin\frac{5\pi}{12}\right)}$$

c - Déduction des valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ *et* $sin\frac{5\pi}{12}$

$$\begin{cases}Z=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)\\ Z=2\left(cos\frac{5\pi}{12}+isin\frac{5\pi}{12}\right)\end{cases}\begin{cases}2cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\\ 2sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\\ \boldsymbol{sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{cases}$$

2 - a -Démonstration

$$f(x)=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)cosx+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)sinx$$

$$or\begin{cases}cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{6}-\sqrt{2}=4cos\frac{5\pi}{12}\\ \sqrt{6}+\sqrt{2}=4sin\frac{5\pi}{12}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=4cos\frac{5\pi}{12}cosx+4sin\frac{5\pi}{12}sinx\Leftrightarrow 4\left(cos\frac{5\pi}{12}cosx+sin\frac{5\pi}{12}sinx\right)\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{f(x)=4cos\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)\;c.q.f.d}$$

b- Résolution de l'équation $f(x)=2\sqrt{2}$ *sur* $]-\pi\,;\,\pi[$

$$f(x)=2\sqrt{2}\Leftrightarrow 4cos\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)=2\sqrt{2}\Leftrightarrow 4cos\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$cos\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)=cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}\\ x-\frac{5\pi}{12}=-\frac{\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\\ x=\frac{5\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$S=\left\{\frac{2\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{6}\right\}$$

Exercice 16

1 - Ecriture de $Z=1-i\sqrt{3}$ S.F.T et Calcul de Z^3

$$|Z|=\sqrt{1+3}\Rightarrow|z|=2\Rightarrow arg(z)\begin{cases}cos\theta=\frac{1}{2}\\ sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{3}$$

$$\boldsymbol{ccl\;:Z=2\left(cos\frac{\pi}{3}-isin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$Z^3=\left[2\left(cos\frac{\pi}{3}-isin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3\Leftrightarrow 2^3\left(cos\frac{\pi}{3}-isin\frac{\pi}{3}\right)^3\Leftrightarrow 8(cos\pi-isin\pi)\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Z^3=-8}$$

2 - Racines carrées de Z

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\;(1)\\ x^2-y^2=1\;(2)\\ 2xy=-\sqrt{3}\;(3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)+(2)=2x^2=3\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\\ (1)-(2)=2y^2=1\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 2xy<0\Rightarrow son\;signe\;est\;contraire\end{cases}\Leftrightarrow Z=x+iy$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z'=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\\ z''=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{z'=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}}\\ \boldsymbol{z''=\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}}\end{cases}$$

3 - Détermination de α *et* β

$$z_A=1-i\sqrt{3}\rightarrow A\left(1;-\sqrt{3}\right);z_B=-8\rightarrow B(-8\,;0)\,;z_C=\sqrt{3}-i\rightarrow C\left(\sqrt{3};-1\right)$$

O est le barycentre des points $A(\alpha);B(\beta)$*et* $C\left(-\sqrt{3}\right)\leftrightarrow$

$$\alpha(z_A-z_O)+\beta(z_B-z_O)-\sqrt{3}(z_C-z_O)=0\leftrightarrow$$

$$\alpha\left(1-i\sqrt{3}-0\right)+\beta(-8-0)-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-i-0\right)\leftrightarrow\alpha-i\alpha\sqrt{3}-8\beta-3+i\sqrt{3}$$

$$\leftrightarrow\begin{cases}\alpha-8\beta-3=0\\ i\alpha\sqrt{3}+i\sqrt{3}\end{cases}\begin{cases}\boldsymbol{\alpha=1}\\ \boldsymbol{\beta=\frac{1}{4}}\end{cases}$$

2e Méthode

$$\begin{cases}x_0=\frac{\alpha x_A+\beta x_B-\sqrt{3}x_C}{\alpha+\beta-\sqrt{3}}=0\\ y_0=\frac{\alpha y_A+\beta y_B-\sqrt{3}y_C}{\alpha+\beta-\sqrt{3}}=0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}\alpha(1)+\beta(-8)-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)=0\\ \alpha\left(-\sqrt{3}\right)+\beta(0)-\sqrt{3}(-1)=0\end{cases}\leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha-8\beta-3=0\\ -\alpha\sqrt{3}+\sqrt{3}=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{\alpha=1}\\ \boldsymbol{\beta=\frac{1}{4}}\end{cases}$$

Exercice 17

1 - Démonstration de (U_n) suite géométrique

$$U_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\;;n\geq 1$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n}} \leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-n} \rightarrow U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n\ ; q = \frac{2}{3}\ ;\ U_1 = \frac{2}{3}$

2 – a- Démonstration de S_n

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n+1}\ (1)$

$qS_n = +U_2 + U_3 + \cdots + U_n + U_{n+1}\ (2)$

$(1) - (2) \leftrightarrow S_n - qS_n = U_1 - U_{n+1} \Rightarrow S_n - \frac{2}{3}S_n = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

b- Valeur de S_n

$S_n - \frac{2}{3}S_n = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leftrightarrow \frac{S_n}{3} = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leftrightarrow \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \rightarrow S_n = 3\left[\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$

c-Limite de S_n à $+\infty$

comme la raison $q = \frac{2}{3}$ *est comprise entre* -1 *et* 1 *alors* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$

3 – Calcul de $V_1\ ; V_2\ ; V_3$

$V_n = lnU_n$

$$\begin{cases} V_1 = lnU_1 \leftrightarrow ln\left(\frac{2}{3}\right) \\ V_2 = lnU_2 \leftrightarrow ln\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ V_3 = lnU_3 \leftrightarrow ln\left(\frac{2}{3}\right)^3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} V_1 = ln\left(\frac{2}{3}\right) \\ V_2 = 2ln\left(\frac{2}{3}\right) \\ V_3 = 3ln\left(\frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

b- Démonstration que V_n est une suite arithmétique

$V_n = lnU_n \leftrightarrow V_{n+1} = lnU_{n+1} \leftrightarrow V_{n+1} = lnqU_n \leftrightarrow V_{n+1} = lnU_n + lnq$

$V_{n+1} = V_n + ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ***SA de raison*** $r = \frac{2}{3}$; 1^{er} ***terme*** $V_1 = ln\left(\frac{2}{3}\right)$

C – Calcul de S'_{10}

$S'_{10} = V_1 + V_2 + \cdots + V_{10}$

$S'_{10} = \left(\frac{V_1+V_{10}}{2}\right)10 \leftrightarrow 5(V_1 + V_{10}) \leftrightarrow 5\left(ln\left(\frac{2}{3}\right) + ln\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right) \leftrightarrow$

$5\left(ln\left(\frac{2}{3}\right) + 10ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) \leftrightarrow 5\left(11ln\frac{2}{3}\right) \rightarrow S'_{10} = 55ln\left(\frac{2}{3}\right) =$

Exercice 18

1 – Calcul de V_0 et Relation entre V_{n+1} et V_n

$U_0 = 0;\ U_{n+1} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)U_n + 3;\ V_n = U_n - i\sqrt{3}$

$V_0 = U_0 - i\sqrt{3} \rightarrow V_0 = -i\sqrt{3}$

$V_{n+1} = U_{n+1} - i\sqrt{3} \leftrightarrow V_{n+1} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)U_n + 3 - i\sqrt{3}$

$\leftrightarrow \left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(V_n + i\sqrt{3}\right) + 3 - i\sqrt{3} \leftrightarrow \left(1 + i\sqrt{3}\right)V_n + \left(i\sqrt{3} - 3 + 3 - i\sqrt{3}\right)$

$\rightarrow V_{n+1} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)V_n$

Nature de V_n

la relation précédente est du type $V_{n+1} = qV_n$ *avec* $q = 1 + i\sqrt{3} \in$

$\mathbb{C}$ *on deuit que* V_n *est une SG* : $q = 1 + i\sqrt{3}\ V_0 = i\sqrt{3}$

2 –Expression de V_n ***en fonction de n***

$V_n = V_0q^n \Rightarrow V_n = \left(-i\sqrt{3}\right)\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$

Calcul de S_n

$$S_n = V_0\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \Leftrightarrow \frac{-i\sqrt{3}\left[1 - \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{n+1}\right]}{1 - 1 - i\sqrt{3}} \Rightarrow S_n = 1 - \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{n+1}$$

Exercice 19

$U_0 = e\ ;\ U_{n+1} = \sqrt{U_n}\ ;\ V_n = lnU_n$

1 – Démonstration de V_n SG

$V_{n+1} = lnU_{n+1} \Leftrightarrow V_{n+1} = ln\sqrt{U_n} = ln(U_n)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}lnU_n \Rightarrow V_{n+1} =$

$\frac{1}{2}V_n\ ;\ S.G\ q = \frac{1}{2}\quad V_0; = 1$

Expression de V_n *et* U_n *en fonction de n*

$V_n = V_0q^n \Rightarrow V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$V_n = lnU_n \Leftrightarrow U_n = e^{V_n} \Rightarrow U_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

2 – Calcul du produit

$P_n = U_0.U_1.U_2 \cdots U_n \Leftrightarrow e^{V_0}.e^{V_1}.e^{V_2}.\cdots e^{V_n} \Leftrightarrow e^{V_0+V_1+V_2+\cdots+V_n} \Leftrightarrow$

e^{S_n} ***or*** $S_n = V_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Leftrightarrow e^{V_0\frac{\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}} \Leftrightarrow e^{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}} \Rightarrow P_n = e^{2\left[\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right]}$

Exercice 20

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j} \\ f(\vec{j}) = -\frac{3}{4}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j} \end{cases}$$

1 – Matrice de *f dans la base* $(\vec{i};\vec{j})$

$f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ sont déjà exprimées en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j} \rightarrow M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

2 – Expression analytique de f

$f(\vec{u}) = \vec{u'} \leftrightarrow M\vec{u} = \vec{u'} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow M\begin{cases} x' = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y \\ y' = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y \end{cases}$

3 – Noyau et Base de f

$f(\vec{u}) = \vec{0} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y = 0 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = 0 \end{cases} \leftrightarrow \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y = 0 \rightarrow x - 3y = 0$

ccl : $\ker f$ est la droite vectorielle $3y = x$ dont une base $\vec{e_1} = 3\vec{i} + \vec{j}$

f n'est pas injective car $\ker f$ n'est pas reduit au vecteur nul puis que $\ker f$ est une droite

4 – Image et base de f

$f(\vec{u}) = \vec{u'} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y = x' (1) \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = y' (2) \end{cases} \Leftrightarrow (1) + (2) \Leftrightarrow 0 = y' + x'$

ccl : $Im(f)$ est la droite vectorielle $y = x$ dont une base $\vec{e_2} = \vec{i} - \vec{j}$

5 – Ensemble des vecteurs invariants par f

$f(\vec{u}) = \vec{u'} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y = x \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y = 0 \\ -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}(x+y) = 0 \\ -\frac{1}{4}(x+y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y + x = 0$. ccl l'ensbl des pts inv est la droite vectorielle $y = -x$ ayant pour base $\vec{e_3} = \vec{i} - \vec{j}$

6 – a - Démonstration

$\vec{U} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{V} = 3\vec{i} + \vec{j}$

$det(\vec{U}, \vec{V}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 1 + 3 = 4 \Rightarrow det(\vec{U}, \vec{V}) \neq 0$ *donc*

$(\vec{U}, \vec{V})$ *est une base de E*

b-Matrice de f dans la nouvelle base

il faut exprimé $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$f(\vec{u}) = \vec{u}$ *car* $\vec{u} = \vec{e_3} \in$ *a l'ensbl des vect inv*

$f(\vec{v}) = \vec{0}$ *car* $\vec{v} = \vec{e_1} \in \ker f$

$\rightarrow \begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{u} \\ f(\vec{v}) = \vec{0} \end{cases} \rightarrow M' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 21

$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|} \; ; x < 1 \\ f(x) = x + \ln x \; ; \; x \geq 1 \end{cases}$

1 – Ensemble de définition de f

f_1 *est définie* $\leftrightarrow x < 1 \rightarrow f_1 =]-\infty; 1[$

f_2 *est définie* $\leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

$-\infty$	0	1	$+\infty$

$\rightarrow f_2 = [1 ; +\infty[$

$f_1 \cup f_2 \leftrightarrow]-\infty; 1[\cup [1; +\infty[\rightarrow \boldsymbol{Ef} =]-\infty ; +\infty[$

2 – Continuité et Dérivabilité de f en -1 et 1

Expression de f sans valeurs absolues cela nécessite d'étudier le signe de $x^2 - 1$

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$\quad$ 1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	–	

ccl : $f\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} \; ; x \in]-\infty ; -1] \\ f(x) = x + \sqrt{-x^2 + 1} \; ; x \in]-1 ; 1[\\ f(x) = x + \ln x \; x \in [1 ; +\infty[\end{cases}$

$\begin{cases} f(-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(x + \sqrt{-x^2 + 1}\right) = -1 \end{cases}$

ccl f est continue en $x_0 = -1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + 1}{x + 1} \leftrightarrow \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}\right) \leftrightarrow$

$\left[1 + \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}}\right] \leftrightarrow \left(1 + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = 1 - \frac{2}{0^-}$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x + \sqrt{1 - x^2} + 1}{x + 1} \leftrightarrow \left(1 + \frac{\sqrt{-x^2 + 1}}{x + 1}\right) \leftrightarrow$

$$\left[1+\frac{(1-x)(x+1)}{(x+1)\sqrt{-x^2+1}}\right] \leftrightarrow \left(1+\frac{1-x}{\sqrt{-x^2+1}}\right)=1-\frac{2}{0^+}$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$$

ccl: f n'estpas dérivable en $x_0=-1$ Cf admet en ce point de rebroussement une $\frac{1}{2}$ tangente verticale.

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x+\sqrt{1-x^2}=1\right) \to f \text{ est continue en } x_0=1 \\ \lim\limits_{x\to +} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+\ln x)=1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+\sqrt{1-x^2}-1}{x-1}\leftrightarrow\left(1+\frac{\sqrt{-x^2+1}}{x-1}\right)\leftrightarrow$$

$$\left[1+\frac{(1-x)(x+1)}{(x-1)\sqrt{-x^2+1}}\right]\leftrightarrow\left(1+\frac{1+x}{\sqrt{-x^2+1}}\right)=1-\frac{2}{0^-}$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+\ln x-1}{x-1}\leftrightarrow$$

$\left(1+\frac{\ln x}{x-1}\right)\to$ *on pose* $X=x-1$ *qd* $x\to 1; X\to 0\to x=X+1\leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{X\to 0}=\left[1+\frac{\ln(X+1)}{X}\right]\to\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$$

ccl: f n'estpas dérivable en $x_0=1$; Cf admet en cepoint une $\frac{1}{2}$ tangente verticale à gauche et une $\frac{1}{2}$ tangente de pente 2 à droite.

3 - Etudes des variations de f

Ensemble de définition : $Ef=]-\infty;+\infty[$

Limites aux bornes de Ef

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=-\infty+\infty\leftrightarrow\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}\leftrightarrow\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{1}{-\infty}\to\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\ln x)=+\infty+\infty\to\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

Dérivée et signe pour $x\in]-\infty;-1]$

$$f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\leftrightarrow 1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\to f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$f'(x)=0\leftrightarrow\sqrt{x^2-1}+x=0\leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=-x;x<0\leftrightarrow x^2-1=x^2\ x>0$

$-1=0$ *impossible donc $f'(x)$ ne s'annulepas, il garde un signe constant.*

x	$-\infty$ $\quad -1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	

Dérivée et signe de pour $x\in]-1;1[$

$$f'(x)=1-\frac{2x}{2\sqrt{-x^2+1}}\leftrightarrow 1-\frac{x}{\sqrt{-x^2+1}}\to f'(x)=\frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}}$$

$f'(x)=0\leftrightarrow\sqrt{-x^2+1}-x=0\leftrightarrow\sqrt{-x^2+1}=x;x<0\leftrightarrow$

$-x^2+1=x^2\to 1=2x^2;x>0\to x^2=\frac{1}{2};x\geq 0\leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};x\geq 0\leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$ $\quad -1$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$	

Dérivée et signe pour $x\in[1;+\infty[$

$f'(x)=1+\frac{1}{2}\to f'(x)=\frac{x+1}{x};x>0$ *puis* $x\in x\in[1;+\infty[$; *donc* $\forall$ $x\in[1;+\infty[\ \ f'(x)>0$

x	$-\infty$ $\quad 1$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$

Tableau des variations de f

x	$-\infty$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$\sqrt{2} \searrow$	$1 \nearrow$	$+\infty$

4 - Démonstration que $f(x)=0$ *admet une solution unique* $\alpha \in]-1\,;0[$

Existence de α

$\forall x \in]-1\,;0[, f(x)=x+\sqrt{1-x^2} \leftrightarrow f(-1)=-1 ; f(0)=1$

$f(-1).f(0)<0$; *donc α existe*

Unicité de α

f est continue et strictement monotone sur $]-1\,;0[$; f est bijective sur $]-1\,;0[$; α est donc unique $\Rightarrow$ **ccl : $\exists!\, \alpha \in]-1\,;0[\, / f(\alpha)=0$**

Détermination de α par le calcul

$f(\alpha)=0 \leftrightarrow \alpha+\sqrt{1-\alpha^2}=0 \leftrightarrow \sqrt{1-\alpha^2}=-\alpha \leftrightarrow 1-\alpha^2=\alpha^2 ; -\alpha<0$

$1=2\alpha^2 \leftrightarrow \alpha^2=\frac{1}{2} \leftrightarrow \alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha<0$, **ccl : $\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$**

5 - Equation de la tangente en $x_0=0$

$f(x)=x+\sqrt{1-x^2} \rightarrow f(0)=1$ *et* $f'(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow f'(0)=1$

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \leftrightarrow f'(0)(x-0)+f(0) \rightarrow \boldsymbol{y=x+1}$

6 - Etude de la branche à $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right) \rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1 ; 1=a$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}(x+\ln x-x)=+\infty \rightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=+\infty$

ccl : branche asymptotique de meme direction que $y=x$

7 - a - Vérification que h est une primitive de $\ln x$

il suffit de verifier que $h'(x)=\ln x : h(x)=x(\ln x-1) \rightarrow$

$h'(x)=1(\ln x-1)+\left(\frac{1}{x}\right)x \leftrightarrow \ln x-1+1 \rightarrow \boldsymbol{h'(x)=\ln x}$

Deduction de la primitive de f sur $[1\,;+\infty[$

$F(x)=\int f(x)dx \rightarrow F(x)=\frac{1}{2}x^2+x(\ln x-1)$

8 -a- Démonstration de la bijection de f sur $[1\,;+\infty[$

g est continue et strictement monotone sur $[1\,;+\infty[$; donc g réalise une bijection de $I=[1\,;+\infty[$ vers $J=[-1\,;\sqrt{2}[$

b- Construction de la courbe de g^{-1}

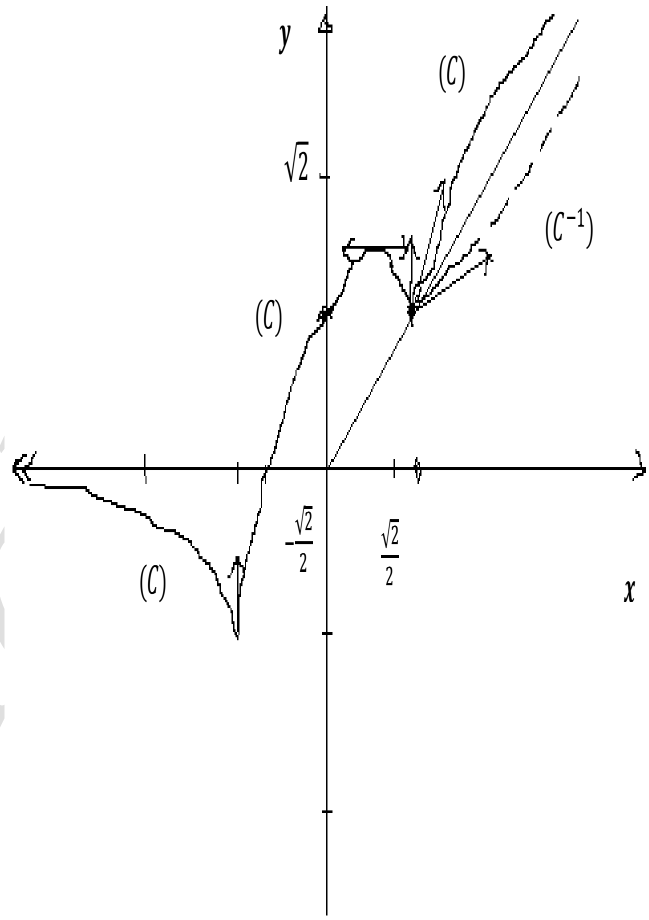
Cg et C^{-1} sont symetriques par rapport à la première bissectrice voir graphe

c- Calcul de $\left(g^{-1}\right)'(1)$

$\left(g^{-1}\right)'(1)=x \leftrightarrow g(x)=1 \leftrightarrow x+\ln x=1 \leftrightarrow x=1$

$\left(g^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{g'[g^{-1}(1)]} \leftrightarrow \left(g^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{g'(1)}$, ***avec*** $g'(x)=1+\frac{1}{x} \rightarrow$

$g'(1)=2 \rightarrow \left(g^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{2}$.



Exercice 22

A - $f_m(x)=\frac{e^x}{e^x-m}$; $m \in \mathbb{R}^*$

1 - Etude de ***$f_m(x)$ pour $m>0$***

Ensemble de définition

$f_m(x)$ est definie $\leftrightarrow e^x-m\neq 0 \leftrightarrow e^x-m=0 \leftrightarrow e^x=m \leftrightarrow$

$x=\ln(m)>0\ \exists$ car $m>0 \rightarrow$ $\boldsymbol{Ef_m=]-\infty\,;\ln(m)[\cup]\ln(m)\,;+\infty[}$

Limites aux bornes de ***Ef_m***

$\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=0$ ***car*** $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$

$\lim_{x\to-(\ln m)^-} f_m(x)=\frac{m}{0^-}=-\infty$; $\lim_{x\to(\ln m)^+} f_m(x)=\frac{m}{0^+}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-m} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x(1-me^{-x})} = 1$$

Dérivée et signe

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-m)-e^xe^x}{(e^x-m)^2} = \frac{e^x(e^x-m-e^x)}{(e^x-m)^2} \to f'_m(x) = \frac{-me^x}{(e^x-m)^2}$$

$m>0$; $e^x>0, (e^x-m)^2>0$ *donc* $f'_m(x)<0\ \forall x\in Ef_m$

Tableau de variation

x	$-\infty$	$\ln m$	$+\infty$
$f'_m(x)$	$-$	‖	$-$
$f_m(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

Asymptotes de la courbe (C_m)

les droites d'équation $y=0$ *et* $y=1$ *sont des asymptotes horizontales* à C_m.

la droite d'équation $x=\ln(m)$ *est asymptote verticale* à C_m.

Etude de $f_m(x)$ *pour* $m<0$

Ensemble de définition

$f_m(x)$ *est definie* $\leftrightarrow e^x-m\neq 0 \leftrightarrow e^x-m=0 \leftrightarrow e^x=m \to x=\ln(m)$

ce qui est impossible car $m<0$; *ccl* $Ef_m =]-\infty;+\infty[$

Limites aux bornes de Ef_m

$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = 0$ *car* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-m} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x(1-me^{-x})} = 1$$

Dérivée et signe

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-m)-e^xe^x}{(e^x-m)^2} = \frac{e^x(e^x-m-e^x)}{(e^x-m)^2} \to f'_m(x) = \frac{-me^x}{(e^x-m)^2}$$

$m<0$; *donc* $f'_m(x)>0\ \forall x\in Ef_m$

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_m(x)$	$+$	
$f_m(x)$	$0 \nearrow$	1

2 - Démonstration que $I\left(\ln(m);\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie $\forall m\in\mathbb{R}^*$

il suffit de montrer que $f(2a-x)+f(x)=2b \leftrightarrow f(2\ln|m|-x)+f(x)=1$

$$\leftrightarrow f(2\ln|m|-x)+f(x) = \frac{e^{2\ln|m|-x}}{e^{2\ln|m|-x}}+\frac{e^x}{e^x-m} \Leftrightarrow \frac{e^{\ln m^2}e^{-x}}{e^{\ln m^2}e^{-x}-m}+\frac{e^x}{e^x-m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2e^{-x}}{m^2e^{-x}-m}+\frac{e^x}{e^x-m} \Leftrightarrow \frac{m^2e^{-x}}{e^{-x}(m^2-me^x)}+\frac{e^x}{e^x-m} \Leftrightarrow \frac{m^2}{m^2-me^x}+\frac{e^x}{e^x-m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{m-e^x}+\frac{e^x}{e^x-m} \Leftrightarrow \frac{m}{m-e^x}-\frac{e^x}{m-e^x} \Leftrightarrow \frac{m-e^x}{m-e^x} \Rightarrow f(2\ln|m|-x)+f(x)=1$$

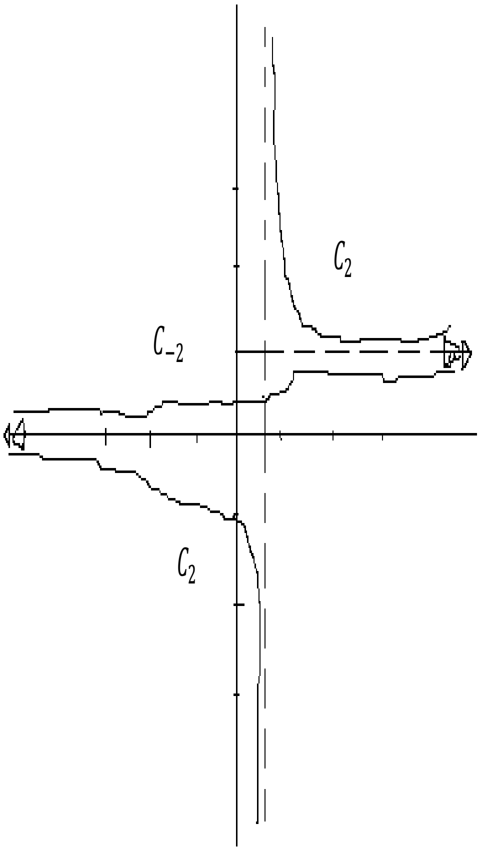
3 - Traçage des courbes C_2 *et* C_{-2}

Pour la courbe C_2 ; $f_2(x) = \frac{e^x}{e^x-2}$; $m=2>0$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'_2(x)$	$-$	‖	$-$
$f_2(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

Pour C_{-2} ; $f_{-2}(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$; $m=-2<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_{-2}(x)$	$+$	
$f_{-2}(x)$	$0 \nearrow$	1



B - $F_m(x) = ln|e^x - m|$; $m \in \mathbb{R}^*$

1 - Etude de $F_m(x)$ pour $m > 0$

Ensemble de définition

$F_m(x)$ est définie $\leftrightarrow e^x - m \neq 0 \leftrightarrow e^x - m = 0 \leftrightarrow e^x = m \rightarrow x = \ln(m)$

$EF_m =]-\infty; \ln(m)[\cup]\ln(m); +\infty[$

Limites aux bornes

$\lim\limits_{x\to-\infty} F_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ln|e^x - m| = \ln(m)$

$\lim\limits_{x\to lnm} F_m(x) = \lim\limits_{x\to lnm} ln|e^x - m| = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln|e^x - m| = +\infty$

Dérive et signe

$F'_m(x) = \frac{e^x}{e^x - m}$; $F'_m(x)$ à meme signe que $e^x - m$ s'annulant pour lnm

x	$-\infty$	$\ln(m)$	$+\infty$
$F'_m(x)$	$-$		$+$
$F_m(x)$	$lnm \searrow -\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

Etude de $F_m(x)$; pour $m < 0$

Ensemble de définition

$F_m(x)$ est définie $\leftrightarrow e^x - m \neq 0 \leftrightarrow e^x - m = 0 \leftrightarrow e^x = m \rightarrow x = \ln(m)$

impossible car $m < 0 \rightarrow EF_m(x) =]-\infty; +\infty[$

Limites aux bornes

$\lim\limits_{x\to-\infty} F_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ln|e^x - m| = \ln(-m)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln|e^x - m| = +\infty$

Dérive et signe

$F'_m(x) = \frac{e^x}{e^x - m}$; $m < 0 - m > 0$ $F'_m(x) > 0 \, \forall x \in EF_m$

x	$-\infty$	$+\infty$
$F'_m(x)$	$+$	
$F_m(x)$	$\ln(-m) \nearrow$	$+\infty$

Démonstration que $F_m(x) = x + ln|1 - me^{-x}|$

$F_m(x) = ln|e^x - m| \Leftrightarrow ln\left|e^x\left(1 - \frac{m}{e^x}\right)\right| \Leftrightarrow ln e^x + ln(1 - me^x) \Rightarrow$

$F_m(x) = x + ln|1 - me^{-x}|$

Deduction que $D : y = x$ est asymptote oblique

$\lim\limits_{x\to+\infty} (F_m(x) - y) = \lim\limits_{x\to\infty} (x + ln|1 - me^{-x}| - x)$

$\leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} (|1 - me^{-x}|) = ln1 \leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (F_m(x) - y) = 0$

ccl : $D : y = x$ est A.O à T_m

3 - Traçage des courbes T_2 et T_{-2}

Pour $F_2(x) = ln|e^x - 2|$; $m = 2 > 0$

Tableau de variation

x	$-\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$
$F'_2(x)$	$-$		$+$
$F_2(x)$	$\ln 2 \searrow -\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

Pour $F_{-2}(x)=\ln|e^x+2|$; $m=-2<0$

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$F'_{-2}(x)$	$+$	
$F_{-2}(x)$	$\ln(2)$	$\nearrow +\infty$

4 – Démonstration que la restriction de F_2 admet une restriction réciproque

D'après le TV F_2 est continue et strictement $\nearrow$ sur $]\ln 2;+\infty[$ donc F_2 est une bijection de $]\ln 2;+\infty[$ vers $]-\infty;+\infty[$ par consequent F_2 admet une bijection reciproque notée F_2^{-1}, continue et strictement $\nearrow$ de $]-\infty;+\infty[$ vers $]\ln 2;+\infty[$.

Explicitation de F_2^{-1}

$F_2(x)=\ln|e^x-2| \leftrightarrow y=\ln|e^x-2| \leftrightarrow e^y=e^{\ln|e^x-2|} \leftrightarrow e^y=|e^x-2|$

or $e^y>0 \leftrightarrow e^y=e^x-2 \leftrightarrow e^y+2=e^x \leftrightarrow \ln(e^y+2)=\ln e^x \leftrightarrow$

$x=\ln(e^y+2)$: ccl $F_2^{-1}(x)=\ln(e^x+2)$

C – 1 – Détermination de l'aire $A(\alpha)$

$y=f_{-2}(x)$; $y=1 x=\ln 2$; $x=\alpha<\ln 2$

$A(\alpha)=\int_\alpha^{\ln 2}\left(y-f_{-2}(x)\right)dx=\int_\alpha^{\ln 2}\left(1-\frac{e^x}{e^x+2}\right)dx \Leftrightarrow \left[x-\ln(e^x+2)\right]_\alpha^{\ln 2}$

$\Leftrightarrow(\ln 2-\ln 4)-\left(\alpha-\ln(e^\alpha+2)\right)\Leftrightarrow \ln 2-2\ln 2-\alpha+\ln(e^\alpha+2)$

$\Rightarrow A(\alpha)=-\ln 2-\alpha+\ln(e^\alpha+2)$

Détermination de α pour $A(\alpha)=\ln\frac{3}{2}$

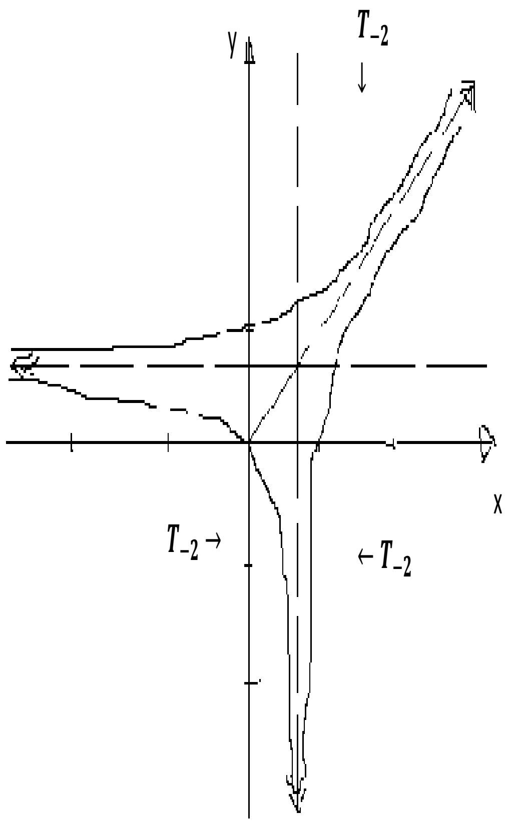
$A(\alpha)=\ln\frac{3}{2}\Leftrightarrow -\ln 2-\alpha+\ln(e^\alpha+2)=\ln 3-\ln 2$

$\Leftrightarrow -\alpha+\ln(e^\alpha+2)=\ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases}-\alpha=0\\ e^\alpha+2=3\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ e^\alpha=1\end{cases} \Rightarrow \alpha=0$

Calcul de la limite de $A(\alpha)$ à $+\infty$

$\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty} -\ln 2-\alpha+\ln(e^\alpha+2)=-\infty$

Courbes T_2 et T_{-2}



Exercice 1

Une école privée compte 8 inscrits en T_C, 64 en T_D et 28 en T_A .

1 - On demande à trois inscrits choisis au hasard de remplir un questionnaire.

Calculer les probabilités des événements suivants :

a-A : « les élèves choisis sont tous en T_D ».

b-B : « les élèves choisis sont tous d'une même série ».

2- Parmi les inscrits en T_A 45% *sont des filles. De meme* 20% *des inscrits en* T_C *et* 68% des inscrits en T_D sont des filles.

a-On choisit un inscrit au hasard, quelle est la probabilité P_1 que l'inscrit soit une fille de la T_D ? Quelle est la probabilité P_2 que l'inscrit soit une fille ?

b- Si on choisit au hasard une fille, quelle est la probabilité P_3 quelle soit en T_C ?

Exercice 2

L'équation (E) *définie par* : $y'' + ay' + by = 0$

1 – Déterminer *a et b pour que la fonction* $f(x) = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ *soit une* Solution particulière de (E).

2 – Quelle est la solution particulière de (E) qui admet au point $\Omega(0\,;3)$ une tangente parallèle a l'axe des abscisses.

Exercice 3

On considère la suite (Z_n), $n \in \mathbb{N}$, *definie par* $\begin{cases} Z_{n+1} = \left(\frac{1+i}{2}\right) Z_n \\ Z_0 = 1 \end{cases}$

1 – Déterminer la nature de la suite (Z_n) et Montrer que $Z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

2 – Pour quelles valeurs de n, (Z_n) *est reelle ? , imaginaire pur ? Puis calcul la limite de* (Z_n) à $+\infty$.

<u>Exercice 4</u> : (4 points)

Pour tout entier n, on considère les intégrales : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$

1-Calculer I_0 *et* J_0 ;

2-Soit n un entier naturel non nul :

a-En intégrant par parties I_n, puis J_n, vérifient le système :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{\frac{-n\pi}{2}} \end{cases}$$

b-En déduire, pour n entier naturel, les expressions de I_n *et* J_n en fonction de n.

c-Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$

<u>Exercice 5</u> :(4 points)

Soit l'équation différentielle (E) :$4y'' + 4y' + 9y = 0$ ou y est une fonction de la variable x et y'' sa derivee seconde.

1) Résoudre l'équation différentielle (E)
2) Trouver la fonction solution particulière de (E) vérifiant les conditions suivantes : $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ *et* $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$
3) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$;
4) Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

<u>Problème</u> :(12 points)

Soit la fonction numérique définie par :

$f(x) = -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1}$ *si* $x \le 1$

$f(x) = (x-1)e^{-x+1}$ *si* $x > 1$

$f(x) = 0$

Soit (C) la représentation graphique de f dans le plan P muni d'un repère orthonormé (O, i, j)

1) a) montrer que $\forall x \in]-\infty\, 1[$, $f(x) = \frac{(x-1(ax^2+bx+c))}{2(x^2+1)}$;

   b) Résoudre dans R l'équation f(x) = 0

2) a) Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

   b) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ écrire les équations des tangentes en $x_0 = 1$

3) Etudier les variations de f.

4) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe (C)

Tracer (Δ), (C) et les tangentes en $x_0 = 1$

BAC 2011

EXERCICE 1 : (4 points)

L'espace vectoriel $\boldsymbol{R}^3$ étant rapporté à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère l'application f de R^3 dans $\boldsymbol{R}^3$ qui, à tout vecteur $\vec{u}$ **(x, y, z)** associé le vecteur $\vec{u} = f(\overrightarrow{u})$ dont les composants **(x' ,y' ,z')** dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont définies par $\begin{cases} x' = -x + ay + 2z \\ y' = x + 2y + z \\ z' = x + y \end{cases}$

(a € R)

1) Ecrire la matrice de l'application f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$
2) Pour quelle valeur de a f est-elle bijective ?
3) Dans la suite, on pose a=1
   a) Déterminer l'ensemble E de vecteurs R^3 invariant par f,
   b) Déterminer le noyau kerf de f et l'image imf de f. en déduire une base pour chacun des sous ensembles.

4) Soit $\vec{u}$ un vecteur de R^3 de composantes $(1, \alpha, \beta)$ dans base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ calculer α *et* β *pour que* $\vec{u} \in kerf$.

EXERCISE 2 : (4points)

On considère dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation (**E**) :

$z^2 = -(1+3i)Z + 4 + 4i = 0$

1) Résoudre dans C ; l'équation (E) on appellera Z_1 la solution imaginaire pure et Z_2 l'autre solution,
2) Dans le plan (**P**) rapporté au repère$(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les quatre points A, B, C, D d'affixes respectives 3 ;$4i$; $-2+3i$; $1-i$.
   a) Placer les points A, B, C, D dans le plan.
   b) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{DA}$.
   c) Déduire la nature du quadrilatère ABCD.

PROBLEME (12points)

PARTIE A

1) Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que :

$\forall$ t € R-{-1} ; $\frac{1-t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}$,

2) Calculer : $\int_0^x \frac{1-t}{1+t} dt$

PARTIE B

Soit f, la fonction numérique de variable réelle x définie par :
f(x) = -x + ln$[(x+1)^2]$

(Ou ln désigne le logarithme népérien)
1) Donner l'ensemble de définition E_f de f
2) Déterminer les variations de f
3) Dresser le tableau de variation de f
4) Montrer que l'équation f(x) =0 admet une solution unique ∝ dans l'intervalle] 2 ; 3[
5) Calculer f(x) et f'(x) pour les valeurs de x suivantes :

   -2 ; $-\frac{3}{2}$; 0 et 5
6) Etudier les branches infinies à (C)
7) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1cm), ainsi que les tangentes à, cette courbe aux points d'abscisses -2 et 0

PARTIE C

Soit h, la fonction définie par h(x)= $-$f(x) pour x € $]-1; +\infty[$
1) Dresser le tableau de variation de h
2) Tracer (C') la courbe de la fonction h dans le même repère que (C).

Cercle Trigonométrique

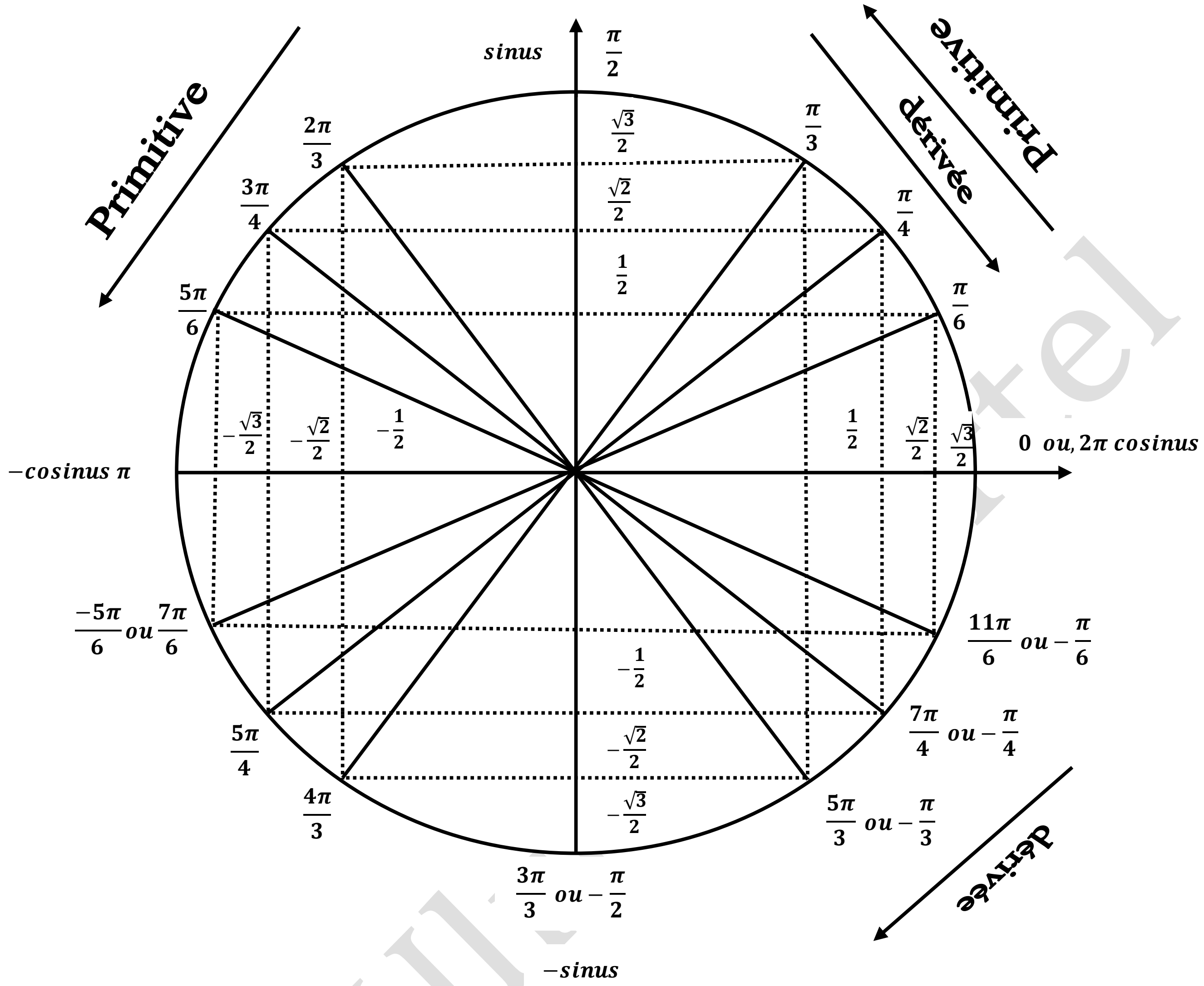


Tableau Trigonométrique

Cadran	I (α)					II $(\pi-\alpha)$				III $(\pi+\alpha)$				IV $(2\pi-\alpha)$			
Degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0^-	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0^+
Cota	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0^+	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0^-	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$

Fonctions	Dérivées	Fonctions	Primitives
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$f(x) = a$	$F(x) = ax + c$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$f(x) = sinx$	$F(x) = -cosx + C$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$f(x) = cosx$	$F(x) = sinx + C$
$f(x) = ax^2$	$f'(x) = 2ax$	$f(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$	$F(x) = \tan(x) + C$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$	$f(x) = \frac{1}{sin^2(x)} = 1 + ctn^2(x)$	$F(x) = -\text{ctan}(x) + C$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = \sin(ax + b)$	$F(x) = -\frac{1}{a}cos(ax + b)$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = anx^{n-1}$	$f(x) = \cos(ax + b)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = U' + V'$	$F(x) = U + V + C$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \lambda U'\ (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(x) = \lambda U + C$
$f(x) = \sqrt{U}$	$f'(x) = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$f(x) = U'U^n$	$F(x) = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	$f(x) = U'V + UV'$	$F(x) = UV + C$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \frac{U'}{U^2}$	$F(x) = -\frac{1}{U} + C$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \frac{U'}{\sqrt{U}}$	$F(x) = 2\sqrt{U} + C$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos x^2} = 1 + \tan x^2$	$f(x) = \frac{U'}{U^n}$	$F(x) = \frac{U^{1-n}}{1-n} + C$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sin x^2}$	$f(x) = \tan(x)$	$F(x) = -\ln\lvert cosx\rvert + C$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$f'(x) = a\cos(ax + b)$	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$f'(x) = -a\sin(ax + b)$	$f(x) = e^{ax}$	$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
$f(x) = \tan(ax + b)$	$f'(x) = \frac{-a}{sin^2(ax + b)}$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ln\lvert x\rvert + C$
$f(x) = au$	$f'(x) = au'$	$f(x) = \frac{1 + tan^2(x)}{\tan(x)}$	$F(x) = ln\lvert\tan(x)\rvert$
$f(x) = U + V$	$f'(x) = U' + V'$	$f(x) = U'U$	$F(x) = \frac{1}{2}U^2 + C$
$f(x) = UV$	$f'(x) = U'V + UV'$	$f(x) = U'\sqrt{U}$	$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{U^3} + C$
$f(x) = \frac{U}{V}$	$f'(x) = \frac{U'V - UV'}{V^2}$	$f(x) = \frac{U'}{\sqrt[3]{U}}$	$F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{U^2} + C$
$f(x) = \frac{1}{U}$	$f'(x) = -\frac{U'}{U^2}$	$f(x) = \frac{U'}{U\sqrt{U}}$	$F(x) = \frac{-2}{\sqrt{U}} + C$
$f(x) = U^n$	$f'(x) = nU^{n-1}U'$	$f(x) = U'U^2$	$F(x) = \frac{1}{3}U^3 + C$
$f(x) = \sqrt{U}$	$f'(x) = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$f(x) = U'\sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
$f(x) = e^{(ax+b)}$	$f'(x) = ae^{(ax+b)}$	$f(x) = U'\cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$
$f(x) = e^U$	$f'(x) = U'e^u$	$f(x) = \frac{U'V + UV'}{V^2}$	$F(x) = \frac{U}{V} + C$
$f(x) = \ln(U)$	$f'(x) = \frac{U'}{U}$	$f(x) = ax^n$	$F(x) = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \ln(ax + b)$	$f'(x) = \frac{a}{(ax+b)}$		