عسلامة و مرحبا في **عرض النخبة** – ثلاثية ثالثة – خاص **بشعبة رياضيات**

هاذي عيّنة من العرض بش **تلقاو** فيها سريات على **كل درس** من كل **مادة اساسية** من مختلف **المعاهد النموذجية**

اذا لقيت **صعوبة** في التمرين **و الكوركسيون** سهلتك الفهم متاعها .. *وقتها تنجم تشري العرض متاعنا اللي بش يعاونك برشا في الرفزيون و يسهل عليك الفهم*

ادخل على الموقع الرسمي و عدي كوموند

http://boutique.goldenbac.tn/

والا كلمنا على 94193616

RESUME

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Diviseurs et multiples d'un entier

Définition :
Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$.

- ✓ On dit que b divise a sill existe un entier relatif q tel que : $a = bq$. On note $b|a$.
- ✓ On dit également que a est un multiple de b ou que b est un diviseur de a.

Remarque : si a n'est pas un multiple de b alors b ne divise pas a.
Conséquences :

- ✓ Tout entier a est divisible par 1 et -1 .
- ✓ Soit a un entier non nul. Si a divise 1 alors $a = 1$ ou $a = -1$
- ✓ Soit a et b deux entiers tels que $b \neq 0$. Si b divise a alors $\forall k \in Z$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, b$ divise ak et b divise a^n.

Propriétés :
Soient a , b et c trois entiers.

- ✓ Si $a|b$ et $b|a$ alors $a = \pm b$.
- ✓ Si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$
- ✓ si $c|a$ et $c|b$ alors $c|(au + bv)$ quels que soient u et v entiers relatifs.
  On dit que c divise toute combinaison linéaire de a et de b a coefficients entiers.

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Théorème :
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, il existe un unique couple (q, r) d'entiers relatifs tels que : $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < |b|$.
q est le quotient et r est le reste.
Détermination du quotient :

$$\text{Si } b > 0 \text{ alors } q = E\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{Si } b < 0 \text{ alors } q = -E\left(-\frac{a}{b}\right)$$

Congruence modulo n

Définition :
Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul. On dit que a est congru à b modulo n ou que a et b sont congrus modulo n si $a - b$ est un multiple de n . On note $a \equiv b \pmod{n}$
Conséquences :
Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

- ✓ $a \equiv b \pmod{n} \Longleftrightarrow n$ divise $a - b$
- ✓ $a \equiv 0 \pmod{n} \Longleftrightarrow n$ divise a
- ✓ Soit d un entier naturel non nul.
  Si $a \equiv b \pmod{n}$ et d divise $n \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$

Théorème :
Soit n un entier naturel non nul. Pour tout entier a, il existe un unique entier r appartient a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que $a \equiv r(\bmod n)$.
On dit que r est le reste modulo n de a.

Congruence modulo n (suite)

Propriété réciproque :
Soient a entier relatif et n entier naturel non nul.
Si $a\equiv r(\bmod n)$ et $0\leq r<n$ alors r est le reste dans la division euclidienne de a par n.

Propriété :
Soient a,b et c trois entiers et n un entier naturel non nul.

✓ $a\equiv a(\bmod n)$.

✓ $a\equiv b(\bmod n)\Leftrightarrow b\equiv a(\bmod n)$

✓ $a\equiv b(\bmod n)\Leftrightarrow b\equiv a(\bmod n)$

✓ Si $a\equiv b(\bmod n)$ et $b\equiv c(\bmod n)$ alors $a\equiv c(\bmod n)$

Propriété :
Soient a,b,a' et b' quatre entiers relatifs et n entier naturel non nul. La congruence est compatible avec l'addition.

1. si $a\equiv b\ (\bmod\ n)$ et $a'\equiv b'\ (\bmod\ n)$ alors : $a+a'=b+b'\ (\bmod\ n)$
2. Quel que soit $c\in\mathbb{Z}$: si $a=b(\bmod n)$ alors : $a+c=b+c(\bmod n)$
3. Si $a=b(\bmod n)$ et $a'=b'(\bmod n)$ alors : $a\times a'=b\times b'(\bmod n)$
4. Quel que soit k entier naturel non nul: si $a\equiv b(\bmod n)$ alors : $a^k\equiv b^k(\bmod n)$
5. Quel que soit $c\in\mathbb{Z}$: si $a=b(\bmod n)$ alors : $a\times c=b\times c(\bmod n)$
   En particulier: si $a\equiv b(\bmod n)$ alors : $(-a)\equiv(-b)(\bmod n)$
6. si $a=b(\bmod n)$ et $a'=b'(\bmod n)$ alors : $a-a'=b-b'(\bmod n)$

Petit théorème de Fermat

Pour tout entier naturel a et pour tout nombre premier p ne divisant pas a. On a : $a^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$.
Remarque : si p est premier alors a est premier avec p si et seulement si p ne divise pas a

Corollaire

Soit p un nombre premier, quel que soit a entier naturel: $a^p\equiv a(\bmod p)$

Identité de Bezout

PGCD de deux entiers

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Notons $D(a)$ l'ensemble des diviseurs de a et $D(b)$ celui des diviseurs de b.
L'ensemble de leurs diviseurs communs est noté: $D(a,b)$ avec $D(a,b)=D(a)\cap D(b)$.
1 divise a et b donc $D(a,b)$ n'est pas vide.
De plus, a et b admettant un nombre fini de diviseurs, leurs diviseurs communs sont en nombre fini.
$D(a,b)$ étant un sous ensemble fini et non vide de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus grand élément d.

Définition du pgcd de deux entiers naturels non nuls :
Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On appelle plus grand commun diviseurs de a et b l'entier naturel noté $d=\text{pgcd}(a,b)$ ou $d=a\wedge b$ tel que :

✓ d divise a et b

✓ Tout diviseur commun à a et b est un diviseur de d.

Remarque :
Soient a et b deux entiers naturels non nuls,

✓ si $a=bq+r$ avec q et r entiers naturels non nuls alors $pgcd(a,b)=pgcd(b,r)$

✓ si b divise a alors $pgcd(a,b)=b$.

✓ $a\wedge b$ est le dernier reste non nul dans la succession des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide de a par b.

PGCD de deux entiers (suite)

Définition :
Si a et b sont deux entiers non nuls alors il existe un unique entier naturel d qui vérifie les deux conditions suivantes:

♠ d divise a et b.

♠ L'entier d est appelé plus grand commun diviseurs de a et b et noté $d = a \wedge b$ ou $d = \text{pgcd}(a,b)$

Conséquences :

✓ Pour tous entiers non nuls a et b , $a \wedge b$ est un entier naturel non nul.

✓ Pour tous entiers non nuls a et b , $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,a)$.

✓ Si a et b sont des entiers relatifs non nuls: $pgcd(a,b) = pgcd(|a|,|b|)$

Propriétés :
soient a et b deux entiers non nuls

✓ si b| a alors pgcd $(a,b) = |b|$.

✓ Si $a = bq + r$ avec q et r entiers naturels non nuls alors $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r)$.

✓ $a \wedge b = b \wedge a$.

✓ Pour tout entier non nul $k, (ka) \wedge (kb) = |k|(a \wedge b)$.

✓ Pour tout entier non nul $c_s a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

Nombres premiers

Définition :
Soit p un entier naturel. On dit que p est un nombre premier s'il admet exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts. Diviseurs qui sont 1 et lui-même. (puisque 1 divise tout nombre et tout nombre est diviseur de lui-même.)
Remarque : A ce jour, il n'existe toujours pas de critère ou de formule qui permette instantanément de dire si un nombre quelconque est premier.
Théorème 1 :
Soit $n \in \mathbb{N}$ si $n \geq 2$ alors n admet au moins un diviseur premier.
Théorème 2 :
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Si n n'est pas premier admet au moins un diviseur premier p tel que : $p \leq \sqrt{n}$
Théorème 3 : (contraposée du théorème 2) :
Si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ alors n est premier.
Théorème 4 :
L'ensemble P des nombres premiers est infini.
Théorème 5 : (DECOMPOSITION D'UN ENTIER EN PRODUIT DE FACTEURS PREMIERS)
Tout entier $n \geq 2$ se décompose de façon unique sous la forme : $\text{n} = \text{p}_1^{\alpha_1}\text{xp}_2^{\alpha_2}\text{x}\ldots\text{xp}_\text{m}^{\alpha_\text{m}}$ $O\dot{u} : p_1, p_2, \ldots p_m$ sont des nombres premiers tels que : $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont des entiers naturels non nuls.
L'écriture de n sous cette forme est appelée décomposition de n en produit de facteurs premiers.

Nombres premiers entre eux

Définition :
Soient a et b deux entiers relatifs non tous nuls. a et b sont dits premiers entre eux si pgcd $(a,b) = 1$
Remarques :

1. Deux nombres premiers entre eux ont donc 1 pour seul diviseur positif commun.
2. Si a est un nombre premier et que a ne divise pas b alors a et b sont premiers entre eux.

Théorème :
Soient a et b deux entiers non nuls. pgcd $(a,b) = d \Leftrightarrow$ il existe a' et b ' entiers tels que:$a = da'$ et $b = db'$ avec pgcd $\left(a', b'\right) = 1$

Nombres premiers entre eux (suite)

Lemme de Gauss :
Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si a divise bc et a et b premiers entre eux alors a divise c.

Théorème :
Soient a et b deux entiers naturels non nuls et n un entier.

$$\text{Si}\quad \left.\begin{array}{r} a\wedge b=1\\ n=0(\bmod a)\\ n=0(\bmod b)\end{array}\right\}\ \text{alors}\quad n=0(\bmod ab)$$

Conséquence :
Soient n et m deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux . x et x_0 deux entiers.

$$\left.\begin{array}{r} x=x_0(\bmod n)\\ x=x_0(\bmod m)\end{array}\right\}\iff x=x_0(\bmod m.n)$$

PPCM de deux entiers

Théorème et définition :
Pour tous entiers non nuls a et b , il existe un unique entier naturel non nul M qui vérifie les deux conditions suivantes:

- M est un multiple de a et de b.
- Tout multiple de commun de a et b est un multiple de M .
  L'entier M ainsi défini est le plus petit commun multiple de a et b et est noté $a\vee b$

Conséquence :

- $a\vee b=|a|\vee|b|$.
- $a\vee b=d\cdot\left|a'\cdot b'\right|$ tels que $d=a\wedge b, a=a'\cdot d$ et $b=b'\cdot d$.
- $(a\vee b)(a\wedge b)=|a\cdot b|$

Propriétés :
Soient a et b deux entiers non nuls.

- si b divise a alors $a\wedge b=|a|$.
- Pour tout entier non nul k, $(ka)\vee(kb)=|k|(a\vee b)$.
- Pour tout entier non nul c, $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$

Théorème :
Soient a et b deux entiers non nuls tels que $b\geq 2$ et $a\wedge b=1$.
Il existe un unique entier non nul u appartenant &$\{1,\ldots,b-1\}$ tel que $au\equiv 1(\bmod b)$.
On dit que u est un inverse de a modulo b.
EXEMPLE : 3 est un inverse de 5 modulo 7.

Identité de Bezout

Théorème de Bezout :
Deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au+bv=1$
Application :
Soient a, b et c trois entiers non nuls. Montrer que

✓ Si $a\wedge b=1$ et $a\wedge c=1$ alors $a\wedge(bc)=1$.

✓ si $a\wedge b=1$ alors $a\wedge b^2=1$

✓ Pour tout entier naturel n, si $a\wedge b=1$ alors $a\wedge b^n=1$

Corollaire :
Si a et b deux entiers non nuls et $d=a\wedge b$ alors il existe deux entiers u et v tels que $d=au+bv$.
Attention : La réciproque n'est pas vraie.

Equations Diophantiennes

Définition :

Toute équation (E) du type : $ax+by=c$ où a,b et c sont des entiers relatifs et où les inconnues x et y sont des entiers relatifs est appelée équation diophantienne.

Théorème :

Soient a,b et c trois entiers et $d=a\wedge b$. L'équation $ax+by=c$ admet des solutions dans Z^2 si et seulement si, d divise c.

EQUATIONS DIOPHANTIENNES : EXISTENCE DE SOLUTIONS

Étape 1 :

A quelle condition (E) admet-elle au moins une solution?

L'équation $(E): ax+by=c$ admet au moins une solution si et seulement si $a\wedge b$ divise c.

Remarque :

1. La premiere chose a faire est évidemment de calculer le PGCD de a et de b
2. Si a et b sont premiers entre eux, (E) admet des solutions quel que soit c.

Étape 2 : Recherche d'une solution particulière.

Trois cas de figure sont possibles:

- Soit la solution particulière est donnée par le texte et il ne reste qu'a vérifier qu'elle est bien solution de (E).
- Soit il y a une solution particulière évidente.
- Soit il faut trouver cette solution par le calcul.

Prenons un exemple concret: $(E): 616x+585y=12$

Première méthode

$616=585\times 1+31$

$585=31\times 18+27$

$31=27\times 1+4$

$27=4\times 6+3$

$4=3\times 1+1$

$3=1\times 3+0$

Le dernier reste non nul est 1 donc $pgcd(616,585)=1$. 1 divise 12 donc ce qui est certain c'est que l'équation a des solutions. Voici maintenant la technique a adopter pour remonter la suite de divisions.

Exprimer le PGCD : $1=4-3\times 1$

Remplacer le reste précédent : $1=4-(27-4\times 6)\times 1$

Factoriser : $1=4\times 7-27\times 1$

Remplacer le reste précédent : $1=(31-27\times 1)\times 7-27\times 1$

Factoriser : $1=31\times 7-27\times 8$

Remplacer le reste précédent : $1=31\times 7-(585-31\times 18)\times 8$

Factoriser : $1=31\times 151-585\times 8$ Remplacer le reste précédent : $1=(616-585\times 1)\times 151-585\times 8$ Factoriser : $1=616\times 151+585\times(-159)$

Multiplier par 12 : $12=616\times 1812+585\times(-1908)$

Et vue la probabilité de se tromper dans ce genre de manipulation, il est conseillé de vérifier le résultat trouvé:

En effet, la calculatrice confirme que : $616\times 1812+585\times(-1908)=12$

Une solution particulière de (E) est donc le couple ($1812;-1908$).

Deuxième méthode

		1	18	1	6	1	3
0	1	1	19	20	139	159	616
1	0	1	18	19	132	151	585

PILOTE
SFAX

Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	Série d'exercices n°19	4ème Math

3 1 11

[1] ① a) Déterminer le reste modulo 37 de 1000.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $10^{3n} \equiv 1 (\bmod 37)$.

c) En déduire que $10^{10} + 10^{20} + 10^{30} \equiv 0 \ (\bmod 37)$.

② Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n \equiv 36 (\bmod 37)$ alors $\sum_{k=0}^{n} 10^{3k} \equiv 0 (\bmod 37)$.

[2] ① a) Déterminer, pour tout entier n de $\{0,1,2,3,4\}$, le reste modulo 13 de 5^n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 96^{4n+2} \equiv 11 (\bmod 13)$.

② a) Vérifier que pour tout entier x , $x + x^2 + x^3 + x^4 = x(x+1)(x^2+1)$.

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n qui vérifient $5^n + 5^{2n} + 5^{3n} + 5^{4n} \equiv 0 (\bmod 13)$.

[3] Soit a et b deux entiers.

① Montrer que $(a+b)^7 \equiv a^7 + b^7 (\bmod 7)$. (on pourra utiliser que pour tout k de $\{1,2,\dots,6\}$, 7 divise C_7^k).

② En déduire que $(a+b) \equiv 0 (\bmod 7)$, si et seulement si $a^7 + b^7 \equiv 0 (\bmod 7)$.

③ Déterminer le reste modulo 7 de $444444^7 + 333333^7$

④ Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n^7 + 128 \equiv 0 (\bmod 7)$.

[4] ① Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a) $x^2 \equiv 1 (\bmod 5)$. b) $x^2 \equiv 4 (\bmod 5)$.

② Déterminer tous les couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 y \equiv 1 (\bmod 5)$.

[5] Soit a un entier .

① a) Montrer que $a(a^2 - 1) \equiv 0 (\bmod 6)$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $a(a^{2n} - 1) \equiv 0 (\bmod 6)$.

② Montrer que $1001^{1001} + 1003^{1003} + 1005^{1005} \equiv 3 (\bmod 6)$.

[6] ① Déterminer tous les entiers a tels que $a + a^2 + a^3 \equiv 1 (\bmod 7)$.

② Déterminer tous les entiers a tels que $a^6 \equiv 1 (\bmod 7)$.

③ Déterminer le reste modulo 7 de $(7005)^6 - \left[7005 + 7005^2 + 7005^3\right]$.

[7] ① a) Montrer que pour tous entiers naturels k et r, $5^{4k+r} \equiv 5^r \ (\bmod 13)$.

b) Déterminer les restes possibles dans la division euclisienne de 5^n par 13 , $n \in \mathbb{N}$.

② Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = 1 + 5^n + 5^{2n} + 5^{3n}$.

a) Déterminer le reste modulo 13 de a_{2000} et a_{2001}.

b) Montrer que $a_n \equiv 0 (\bmod 13)$ si et seulement si n n'est pas un multiple de 4.

③ Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \equiv 4 (\bmod 13)$.

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

32

1) $2x \equiv 6(\text{mod}10)$

2) $2x \equiv 3(\text{mod}5)$

3) $x^2 \equiv 0(\text{mod}3)$

4) $x^2 \equiv 1(\text{mod}3)$

5) $x^2 - 5x + 4 \equiv 0(\text{mod}5)$

6) $x^2 + 2x + 4 \equiv 0(\text{mod}3)$

9 Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le chiffre des unités des nombres 2^n et 7^n.
Trouver alors le chiffre des unités du nombre $A = 3548^9 \times 2537^{31}$

10 On admet que 1979 est premier.

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation : $2x \equiv 1(\text{mod}1979)$

2) On considère l'équation $(E): x^2 - x + 494 \equiv 0(\text{mod}1979)$

a) Soit x solution de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$, déterminer le reste de $(x-990)^2$ par 1979

b) En déduire les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$

11 1) Soit $x \in \mathbb{Z}$, déterminer le reste de la division euclidienne de x^3 par 9. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Z}$:

$x^3 \equiv 0(\text{mod}9)$ *éq* $x \equiv 0(\text{mod}3)$

$x^3 \equiv 1(\text{mod}9)$ *éq* $x \equiv 1(\text{mod}3)$

$x^3 \equiv 8(\text{mod}9)$ *éq* $x \equiv 2(\text{mod}3)$

2)Soient x, y, et z trois entiers relatifs tels que $x^3 + y^3 + z^3$ soit divisible par 9. Montrer que l'un des nombres x, y ou z est divisible par 3.

12 Soit le nombre $A = 10^{9n} + 2\times10^{6n} + 2\times10^{3n} + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$

1) Vérifier que : $10^3 \equiv 1(\text{mod}111)$ et $10^3 \equiv -1(\text{mod}7)$

2) Quel est le reste de la division de A par 111 ?

3) On suppose que n est impair : Montrer que A est divisible par 7, par 11 et par 13

4) On suppose que n est pair

a) Montrer que A-6 est divisible par 7 ; par 11 et par 13

b) Quel est le reste de la division de A par : 111×1001?

13 1) Déterminer suivant les valeurs de n, les restes modulo 9 de 2^n.

2) En déduire les valeurs de n tels que $2^n - 1 \equiv 0(\text{mod}9)$.

3) Montrer que $2^x.11^y \equiv 1(\text{mod}9)$ si et seulement si $x + y \equiv 0(\text{mod}6)$.

4) En déduire le reste de la division euclidiénne de $2009^{2008}.20^{992}$ par 9.

5) Soit $N = a.11^2 + b.11 + c$ où a ;b et c sont des éléments de $\{0,1,2,...,9\}$.

Montrer que si $N \equiv 0(\text{mod}9)$ alors $(4a+c)^3 - b^3 \equiv 0(\text{mod}9)$

14 Pour tout entier naturel n on pose $a_n = n.7^n + (n+1).7^{n+1} + (n+2).7^{n+2}$

1) Déterminer ,suivant n, le reste modulo 19 de 7^n

2) En déduire ,suivant n , le reste modulo 19 de a_n

3) a) Soit p un entier naturel tel que $p \equiv 0(\text{mod}3)$. Montrer que $a_p + a_{p+1} + a_{p+2}$ est divisible par19

b) En déduire le reste modulo 19 de $\sum_{i=0}^{100} a_i$.

Lycée Pilote Sfax — Serie 19 — $4^{ème}$ Math

Exercice 1

1) a) $1000 = 37 \times 27 + 1$ donc $1000 \equiv 1 \bmod(37)$

b) soit $n \in \mathbb{N}$; $10^{3n} = (10^3)^n = 1000^n \equiv 1 \bmod(37)$

c) $10 = 3\times3+1$ donc $10^{10} = 10^{3\times3+1} = 10^{3\times3} \times 10 \equiv 10 \bmod(37)$

$20 = 3\times6+2$ donc $10^{20} = 10^{3\times6+2} = 10^{3\times6} \times 10^2 \equiv 10^2 \bmod(37)$

$30 = 3\times10$ donc $10^{30} = 10^{3\times10} \equiv 1 \bmod(37)$ d'où

$10^{10} + 10^{20} + 10^{30} \equiv 10 + 10^2 + 1 \bmod(37)$ or $10 + 10^2 + 1 = 111 = 37\times3 \equiv 0 (\bmod 37)$

d'où $10^{10} + 10^{20} + 10^{30} \equiv 0 \bmod(37)$

2) soit $n \in \mathbb{N}$; $\sum_{k=0}^{n} 10^{3k} \equiv \sum_{k=0}^{n} 1 \bmod(37)$ d'où $\sum_{k=0}^{n} 10^{3k} \equiv n+1 \bmod(37)$

Si $n \equiv 36 \bmod(37)$ alors $n+1 \equiv 0 \bmod(37)$ d'où $\sum_{k=0}^{m} 10^{3k} \equiv 0 \bmod(37)$

Exercice 2

1) a) $5^0 = 1 \equiv 1 \bmod(13)$

$5^1 = 5 \equiv 5 \bmod(13)$

$5^2 = 25 \equiv 12 \bmod(13)$

$5^3 = 125 \equiv 8 \bmod(13)$

$5^4 = 625 \equiv 1 \bmod(13)$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- $18 \equiv 5 \bmod(13)$; $18^{4n+1} \equiv 5^{4n+1} \bmod(13)$

$5^{4n+1} = (5^4)^n \times 5^1 \equiv 5 \bmod(13)$ d'où $18^{4n+1} \equiv 5 \bmod(13)$

- $44 \equiv 5 \bmod(13)$; $44^{4n-1} = 44^{4(n-1)+3} \equiv 5^{4(n-1)+3} \bmod(13)$

$5^{4(n-1)+3} = (5^4)^{(n-1)} \times 5^3 \equiv 8 \bmod(13)$ d'où $-44^{4n-1} \equiv -8 \bmod(13)$

- $96 \equiv 5 \bmod(13)$; $96^{4n+2} \equiv 5^{4n+2} \bmod(13)$

$5^{4n+2} = (5^4)^n \times 5^2 \equiv 12 \bmod(13)$ d'où $-96^{4n+2} \equiv -12 \bmod(13)$

$18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 96^{4n+2} \equiv 5 - 8 - 12 \bmod(13)$; $5-8-12 = -15 \equiv 11 \bmod(13)$

d'où $18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 96^{4n+2} \equiv 11 \bmod(13)$

2) a) $x(x+1)(x^2+1) = (x^2+x)(x^2+1) = x^4 + x^2 + x^3 + x = x + x^2 + x^3 + x^4$; $x \in \mathbb{Z}$

b) $n\in\mathbb{N}$; $5^n+5^{2n}+5^{3n}+5^{4n}=5^n(5^n+1)(5^{2n}+1)\equiv 0 \bmod (13)$

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{5^n\equiv 0 \bmod (13)}_{imp}$ ou $5^n+1\equiv 0$ ou $5^{2n}+1\equiv 0 \bmod (13)$ car 13 p

$\Leftrightarrow$ $5^n\equiv 12 \bmod (13)$ ou $5^{2n}\equiv 12 \bmod (13)$

$\Leftrightarrow$ $m=4k+2$ ou $2n=4k+2$; $k\in\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow n=n=4k+2$ ou $n=2k+1$; $k\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$ $m\in\{4k+1 ; 4k+2 ; 4k+3 ; k\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{N}\setminus\{4k, k\in\mathbb{N}\}$

Exercice 3

1) $(a+b)^7=\sum_{k=0}^{7} C_7^k a^k b^{7-k}=b^7+\sum_{k=1}^{6} C_7^k a^k b^{7-k}+a^7\equiv a^7+b^7 \bmod (7)$

car $C_7^k\equiv 0 \bmod (7)$; $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$

2) 7 premier ; $a+b\in\mathbb{Z}$ donc $(a+b)^7\equiv(a+b) \bmod (7)$ (Fermat)

$a+b\equiv 0 \bmod (7) \Leftrightarrow (a+b)^7\equiv 0 \bmod (7) \Leftrightarrow a^7+b^7\equiv 0 \bmod (7)$

3) $a=444444$; $b=333333$; $a+b=777777\equiv 0 \bmod (7)$ donc

$444444^7+333333^7\equiv 0 \bmod (7)$

4) $128=2^7$; $n^7+128=n^7+2^7\equiv 0 \bmod (7) \Leftrightarrow n+2\equiv 0 \bmod (7) \Leftrightarrow n\equiv 5$ m

$m\in\{7k+5 ; k\in\mathbb{N}\}$.

Exercice 4

1) $x\equiv 0 \bmod (5) \Rightarrow x^2\equiv 0 \bmod (5)$

$x\equiv 1 \bmod (5) \Rightarrow x^2\equiv 1 \bmod (5)$

$x\equiv 2 \bmod (5) \Rightarrow x^2\equiv 4 \bmod (5)$

$x\equiv 3 \bmod (5) \Rightarrow x^2\equiv 4 \bmod (5)$

$x\equiv 4 \bmod (5) \Rightarrow x^2\equiv 1 \bmod (5)$

d'où a) $x^2\equiv 1 \bmod (5) \Leftrightarrow x\equiv 1 \bmod (5)$ ou $x\equiv 4 \bmod (5)$

$S_{\mathbb{Z}}=\{5k+1 ; 5k+4 ; k\in\mathbb{Z}\}$

b) $x^2\equiv 4 \bmod (5) \Leftrightarrow x\equiv 2 \bmod (5)$ ou $x\equiv 3 \bmod (5)$.

$S_{\mathbb{Z}}=\{5k+3 ; 5k+2 ; k\in\mathbb{Z}\}$

2) $x^2y\equiv 1 \bmod (5) \Leftrightarrow x^2\equiv 1 \bmod (5)$ et $y\equiv 1 \bmod (5)$ ou $x^2\equiv 4 \bmod (5)$ et $y\equiv 4$ mo

$\Leftrightarrow S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(5k+3 ; 5p+4) ; (5k+2 ; 5p+4) ; (5k+1 , 5p+1) ; (5k+4 ; 5p+1)$

$k\in\mathbb{Z}$; $p\in\mathbb{Z}\}$ " $ab\equiv 1 \bmod (5) \Leftrightarrow a\equiv 1 (\bmod (5))$ et $b\equiv 1 \bmod (5)$ "
ou $a\equiv 4 \bmod (5)$ et $b\equiv 1 \bmod (5)$

Exercice 5

1) a) $a(a^2-1)\equiv 0 \bmod(6)$ $a\in\mathbb{Z}$. En effet :

- si $a\equiv 0 \bmod(6)$ alors $a(a^2-1)\equiv 0 \bmod(6)$

si $a\equiv 1 \bmod(6)$ alors $a^2-1\equiv 0 \bmod(6)$ donc $a(a^2-1)\equiv 0 \bmod(6)$

si $a\equiv 2 \bmod(6)$ alors $a^2-1\equiv 3 \bmod(6)$ donc $a(a^2-1)\equiv 0 \bmod(6)$

si $a\equiv 3 \bmod(6)$ alors $a^2-1\equiv 2 \bmod(6)$ donc $a(a^2-1)\equiv 0 \bmod(6)$

si $a\equiv 4 \bmod(6)$ alors $a^2-1\equiv 3 \bmod(6)$ donc $a(a^2-1)\equiv 0 \bmod(6)$

si $a\equiv 5 \bmod(6)$ alors $a^2-1\equiv 0 \bmod(6)$ donc $a(a^2-1)\equiv 0 \bmod(6)$

b) $n\geqslant 1$; $(1+a^2+a^4+\dots+a^{2n-2})(a^2-1)=a^2+a^4+a^6+\dots+a^{2n-2}+a^{2n}-1-a^2-a^4-\dots-a^{2n-2}$

$=a^{2n}-1$ donc $a(a^{2n}-1)=a(a^2-1)(1+a^2+a^4+\dots+a^{2n-2})\equiv 0 \bmod(6)$

Car : $a(a^2-1)\equiv 0 \bmod(6)$

2) on a : $a(a^{2n}-1)\equiv 0 \bmod(6)$ donc $a^{2n+1}\equiv a \bmod(6)$

$a=1001$; $1001=2\times 500+1$; $1003=2\times 501+1$; $1005=2\times 502+1$

$1001^{1001}\equiv 1001 \bmod(6)$; $1001^{1003}\equiv 1001 \bmod(6)$; $1001^{1005}\equiv 1001 \bmod(6)$

d'où $1001^{1001}+1001^{1003}+1001^{1005}\equiv 3003 \bmod(6)$ d'où $1001^{1001}+1001^{1003}+1001^{1005}\equiv 3 \bmod(6)$

Exercice 6

1) Si $a\equiv 0 \bmod(7)$ $\Rightarrow$ $a^2\equiv 0 \bmod(7)$; $a^3\equiv 0 \bmod(7)$; $a+a^2+a^3\equiv 0 \bmod(7)$

Si $a\equiv 1 \bmod(7)$; $a^2\equiv 1 \bmod(7)$; $a^3\equiv 1 \bmod(7)$; $a+a^2+a^3\equiv 3 \bmod(7)$

Si $a\equiv 2 \bmod(7)$; $a^2\equiv 4 \bmod(7)$; $a^3\equiv 1 \bmod(7)$; $a+a^2+a^3\equiv 0 \bmod(7)$

Si $a\equiv 3 \bmod(7)$; $a^2\equiv 2 \bmod(7)$; $a^3\equiv 6 \bmod(7)$; $a+a^2+a^3\equiv 4 \bmod(7)$

Si $a\equiv 4 \bmod(7)$; $a^2\equiv 2 \bmod(7)$; $a^3\equiv 1 \bmod(7)$; $a+a^2+a^3\equiv 0 \bmod(7)$

Si $a\equiv 5 \bmod(7)$; $a^2\equiv 4 \bmod(7)$; $a^3\equiv 6 \bmod(7)$; $a+a^2+a^3\equiv 1 \bmod(7)$

Si $a\equiv 6 \bmod(7)$; $a^2\equiv 1 \bmod(7)$; $a^3\equiv 6 \bmod(7)$; $a+a^2+a^3\equiv 6 \bmod(7)$

donc $a+a^2+a^3\equiv 1 \bmod(7) \Leftrightarrow a\equiv 5 \bmod(7)$; $S_{\mathbb{Z}}=\{7k+5 ; k\in\mathbb{Z}\}$

2) si $a\wedge 7=1$; 7 premier D'après Fermat $a^6\equiv 1 \bmod(7)$

Si $a\wedge 7=7$; $a^6\equiv 0 \bmod(7)$

$a^6\equiv 1 \bmod(7) \Leftrightarrow a\in\mathbb{Z}\setminus\{7k ; k\in\mathbb{Z}\}$

3) $7005 \equiv 5 \bmod(7)$ donc $7005^6 \equiv 1 \bmod(7)$ et $7005 + 7005^2 + 7005^3 \equiv 1 \bmod(7)$

d'où $7005^6 - (7005 + 7005^2 + 7005^3) \equiv 0 \bmod(7)$

Exercice 7

1) a) $5^4 \equiv 1 \bmod(13)$, $5^{4k+r} = 5^{4k} \times 5^r = (5^4)^k \times 5^r \equiv 5^r \bmod(13); k \in \mathbb{N}; r \in \mathbb{N}$

b) Si $n = 4k+0$; $5^n \equiv 5^0 \bmod(13)$ càd $5^n \equiv 1 \bmod(13)$

Si $n = 4k+1$; $5^n \equiv 5^1 \bmod(13)$

Si $n = 4k+2$; $5^n \equiv 5^2 \bmod(13)$ càd $5^n \equiv 12 \bmod(13)$

Si $n = 4k+3$; $5^n \equiv 5^3 \bmod(13)$ càd $5^n \equiv 8 \bmod(13)$

2) a) $a_{2000} = 1 + 5^{2000} + 5^{4000} + 5^{6000} \equiv 4 \bmod(13)$

$a_{2001} = 1 + 5^{2001} + 5^{4002} + 5^{6003} \equiv 1 + 5 + 12 + 8 \bmod(13)$; $a_{2001} \equiv 0 \bmod(13)$

b) $a_{4k} = 1 + 5^{4k} + 5^{8k} + 5^{12k} \equiv 4 \bmod(13)$

$a_{4k+1} = 1 + 5^{4k+1} + 5^{8k+2} + 5^{12k+3} \equiv 1 + 5 + 12 + 8 \bmod(13)$; $a_{4k+1} \equiv 0 \bmod(13)$

$a_{4k+2} = 1 + 5^{4k+2} + 5^{8k+4} + 5^{12k+4+2} \equiv 1 + 12 + 1 + 12 \bmod(13)$; $a_{4k+2} \equiv 0 \bmod(13)$

$a_{4k+3} = 1 + 5^{4k+3} + 5^{8k+4+2} + 5^{12k+8+1} \equiv 1 + 8 + 12 + 5 \bmod(13)$; $a_{4k+3} \equiv 0 \bmod(13)$

d'où $a_n \equiv 0 \bmod(13) \iff n \neq 4k, k \in \mathbb{N} \iff n$ n'est pas un multiple de 4

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $\{n; n+1; n+2; n+3\}$ sont 4 termes consécutifs donc il existe un seul divisible par 4. Soit N_0 divisible par 4 et les trois autres ne sont pas divisible par 4. d'où $a_{N_0} \equiv 4 \bmod(13)$ et les trois autres : $p \neq N_0$. $a_p \equiv 0 \bmod(13)$ d'où $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \equiv 4 \bmod(13)$.

Exercice 8

1/

$x \equiv \cdot \bmod(10)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2x \equiv \cdot \bmod(10)$	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8

$2x \equiv 6 \bmod(10) \iff x \equiv 3 \bmod(10)$ ou $x \equiv 8 \bmod(10)$. $S_{\mathbb{Z}} = \{10k+3; 10k+8; k \in \mathbb{Z}\}$

2)

$x \equiv \cdot \bmod(5)$	0	1	2	3	4
$2x \equiv \cdot \bmod(5)$	0	2	4	1	3

$2x \equiv 3 \bmod(5) \iff x \equiv 4 \bmod(5)$. $S_{\mathbb{Z}} = \{5k+4 ; k \in \mathbb{Z}\}$

3)

$x \equiv . \bmod(3)$	0	1	2
$x^2 \equiv . \bmod(3)$	0	1	1

$x^2 \equiv 0 \bmod(3) \iff x \equiv 0 \bmod(3)$ $S_{\mathbb{Z}} = \{3k ; k \in \mathbb{Z}\}$

4) $x^2 \equiv 1 \bmod(3) \iff x \equiv 1 \bmod(3)$ ou $x \equiv 2 \bmod(3)$. $S_{\mathbb{Z}} = \{3k+1 ; 3k+2 ; k \in \mathbb{Z}\}$

5) $x^2 \cancel{-5x} + 4 \equiv 0 \bmod(5) \iff x^2 + 4 \equiv 0 \bmod(5) \iff x^2 \equiv 1 \bmod(5) \iff$

$x \equiv 1 \bmod(5)$ ou $x \equiv 4 \bmod(5)$. $S_{\mathbb{Z}} = \{5k+1 ; 5k+4 ; k \in \mathbb{Z}\}$

6) $x^2 + 2x + 4 \equiv 0 \bmod(3) \iff x^2 + 2x + 1 \equiv 0 \bmod(3) \iff (x+1)^2 \equiv 0 \bmod(3)$

$\iff x + 1 \equiv 0 \bmod(3) \iff x \equiv 2 \bmod(3)$. $S_{\mathbb{Z}} = \{3k+2 ; k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 9

1) $2^1 \equiv 2 \bmod(10)$ * Si $n = 4k$; $2^n \equiv 6 \bmod(10)$

$2^2 \equiv 4 \bmod(10)$. $k = 1$ vrai

$2^3 \equiv 8 \bmod(10)$. Si $n = 4k$ la propriété est vrai : Mq si $n = 4k+4$ $2^n \equiv 6$ mod

$2^4 \equiv 6 \bmod(10)$ $2^n = 2^{4k+4} = 2^{4k} \times 2^4 \equiv 6 \times 6 \equiv 6 \bmod(10)$.

$2^5 \equiv 2 \bmod(10)$

- Si $n = 4k+1$; $2^n = 2^{4k} \times 2^1 \equiv 6 \times 2 \equiv 2 \bmod(10)$
- Si $n = 4k+2$; $2^n = 2^{4k} \times 2^2 \equiv 6 \times 4 \equiv 4 \bmod(10)$
- Si $n = 4k+3$; $2^n = 2^{4k} \times 2^3 \equiv 6 \times 8 \equiv 8 \bmod(10)$

(*) $7^1 \equiv 7 \bmod(10)$

$7^2 \equiv 9 \bmod(10)$

$7^3 \equiv 3 \bmod(10)$

$7^4 \equiv 1 \bmod(10)$

Si $n = 4k$; $7^{4k} = (7^4)^k \equiv 1 \bmod(10)$

Si $n = 4k+1$; $7^{4k+1} = 7^{4k} \times 7^1 \equiv 7 \bmod(10)$

Si $n = 4k+2$; $7^{4k+2} = 7^{4k} \times 7^2 \equiv 9 \bmod(10)$

Si $m = 4k+3$; $7^{4k+3} = 7^{4k} \times 7^3 \equiv 3 \bmod(10)$

. $3548^9 \equiv 8^9$ mod(10) ; $27 = 4\times6+3$ et $8 = 2^3$ donc $8^9 = (2^3)^9 = 2^{27}$

$3548^9 \equiv 2^{27}$ mod(10) ; $2^{27} \equiv 8$ mod(10)

. $2537^{31} \equiv 7^{31}$ mod(10) ; $31 = 4\times7+3$; $7^{31} \equiv 3$ mod(10)

$A = 3548^9 \times 2537^{31} \equiv 8\times3$ mod(10) ; $A \equiv 4$ mod(10)

Exercice 10 : 1979 est Premier

1/ $990\times2 \equiv 1$ mod (1979)

$2x \equiv 1$ mod(1979) $\Leftrightarrow$ $990\times2x \equiv 990$ mod(1979) $\Leftrightarrow x \equiv 990$ mod(1979)

$S_{\mathbb{Z}} = \{1979k + 990 ; k \in \mathbb{Z}\}$

2) a) (E) $x^2 - x + 494 \equiv 0$ mod(1979) ; x est une solution de (E)

$(x-990)^2 = x^2 - 2\times990\times x + (990)^2 \equiv x^2 - x + (990)^2$ mod(1979)

or $x^2 - x \equiv -494$ mod(1979) d'où $(x-990)^2 \equiv -494 + (990)^2$ mod(1979)

$(990)^2 - 494 = 979606 \equiv 1$ mod(1979)

b) x est une solution de (E) $\Leftrightarrow (x-990)^2 \equiv 1$ mod(1979)

$\Leftrightarrow x - 990 \equiv 1$ mod(1979) ou $x - 990 \equiv 1978$ mod(1979)

(Car 1979 est premier) $\Leftrightarrow x \equiv 991$ mod(1979) ou $x \equiv 989$ mod(1979)

$S_{\mathbb{Z}} = \{1979k + 991 ; 1979k + 989 , k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 11

1)

$x \equiv \cdot$ mod(9)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^3 \equiv \cdot$ mod(9)	0	1	8	0	1	8	0	1	8

$x^3 \equiv 0$ mod(9) $\Leftrightarrow x \equiv 0$ mod(9) ou $x \equiv 3$ mod(9) ou $x \equiv 6$ mod(9)

$\Leftrightarrow x = 9k$ ou $x = 9k+3$ ou $x = 9k+6$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = 3\times(3k)$ ou $x = 3(3k+1)$ ou $x = 3(3k+2)$; $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x \equiv 0$ mod(3)

$x^3 \equiv 1$ mod(9) $\Leftrightarrow x \equiv 1$ mod(9) ou $x \equiv 4$ mod(9) ou $x \equiv 7$ mod(9)

$\Leftrightarrow x = 9k+1$ ou $x = 9k+4$ ou $x = 9k+7$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = 3(3k)+1$ ou $x = 3(3k+1)+1$ ou $x = 3(3k+2)+1$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x \equiv 1$ mod(3)

$x^3 \equiv 8 \bmod (9) \Leftrightarrow x \equiv 2 \bmod (9)$ ou $x \equiv 5 \bmod (9)$ ou $x \equiv 8 \bmod (9)$

$\Leftrightarrow x = 9k+2$ ou $x = 9k+5$ ou $x = 9k+8$; $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = 3(3k)+2$ ou $x = 3(3k+1)+2$ ou $x = 3(3k+2)+2$; $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x \equiv 2 \bmod (3)$

2) $x^3+y^3+z^3 \equiv 0 \bmod (9)$ ~~supposons $x \not\equiv 0 \bmod (3)$ et~~ $y \not\equiv 0 \bmod (3)$

si $x \equiv 1 \bmod (3)$ alors $x^3 \equiv 1 \bmod (9)$

* $y \equiv 1 \bmod (3)$ alors $y^3 \equiv 1 \bmod (9)$ d'où $z^3 \equiv 7 \bmod (9)$ impossible
* $y \equiv 2 \bmod (3)$ alors $y^3 \equiv 8 \bmod (9)$ d'où $z^3 \equiv 0 \bmod (9)$ donc $z \equiv 0 \bmod (3)$

si $x \equiv 2 \bmod (3)$ alors $x^3 \equiv 8 \bmod (9)$

* $y \equiv 1 \bmod (3)$ alors $y^3 \equiv 1 \bmod (9)$ d'où $z^3 \equiv 0 \bmod (9)$ donc $z \equiv 0 \bmod (3)$
* $y \equiv 2 \bmod (3)$ alors $y^3 \equiv 8 \bmod (9)$ d'où $z^3 \equiv 7 \bmod (9)$ imp impossi

D'où $z \equiv 0 \bmod (3)$.

Exercice 12

1) $10^3 - 1 = 1000 - 1 = 999 = 111 \times 9 \equiv 0 \bmod (111)$ donc $10^3 \equiv 1 \bmod (111)$

$10^3 + 1 = 1001 = 7 \times 143 \equiv 0 \bmod (7)$ donc $10^3 \equiv -1 \bmod (7)$

2) $A = 1 + 10^{9n} + 2 \times 10^{6n} + 2 \times 10^{3n} = (10^3)^{3n} + 2 \times (10^3)^{2n} + 2 \times (10^3)^n \equiv 2+2+2 \bmod (111)$

$A \equiv 6 \bmod (111)$

3) n est impair donc $n = 2p+1$; $p \in \mathbb{N}$; $3n = 6p+3$; $2n = 4p+2$.

$A = (10^3)^{3n} + 2 \times (10^3)^{2n} + 2 \times (10^3)^n + 1 \equiv (-1)^{3n} + 2 \times (-1)^{2n} + 2 \times (-1)^n + 1 \bmod (7)$

$A \equiv (-1) + 2 + (-2) + 1 \equiv 0 \bmod (7)$ donc A est divisible par 7

$A \equiv (-1)^{3n} + 2 \times (-1)^{2n} + 2 \times (-1)^n + 1 \bmod (11)$ car $10^3 \equiv -1 \bmod (11)$

d'où $A \equiv 0 \bmod (11)$ donc A est divisible par 11

$A \equiv (-1)^{3n} + 2 \times (-1)^{2n} + 2 \times (-1)^n + 1 \bmod (13)$ car $10^3 \equiv -1 \bmod (13)$

d'où $A \equiv 0 \bmod (13)$ donc A est divisible par 13

4) n est pair donc $n = 2p$; $p \in \mathbb{N}$; $3n = 6p$; $2n = 4p$

a) $A \equiv (-1)^{3n} + 2 \times (-1)^{2n} + (-1)^n \times 2 + 1 \bmod (7)$

$A \equiv 1 + 2 + 2 + 1 \bmod (7)$ donc $A - 6 \equiv 0 \bmod (7)$

$A \equiv (-1)^{3n} + 2\times(-1)^{2n} + 2\times(-1)^{n} + 1 \mod(11)$

$A \equiv 1 + 2 + 2 + 1 \mod(11)$ donc $A - 6 \equiv 0 \mod(11)$

$A \equiv (-1)^{3n} + 2\times(-1)^{2n} + 2\times(-1)^{n} + 1 \mod(13)$

$A \equiv 1 + 2 + 2 + 1 \mod(13)$ donc $A - 6 \equiv 0 \mod(13)$

d'où $A-6$ est divisible par 7 ; 11 ; et 13

b) $A - 6 \equiv 0 \mod(7)$

$A - 6 \equiv 0 \mod(11)$

$A - 6 \equiv 0 \mod(13)$

$A - 6 \equiv 0 \mod(111)$

$PGCD(7;11;13;111) = 1$ donc $A - 6 \equiv 0 \mod(111\times7\times11\times13)$

$A - 6 \equiv 0 \mod(111\times1001)$

Exercice 13

1) $2^0 \equiv 1 \mod(9)$ Si $n=6k$; $2^n \equiv 1 \mod(9)$

$2^1 \equiv 2 \mod(9)$ Si $n=6k+1$; $2^n \equiv 2 \mod(9)$

$2^2 \equiv 4 \mod(9)$ Si $n=6k+2$; $2^n \equiv 4 \mod(9)$

$2^3 \equiv 8 \mod(9)$ Si $n=6k+3$; $2^n \equiv 8 \mod(9)$

$2^4 \equiv 7 \mod(9)$ Si $n=6k+4$; $2^n \equiv 7 \mod(9)$

$2^5 \equiv 5 \mod(9)$ Si $n=6k+5$; $2^n \equiv 5 \mod(9)$

$2^6 \equiv 1 \mod(9)$

2) $2^n - 1 \equiv 0 \mod(9) \Leftrightarrow 2^n \equiv 1 \mod(9) \Leftrightarrow n = 6k ; k \in \mathbb{N}$

3) $11 \equiv 2 \mod(9)$. $2^x \times 11^y \equiv 1 \mod(9) \Leftrightarrow 2^{x+y} \equiv 1 \mod(9) \Leftrightarrow x+y \equiv 0 \mod(6)$

4) $2009 \equiv 2 \mod(9)$; $20 \equiv 11 \mod(9)$ donc $2009^{2008} \times 20^{992} \equiv 2^{2008} \times 11^{992} \mod(9)$

$2008 + 992 = 3000 \equiv 0 \mod(6)$ donc $2^{2008} \times 11^{998} \equiv 1 \mod(9)$ d'où

$2009^{2008} \times 20^{992} \equiv 1 \mod(9)$ le reste de la division euclidienne de $2009^{2008} \times 20^{992}$ par 9 est 1

5) $N = a\times11^2 + b\times11 + c \equiv 0 \mod(9)$ donc $4a + 2b + c \equiv 0 \mod(9)$

d'où $4a + c \equiv -2b \mod(9)$

$-(1+a+c)^3 \equiv (-2b)^3$ mod(9) donc $(4a+c)^3 \equiv -8b^3$ mod(9)

or $-8 \equiv 1$ mod(9) d'où $(4a+c)^3 \equiv b^3$ mod(9) c.à.d $(4a+c)^2 - b^3 \equiv 0$ mod(9)

Exercice 14

1) $7^0 \equiv 1$ mod(19) ; $n = 3k$; $7^n \equiv 1$ mod(19)

$7^1 \equiv 7$ mod(19) $n = 3k+1$; $7^n \equiv 7$ mod(19)

$7^2 \equiv 11$ mod(19) $n = 3k+2$; $7^n \equiv 11$ mod(19)

$7^3 \equiv 1$ mod(19)

2) * $n = 3k$

$a_n = 3k \times 7^{3k} + (3k+1)7^{3k+1} + (3k+2)7^{3k+2} \equiv 3k + 7\times(3k+1) + (3k+2)\times 11$ mod(19)

$a_n \equiv \underbrace{n + 7n + 11n}_{} + 7 + 22$ mod(19)

$a_n \equiv 0 + 10$ mod(19) ; $a_n \equiv 10$ mod(19)

* $n = 3k+1$

$a_n = (3k+1)7^{3k+1} + (3k+1+1)7^{3k+2} + (3k+1+2)7^{3k+3} \equiv 7n + 11(n+1) + (n+2)$ mod(19)

$a_n \equiv \underbrace{7n + 11n + n}_{} + 13$ mod(19)

$a_n \equiv 0 + 13$ mod(19) ; $a_n \equiv 13$ mod(19)

* $n = 3k+2$

$a_n = (3k+2)7^{3k+2} + (3k+2+1)7^{3n+3} + (3k+2+2)\times 7^{3n+3+1}$ mod(19)

$a_n \equiv n \times 11 + (n+1) + (n+2)\times 7$ mod(19)

$a_n \equiv \underbrace{11n + n + 7n}_{} + 15$ mod(19)

$a_n \equiv 0 + 15$ mod(19) ; $a_n \equiv 15$ mod(19)

3)a) $p \equiv 0$ mod(3) donc $p = 3k$.

$a_p \equiv 10$ mod(19) ; $a_{p+1} \equiv 13$ mod(19) ; $a_{p+2} \equiv 15$ mod(19)

$a_p + a_{p+1} + a_{p+2} \equiv 10 + 13 + 15$ mod(19) ; $38 \equiv 0$ mod(19) donc

$a_p + a_{p+1} + a_{p+2} \equiv 0$ mod(19)

b) $T = \sum_{i=0}^{100} a_i = (a_0+a_1+a_2)+(a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8)+\dots+(a_{96}+a_{97}+a_{98})$

$+(a_{99}+a_{100}) \equiv a_{99}+a_{100}$ mod(19)

$T \equiv 10 + 13$ mod(19) ; $T \equiv 4$ mod(19).

LYCEE PILOTE TUNIS

ARITHMETIQUE SERIE 1

Exercice 1:

Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 8.
Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $3^n.n - 9n + 2$ soit divisible par 8?

Exercice 2:

Montrez que pour tout entier n, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Exercice 3:

Montrez que pour tout couple d'entiers relatifs (a , b), si a et b ne sont pas divisibles par 7 alors
$a^2 + b^2$ n'est pas divisible par 7.
Montrez que pour tout n entier naturel, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 4:

Déterminez l'ensemble des x entiers relatifs tels que : $x^2 + 3x$ soit divisible par 7.

Exercice 5:

Montrez que pour tout entier $n \geq 1$, $3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 en effectuant un raisonnement par récurrence puis en faisant une démonstration directe.

Exercice 6:

Trouver les couples (a , b) d'entiers naturels tels que $0 < a < b$ dont le PGCD d et le PPCM m vérifient :
$2m + 3d = 78$ et tels que a ne soit pas un diviseur de b.

Exercice 7:

Déterminer les paires d'entiers naturels {a,b} vérifiant: $m - 18d = 791$ où m est le PPCM et d le PGCD des nombres a et b.

CORRECTION ARITHMETIQUE

SERIE 1

Le plus simple dans cet exercice, est alors de faire défiler les puissances de 3 modulo 8.
On obtient alors:

$3 = 3 [8]$
$3^2 = 9$ et $3^2 = 1[8]$
$3^3 = 27$ et $3^3 = 3[8]$
$3^4 = 81$ et $3^4 = 1 [8]$ etc , etc ...

Les restes possibles par la division euclidienne de 3^n par 8 sont donc 1 ou 3 suivant que n soit pair ou impair.

On veut maintenant l'ensemble des n entiers naturels tels que $3^n.n - 9n + 2$ soit divisible par 8.
On cherche l'ensemble des n entiers naturels tels que

" $3^n.n - 9n + 2 = 0[8]$ "
D'après le résultat précédent, on a 2 cas à étudier: n pair et n impair.

- <u>Cas n pair:</u>
  Comme dans ce cas, $3^n = 1[8]$, on peut écrire que :
  $n - 9n + 2 = 0 [8]$ ou encore $-8n + 2 = 0[8]$ ou encore
  $2 = 0[8]$.
  C'est impossible, donc pas de solution avec n pair.
- <u>Cas n impair:</u>
  Comme dans ce cas, $3^n = 3[8]$, on peut écrire :
  $3n - 9n + 2 = 0 [8]$, ou encore , $-6n + 2 = 0 [8]$, ou encore ,
  $2n + 2 = 0 [8]$, ou encore , $2(n+1) = 0[8]$.
  Or, $2(n+1) = 0[8] <=> 2(n+1) = 8k$ avec k dans **Z**.
  $2(n+1) = 8k <=> (n+1) = 4k <=> n+1 = 0 [4]$
  $<=> n = 3 [4]$
- $n = 3 [4] <=> n = 3$ modulo 8 ou $n = 7$ modulo 8.
  n est donc de la forme $n = 8K + 3$ ou $n = 8K + 7$, où K est un entier naturel.
  n est bien impair.

<u>Conclusion</u>
L'ensemble des entiers naturels n tels que $3^n.n - 9n + 2$ est formé est entiers de la forme
(8K + 3) ou **(8K + 7)** où K est un entier naturel.

Exercice 2:

Utilisons directement ce que l'on sait sur les congruences.
On veut ici vérifier que $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ *est congru à 0 modulo 11.*
$3^{n+3} - 4^{4n+2} = 3^3.3^n - 4^2.(4^4)^n$

$$= 5.3^n + 6.3^n\ [11] \text{ car } 3^3 = 5\ [11]\ ,\ 4^2 = 6[11] \text{ et } 4^4 = 3[11]$$

$$= 11.3^n \text{ modulo } 11$$

$$=0[11]$$

Exercice 3:

Dans le cadre de cet exercice, dire que a et b ne sont pas divisibles par 7 revient seulement à dire qu'ils sont congrus à des entiers A et B compris entre 1 et 6.
Si on fait la liste des carrés de ces entiers modulo 7, on obtient alors:

- $1^2 = 1\ [\ 7]$
- $2^2 = 4\ [\ 7]$
- $3^2 = 2[\ 7]$
- $4^2 = 2\ [\ 7]$
- $5^2 = 4\ [\ 7]$
- $6^2 = 1\ [\ 7]$

On constate alors que les carrés modulo 7 sont

- $1 = 1^2 = 6^2\ [\ 7]$
- $2 = 4^2 = 3^2\ [\ 7]$
- $4 = 2^2 = 5^2\ [\ 7]$

Aucune somme de deux de ces carrés ne peut donc être congrue à 0 modulo 7.
Donc, si a et b sont non divisibles par 7, la somme $a^2 + b^2$ *n'est pas divisible par 7.*

Maintenant, en utlisant les diverses propriétés des congruences (compatibilité avec la somme et le produit), on peut écrire que, à modulo 7 près, on a:

- $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3(3^2)^n + 2^2.2^n$
- $= 3.2^n + 4.2^n \ [\ 7]$
- $= 7.2^n \ [\ 7]$
- $= 0 \ [\ 7]$

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est bien divisible par 7 pour tout entier naturel n.

Exercice 4:

$x^2 + 3x$ est divisible par 7 si et seulement si $x^2 + 3x = 0[\ 7]$.
Ou encore si et seulement si $x(x+3) = 0[\ 7]$.

Or, 7 est premier donc d'après le théorème de Gauss, il ne peut diviser un produit d'entiers que si il divise au moins un de ces entiers. On a donc:

$x(x+3) = 0\ [\ 7]$si et seulement si $x = 0\ [\ 7]$ou $(x + 3) = 0[\ 7]$.

Ce qui peut s'écrire: $x = 0\ [\ 7]$ ou $x = 4[\ 7]$.

Les entiers relatifs x tels que $x^2 + 3x$ soit divisible par 7 sont donc les entiers de la forme 7K ou de la forme 7K + 4 , où K est un entier relatif quelconque.

Exercice 5:

Par Récurrence
Appelons P(n) la propriété suivante : "$3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17".
Pour n = 1, la propriété s'écrit : P(1) : "3.5 + 2 est divisible par 17"
Comme 3.5 + 2 = 17 , on en déduit que P(1) est vraie.

Faisons alors l'hypothèse de récurrence P(n), n étant un entier $\geq$ 1..
On suppose donc que "$3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17"
Alors, cette hypothèse s'écrit plus simplement "$3.5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 0$ modulo 17"
On a donc:

$3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}=0[17]$ donc $25.(3.5^{2n-1} + 2^{3n-2})=0[17]$

Donc $3.5^{2n+1} + 25.2^{3n-2} =0[17]$

On remarque alors que
$25 = 8\ [17]$ et que $8 = 2^3$ DONC

RESUME

Fonction exponentielle base : e

Définition

On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme Népérien notée :
$e : x \longmapsto exp(x) = e^x$

Conséquences

♢ Pour tout réel x et pour tout réel $y > 0$,
$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y.$

♢ Pour tout réel x, $e^x > 0.$

♢ Pour tout réel x, $\ln\left(e^x\right) = x.$

♢ Pour tout réel strictement positif x, $e^{\ln x} = x.$

♢ La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

♢ Soit a et b deux réels

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b.$
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b.$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b.$
- $e^a > 1 \Leftrightarrow a > 0.$
- $e^a < 1 \Leftrightarrow a < 0.$

Théorème

La fonction exponentielle $f : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $F : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I
et $F'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + cte.$

Propriétés algébriques

1. Pour tous réels a et b on a :
$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}, \quad \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

2. Soit a un réel .

♡ Pour tout entier n, $\quad \left(e^a\right)^n = e^{na}.$

♡ Pour tout entier $n \geq 2$, $\quad \sqrt[n]{e^a} = e^{\frac{a}{n}}.$

♡ $\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}, \qquad \sqrt[3]{e^a} = e^{\frac{a}{3}}$

3. Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on a :
$\prod_{k=1}^{n} e^{a_k} = e^{\sum_{k=1}^{n} a_k}.$

Limites remarquables

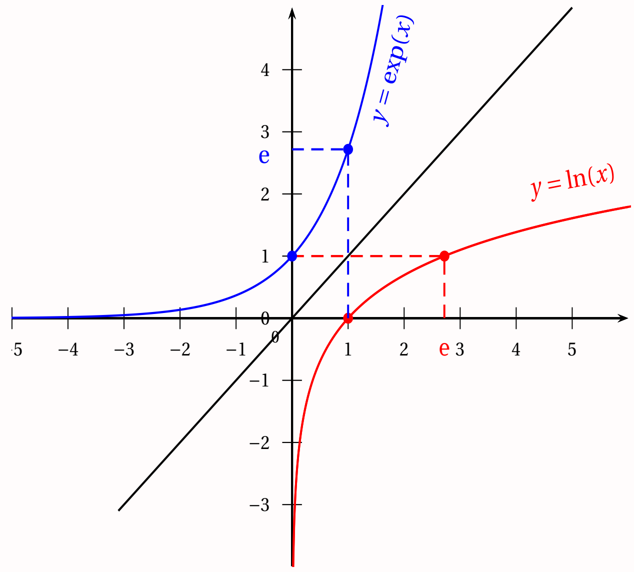
♠ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = 0.$

♠ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty, \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0.$

♠ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

♠ Pour tous entiers naturels non nuls n et m,
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{nx}}{x^m} = +\infty, \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^m e^{nx} = 0$

Courbe representative



Fonction exponentielle base : a

Définition

Soit un réel $a > 0$, Pour tout réel x , on pose $a^x = e^{x \ln a}$

Définition

Soit un réel $a > 0$, On appelle fonction exponentielle base a la fonction $x \mapsto a^x$

Théorème

Soit un réel $a > 0$. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x , $\left(a^x\right) = (\ln a)a^x$

Propriétés

Pour tous réels strictement positifs a et b et pour tous réels c et d on a:

♡ $a^{c+d} = a^c \times a^d$.

♡ $\left(a^c\right)^d = a^{c^d}$.

♡ $a^{c-d} = \dfrac{a^c}{a^d}$.

♡ $a^c \times b^c = (ab)^c$.

♡ $\dfrac{a^c}{b^c} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^c$.

Limites

Soit un réel $a > 0$

Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = -\infty$

Fonctions puissances

Définition

Soit r un nombre rationnel n' appartenant pas à $\mathbb{Z}$.
On appelle fonction puissance r la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x^r = e^{r \ln x}$.

Dérivée

Soit r un nombre rationnel. La fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\left(x^r\right)' = r x^{r-1}$.

Limites

Soit r un nombre rationnel.

♣ Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = 0$.

♣ Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = +\infty$.

Primitive

Soit r un nombre rationnel different de 1. Les primitives sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^r$ sont :

$F(x) = \dfrac{1}{r+1} x^{r+1}$

Croissances comparées

Théorème

Soit r un nombre rationnel strictement positif.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^r \ln x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$$

PILOTE SFAX

SERIE PILOTE SFAX

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^{x}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2$ cm.

① a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$. Interpréter le résultat graphiquement.

② Déterminer le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

③ Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α et que $10.1<\alpha<10.2$

c) Déterminer le signe de $g(x)$.

④ Soit h la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $x\in\,]1,+\infty[$, $h'(x)=\dfrac{g\left(x^2\right)}{x^2\left(x^2-1\right)}$.

b) Déterminer le signe de $h'(x)$.

⑤ a) Vérifier que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f(x)=h\left(e^x\right)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer C_f.

⑥ a) Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)+f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

b) Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses

et les droites d'équations $x=\ln 2$ et $x=\ln 3$.

1) a) $\lim\limits_{x\to0^+} e^{2x}-1 = 0^+$ et $\lim\limits_{t\to0^+} \ln t = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} = -\infty$. La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à C_f.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-2x}+1 = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^{2x}}{e^x} + \frac{\ln(1-e^{-2x})}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 2\,\frac{x}{e^x} + \frac{\ln(1-e^{-2x})}{e^x} = 0$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

2). $M(x,y) \in \mathcal{C}_f \cap (O,\vec{i})$ éq $x \in]0,+\infty[$ et $y = f(x) = 0$

$\ln(e^{2x}-1) = 0$ éq $e^{2x}-1 = 1$ éq $e^{2x} = 2$ éq $2\ln x = \ln 2$ éq $x = \frac{\ln 2}{2}$

$\mathcal{C}_f \cap (O,\vec{i}) = \{ M(\frac{\ln 2}{2}, 0) \}$

3) a) $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$; $x \in]1,+\infty[$. g est dérivable sur $]1,+\infty[$

$g'(x) = 2 - \ln(x-1) - (x-1) \times \frac{1}{x-1} = 2 - \ln(x-1) - 1 = 1 - \ln(x-1)$

$g'(x) = 0$ éq $1 - \ln(x-1) = 0$ éq $\ln(x-1) = 1$ éq $x-1 = e$ éq $x = e+1$

$g'(x) > 0$ éq $1 - \ln(x-1) > 0$ éq $1 > \ln(x-1)$ éq $e+1 > x > 0$

	1		e+1		+∞
(x)		+	0	−	
(x)	2	↗	e+2	↘	−∞

$\underset{0^+}{n}\ t\ln t = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x - (x-1)\ln(x-1) = 2$

$\underset{\infty}{\ } g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x - (x-1)\ln(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\left(\frac{2x}{x-1} - \ln(x-1)\right) = -\infty$

si $x \in]1, e+1]$ $g(x) \geqslant 2$ donc $g(x) = 0$ n'admet pas de Solution

i $x \in [e+1,+\infty[$. g est continue et strictement décroissante sur $]e+1,+\infty[$

onc g réalise une bijection de $]e+1,+\infty[$ sur $J = g(]e+1,+\infty[) =]-\infty, e+2[$

$0 \in J$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique Solution $\alpha \in]1+e,+\infty[$

Conclusion : $g(x) = 0$ admet une unique Solution α dans $]1,+\infty[$.

$g(10,1) = 0,1 > 0$; $g(10,2) \simeq -0,017 < 0$; $g(10,1) \times g(10,2) < 0$

donc $10,1 < \alpha < 10,2$.

c). Si $x \in]1, \alpha]$; $g(x) \geqslant 0$, Si $x \in [\alpha,+\infty[$; $g(x) \leqslant 0$; $g(\alpha) = 0$

4) a) $h(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a :

$h'(x) = \frac{x \times \frac{2x}{x^2-1} - \ln(x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$; $x \in]1,+\infty[$

b)

si $\sqrt{e+1} \leqslant x \leqslant \sqrt{\alpha}$ alors $e+1 \leqslant x^2 \leqslant \alpha$; $g(\alpha) \leqslant g(x^2) \leqslant g(e+1)$ car

est décroissante donc $0 \leqslant g(x^2)$ d'où $h'(x) \geqslant 0$ $(g(\alpha) = 0)$

si $1 < x \leqslant \sqrt{e+1}$ alors $1 < x^2 \leqslant e+1$; $2 = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x^2) < g(x^2) \leqslant g(e+1) = 2+$

car g est croissante sur $]1, \sqrt{e+1}]$.

si $x > \sqrt{\alpha}$ alors $x^2 > \alpha$; $g(x^2) < g(\alpha)$ car g est décroissante

~~donc~~ $h'(x) < 0$

x	1		√α		+∞
h'(x)		+	0	−	

5) a) soit $x > 0$; $e^x > 1$; $h(e^x) = \frac{\ln((e^x)^2-1)}{e^x} = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} = f(x)$

b) $f(x) = h(e^x)$, $x \in]0,+\infty[$; f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$f'(x) = e^x h'(e^x)$

- $1 < e^x \leqslant \sqrt{\alpha}$ éq $0 < x \leqslant \ln\sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}\ln(\alpha)$

Si $0 < x \leqslant \frac{1}{2}\ln(\alpha)$; $f'(x) \geqslant 0$ car $1 < e^x \leqslant \sqrt{\alpha}$; $e^x \times h'(e^x) \geqslant 0$

Si $\frac{1}{2}\ln(\alpha) < x$ $f'(x) < 0$ car $\sqrt{\alpha} < e^x$; $e^x h'(e^x) < 0$.

x	0		½ln(α)		+∞
f'(x)		+	0		
f(x)	−∞	↗		↘	0

$f(\frac{1}{2}\ln\alpha) = h(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(\sqrt{\alpha}^2-1)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$

on a : $g(\alpha) = 0$ donc $2\alpha - (\alpha-1)\ln(\alpha-1) = 0$

d'où $\ln(\alpha-1) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$

$f(\frac{1}{2}\ln\alpha) = \frac{2\alpha}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha}} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$. on prend $\alpha = 10,15$; $\frac{1}{2}\ln\alpha \simeq 1,16$

$f(\frac{1}{2}\ln\alpha) \simeq 0,7$

6/ a) Soit $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) + f(x) = e^x h'(e^x) + h(e^x)$

$= e^x \frac{g((e^x)^2)}{(e^x)^2 \times ((e^x)^2-1)} + \frac{\ln((e^x)^2-1)}{e^x}$

$= \frac{2e^{2x} - (e^{2x}-1)\ln(e^{2x}-1)}{e^x \times (e^{2x}-1)} + \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

$= \frac{2e^x}{e^{2x}-1} - \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} + \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$

$\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{e^{2x}-1} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$; $\forall x \in]0,+\infty[$

Conclusion : $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ f'(x)+f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}$

b)

$$A=4\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx = 4\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}-f'(x)\,dx$$

$$=4\Big[\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)-f(x)\Big]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

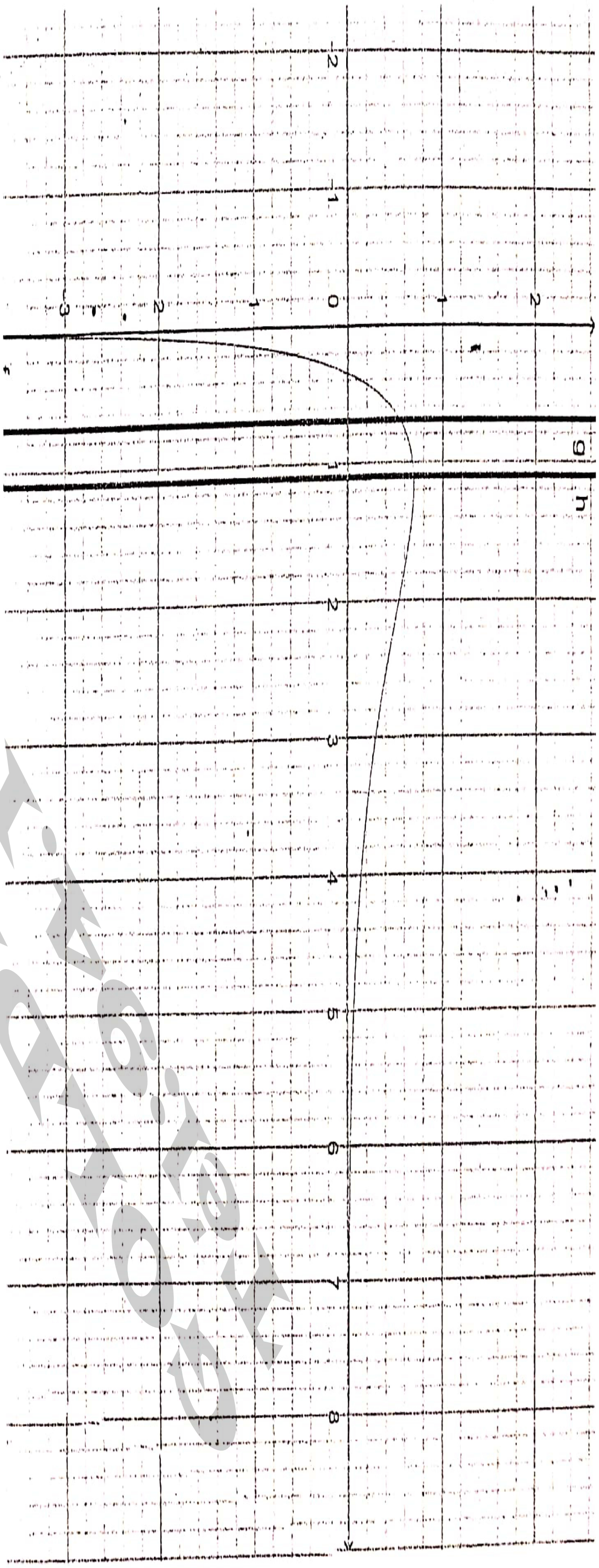
$$=4\Big[\ln(2)-\ln(4)-f(\ln 3)\Big]-\Big[\ln 1-\ln 3-f(\ln 2)\Big]$$

$$=4\left(\ln 2-2\ln 2-\frac{\ln(8)}{3}+\ln 3+\frac{\ln 3}{2}\right)$$

$$=\left(-\ln 2-\frac{3\ln 2}{3}+\frac{3}{2}\ln 3=-2\ln 2+\frac{3}{2}\ln 3\right)\times \underline{\text{unité d'aire}} \text{ en } cm^2$$

$$2\times 2=4\ cm^2.$$

A en cm^2 est $\left(-8\ln 2+6\ln 3\right)\ cm^2$



PILOTE TUNIS

EXPONENTIELLE
REVISION

Exercice 1:

Partie I

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $g'(x) > 0$. En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;+\infty[$.

b) Calculez $g(0)$. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) > 0$.

2. Soit h la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = (2 - x)\,e^x - 1$.

a) Étudier la fonction h et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution et une seule α et que l'on a $\alpha > 1$.

c) Vérifier la double inégalité $1{,}84 < \alpha < 1{,}85$.

d) Préciser, suivant les valeurs du nombre réel $x \geq 0$, le signe de $h(x)$.

Partie II

1. *a)* Justifier que f est définie en tout point de $[0\,;+\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on peut écrire $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Interpréter géométriquement, relativement à C, le résultat obtenu.

c) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.

d) Étudier la fonction f et dresser son tableau de variation.

2. *a)* Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) - x = \dfrac{(1 - x)g(x)}{e^x - x}$.

b) En déduire, suivant les valeurs du nombre réel $x \geq 0$, la position de la courbe C par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

3. *a)* Préciser la tangente au point de C d'abscisse 0.

b) Tracer C, en faisant figurer sur le dessin la droite D d'équation $y = 1$ et tous les éléments obtenus au cours de l'étude.

CORRECTION EXPONENTIELLE REVISION

SERIE 4

Exercice 1 :

Partie I

1. g est définie pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^{x} - x - 1$.

a) Pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = e^{x} - 1$ et

$g'(x) > 0$ équivaut à $e^{x} > 1$

$e^{x} > e^{0}$

$x > 0$.

car la fonction exp est strictement croissante sur R.

$$\boxed{g'(x) > 0 \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } g'(0) = 0.}$$

Il s'ensuit que $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[.}$

b) Nous avons $g(0) = e^{0} - 1$

$\boldsymbol{g(0) = 0}$.

g étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$; nous pouvons affirmer que pour tout $x > 0$

$g(x) > g(0)$

$g(x) > 0$.

$\boxed{g(x) > 0 \text{ pour tout x} > 0.}$

2. h est définie pour tout $x \geq 0$ par $h(x) = (2 - x)e^{x} - 1$.

a) Pour tout $x \geq 0$, $h'(x) = -e^{x} + (2 - x)e^{x}$

$h'(x) = (1 - x)e^{x}$.

Le signe de $h'(x)$ dépend uniquement du signe de $(1 - x)$ car $e^{x} > 0$ pour tout réel x.

Par conséquent,

$h'(x) > 0$ pour tout $x \in [0\,;1[$

$h'(1) = 0$

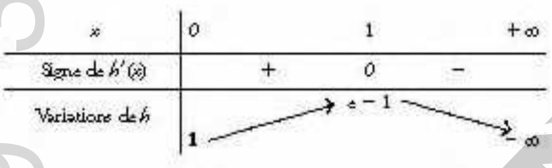
$h'(x) < 0$ pour tout $x \in\ ]1\ ;+\infty[$.

$\boxed{h \text{ est strictement croissante sur } [\,0\,;1\,] \text{ et strictement décroissante sur } [\,1\,;+\infty\,[.}$

De plus, $h(0) = 1$, $h(1) = \mathrm{e} - 1$,

et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty}$ puisque $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \end{cases}$

Tableau des variations de *h*



x	0		1		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de h	1	↗	$e-1$	↘	$-\infty$

b) *h* est strictement croissante sur $[0\ ;1]$ et $h(0) = 1$, donc, pour tout $x \in [0\ ;1]$, $h(x) \geq 1$ et l'équation $h(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[0\ ;1]$.

h est continue (car *h* est dérivable) et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$:

h réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $]-\infty\ ;\mathrm{e}-1]$ et $0 \in\ ]-\infty\ ;\mathrm{e}-1]$.

L'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

c) $h(1{,}84) = 0{,}007$ et $h(1{,}85) = -0{,}046$ à 10^{-3} près.

Donc $\boxed{1{,}84 < \alpha < 1{,}85}$

d) Nous avons montré à la question précédente que pour tout $x \in [0\ ;1]$, on a $h(x) \geq 1$.

h est donc positive sur $[0\ ;1]$.

Sur l'intervalle $[1\ ;+\infty[$, *h* est strictement décroissante et $h(\alpha) = 0$.

Il s'ensuit que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{pour tout } x \in [1;\alpha[,\ h(x) > 0, \\ \text{pour tout } x \in]\alpha;+\infty[,\ h(x) < 0. \end{array}}$$

Partie II

SERIE PILOTE
SFAX

5476

Lycée pilote Sfax
Smaoui sofiène

Série d'exercices n°26

4ème M

1 Une urne contient cinq boules blanches numérotées 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 et six boules noires numérotées 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3.

I/: On tire simultanément quatre boules. Déterminer la probabilité des évènements suivants:

A: "Avoir quatre boules de même couleur".

B: "Avoir quatre boules de même numéro".

$C = A \cup B$. D: "Avoir au plus une boule portant le numéro 2".

II/: On tire successivement avec remise trois boules. Déterminer la probabilité des évènements suivants:

E: "Avoir trois boules de même numéro".

F: "Avoir trois boules de même couleur".

$G = E \cup F$. H: "La somme des numéros apparus égale à 6".

K: "La deuxième boule tirée numéro 2".

2 On considère une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'avoir pile est le double de celle d'avoir face.

① On lance la pièce une seule fois. Calculer la probabilité d'avoir pile et celle d'avoir face.

② On lance la pièce quatre fois de suite.

Calculer la probabilité d'avoir

a) quatre fois pile.

b) au moins trois fois pile.

c) pour la première fois pile au troisième lancer.

3 Dans une usine spécialisée dans la fabrication en série d'un article 40 % de la production proviennent de la machine A et le reste de la machine B.
Sur 100 articles produits par la machine A, trois ont un défaut de soudure et deux ont un défaut sur un composant électronique.
Sur 100 articles produits par la machine B, quatre ont un défaut de soudure et trois ont un défaut sur un composant électronique.

1. On choisit au hasard un article. Déterminer la probabilité des évènements suivants.
   A : « L'article provient de la machine A ».
   B : « L'article provient de la machine B ».
   S : « L'article présente un défaut de soudure ».
   E : « L'article présente un défaut sur un composant électronique ».
2. On a choisi un article qui présente un défaut de soudure.
   Quelle est la probabilité qu'il soit produit par la machine A.
3. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.
   Le contrôle a montré que les deux défauts sont indépendants.
   Quelle est la probabilité pour qu'un article soit défectueux.

4 Un récipient contient un gaz de deux sortes de particules, 75 % de particules A et 25 % de particules B.
Les particules sont projetées sur une [illegible] ments K_1 et K_2.
Une particule au hasard parm[illegible] probabilité 0.25 et dans [illegible]
la probabilité 0.75.

348

- Une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans K_1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Soit une particule au hasard.
Déterminer la probabilité des évènements suivants.
A : « La particule est de type A ».
B : « La particule est de type B ».
K_1 : « La particule entre dans K_1 ».
K_2 : « La particule entre dans K_2 ».
C : « La particule est de type A sachant qu'elle a entré dans K_1.
2. On choisit quatre particules successivement avec remise. Déterminer la probabilité des évènements :
E_1 : « Obtenir au moins deux particules qui entrent dans K_2 ».
E_2 : « La première particule entre dans K_1 et la deuxième entre dans K_2 ».

5

Le directeur du personnel d'une entreprise constate que, chaque hiver, un nombre important d'employés s'absentent, malades de la grippe. Le médecin de l'entreprise lui assure qu'une personne non vacciné contre la grippe a 40 % de chances d'attraper la maladie alors qu'une personne vaccinée n'a que 5 % de chances de tomber malade.

1. On choisit un employé au hasard et on considère les évènements suivants :

V : « L'employé s'est fait vacciner ». G : « L'employé contractera la grippe durant l'hiver ».

a. Déterminer les probabilités suivantes : $p(G|V)$, $p(\overline{G}|V)$, $p(G|\overline{V})$ et $p(\overline{G}|\overline{V})$.

b. Exprimer la probabilité $p(G)$ en fonction de la probabilité $p(V)$.

2. Déterminer le pourcentage minimum de personnes à vacciner pour que moins de 20 % des employés aient la grippe cet hiver.

3. Finalement 80 % du personnel accepte de se faire vacciner.

a. Quelle est la probabilité p_1 qu'un employé, pris au hasard, tombe malade cet hiver ?

b. Balsam, employé au service informatique, tombe malade de la grippe.
Quelle est la probabilité p_2 qu'il soit vacciné ?

c. Calculer la probabilité p_3 qu'un employé, pris au hasard, ne soit pas vacciné et attrappe la grippe cet hiver.

6

I/ Une usine en production permanente est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident survient sur une chaine de production.
Il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut (soit qu'il n'y ait pas d'incident et l'alarme se déclenche, soit qu'un incident survienne et l'alarme ne se déclenche pas).
En effet des études statistiques ont montré que, sur une journée la probabilité qu'il n'y ait pas d'incident et l'alarme se déclenche est égale à 0,02 et la probabilité qu'un incident survienne et l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,002.
La probabilité qu'un incident se produise est égale à 0,01.
On note les événements : A « l'alarme se déclenche » et I « un incident se produit ».
1. Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et l'alarme se déclenche.
2. En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.
3. L'alarme vient se declencher.
Calculer la probabilité que ce soit une fausse alerte.
4. Justifier que la probabilité que dans une journée le système soit mis en défaut est 0,022.
5. Quelle est la probabilité que pendant une semaine le système d'alarme soit mis en défaut exactement 3 fois ?
6. Déterminer le nombre maximal de jours pour que la probabilité que le système d'alarme soit mis en défaut au moins une fois reste inférieure à 0,5.

Lycée Pilote Sfax — Serie n° 26 — 4ème Math

Exercice 1

Urne : 5 boules blanches : 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2

6 boules noires : 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3

I/ Ω : tirage simultanée 4 boules : $card(\Omega) = C_{11}^4 = 330$.

- A : " 4 boules de même couleur " $card(A) = C_5^4 + C_6^4 = 20$; $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{20}{330} = \frac{2}{33}$.
- B : " 4 boules de même numéro " $card(B) = C_4^4 + C_6^4 = 16$; $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{16}{330} = \frac{8}{165}$.
- $A \cap B$: $card(A \cap B) = C_4^4 = 1$; $P(A \cap B) = \frac{1}{330}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{33} + \frac{8}{165} - \frac{1}{330} = \frac{35}{330} = \frac{7}{66}$.

- D : " avoir au plus un boule n° 2 "

$Card(D) = C_6^1 \times C_5^3 + C_5^4 = 65$; $P(D) = \frac{65}{330} = \frac{13}{66}$.

II/ Ω : tirage successive avec remise 3 boules : $card(\Omega) = 11^3 = 1331$.

- E : " 3 boules de même numéro " $card(E) = 4^3 + 1^3 + 6^3 = 281$; $P(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)} = \frac{281}{1331}$.
- F : " 3 boules de même Couleur " $card(F) = 5^3 + 6^3 = 341$; $P(F) = \frac{Card(F)}{Card(\Omega)} = \frac{341}{1331} = \frac{31}{121}$
- $E \cap F$ $card(E \cap F) = 3^3 + 4^3 = 91$; $P(E \cap F) = \frac{Card(E \cap F)}{Card(\Omega)} = \frac{91}{1331}$.

$P(G) = P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \frac{281}{1331} + \frac{31}{121} - \frac{91}{1331} = \frac{531}{1331}$.

- H : " La somme des numéros est 6 " : $(3,2,1)$ avec ordre ou $(2,2,2)$

$card(H) = 6^3 + 6 \times 1^1 \times 6^1 \times 1^1 = 360$; $P(H) = \frac{Card(H)}{Card(\Omega)} = \frac{360}{1331}$.

- K : " Le deuxième boule tirée n° 2 "

$Card(K) = 11^1 \times 6^1 \times 11^1 = 726$; $P(K) = \frac{Card(K)}{Card(\Omega)} = \frac{726}{1331} = \frac{6}{11}$

Exercice 2

1) $p(pile) = 2 \times p(Face)$ donc $p(pile) + p(Face) = 1 \Leftrightarrow 3p(Face) = 1 \Leftrightarrow p(Face) = \frac{1}{3}$

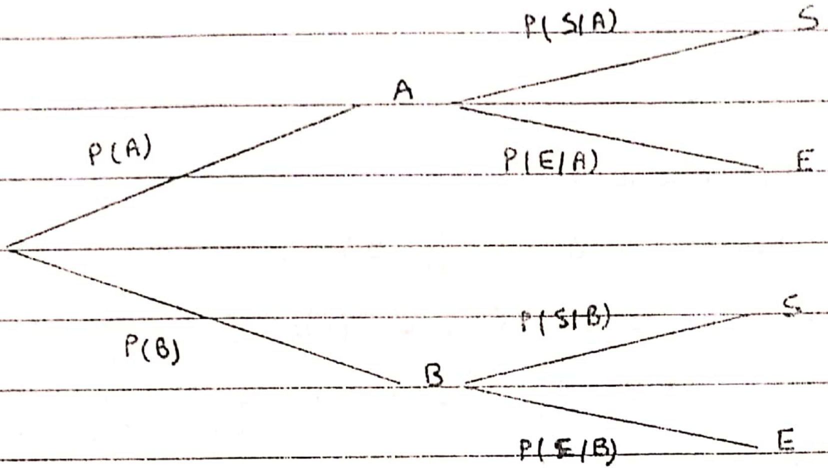
$p(pile) = \frac{2}{3}$; $p(Face) = \frac{1}{3}$

2) a) A : " quatre fois pile " $P(A) = (\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$

b) B : " au moins 3 fois pile " $P(B) = C_4^3 \times (\frac{2}{3})^3 \times (\frac{1}{3}) + (\frac{2}{3})^4 = \frac{48}{81} = \frac{16}{27}$

c) C : " La première fois pile au (3ème tirage) " $P(C) = (\frac{1}{3})^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

Exercice 3



1) $P(A) = 40\% = \frac{40}{100} = 0,4$; $P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$

$P(S/A) = \frac{3}{100} = 0,03$; $P(E/A) = \frac{2}{100} = 0,02$

$P(S/B) = \frac{4}{100} = 0,04$; $P(E/B) = \frac{3}{100} = 0,03$

$P(E) = P(A) \times P(E/A) + P(B) \times P(E/B) = 0,4 \times 0,02 + 0,6 \times 0,03 = 0,026$

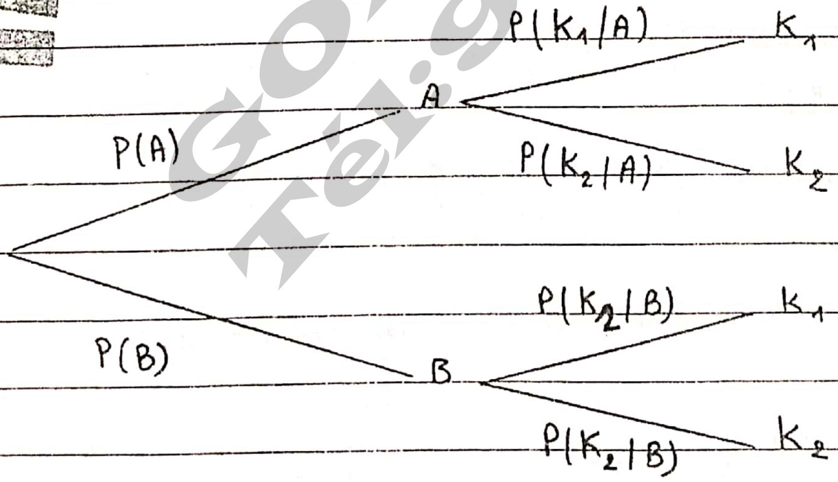
$P(S) = P(A) \times P(S/A) + P(B) \times P(S/B) = 0,4 \times 0,03 + 0,6 \times 0,04 = 0,036$

2) $P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A) \times P(S/A)}{P(S)} = \frac{0,4 \times 0,03}{0,036} = \frac{1}{3}$

3) S et E sont indépendants donc $p(S \cap E) = p(S) \times p(E) = 0,000936$

$D = S \cup E$; $P(D) = p(S \cup E) = p(S) + p(E) - p(S \cap E) = 0,026 + 0,036 - 0,000936 = 0,06$

Exercice 4



1) $P(A) = 0,75$; $P(B) = 0,25$

$P(K_1/A) = 0,25$; $P(K_2/A) = 0,75$

$P(K_1/B) = 0,5$; $P(K_2/B) = 0,5$

$P(K_1) = P(A) \times P(K_1/A) + P(B) \times P(K_1/B) = 0{,}75 \times 0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}3125$

$P(K_2) = P(A) \times P(K_2/A) + P(B) \times P(K_2/B) = 0{,}75 \times 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}6875$

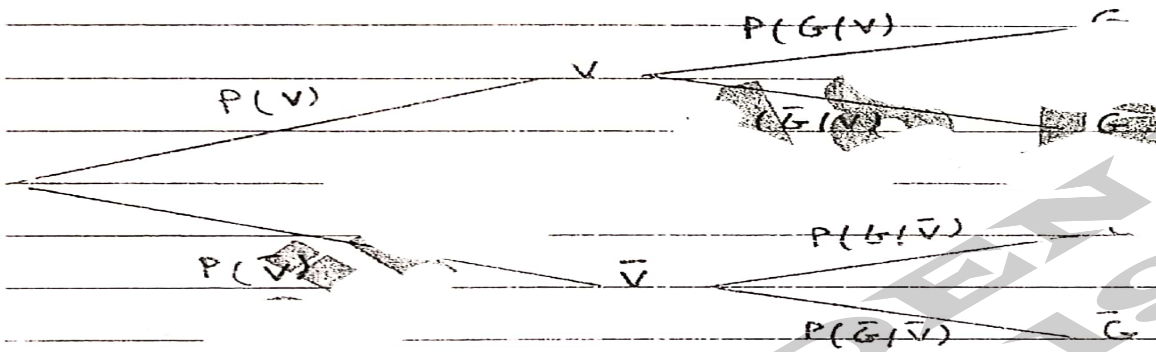
$P(C) = P(A/K_1) = \frac{P(A \cap K_1)}{P(K_1)} = \frac{P(A) \times P(K_1/A)}{P(K_1)} = \frac{0{,}75 \times 0{,}25}{0{,}3125} = 0{,}6$

2)

$P(E_1) = C_4^2 \times (0{,}6875)^2 \times (0{,}3125)^2 + C_4^3 \times (0{,}6875)^3 \times (0{,}3125)^1 + (0{,}6875)^4 = 0{,}9065$

$P(E_2) = (0{,}3125)^1 \times (0{,}6875)^1 = 0{,}2148$

Exercice 5



1)a) $P(G/V) = 0{,}05$; $P(\bar{G}/V) = 1 - P(G/V) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$P(G/\bar{V}) = 40\% = \frac{40}{100} = 0{,}4$; $P(\bar{G}/\bar{V}) = 1 - P(G/\bar{V}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

b) $P(G) = P(V) \times P(G/V) + P(\bar{V}) \times P(G/\bar{V}) = P(V) \times 0{,}05 + (1 - P(V)) \times 0{,}4$

$P(G) = 0{,}4 - 0{,}35\,P(V)$

2) $P(G) \leq 0{,}2 \iff 0{,}4 - 0{,}35\,P(V) \leq 0{,}2 \iff 0{,}4 - 0{,}2 \leq 0{,}35\,P(V) \iff 0{,}20 \leq 0{,}35\,P(V)$

$\iff \frac{0{,}20}{0{,}35} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \leq P(V)$; $\frac{4}{7} \simeq 0{,}57142$

au moins 57,15% vaccinés pour que moins de 20% grippés

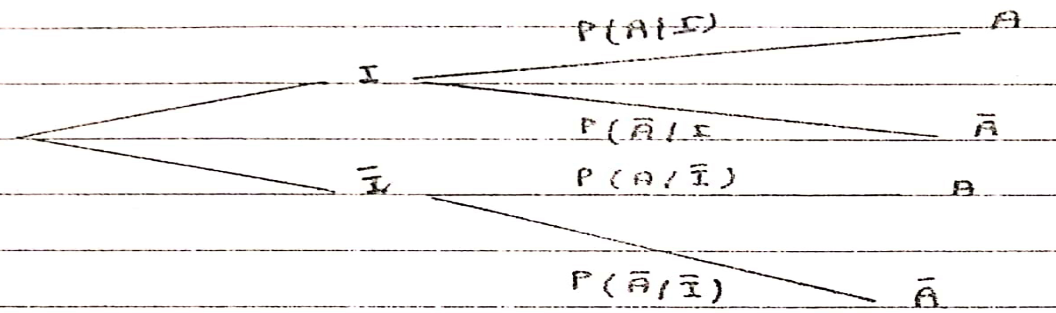
3) $P(V) = 0{,}8$; $P(\bar{V}) = 1 - P(V) = 0{,}2$

a) $P_1(G) = 0{,}4 - 0{,}35 \times p(V) = 0{,}4 - 0{,}35 \times 0{,}8 = 0{,}12$

b) $P_2(V/G) = \frac{P(V \cap G)}{P(G)} = \frac{P(V) \times P(G/V)}{P(G)} = \frac{0{,}8 \times 0{,}05}{0{,}12} = \frac{1}{3}$

c) $P_3(\bar{V} \cap G) = p(\bar{V}) \times p(G/\bar{V}) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$

Exercice 6



1) $P(\bar{I} \cap A) = 0,02$; $P(I \cap \bar{A}) = 0,002$; $P(I) = 0,01$

1) $P(I \cap A) = P(I) - P(I \cap \bar{A}) = 0,01 - 0,002 = 0,008$

2) $P(A) = P(I \cap A) + P(\bar{I} \cap A) = 0,008 + 0,02 = 0,028$

3) $P(\bar{I} / A) = \frac{P(\bar{I} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,02}{0,028} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$

4) $P(D) = P(A \cap \bar{I}) + P(\bar{A} \cap I) = 0,02 + 0,002 = 0,022$

5) $P(E) = C_7^3 \, p(D)^3 \times (1 - p(D))^4 = C_7^3 \times (0,022)^3 \times (1 - 0,022)^4 = 0,00031$

6) $P(\bar{D}) = 1 - (0,022) = 0,978$

$P(\text{[illegible]}) = 1 - (0,978)^n < 0,5 \Leftrightarrow 0,5 < (6,978)^n \Leftrightarrow \ln(0,5) < n \ln(0,978)$

$\Leftrightarrow n < \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,978)} \simeq 31,15$ d'où $n \leqslant 31$

" 31 est le nombre maximal de Jour "

PILOTE TUNIS

SERIE PILOTE TUNIS

[illegible]

Une usine fabrique des appareils, un contrôle de qualité a montré que :

- 14% des appareils présentent un défaut D_1
- 10% présente le défaut D_2
- 4% présentent les deux défauts D_1 et D_2.

Un appareil est défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

On note D_1 : « l'appareil présente le défaut D_1 » : D_2: « l'appareil présente le défaut D_2 »

1.) Les événements D_1 et D_2 sont-ils indépendants ?

2.) Sachant que l'appareil présente le défaut D_1, calculer la probabilité pour qu'il présente le défaut D_2.

3.) Montrer que la probabilité de l'événement D : « l'appareil est défectueuse » est égale à $\frac{1}{5}$

4.) Un commerçant reçoit n appareils indépendants, $n \geq 2$ pour l'exposer l'un à coté de l'autre.

Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre d'appareils défectueux.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

c. Le commerçant veut que sur sa commande, la probabilité p_n d'avoir au moins un appareil défectueuse reste inferieur à 50%, déterminer la maximale de n.

B.) La durée de vie d'un appareil défectueuse suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 3.10^{-2}$

Et la durée de vie en année d'un appareil non défectueuse suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-5}$.

On achète un appareil au hasard, on désigne par Y la variable aléatoire qui indique sa durée de vie en année.

a. Montrer que pour $t \in [0, +\infty[$ on a : $P(Y \geq t) = \frac{1}{5}e^{-\lambda_1 t} + \frac{4}{5}e^{-\lambda_2 t}$.

b. Calculer la probabilité que l'appareil ne tombe pas en panne au bout de 5 ans.

c. Sachant que l'appareil acheté dépasse 5 ans, quelle est la probabilité qu'il soit défectueuse.

Exercice 2 :

1) $P(D_1 \cap D_2) = 4\% = 0{,}04$

$P(D_1) \times P(D_2) = 0{,}14 \times 0{,}1 = 0{,}014$ $\Big\} \neq$

D_1 et D_2 ne sont pas indépendants.

2/ $$P(D_2/D_1) = \frac{P(D_2 \cap D_1)}{P(D_1)} = \frac{0{,}04}{0{,}14} = \frac{2}{7}$$

3/ $$P(D) = P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2)$$
$$= 0{,}14 + 0{,}1 - 0{,}04$$
$$= 0{,}2$$
$$= \frac{1}{5}.$$

4/ a) Loi binomial : $n \geq 2$

Succès : $D \longrightarrow p = \frac{1}{5}$

Echec : $\overline{D} \longrightarrow 1 - p = \frac{4}{5}$.

$$P(X = k) = C_n^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots n.$$

b/ $E(X) = np = \frac{n}{5}$

$V(X) = np(1-p) = \frac{4n}{25}$.

c/ $p_n = P(X \geq 1)$

$= 1 - P(X = 0)$

$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 0{,}5$

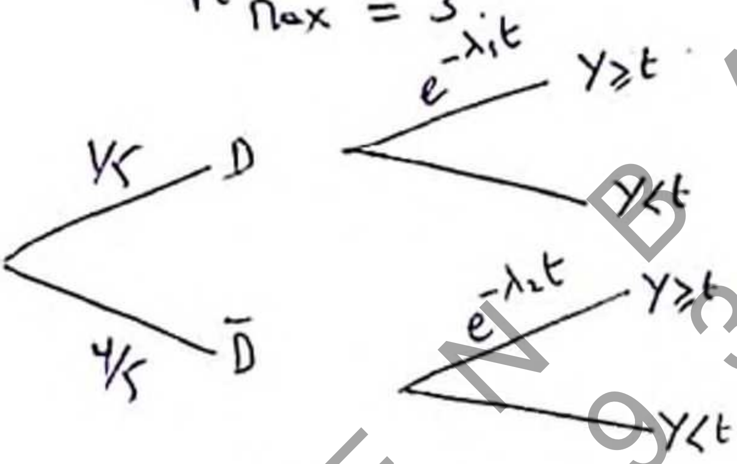
$\Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^n \geqslant 0,5$

$\Rightarrow n \cdot \ln\left(\frac{4}{5}\right) \geqslant \ln(0,5)$
$\ominus$

$\Rightarrow n \leq \frac{\ln(0,5)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} = 3,1$

$n_{max} = 3$

5) a)



$P(Y\geq t) = P(Y\geq t \cap D) + P(Y\geq t \cap \bar{D})$

$= \frac{1}{5} \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{4}{5} e^{-\lambda_2 t}$.

b/ $P(Y\geq 5) = \frac{1}{5} e^{-5\lambda_1} + \frac{4}{5} e^{-5\lambda_2}$

$= 0,97$

c/ $P(D / Y\geq 5) = \frac{P(Y\geq 5 \cap D)}{P(Y\geq 5)}$

$= \frac{\frac{1}{5} \cdot e^{-5\lambda_1}}{0,97}$

$= 0,177$.

physique

Sommaire

Libraire Golden Bac

Votre Chemin Pour Réussir

ACIDE - BASE

RESUME PILOTE
TUNIS + SFAX

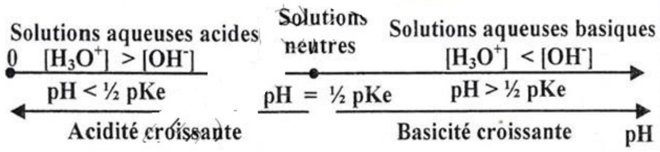
Mr : Ben Slima	Résumé Chimie N°:	Classe: 4ème Sc. M. T
Tél. : 98 991 364	pH des solutions aqueuses	R.4.Ch.Sol.Aqu.

I/ Définition du pH

$pH = - \ell og [H_3O^+] \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-pH}$

valable pour les solutions de molarité **C** telle que 10^{-6} mol.L^{-1} < C < 10^{-1} mol.L^{-1}

II/ Relation entre la nature acide basique d'une solution et son pH



A 25 °C, pKe = 14

III/ pH d'une solution aqueuse d'un monoacide fort.

➢ **Equations chimiques**

$$H_2O + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^- \quad (1)$$

$$HC\ell + H_2O \longrightarrow C\ell^- + H_3O^+ \quad (2)$$

Etat	Av.				
Initial	0	C	excès	0	$10^{-pKe/2}$
Final	y_f	C - y_f	excès	y_f	10^{-pH}

* Solution acide ⇒ $[OH^-]$ négligeable devant $[H_3O^+]$

* $[H_3O^+]$ provenant de l'eau est négligeable devant $[H_3O^+]$ provenant de la dissociation de l'acide.

⇔ $[H_3O^+] = C = 10^{-pH} \Rightarrow pH = - \ell ogC$

IV/ pH solution aqueuse d'une monobase forte

➢ **Equations chimiques**

$$H_2O + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^- \quad (1)$$

$$NaOH \longrightarrow Na^+ + OH^- \quad (2)$$

Etat	Av.			
Initial	0	C	0	$10^{-pKe/2}$
Final	y_f	C - y_f	y_f	$10^{pH - pKe}$

*Solution basique ⇒ $[H_3O^+]$ négligeable devant $[OH^-]$

* $[OH^-]$ provenant de l'eau est négligeable devant $[OH^-]$ provenant de la dissociation de base

$\Rightarrow [OH^-] = C = 10^{pH - pKe} \Rightarrow pH = pKe + \ell ogC$

V/ pH solution aqueuse d'une monoacide faible

➢ **Equations chimiques**

$$H_2O + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$$

$$CH_3CO_2H + H_2O \rightleftarrows CH_3CO_2^- + H_3O^+$$

Etat	Av.				
Initial	0	C	excès	0	$10^{-pKe/2}$
Final	y_f	C - y_f	excès	y_f	10^{-pH}

* Solution acide ⇒ $[OH^-]$ négligeable devant $[H_3O^+]$

* Acide faible ⇒ $y_f = \tau_f . C.$

* Acide faiblement ionisé ($\tau_f < 0,05$)

⇒ τ_f négligeable devant 1.

$$Ka = \frac{[H_3O^+]\,[CH_3CO_2^-]}{[CH_3CO_2H]} = \frac{[H_3O^+].\,C.\,\tau_f}{C(1-\tau_f)} = [H_3O^+]\,.\,\tau_f$$

Donc $\tau_f = \frac{Ka}{[H_3O^+]} = 10^{\,pH - pKa}$

D'où $[H_3O^+] = 10^{-pH} = C.\,10^{\,pH - pKa} \Rightarrow C = 10^{-2pH + pKa}$

$\Rightarrow pH = \frac{1}{2}(pKa - \ell og\ C)$

VI/ pH d'une solution aqueuse d'une monobase faible

➢ **Equations chimiques**

$$H_2O + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$$

$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + OH^-$$

Etat	Av.				
Initial	0	C	excès	0	$10^{-pKe/2}$
Final	y_f	C - y_f	excès	y_f	$10^{pH - pKe}$

*Solution basique ⇒ $[H_3O^+]$ négligeable devant $[OH^-]$

* Base faible ⇒ $y_f = C.\,\tau_f$

* Base faiblement ionisée ($\tau_f < 0,05$)

⇒ τ_f négligeable devant 1.

$$K_b = \frac{[OH^-]\,[NH_4^+]}{[NH_3]} = \frac{[OH^-].C.\tau_f}{C(1-\tau_f)} = [OH^-]\,.\,\tau_f$$

$= 10^{pH - pKe}\,.\,\tau_f$

$\Rightarrow \tau_f = \frac{K_b}{10^{pH - pKe}}$ Avec $Ka\,.\,K_b = Ke \Rightarrow K_b = \frac{Ke}{Ka}$

D'où $[OH^-] = 10^{pH - pKe} = C.10^{\,pKa - pH}$

$\Rightarrow C = 10^{2pH - pKa - pKe}$

$\Rightarrow pH = \frac{1}{2}(pKa + pKe + \ell og\ C)$

Mr : Ben Slima	*Résumé Chimie N°:*	*Classe: 4ème Sc. M. T*
Tel. : 98 991 364	*Les réactions acide- base*	*R.4.Réa.Acid.Bas.*

I/ Définitions : *selon Bronsted :*

- ❖ Un acide est une entité chimique (neutre ou chargée) pouvant céder un proton H^+ au cours d'une réaction chimique.
- ❖ Une base est une entité chimique (neutre ou chargée) pouvant capter un proton H^+ au cours d'une réaction chimique.
- ❖ Une réaction acide- base se traduit par un transfert de proton H^+ entre un acide et une base.

II/ Couples acide- base :

L'ensemble acide et sa base conjuguée ou base et son acide conjuguée constitue un couple acide- base noté **acide/base** ou **AH/A^-** ou **BH^+/B.**

Schématisé par : $AH \rightleftarrows A^- + H^+$

Ou $BH^+ \rightleftarrows B + H^+$

III/ Les amphotères (ou ampholytes) :

❖ La réaction d'ionisation de l'eau :

$$H_2O + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$$

L'eau se comporte comme un acide et comme une base : C'est un amphotère et on a les couples acide/base **H_2O/OH^-** et **H_3O^+/H_2O.**

❖ Un corps amphotère est un corps qui selon le milieu où il se trouve peut se comporter comme un acide ou comme une base.

IV/ Réaction acide- base :

Une réaction acide- base est une réaction de transfert de protons sans transfert d'électrons. Elle fait intervenir deux couples acide- base conjuguées :

AH/A^- : $AH \rightleftarrows A^- + H^+$

et BH^+/B : $B + H^+ \rightleftarrows BH^+$

d'où $AH + B \rightleftarrows A^- + BH^+$

V/ Force des acides et des bases :

- ❖ Un acide est d'autant plus fort qu'il cède plus facilement le proton H^+.
- ❖ Une base est d'autant plus forte qu'elle capte plus facilement le proton H^+.
- ❖ Pour comparer les forces des acides et des bases il faut les opposés à un couple dit couple de référence. Les couples de références sont :

H_3O^+/H_2O et **H_2O/OH^-**

A- Constante d'acidité :

❖ $AH + H_2O \rightleftarrows A^- + H_3O^+$;

$$Ka = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]}$$

- ▪ **K_a** très grand ⇒ **AH** est un acide fort.

Exemple : **HCℓ, HNO₃ ......**

- ▪ **K_a** très faible ⇒ **AH** est un acide inerte ou indifférent.
- ▪ **K_a** moyenne ⇒ la dissociation de l'acide est Partielle.

❖ **$pK_a = -\log K_a$** ou **$K_a = 10^{-pKa}$.**

❖ A l'acide le plus fort correspond **K_a** la plus élevée et le **pK_a** le plus faible.

B- Constante de basicité:

❖ $B + H_2O \rightleftarrows BH^+ + OH^-$;

$$K_b = \frac{[BH^+][OH^-]}{[B]}$$

- ▪ **K_b** très grande ⇒ **B** est une base forte.
- ▪ **K_b** très faible ⇒ **B** est une base indifférente.
- ▪ **K_b** moyenne ⇒ **B** est partiellement dissocié.

❖ **$pK_b = -\log K_b$** ou **$K_b = 10^{-pKb}$.**

C- Relation entre K_a et K_b pour un couple acide/ base :

- ❖ **$Ka \cdot K_b = Ke$; $pKa + pK_b = pKe$.**
- ❖ **À 25°C, $Ke = 10^{-14}$** et **$pKe = 14$.**

VI/ Force relative des acides et des bases

A_1H/A_1^- et **A_2H/A_2^-** deux couples acide- base conjugués.

Soit la relation: **$A_1H + A_2^- \rightleftarrows A_1^- + A_2H$.**

❖ Loi d'action de masse : $K = \frac{[A_1^-][A_2H]}{[A_1H][A_2^-]}$.

❖ **K** très élevé :

⇒ l'équilibre est déplacé dans le sens direct

⇒ l'acide **A_1H** est plus fort que l'acide **A_2H**.

La base A_2^- est plus forte que la base A_1^-

⇒ A l'acide le plus fort correspond la base conjuguée la plus faible.

❖ **K** très faible :

⇒ la réaction dans le sens inverse se produit plus facilement que la réaction dans le sens direct.

⇒ l'acide **A_2H** est plus fort que l'acide **A_1H**.

La base A_1^- est plus forte que la base A_2^-.

⇒ A l'acide le plus faible correspond la base conjuguée la plus forte.

❖ **K** moyenne :

Les acides **A_1H** et **A_2H** ont des forces comparables.

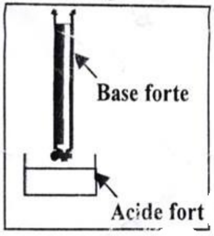
Les bases A_1^- et A_2^- ont des forces comparables.

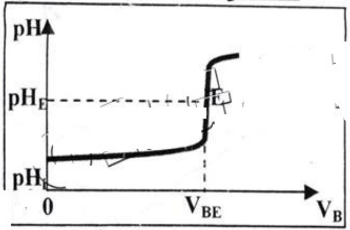
❖ Pour déterminer le sens d'évolution spontanée on calcule **π** et on la compare avec **K**.

Mr: Ben Slima	*Résumé Chimie N°:*	*Classe: 4ème Sc. M. T*
Tel. : 98 991 364	*Dosage acide- base*	*R.4.Réa.Acid.Bas.1*

I/ Réaction entre un monoacide fort et une monobase forte.

1- Dosage d'un acide fort par une base forte





* Equation de la réaction : $H_3O^+ + OH^- \longrightarrow 2\,H_2O$

* $pH_i < 7$ $pH_i = -\log C_A$

* Il existe un seul point d'inflexion **E** à l'équivalence.

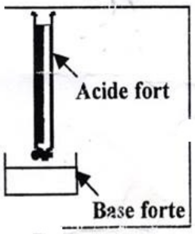
* A l'équivalence le milieu est neutre:$pH_E = 7$.

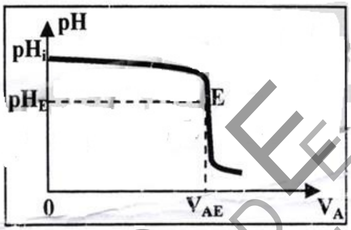
* A l'équivalence : $C_A.\ V_A = C_B.\ V_{BE}$.

* L'allure de la courbe $pH = f\,(V_B)$ reste inchangé si on fait varier C_A et C_B dans le même sens.

* Le saut de **pH** augmente lorsque C_A et C_B augmentent.

2- Dosage d'une base forte par un acide fort :





* Equation de la réaction : $H_3O^+ + OH^- \longrightarrow 2\,H_2O$

* $pH_i > 7$ $pH_i = pKe + \log C_B$

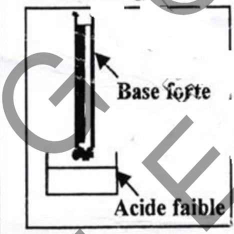
* Il existe un seul point d'inflexion **E** à l'équivalence.

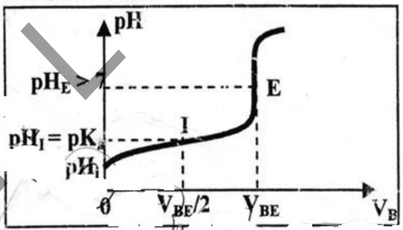
* A l'équivalence le milieu est neutre:$pH_E = 7$.

* A l'équivalence : $C_B.\ B_B = C_A.\ V_{AE}$.

II/ Réaction entre un monoacide faible et une monobase forte.

1- Dosage d'un acide faible par une base forte :





* Equation de la réaction : $AH + OH^- \longrightarrow A^- + H_2O$.

En effet initialement:$AH + H_2O \rightleftarrows A^- + H_3O^+$ (I)

$H_2O + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$

L'addition de la base forte apporte les ions OH^-

D'où $H_3O^+ + OH^- \longrightarrow 2\,H_2O$ (II)

(I) et (II) ⇒: $AH + OH^- \longrightarrow A^- + H_2O$.

* $pH_i < 7$ $pH_i = ½\,(pK_a - \log C_A)$

* Il existe deux points d'inflexion :

I à la demi- équivalence : $pH_I = pK_a$

E à l'équivalence : $pH_E > 7$

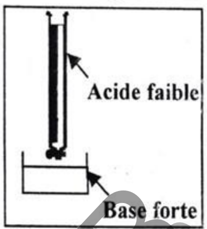
* A l'équivalence : $C_A.\ V_A = C_B.\ V_{BE}$.

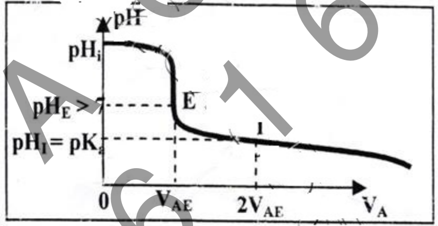
* A l'équivalence **AH** disparaît et apparaît A^- dans la solution qui réagit avec l'eau :

$A^- + H_2O \rightleftarrows AH + OH^-$

D'où à l'équivalence le milieu est basique.

2- Dosage d'un base forte par un acide faible

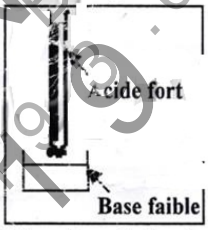


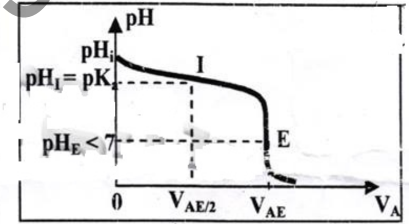


$pH_i = pKe + \log C_B$

III/ Réaction entre un monobase faible et un monoacide fort.

1- Dosage d'un base faible par un acide fort:





* Equation de la réaction : $B + H_3O^+ \longrightarrow BH^+ + H_2O$

En effet initialement :

$B + H_2O \rightleftarrows BH^+ + OH^-$ (I)

$H_2O + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$

L'addition de l'acide fort apporte les ions H_3O^+

D'où $H_3O^+ + OH^- \longrightarrow 2\,H_2O$ (II)

(I) et (II) ⇒ : $B + H_3O^+ \longrightarrow BH^+ + H_2O$.

* $pH_i > 7$ $pH_i = ½\,(pKe + pK_a + \log C_B)$

* Il existe deux points d'inflexion :

I au demi- équivalence : $pH_I = pK_a$

E à l'équivalence : $pH_E < 7$

*A l'équivalence : $C_B.\ B_B = C_A.\ V_{AE}$.

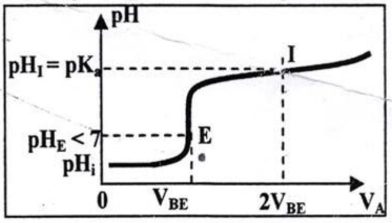
* A l'équivalence **B** disparaît et apparaît BH^+ dans la solution qui réagit avec l'eau :

$BH^+ + H_2O \rightleftarrows B + H_3O^+$

D'où à l'équivalence le milieu est acide.

2- Dosage d'un acide fort par une base faible :

$pH_i = -\log C_A$



SERIES PILOTE SFAX

Acid Base C2

SCIENCES PHYSIQUES

11 4

LES ACIDES ET LES BASES
4ème :M-S.exp

LYCEE PILOTE
SFAX

EXERCICE n° : 1

1°) Compléter le tableau suivant :

N°	Couple Acide/Base : A_i / B_i	K_a	pK_a
(1)	$CClH_2 — COOH$ / …………	$1,25.10^{-3}$	………………
(2)	… …. ……. / F^-	………………	3,2
(3)	NH_4^+ / …………	………………	9,25
(4)	…………… / $CH_3—NH_2$	………………	10,72

2°) Classer les acides et les bases par ordre de force croissante.

3°)

-a- Ecrire l'équation de la réaction acide base mettant en jeu les couples (1) et (4) avec $CH_3 — NH_2$ écrit à gauche.

-b- Calculer la constante d'équilibre K de cette réaction. Que peut-on dire de cette réaction?

-c- On mélange 0,1mol de A1, 0,2mol de B4 et 0,25mol de B1. Déterminer la composition du mélange final.

EXERCICE n° : 2

1°) Compléter les couples acide / base suivants:

$H_2C_2O_4$ / ………… ; ………….. / NH_3

2°)

-a- Ecrire l'équation de la réaction acide base entre le premier couple et le deuxième avec $H_2C_2O_4$ écrit à gauche.

-b- Exprimer la constante d'équilibre K de cette réaction en fonction des concentrations.

-c- $K = 10^8$, comparer les forces des deux acides des couples mis en jeu.

-d- Ecrire l'expression de la constante d'acidité de chaque couple.

-e- En déduire une relation entre K et les deux constantes d'acidité.

EXERCICE n° : 3

On donne les couples acide / base suivants :

$CH_3 — CO_2H / CH_3 — CO_2^-$: $pK_{a1} = 4,75$; HF / F^- : $pK_{a2} = ...$?

1°) Ecrire l'équation de la réaction acide base entre l'acide $CH_3 — CO_2H$ et la base F^-.

2°) Définir la constante d'équilibre K, puis l'exprimer en fonction de pK_{a1} et pK_{a2}.

3°) Sachant que la constante d'équilibre K = 2,82.10-2.
Calculer pK_{a2} et comparer les forces des deux acides $CH_3 — CO_2H$ et HF.

4°) Quelle réaction se produit spontanément dans les systèmes (S_1) et (S_2) dont la composition est la suivante :

a) Système (S_1)

$[CH_3 — CO_2H] = 1mol.L^{-1}$; $[CH_3 — CO_2^-] = 0,01mol.L^{-1}$

$[HF] = 0,1mol.L^{-1}$; $[F^-] = 0,1mol.L^{-1}$

b) Système (S_2)

$[CH_3 — CO_2H] = 0,02mol.L^{-1}$; $[CH_3 — CO_2^-] = 0,004mol.L^{-1}$

$[HF] = 0,5mol.L^{-1}$; $[F^-] = 0,0005mol.L^{-1}$

Que peut-on conclure dans chaque cas ?

EXERCICE n° : 4

On donne $Ke = 10^{-14}$

Une solution d'acide nitreux HNO_2 de concentration molaire $C = 10^{-1}mol.L^{-1}$ a un pH = 2,2.

1°) Montrer que l'acide nitreux HNO_2 est un acide faible.

2°) Ecrire l'équation de sa réaction avec l'eau.

3°) Quels sont les couples acide / base mis en jeu?

4°) Exprimer la constante d'acidité du couple correspondant à cet acide en fonction de C et $[H_3O^+]$.
Calculer sa valeur.

5°) Sachant que pour les couples suivants :

$pKa(HN_3 / N_3^-) = 4,72$ et $pKb(HCN / CN^-) = 4,69$

Classer les trois couples par ordre croissant de la force de leurs bases.

Exercice n° 1

(12)

1/ $Ka = 10^{-pka}$ et $pka = -\log ka$

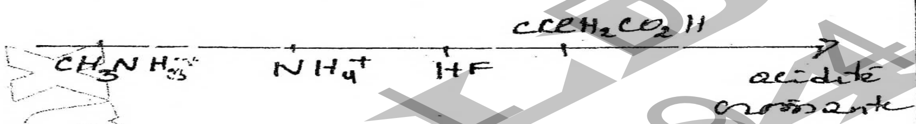
Couple Ac/B	ka	pka
$CClH_2CO_2H/CClH_2CO_2^-$	$1,25.10^{-3}$	2,9
HF/F^-	$6,3.10^{-4}$	3,2
NH_4^+/NH_3	$5,62.10^{-10}$	9,25
$CH_3-NH_3^+/CH_3-NH_2$	$1,9\ 10^{-11}$	10,72

2/ L'acide le plus fort possède la constante d'acidité le plus élevée (le pka le plus faible)

on a : $ka_1 > ka_2 > ka_3 > ka_4$

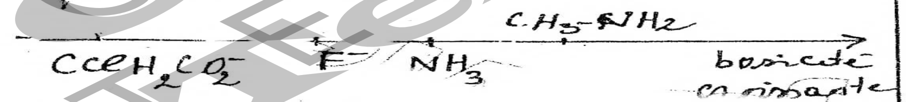
$(pka_1 < pka_2 < pka_3 < pka_4)$

d'où la classification par ordre d'acidité croissante :



L'acide le plus fort possède la base conjuguée la plus faible

d'où la classification des base par ordre de basicité croissante



3) a – Eq. R^{ct} :

$CH_3NH_2 + CClH_2CO_2H \rightleftarrows CH_3NH_3^+ + CClH_2CO_2^-$

(1)

b) d'après la L d'action de mas

$R_{eq.dyn} = K$

$$\Rightarrow K = \frac{[CH_3NH_3^+]_{éq}[CClH_2CO_2^-]_{éq}}{[CH_3NH_2]_{éq}[CClH_2-CO_2H]_{éq}}$$

$$= \frac{[CH_3NH_3^+]}{[CH_3NH_2].[H_3O^+]} \cdot \frac{[CClH_2-CO_2^-].[H_3O^+]}{[CClH_2-CO_2H]}$$

$$= \frac{1}{Ka_4} \cdot Ka_1 = \frac{Ka_1}{Ka_4}$$

AN $K = \frac{1,25.10^{-3}}{1,9.10^{-11}} = 6,57.10^{7}$

or $K > 10^4$: la R^{ct} est totale.

c/ Tableau descriptif :

Eq. R^{ct}		B_4 +	A_1 $\rightleftarrows$	A_4 +	B_1
Etat	Av	qt de matière (mol)			
t = 0	0	0,2	0,1	0	0,25
tf	x_f	$0,2-x_f$	$0,1-x_f$	x_f	$0,25+x_f$

Les deux réactifs B_4 et A_1 réagissent mole à mole.

$n_0(B_4) > n_0(A_1) \Rightarrow$ l'acide A_1 est réactif limitant.

la R^{ct} étant totale : $n_f(A_1) = 0$

$\Rightarrow 0,1 - x_f = 0 \Rightarrow x_f = 0,1 mol$

le mélange final est constitué par

$$\begin{cases} n(B_4) = 0,2 - x_f = 0,1 mol \\ n(A_4) = x_f = 0,1 mol \\ n(B_1) = 0,25 + x_f = 0,35 mol \\ n(A_1) = 0 \end{cases}$$

Exercice n°2

⑬

1/ $H_2C_2O_4 / HC_2O_4^-$ et NH_4^+/NH_3

2/a/ $H_2C_2O_4 + NH_3 \rightleftharpoons HC_2O_4^- + NH_4^+$

b/ $K = \dfrac{[HC_2O_4^-]_{éq} \cdot [NH_4^+]_{éq}}{[H_2C_2O_4]_{éq} \cdot [NH_3]_{éq}}$

c/ $K = 10^8$: extrêmement élevée

⇒ l'acide oxalique $H_2C_2O_4$ est plus fort que NH_4^+

d) $Ka_{(H_2C_2O_4/HC_2O_4^-)} = \dfrac{[H_3O^+] \cdot [HC_2O_4^-]}{[H_2C_2O_4]} = Ka_1$

$Ka_{(NH_4^+/NH_3)} = \dfrac{[H_3O^+] \cdot [NH_3]}{[NH_4^+]} = Ka_2$

e) $K = \dfrac{[HC_2O_4^-]_{éq} \cdot [NH_4^+]_{éq}}{[H_2C_2O_4]_{éq} \cdot [NH_3]}$

$= \dfrac{[HC_2O_4^-] \cdot [H_3O^+]}{[H_2C_2O_4]} \cdot \dfrac{[NH_4^+]}{[H_3O^+] \cdot [NH_3]}$

$Ka_1 \cdot \dfrac{1}{Ka_2} \Rightarrow \boxed{K = \dfrac{Ka_1}{Ka_2}}$

Exercice n°3

1/ $CH_3CO_2H + F^- \rightleftharpoons CH_3CO_2^- + HF$

2/ $K = \dfrac{[CH_3CO_2^-] \cdot [HF]}{[CH_3CO_2H] \cdot [F^-]}$ ($K = \pi_{éq}$ dyn)

$= \dfrac{[CH_3CO_2^-] \cdot [H_3O^+]}{[CH_3CO_2H]} \cdot \dfrac{[HF]}{[F^-] \cdot [H_3O^+]}$

$= Ka_1 \cdot \dfrac{1}{\ }= \dfrac{Ka_1}{\ }$

$\Rightarrow \boxed{K = \dfrac{10^{-pKa_1}}{10^{-pKa_2}} = 10^{pKa_2 - pKa_1}}$

3/ $K = 10^{pKa_2 - pKa_1} \Rightarrow pKa_2 - pKa_1 = \log K$

$\Rightarrow pKa_2 = pKa_1 + \log K$

$= 4,75 + \log 2,82 \cdot 10^{-2}$

$\boxed{pKa_2 = 3,2}$

L'acide la plus fort possède le pKa le plus faible or $pKa_2 < pKa_1$

⇒ HF acide plus fort que CH_3CO_2H

4) * $\pi_1 = \dfrac{[HF] \cdot [CH_3CO_2^-]}{[F^-] \cdot [CH_3CO_2H]} = \dfrac{0,1 \times 0,01}{0,1 \times 1}$

$\pi_1 = 10^{-2}$

⇒ $\pi_1 < K$ ⇒ le système évolue spontanément dans le sens qui augmente π : c'est le sens direct

⇒ R^{ct} directe se produit spontanément

* $\pi_2 = \dfrac{[HF] \cdot [CH_3CO_2^-]}{[F^-] \cdot [CH_3CO_2H]} = \dfrac{0,5 \times 0,004}{0,0005 \times 0,02}$

$= 2 \cdot 10^{-2}$

$\pi_2 < K$ ⇒ le système évolue dans le sens qui augmente π, c'est le sens direct.

⇒ R^{ct} directe se produit spontanément.

R^{ct} directe se produit entre l'acide et la base le plus faibles de deux couples mis en jeu

⇒

Exercice n°4

(14)

1/ $pH = 2,2 \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-2,2} mol.L^{-1}$

$\Rightarrow [H_3O^+] = 6,3.10^{-3} mol.L^{-1}$

or $C = 10^{-1} mol.L^{-1} > [H_3O^+]$

$\Rightarrow$ la dissociation de l'acide est partielle.

$\Rightarrow HNO_2$ est un acide faible

2/ $HNO_2 + H_2O \rightleftharpoons NO_2^- + H_3O^+$

3) HNO_2/NO_2^- et H_3O^+/H_2O

4) $Ka = \frac{[H_3O^+].[NO_2^-]}{[HNO_2]}$

D'après l'éq : $n(H_3O^+) = n(NO_2^-)$

$\Rightarrow [H_3O^+] = [NO_2^-]$

Acide est faiblement dissocié

$[HNO_2] \simeq C$

d'où $Ka = \frac{[H_3O^+]^2}{C}$

AN $Ka = \frac{(6,3.10^{-3})^2}{0,1} = 3,97.10^{-4}$

5/ 1ère méthode

- $pKa_{(HNO_2/NO_2^-)} = -\log Ka = -\log 3,97.10^{-4} = 3,4$
- $pKa(HCN/CN^-) = pKe - pKb = 14 - 4,69 = 9,04$

L'acide le plus fort ayant pKa le plus faible

$pKa(HNO_2/NO_2^-) < pKa(HN_3/N_3^-) < pKa(HCN/CN^-)$

$\Rightarrow$ La classification par ordre acidité croissante :

$HCN/CN^- \quad HN_3/N_3^- \quad HNO_2/NO_2^- \longrightarrow$ acidité croissante

L'acide le plus fort possède la base conjuguée la plus faible d'où la classification par basicité croissante

$HNO_2/NO_2^- \quad HN_3/N_3^- \quad HCN/CN^- \longrightarrow$

2ème méthode

$Kb(HNO_2/NO_2^-) = \frac{Ke}{Ka} = \frac{10^{-14}}{3,97.10^{-4}} = 2,52.10^{-11}$

$\Rightarrow pKb = -\log Kb = 10,6$

- $pKb(HN_3/N_3^-) = pKe - pKa = 14 - 4,72 = 9,28$

La base la plus forte possède le pKb le plus faible :

$pKb(HCN/CN^-) < pKb(HN_3/N_3^-) < pKb(HNO_2/NO_2^-)$

d'où la classification par ordre de basicité croissante

$HNO_2/NO_2^- \quad HN_3/N_3^- \quad HCN/CN^- \longrightarrow$

(u)

SERIES PILOTE TUNIS

SERIE PILOTE TUNIS

Toutes les solutions sont à 25°C température sous laquelle la constante d'ionisation propre de l'eau est $Ke = 10^{-14}$.

Exercice 1 : L'équivalence acido-basique est obtenue en traitant une masse m=0,5g d'un monoacide carboxylique linéaire saturé ne renfermant que les éléments carbone, oxygène et hydrogène par un volume v_{bE}=56,8ml de soude 0,1M.

1- Déterminer la masse molaire, la formule et le nom de cet acide.

2- On dissout 1,76g de cet acide dans 100ml de la même solution de soude.
  a- Trouver le pH de cette solution sachant que $Ka = 6,3.10^{-5}$.
  b- Quelle particularité présente-t-elle ?

Exercice 2 : A un volume V_a=15mL d'une solution (S_a) d'un acide AH de concentration $C_a = 2,4.10^{-2}$ mol.L^{-1}, pKa=5,08, on ajoute un volume V_b=12mL d'une solution (S_b) d'hydroxyde de sodium de concentration $C_b = 3.10^{-2}$ mol.L^{-1} pour obtenir une solution (S) de pH=8,60.

1- a- Définir l'équivalence acido-basique.
  b- Montrer que le mélange (S) est à l'équivalence acido-basique.

2- Indiquer deux arguments qui justifient que AH est un acide faible.

3- Le tableau suivant indique les zones de virage ainsi que les couleurs des deux formes acides et basiques de trois indicateurs colorés :

Nom de l'indicateur	Vert de bromocrésol	Rouge de phénol	Bleu de thymol
Couleur de la forme acide	jaune	Jaune	Jaune
Couleur de la forme basique	bleue	Rouge	Bleue
Zone de virage	3,8 - 5,4	6,4 – 8,0	8 - 9,6

Indiquer en vous justifiant l'indicateur le mieux adapté pour chaque dosage ainsi que la couleur observée à l'équivalence.

4- Au mélange (S), on ajoute encore un volume V' de (S_a), la nouvelle valeur du pH devient 5,08.
  a- Indiquer en vous justifiant les propriétés du nouveau mélange obtenu.
  b- Déduire V'.

Exercice 3 : Toutes les solutions sont à 25°C température sous laquelle la constante d'ionisation propre de l'eau est $Ke = 10^{-14}$.

On dissout 0,222g d'un acide carboxylique de formule brute $C_nH_{2n}O_2$ et de pKa=4,77 de façon à obtenir 60cm^3 d'une solution notée (S) de concentration C.

On réalise deux expériences :

Expérience 1 : A 30 cm^3 de la solution (S), on ajoute 12,5 cm^3 d'une solution 0,06M d'hydroxyde de sodium. On obtient une solution (S_1) dont le la valeur du pH est 4,77.

Expérience 2 : A 18 cm^3 de la solution (S), on ajoute 15 cm^3 d'une solution 0,06M d'hydroxyde de sodium. On obtient une solution (S_2).

1- Ecrire l'équation de la réaction de dosage qui se produit dans les solutions (S_1) et (S_2).

2- Montrer qu'à la demi-équivalence pH=pKa.

3- Indiquer les propriétés de la solution (S_1).

4- En utilisant les résultats de l'expérience 1, déterminer C.

5- a- Montrer que la solution (S_2) est à l'équivalence acido-basique.
  b- Indiquer en vous justifiant la nature de la solution (S_2).
  c- Calculer la valeur de son pH.

6- Déterminer la formule brute acide carboxylique acide faible

7- A chacune des trois solutions (S_1), (S_2) et (S), on ajoute quelques gouttes de vert de bromocrésol, indicateur coloré dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau suivant

Couleur de la forme acide	Zône de virage	Couleur de la forme basique
jaune	3,8 - 5,4	bleue

pH 75,4

Indiquer en vous justifiant la couleur observée dans chacune de ces trois solutions .

8- Au volume restant de la solution (S) , on ajoute 18cm^3 d'eau pure .

a- Déterminer C' valeur de la concentration de la solution diluée.

b- Quel volume de soude faut-il utiliser pour obtenir équivalence acido-basique .

c- En réalité le volume versé est de 13 cm^3 .Calculer le pH du mélange obtenu .

On donne en gmol^{-1} les masses molaires atomiques : C=12 ; H=1 ; O=16 .

Exercice 4 :

(S_1) et (S_2) sont deux solutions parmi l'une des solutions suivantes :

(A) : Solution d'acide propanoïque ($C_2H_5CO_2H$) acide faible

(B) : Solution d'hydroxyde de sodium (NaOH) base forte

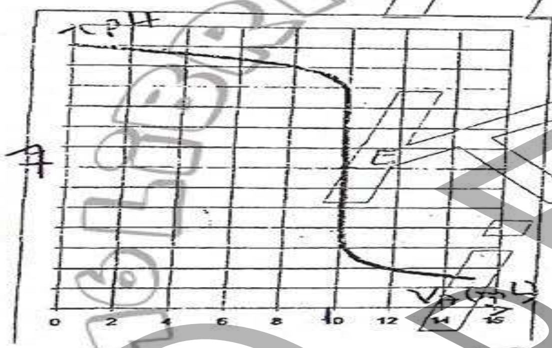
(C) : Solution d'ammoniaque (NH_3) base faible

(D) : Solution d'acide chlorhydrique (HCl) de concentration C=10^{-1}moll^{-1} acide fort

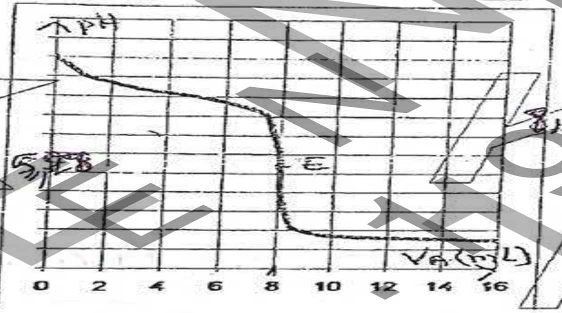
Dans un bécher contenant un volume V_1=10cm^3 de la solution (S_1) , on ajoute progressivement , à l'aide d'une burette , la solution (S_2) sln dosante

Les courbes ci-dessous représentent les variations du pH du mélange obtenu en fonction du volume V_2 de la solution (S_2) versé

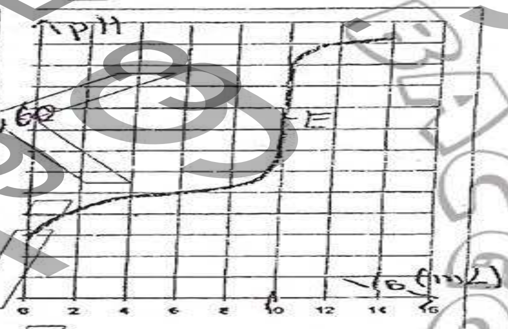
Courbe I



Courbe II



Courbe III



1- Compléter le tableau ci-dessous en précisant pour chaque courbe les noms de l'acide et de la base contenus dans (S_1) et (S_2) . Donner deux arguments qui justifient votre réponse

n° de la courbe	Courbe I	Courbe II	Courbe III
Nom de (S_1)			
Nom de (S_2)			

2- Déterminer en utilisant les courbes la concentration de la solutions (S_1) pour chaque dosage .

3- Pour les trois dosages , on utilise le même indicateur coloré le rouge de phénol dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau suivant :

Couleur de la forme acide	Zone de virage	Couleur de la forme basique
Jaune	6,4 ≤ pH ≤ 8,2	Rouge

Indiquer pour chaque dosage la couleur du mélange obtenu à l'équivalence acido-basique .

4- Pour la courbe II ,

a- Ecrire l'équation de la réaction du dosage .

b- A partir de la valeur du pH à l'équivalence , montrer que la constante d'acidité du couple acide /base contenu dans la solution (S_1) est Ka=6,3.10^{-10} .

c- Déduire alors la valeur du pH initial de la solution (S_1) .

5- Déterminer le volume V de la solution (D) à ajouter à 10cm^3 de la solution (B) pour que le pH du mélange obtenu soit égal à 1,7 .

Série 21

Exercice 1 :

1 – A l'équivalence $n_{ac} = n_{base\ aj}$

$$\frac{m}{M} = C_B V_{BE} \longrightarrow \boxed{M = \frac{m}{C_B V_{BE}}}$$

$$M = \frac{0,5}{0,1 \times 56,8 \cdot 10^{-3}} \longrightarrow M = 88\ g.mol^{-1}.$$

formule d'un acide carb $C_nH_{2n}O_2$.

$$M = 12n + 2n + 32 = 88 \longrightarrow 14n = 88 - 32$$

$$\boxed{n = 4} \longrightarrow \boxed{C_4H_8O_2}$$

$CH_3 - CH_2 - CH_2 - CO_2H$ Acide butanoïque

2 – a – $n_{ac} = \frac{m}{M} = 0,02\ mol$ faible

$n_{base} = C_B V_B = 0,01\ mol$. ← forte

$n_{base\ forte} = \frac{1}{2} n_{acide\ faible} \longrightarrow$ C'est la ½ équivale

$pH = pKa \longrightarrow pH = -\log Ka$ $\boxed{pH = 4,2}$

b – C'est une solution tampon : son pH varie très faiblement si on lui ajoute une quantité modérée d'un acide fort, une base forte ou de l'eau.

Exercice 2

1 – a – A l'équivalence acido-basique, le nb de mol d'acide est égal au nb de mol de base.

b – $n_{ac} = C_A V_A \longrightarrow n_{ac} = 3,6 \cdot 10^{-4}\ mol$

$n_{base} = C_B V_B \longrightarrow n_{base} = 3,6 \cdot 10^{-4}\ mol.$

$n_{ac} = n_{base} \longrightarrow$ Equivalence acido-basique.

2-

Arg 1 : A l'équivalence, Sln est basique
Dosage acide faible par base forte.

Arg 2 : $-1,74 < pKa = 5,08 < 15,74$

$\Longrightarrow$ Acide AH est faible

3- Bleu de thymol car sa zone de virage renferme pH_E.

4- a- $pH = pKa$

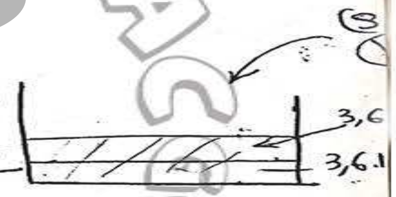
C'est une solution tampon : son pH varie te faiblement si on lui ajoute une quantité modé d'un acide ou fort, une base ou forte ou de l'e

b-

$n_{base\ forte} = \frac{1}{2} n_{acide}$

Ajouter encore $3,6.10^{-4}$ mol d'acide (Sa)

$\Longrightarrow$ Ajouter un volume d'acide = 15mL



Autre méthode

$n_{base\ forte} = \frac{1}{2} n_{acide\ faible}$

$3,6.10^{-4} = \frac{1}{2} C_A (V_a + V')$

$V' = \frac{2 \times 3,6.10^{-4}}{2,4.10^{-2}} - 15.10^{-3} \Longrightarrow V' = 0,015$

Exercice 3

1- $C_nH_{2n}O_2 + OH^- \longrightarrow C_nH_{2n-1}O_2^- + H_2O$

2- $Ka = $ ____________

Voir cours

3 - (S_1) solution tampon.

4 - $n_{base\ aj} = \frac{1}{2} n_{ac}$.

$C_B V_B = \frac{1}{2} C V \longrightarrow C = \frac{2 \times C_B V_B}{V}$

$C = \frac{2 \times 0{,}06 \times 12{,}5 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-3}} \longrightarrow \boxed{C = 0{,}05\ mol\,L^{-1}}$

5-a-

$n_{ac} = C \cdot V_a = 9 \cdot 10^{-4} mol.$

$n_{base} = C_B V_B = 9 \cdot 10^{-4} mol \Big\} \Longrightarrow n_{ac} = n_{base}$

$\Longrightarrow$ Equivalence acido-basique.

b- A l'équivalence tout l'acide faible se transform en sa base conjuguée qui est faible $\longrightarrow$ solution (S_2) est basique $\longrightarrow$

Base faible $\longrightarrow pH = \frac{1}{2}(pKa + pKe + \log[C_nH$

$[C_nH_{2n-1}O_2^-] = \frac{C \cdot V}{V + V_{BE}} = \frac{0{,}05 \times 18}{18 + 15} = 27{,}27 \cdot 10^{-3} m$

$pH_E = \frac{1}{2}(4{,}77 + 14 + \log 27{,}27 \cdot 10^{-3}).$

$\boxed{pH_E = 8{,}6}$

6- $C = \frac{m}{MV} \longrightarrow M = \frac{m}{CV} = 74\ g\,mol^{-1}$

$C_nH_{2n}O_2$: $74 = 12n + 2n + 32 \longrightarrow n = 3$

$C_3H_6O_2$ $CH_3-CH_2-CO_2H$ acide propan

7- Solution $(S_1) \longrightarrow pH(S_1) = 4{,}77 \in$ zône de virage $\Longrightarrow$ Couleur verte.

Solution $(S_2) \longrightarrow pH(S_2) = 8{,}6 > 5{,}4 \longrightarrow$ Bleue

Solution $(S) \longrightarrow$ Acide faible.

$pH(s) = \frac{1}{2}(pKa - \log C)$.

$C = 0{,}05\,mol\,L^{-1}$

$pKa \rightarrow Ka = 10^{-4,}$

	$C_nH_{2n}O_2$ +	H_2O ⇌	$C_nH_{2n-1}O_2^-$ +	H_3O^+
Initial	C	excès	0	10^{-7}
Final	$C - y_F$	—	y_F	10^{-pH}

$[H_3O^+] = [H_3O^+]_{AC} + [H_3O^+]_{eau}$

$pH < 6 \rightarrow$ Négliger $[H_3O^+]_{eau}$ devant $[H_3O^+]_{AC}$.

$[C_nH_{2n-1}O_2^-] = [H_3O^+] = y_F = C\tau_F$

$[C_nH_{2n}O_2] = C - y_F = C(1-\tau_F)$.

$$Ka = \frac{[C_nH_{2n-1}O_2^-][H_3O^+]}{[C_nH_{2n}O_2]}$$

$$Ka = \frac{C^2\tau_F^2}{C(1-\tau_F)} \Rightarrow Ka = \frac{C\tau_F^2}{1-\tau_F}$$

$Ka - Ka\tau_F = C\tau_F^2 \rightarrow C\tau_F^2 + Ka\tau_F - Ka = 0$.

$\tau_F = 0{,}018 < 0{,}05 \longrightarrow$ On peut écrire

$\boxed{pH(s) = \frac{1}{2}(pKa - \log C)}$

$\boxed{pH(s) = 3{,}03} < 3{,}8 \rightarrow$ Couleur forme Ac.

$\Longrightarrow$ Jaune

8- a- $C' = \frac{CV}{V+Ve} = \frac{0{,}05 \times 12}{12+18}$

$\boxed{C' = 0{,}02\,mol\,L^{-1}}$

$n_{ac} = CV = C'(V+Ve)$

b-

A l'équivalence $n_{ac} = n_{base} \longrightarrow$.

$CV = C_B V' \longrightarrow V' = \frac{CV}{C_B}$.

$V' = 0{,}01\,L = 10\,mL$

$$\underbrace{C_3H_6O_2 + OH^-}_{\text{base aj}} \longrightarrow \underbrace{C_3H_5O_2^- + H_2O}_{\text{obtenu}}$$

$n_{\text{base en excès}} = C_BV_B - C_AV_A$.

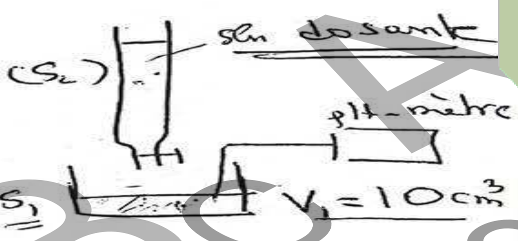
$$[OH^-]_{\text{excès}} = \frac{C_BV_B - C_AV_A}{V_B + V_A} = 10^{pH-pKe}$$

$$\log \frac{C_BV_B - C_AV_A}{V_B + V_A} = pH - pKe$$

$$pH = pKe + \log \frac{C_BV_B - C_AV_A}{V_B + V_A + V_e}$$

$pH = 11,62$.

Série 21



Exercice 4 :

1- Courbe 1 : (S_1) solution basique car $pH_0 > 7$ dosé par acide fort →
(S_2) : HCl : (D)

(S_1) base forte car →

Arg 1 : $pH_E = 7$ à l'équivalence sln neutre.

Arg 2 : Courbe $pH = f(V_A)$ présente 1 seul pt d'inflexion.

(S_1) : NaOH : (B)

Courbe 2 : (S_1) sln basique car $pH_0 > 7$ dosée par un acide fort : HCl (D).

(S_1) base faible

Arg 1 : A l'équivalence sln est acide $pH_E < 7$

Arg 2 : Courbe $pH = f(V_A)$ → présente 2 pts d'inflexion.

(S_1) : NH_3 (C)

Courbe 3 : Dosage d'un acide par une base forte

(S_2) : NaOH (B)

(S_1) : acide faible

Arg 1 : A l'équivalence la sln est basique $pH_E > 7$.

Arg 2 : La courbe $pH = f(V_B)$ présente 2 pts d'inflexion

(S_1) : C_2H_5-CO_2H (A).

2- A l'équivalence $n_{ac} = n_{base}$ ⇒ $C_A V_A = C_B V_B$.

Courbe 1 : $V_1 = 10 cm^3$; $V_{AE} = 10 cm^3$, $C_A = 10^{-1} mol L^{-1}$

$C_B = C(NaOH) = 0,1 mol L^{-1}$

Courbe 2 : $V_1 = 10 cm^3$; $V_{AE} = 8 cm^3$, $C_A = 10^{-1} mol L^{-1}$

$C_B' = C(NH_3) = \frac{8 \times 10^{-1}}{10} = 8.10^{-2} mol L^{-1}$.

Courbe 3 : $C_B = 10^{-1} mol L^{-1}$; $V_1 = V_A = 10 cm^3$, $V_{BE} = 10 cm^3$

$C_A' = 0,1 mol L^{-1}$.

3 -

Courbe1 $pH_E = 7 \in$ zône de virage $\Longrightarrow$ Couleur Oran

Courbe2 $pH_E = 5,28 < 6,4 \Longrightarrow$ Couleur forme acide

Courbe3 $pH_E = 8,6 > 8,2 \longrightarrow$ Couleur forme basique : R

4 - a - $NH_3 + H_3O^+ \longrightarrow NH_4^+ + H_2O$

b - A l'équivalence $pH_E = \frac{1}{2}(pKa - \log [NH_4^+]_E)$

$[NH_4^+]_E = \frac{C'_B V_B}{V_B + V_{AE}}$

$pH_E = \frac{1}{2}\left(pKa - \log \frac{C'_B V_B}{V_B + V_{AE}}\right)$

$pKa = 2\, pH_E + \log \frac{C'_B V_B}{V_B + V_{AE}} \longrightarrow pKa = 9,$

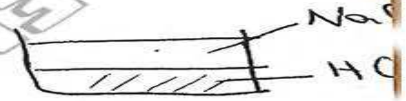
$Ka = 10^{-pKa} \longrightarrow \boxed{Ka = 6,3 \cdot 10^{-10}}$

$pH = pH_E < 6$

$\tau_f = \frac{10^{-pH_E}}{[NH_4^+]_E} = 1,48 \cdot 10^{-4} < 0,05$.

c - solution basique $\longrightarrow$ $pH_0 = \frac{1}{2}(pKa + pKe + \log C'_B)$.

$= 11,05$



5 - $n(a.c)_{excès} = C_A V_A - C_B V_B$.

$[H_3O^+] = \frac{C_A V_A - C_B V_B}{V_A + V_B} = 10^{-pH}$

$C_A V - C_B V_B = 10^{-pH} V + 10^{-pH} V_B$.

$V(C_A - 10^{-pH}) = V_B(C_B + 10^{-pH})$.

$V = V_B \frac{C_B + 10^{-pH}}{C_A - 10^{-pH}} \longrightarrow \boxed{V = 15\, cm^3}$

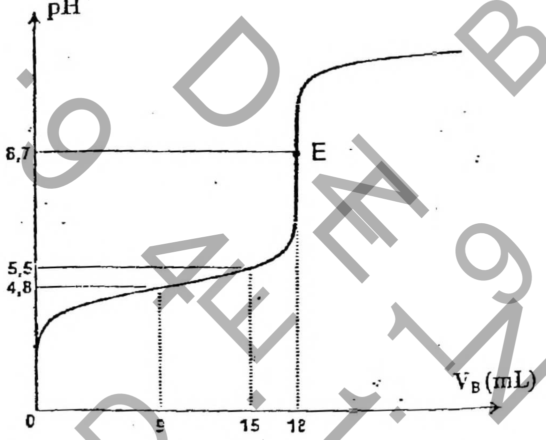
SERIES PILOTE SOUSSE

Série d'exercices
Chimie 4ème

pH des solutions aqueuses II

EXERCICE 1:

On dose par pH métrie un volume V_A =12 mL d'une solution(S) d'un monoacide HA de concentration molaire C_A par une solution (S')de soude de concentration molaire C_B=0,05 mol.L^{-1} ce qui a permi de tracer la courbe d'évolution du pH du mélange en fonction de volume de soude ajouté



1-Préciser en le justifiant si l'acide HA est fort ou faible

2-Monter que C_A=3/2 C_B calculer C_A

3- Lorsque le volume de base ajouté est V_B =15 mL le pH du mélange est 5,5

- a- Ecrire l'équation de la réaction du dosage
- b- Déterminer les molarités en ions H_3O^+ et OH^- dans le mélange
- c- Compléter le tableau d'avancement de l'annexe
- d- Calculer le taux d'avancement final de la réaction, conclure

4- Préciser le caractère de la solution obtenue à l'équivalence. Justifier ce caractère

5- Identifier l'acide HA en justifiant la réponse. On donne

Couple acide-base	$HCOOH / HCOO^-$	HNO_2 / NO_2^-	$CH_3CO_2H / CH_3CO_2^-$
pK_a	3,8	3,3	4,8

6- A 24 mL de (S) on ajoute 18 mL de (S').

- a- Donne en le justifiant la valeur du pH du mélange
- b- Donner les propriétés du mélange obtenu

EXERCICE 2:

On dispose de 3 solutions aqueuses :

- Une solution(S_1) d'un acide A_1H de concentration molaire C_1
- Une solution(S_2) d'un acide A_2H de concentration molaire C_2
- Une solution(S_3) d'un acide A_3H de concentration molaire C_3

On mesure le pH de ces trois solutions, on obtient les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous.

On réalise ensuite 3 dosages différents en faisant agir à chaque fois un volume V_A =10 mL de chacune de ces 3 solutions avec une même solution de soude de molarité C_B.

Les volumes de soude versés à l'équivalence sont respectivement V_{B1} , V_{B2} ,V_{B3}

solution	(S_1)	(S_2)	(S_3)
pH initial de la solution	$pH_1 = 4$	$pH_2 = 3,0$	$pH_3 = 2,0$
Volume de la solution de soude versé à l'équivalence (mL)	$V_{B1} = 10$	$V_{B2} = 16$	$V_{B3} = 10$
pH à l'équivalence : pH_E	$pH_{E1}=$	✕	$pH_{E3}=$

1) Montrer que A_2H est l'acide le plus concentré.

2) On dilue cent fois chacune des solutions précédentes. En mesurant le pH de chacune des nouvelles solutions (S'_1) (S'_2) et (S'_3) on trouve respectivement $pH'_1 = 5$; $pH'_2 = 4$ et $pH'_3 = 4$.
   a) Montrer que seulement A_3Hest un acide fort
   b) Calculer la concentration molaire initiale de l'acide fort
   c) En déduire la concentration molaire C_B de la solution de soude ainsi que les concentrations molaires initiales des deux autres solutions acides

3) a) Calculer le taux d'avancement final de la réaction de l'acide A_1H avec l'eau dans la solution (S_1): τ_{f1}
   b) Calculer le taux d'avancement final de la réaction de l'acide A_2H avec l'eau dans la solution (S_2): τ_{f2}
   c) A partir des valeurs de τ_f peut-on déduire l'acide le plus fort ? Justifier la réponse

4) a) Exprimer la constante d'acidité d'un couple acide base AH/A^- en fonction de la concentration initiale C de l'acide et du taux d'avancement final de la réaction de l'acide AH avec l'eau : τ_f.
   b) Comparer alors les forces des acides A_1H et A_2H.

5) Sachant que dans le cas du dosage de l'acide faible A_1H par la solution de soude le pH du mélange à l'équivalence est donné par la relation $pH = \frac{1}{2}(pK_a + pK_e + \log C)$, où C est la concentration de la base A_1^-, compléter les valeurs manquantes dans la dernière ligne du tableau.

6) On réalise de nouveau le dosage d'un volume V_A = 10 mL de la solution (S_1) de l'acide A_1H de concentration molaire C_1 en utilisant une solution d'hydroxyde de sodium de concentration molaire $C'_B > C_B$.

Dire en le justifiant si chacune des affirmations suivantes est correcte ou fausse :

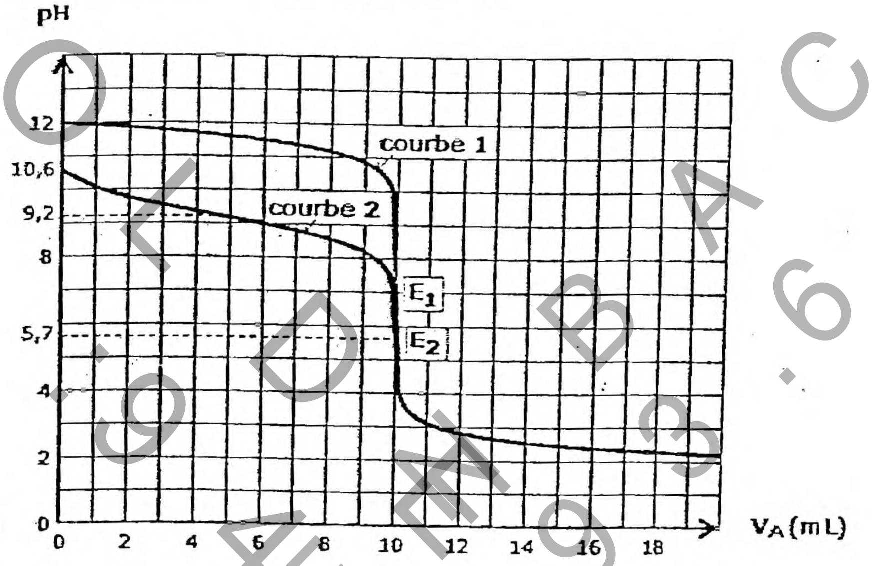
- Proposition 1 : le pH à la demi-équivalence diminue
- Proposition 2 : Le volume de base ajouté à l'équivalence diminue $V'_{B1} < V_{B1}$.
- Proposition 3 : Le pH à l'équivalence diminue. $pH'_E < pH_E$

EXERCICE 3:

Au cours d'une expérience de travaux pratiques, un groupe d'élèves introduisent dans deux béchers un même volume $V_{B1} = V_{B2} = 30\ cm^3$ de deux solutions aqueuses (S_1) et (S_2) de deux monobases B_1 et B_2. A l'aide d'un pH-mètre, ils suivent l'évolution du pH de chaque solution (S_1) et (S_2) au cours de l'addition progressive d'une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène HCℓ de molarité C_A.

Les résultats de cette expérience ont permis de tracer les courbes (1) et (2) ci-dessous, où :

- la courbe (1) correspond au dosage de la base B_1.
- la courbe (2) correspond au dosage de la base B_2.



1) Représenter le dispositif expérimental annoté permettant de réaliser l'expérience.
2) A l'aide des deux courbes :
   a) Déduire la force de chacune des deux bases (on donnera deux justifications).
   b) Montrer que les deux bases sont de même concentration molaire $C_{B1} = C_{B2} = C_B$.
3) a) Calculer la concentration commune C_B de ces deux bases.
   b) En déduire la molarité C_A de la solution d'acide chlorhydrique.
4) Déterminer la valeur du pK_a de la base faible.
5) Interpréter, qualitativement, la valeur du pH à l'équivalence pour la courbe (2).
6) En utilisant le tableau suivant, dire quel indicateur coloré paraît le plus approprié pour chaque dosage? Justifier la réponse.

Indicateur coloré	Orange de méthyle	Rouge de méthyle	Rouge de phénol	Phénolphtaléine
Zone de virage	3,1 – 3,4	4,2 – 6,3	6,8 – 8,4	8,0 - 10

7) Le groupe d'élève refait l'expérience du dosage de la base faible avec la même solution d'acide chlorhydrique mais en ajoutant 270 cm^3 d'eau pure aux 30 cm^3 de la solution initiale basique.

   Expliquer qualitativement le changement (augmentation, diminution ou reste constant) des valeurs suivantes :
   - pH_i (pour $V_A = 0$)
   - $pH_{½}$ (à la demi- équivalence).
   - V_{AE} (volume de la solution d'acide ajouté pour atteindre l'équivalence).
   - pH_E (à l'équivalence).
8) Quel volume V_A de la solution de chlorure d'hydrogène faut-il ajouter à un volume V_B = 150 mL de la solution (S_2) pour que, après agitation, le pH du mélange réactionnel obtenu soit égal à 9,2 ?

Exercice N 1 :

1/ La courbe de dosage présente 2pts d'inflexions

$\Rightarrow$ AH est un acide faible.

2) À l'equivalence

$C_A V_A = C_B V_{BE}$

$\Rightarrow C_A = \frac{C_B V_{BE}}{V_A}$

$\Leftarrow C_A = \frac{18}{12} C_B$

$\Leftarrow C_A = \frac{3}{2} C_B$.

$C_A = \frac{3}{2} \times 0,05 = 7,5 \times 10^{-2} mol L^{-1}$

3) $AH + OH^- \longrightarrow A^- + H_2O$

$[H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-5,5} = 3,16 \times ^{-6} mol L^{-1}$

$[OH] = 10^{pH-pKe} = 3,16 \times 10^{-9} mol L^{-1}$

4) À l'equivalence on a : - H_2O

- Na^+ ions inerte
- A^- base faible. (base conjugué d'un acide faible)

qui réagit avec l'eau selon l'eq.

$A^- + H_2O \rightleftarrows AH + OH^-$

Suite à cette R° avec l'eau

$[OH^-] > [H_3O^+]$

$pH > 7 \longrightarrow$ le milieu est basique.

①

$$K_{a_1} = \frac{C_1 \times \tau_{f_1}^2}{1 - \tau_{f_1}} = \frac{10^{-2} \times (10^{-2})^2}{1 - 10^{-2}} =$$

$$K_{a_2} = \frac{C_2 \, \tau_{f_2}^2}{1 - \tau_{f_2}} = \frac{1,6 \times 10^{-2} \times (6,25 \times 10^{-2})^2}{1 - (6,25 \times 10^{-2})} = 6,66 \times 10^{-5}$$

$K_{a_2} > K_{a_1} \rightarrow A_2H$ est plus fort que A_1H.

5) pH dosage S_1 : à l'equivalence on a une solution basique de base faible.

$$pH_{E_1} = \frac{1}{2}\left(pK_{a_1} + pK_e + \log \frac{C_A V_A}{V_A + V_{BE}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\log 10^{-6} + 14 + \log \frac{10^{-2} \times 10 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(6 + 14 + \log \frac{10^{-2}}{2}\right)$$

$$= 8,84.$$

• Dosage S_2 : à l'equivale le milieu est neutre

$pH_{E_3} = 7.$

3) 1) faux : la proposition 1 est fausse car $pH_{\frac{1}{2}E}$ reste inchangé puis qu'il represente le pKa du couple qui ne dépend que de la Temperature.

2) • ~~La~~ proposition est juste car à l'equivalence

$C_A V_A = C_B' V_{BE}'$

$\longrightarrow C_B' V_{BE}' = \frac{C_A V_A}{C_B'}$

$C_B' \nearrow \quad V_{BE}' \searrow$

$\Rightarrow$ Vrai

3) • proposition 3 est fausse car.

$$pH_E = \frac{1}{2}\left(pK_a + pK_e + \log \frac{C_A V_A}{V_A + V_{BE}'}\right)$$

on $V_A \nearrow$

$= \frac{1}{2} E = pK_a$ AH/A^-

pour $V_B = \frac{V_{BE}}{2} = 9mL$

$pH_{\frac{1}{2}E} = 4,8$ donc

$pK_{a\,AH/A^-} = 4,8$

d'ou l'acide est CH_3CO_2H

6) $V_A' = 24mL = 2 \times V_A$

---

a l'équivalence

$C_A V_A' = C_B V_{BE}'$

$\Leftrightarrow V_{BE}' = \frac{C_A V_A'}{C_B}$

$= \frac{2 C_A V_A}{C_B}$

$= 2 V_{BE}$

$= 2 \times 18 = 36 mL$

~~d'ou~~ donc pour $V_B = 18mL$

$\frac{V_{BE}}{2} =$ [illegible] —

d'ou $pH' = \frac{pH_E}{2} = pK_a = 4,8$.

— Correction Sauf3

Exercice N2:

1) A l'équivalence

$C_A \times V_A = C_B \times V_{BE}$

$C_A = \frac{C_B \times V_{BE}}{V_A}$

Or les 3 acides sont le même Volume V_A sont dosés avec la même base B de concentration C_B.

et d'autre part, on a $V_{BE_2} > V_{BE_1} = V_{BE_3}$

$\Rightarrow C_{A_2} > C_{A_1} = C_{A_3}$

d'où A_2H st l'acide le plus concentré.

2) a) pour un acide fort

pH = -log C et suite à une dilution 100 fois

$C' = \frac{C}{100}$

$pH' = -\log \frac{C}{100} = -\log C + \log 100$

$= -\log C + 2$

$= pH_i + 2$

$\Delta pH = pH' - pH_i = 2$

$\Delta pH_1 \neq 2$

$\Delta pH_2 \neq 2$

$\Delta pH_3 = 2$

donc seul A_3H st un acide fort.

b) pour un acide fort

$pH_3 = -\log C_3 \Leftrightarrow C_3 = 10^{-pH_3}$

$= 10^{-2}$ mol L^{-1}!

l'equivalence du dosage de S_3

$C_{A_3} V_{A_3} = C_B \times V_{BE_3}$

$\rightarrow C_B = \frac{C_{A_3} V_{A_3}}{V_{BE}} = \frac{10^{-2} \times 10^{-2}}{10^{-2}} = 10^{-2} mol L^{-1}$

$C_3 = C_1 = 10^{-2} mol L^{-1}$

$C_2 = \frac{C_B \times V_{BE_2}}{V_A} = 1{,}6 \times 10^{-2} mol L^{-1}$

2)a) $\tau_{f_1} = \frac{10^{-pH_1}}{C_1} = \frac{10^{-4}}{10^{-2}} = 10^{-2}$

b) $\tau_{f_2} = \frac{10^{-pH_2}}{C_2} = \frac{10^{-3}}{1{,}6 \times 10^{-2}} = 6{,}25 \times 10^{-2}$

c) non, on ne peut pas dédmé l'acide le plus fort à partir de τ_f car les 2 sol acides sont de concentrations différents

1)a)

état	Av	eq			
		AH	$+ H_2O$	$\rightleftharpoons A^-$	$+ H_3O^+$
		V.			
t_0	0	C	exé	0	$10^{-\frac{pKe}{2}}$
t_f	y_f	$c - y_f$	ex	y_f	10^{-pH}

$$Ka = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]} = \frac{y_f^2}{c - y_f}$$

or $y_f = c\tau_f$

$$Ka = \frac{c^2 \tau_f^2}{c - c\tau_f} = \frac{c\tau_f^2}{1 - \tau_f}$$

SERIES PILOTE MONASTIR

SERIE PILOTE MONASTIR

N.B : toutes les solutions sont prises à 25^0C ou Ke=10^{-14} et pKe=14.
On néglige les ions provenons d'ionisation propre de l'eau.

EXERCICE: 1 :

1) a- Donner la définition d'un acide selon la théorie de Bronsted.

b- Donner la définition d'une base selon la théorie de Bronsted.

c- Donner la définition d'une réaction acide-base.

2) a- Définir la constante d'acidité **Ka** et le **pKa** d'un couple acide base.

b- Etablir une relation entre **K_a**, **K_b**, **pK_a** et **pK_b** d'un même couple acide-base.

3) Le tableau suivant indique les valeurs du **pKa** de quelques acides faibles :

Acide	fluorhydrique	éthanoïque	benzoïque	méthanoïque
pKa	3,2	4,8	4,2	3,8

On se propose de classer ces acides selon leurs forces.

a) Compléter le tableau **ci-dessous** :

Acide	fluorhydrique	éthanoïque	benzoïque	méthanoïque
Ka	………………..	…………………	…………………	………………..
pKb	………………..	………………..	………………..	………………..
kb	………………..	………………..	…………………	………………..

b) Classer par ordre croissant de leurs forces, les acides cités **ci-dessus**.

4) On fait réagir l'ion éthanoate avec l'acide méthanoïque.

a- Etablir l'expression de la constante d'équilibre, en fonction des **pKa** des couples correspondantes. Calculer sa valeur. Conclure.

b- Quelle réaction se produit spontanément dans le système dont la composition est la suivante :

$[CH_3CO_2^-]$ =$[HCOOH]$=**0,02mol.L^{-1} ;** $[CH_3CO_2H]$=$[HCOO^-]$=**0,1mol.L^{-1}**.

EXERCICE: 2 :

1) Compléter le tableau **ci-dessous** :

Couple	**Forme acide**	**Forme basique**	K_a	pK_a	K_b	pK_b
1	**H_3BO_3**	…………	**$1,9.10^9$**	………..	…………..	……….
2	…………..	**H_2O**	…………	**-1,744**	…………..	…………..
3	**HCl**	…………	**$1,99.10^6$**	…………	…………	…………..
4	…………	**I^-**	…………	…………	…………	**24**
5	**NH_4^+**	…………	…………	…………	**$1,99.10^{-5}$**	…………
6	………..	**HCO_2^-**	**$5,55.10^{-9}$**	…………	…………..	………..

2) Déduire une classification des acides par ordre de force croissante et des bases par ordre de force décroissante.

3) On fait réagir l'ion iodure avec l'acide méthanoïque.

a- Ecrire l'équation de la réaction qui se produit.

b- Exprimer la constante d'équilibre **K** en fonction des **pKa_6** et **pKa_4** respectivement des couple **6** et **4**. Calculer sa valeur. Vérifier la classification de **2)**.

4) Quelle réaction se produit spontanément dans le système dont la composition est la suivante :

$[HI] = [HCOO^-] = 10^{-2}mol.L^{-1}$ **et** $[HCOOH] = [I^-] = 10^{-1}mol.L^{-1}$.

EXERCICE: 3 :

On considère trois solutions aqueuses **(S_1)**, **(S_2)** et **(S_3)** de même concentration **C** obtenus en dissolvant dans l'eau, respectivement trois acides **A_1H**, **A_2H** et **A_3H**.

Les valeurs de leurs **pH** sont consignées dans le tableau **ci-contre**.

Acide	A_1H	A_2H	A_3H
pH	**3,2**	**5,6**	**2,7**

1) a- Qu'appelle-t-on un acide fort ? Qu'appelle-t-on un acide faible ? Qu'appelle-t-on un acide inerte ?

b- Classer par ordre croissant de leurs forces, les acides cités **ci-dessus**.

c- L'un des acides est fort. Indiquer lequel et déterminer **C**.

2) a- Dresser le tableau descriptif d'avancement volumique de la réaction d'ionisation de l'acide **A_1H** dans l'eau.

b- Déterminer le taux l'avancement final **τ_f** de la réaction dans la solution **(S_1)**.

c- Etablir, en fonction de **C** et **τ_f**, l'expression de la constante d'acidité **K_{a1}** du couple acide-base considéré. Calculer sa valeur.

3) On dilue **10** fois la solution **(S_1)** pour obtenir une solution aqueuse **(S_1')** de concentration **C'** de volume **V'=100mL**.

a- Déterminer **C'** et le volume d'eau ajouté **(V_e)**.

b- On choisissant le matériel nécessaire a partir de la liste **ci-dessous**, décrire brièvement le mode opératoire permettant de préparer la solution **S'** dans les meilleurs conditions.

Matériel : ►Fioles jaugées : **50mL ,100mL ,500mL**
►Pipettes jaugées : **1mL ,5mL ,10mL**
►Pissette d'eau distillée.

EXERCICE: 4 :

I- 1) Qu'appelle-t-on une base forte ? Qu'appelle-t-on une base faible ?

2) Dresser le tableau descriptif d'avancement volumique de la réaction d'ionisation de l'ammoniac dans l'eau. Donner les couples acide-base mise en jeu dans cette réaction.

3) a- Etablir, en fonction de la concentration **C** et le taux d'avancement final **τ_f**, l'expression de la constante de basicité **K_{b1}** du couple considéré.

b- Sachant que la constante d'acidité du couple considéré vaut **$Ka_1=5.10^{-10}$**, déterminer la concentration **C** pour laquelle **τ_f=1%.**

4) Déterminer le **pH** de la solution aqueuse d'ammoniac étudiée.

II- 1) a- Ecrire l'équation de la réaction qui se produit entre l'ammoniac et l'acide benzoïque **C_6H_5COOH**.

b- Ecrire les couples acide-base mise en jeu dans cette réaction.

2) Exprimer la constante d'équilibre **K** en fonction des constantes d'acidités des deux couples mise en jeu.

3) On donne **$K=10^5$**.

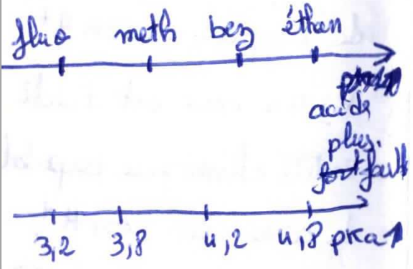
a- Calculer la constante **pKa_2** relative au couple de l'acide benzoïque.

b- Comparer les forces des acides des deux couples considérées.

c- En déduire une classification décroissante de leurs bases conjuguées.

On donne pour une base faible : $pH = \frac{1}{2}[pKa + pke + logC]$

e pka la plus faible
orrespond à l'acide
e plus fort



fluo:

pka = 3,2

$ka = 10^{-3,2} = 6,3.10^{-4}$

$pkb + pka = pke$

$pkb = pke - pka$

$= 14 - 3,2.$

$= 10,8$

$kb = 10^{-10,8} = 1,58.10^{-11}.$

than:

pka = 4,8.

$ka = 10^{-4,8} = 1,r.10^{-r}$

$pkb + pka = pke$

$pkb = pke - pka$

$= 14 - 4,8$

$= 9,2.$

$kb = 10^{-pkb} = 10^{-9,2} =$

$6,30.10^{-10}$

bez:

pka = ~~6,~~ 4,2

$ka = 10^{-4,2} = 6,3.10^{-r}$

$pkb = pke - pka = 14 - 4,2 = 9,8$

$kb = 10^{-9,8} = 1,58.10^{-10}$

méth:

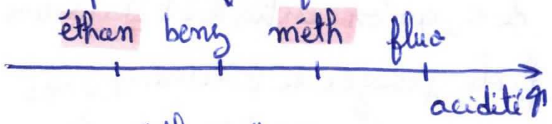
pka = 3,8

$ka = 10^{-3,8} = 1,r8\,10^{-4}$

$pkb = pke - pka = 14 - 3,8 = 10,2$

$kb = 10^{-10,2} = 6,309.10^{-11}$

L'acide le plus faible correspond à la pka la plus forte.



acide méthanoïque.

$CH_3-COOH.$

acide éthanoïque:

$CH_3-CH_2-COOH.$

$CH_3-COOH + H_2O \rightleftharpoons CH_3-COO^- + H_3O^+$

$CH_3-CH_2-COOH + H_2O \rightleftharpoons CH_3-CH_2-COO^- + H_3O^+$

équation bilan:

$CH_3-COOH + HCOO^- \leftrightharpoons HCOOH + CH_3COO^-$

$$k = \frac{[HCOOH][CH_3COO^-][H_3O^+]}{[HCOO^-][CH_3CO_2H][H_3O^+]}$$

$$\frac{ka_1}{ka_2}$$

$$k = \frac{10^{-pka1}}{10^{-pka2}} = 10^{-pka1 + pka2}$$

$$k = \frac{(0,02)^2}{(0,1)^2} = 0,04$$

$$\pi = \frac{1,r.10^{-4}}{1,r.10^{-r}} = 10$$

Exercice N°2

- $H_3BO_3 / H_2BO_3^-$

$ka = 1,9\,10^{9}$

$pka = -\log(1,9.10^{9}) = -9,27$

$pkb = pke - pka =$

$kb.ka = ke$

$$kb = \frac{ke}{ka} = \frac{10^{-14}}{1,9.10^{9}} = 5,26.10^{-24}$$

$pkb = -\log(kb) = 23,27$

- H_2O^+

$ka = 10^{-pka} = 10^{+1,744} = 55,5$

$$kb = \frac{ke}{ka} = \frac{10^{-14}}{55,46} = 1,803.10^{-6}$$

$pkb = -\log(kb) = 15,743$

- HCl / Cl^-

$pka = -\log(ka) = -6,2$

$$kb = \frac{ke}{ka} = \frac{10^{-14}}{1,99.10^{6}} = 5,0$$

$pkb = -\log(kb) = 20,29$

- HI^+ / I^-

- $kb = 10^{-24} = 1.10^{-24}.$

- $ka = \frac{ke}{kb} = 1,4.10^{2r}$

- $pka = -\log(ka) = -2r$

- NH_4^+ / NH_3

$pkb = -\log[1,99.10^{-r}]$

$= 4,70$

$$ka = \frac{ke}{kb} = \frac{14}{1,99.10^{-5}} = r70$$

$pka = -\log(ka) = -r,84.$

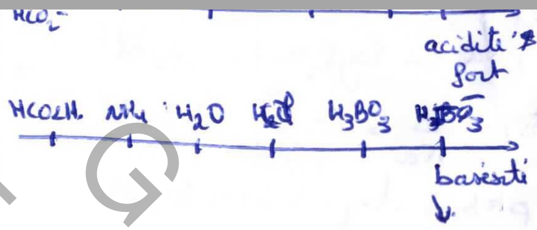
- HCO_2H / HCO_2^-

$pka = -\log(ka) = 8,1r.$

$$kb = \frac{ke}{ka} = \frac{14}{r,r5.10^{-9}} = 2822r22\,523$$

$pkb = -\log(kb) = -9,0.$

L'acide qui a la pka la plus faible correspond à l'acide plus fort.



$$HI + HCOO^- \rightleftharpoons HCOOH + I^-.$$

$$K = \frac{\cancel{[H_3O^+]}[HCOOH][I^-]}{\cancel{[H_3O^+]}[HI][HCOO^-]} = \frac{Ka_6}{Ka}$$

$$= 5,55.10^{-19} \ll 1$$

$$K = \frac{(10^{-1})^2}{(10^{-2})^2} = 100$$

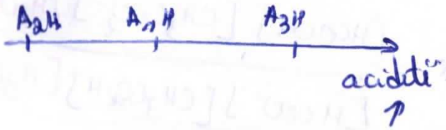
⇒ sens indirect

Exercice N°3 :

Un acide fort est un acide qui s'ionise totalement dans l'eau.

- Un acide faible est un acide n'est pas capable de s'ioniser totalement dans l'eau
- Un acide inerte est un acide n'est pas capable de s'ioniser dans l'eau.

l'acide qui a le pH plus faible est le plus fort



A_3H est le plus fort

$$[H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-2,7} = 0,0019 \text{ mol.L}^{-1}.$$

$A_1H + H_2O$		$\rightleftharpoons A^- +$	H_3O^+
C	excès	0	$\simeq 0$
$C - y_f$	excès	y_f	y_f

$C = 10^{-3,2} = 6,3.10^{-4}$ mol.L⁻¹

~~τf = avec~~

Supposons que la R° est totale :

$\tau_f =$

$C - y_f = 0$

$C = y_f = 2.10^{-3}$ mol.L⁻¹.

$$\frac{y_f}{y_m} = \frac{6,3.10^{-4}}{2.10^{-3}} = 0,315$$

$$Ka_1 = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[A_1H]} = \frac{y_f^2}{C - y_f}$$

$$= \frac{y_f^2}{C-y_f} = \frac{\tau_f.C}{C - C\tau_f} = \frac{C(\tau_f)}{C(1-\tau_f)}$$

$$= \frac{\tau_f}{1-\tau_f}.$$

$$Ka_1 = \frac{\tau_f}{1-\tau_f} = \frac{0,315}{1-0,315} = 0,459$$

$$\begin{cases} C' = ? \\ V' = 0,1 \text{ L} \end{cases} \quad n = 10.$$

$$S_1 \begin{cases} C = 2.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \end{cases}$$

$$C' = \frac{C}{n} = \frac{2.10^{-3}}{10} = 2.10^{-4} \text{ mol}$$

$V_0 = nV = 10.0,1 = 1$ L.

A l'aide d'une pipette graduée on prélève un volume de 100 m de S_1 qu'on introduit dans u fiole jaugée de volume 10 m puis on complète avec l'eau distillée jusqu'au trait de jauge.

Exercice N° 4 :

1) Une base faible est une base n'est pas capable de s'ioniser totalement

2) Une base forte est une base

qui s' ionise totalement dans l'eau.

$NH_3 + H_2O \rightleftharpoons OH^- + NH_4^+$

c excès ≃0 0

c − yf excès yf yf

si $\tau f = \frac{yf}{ym}$

$$kb_1 = \frac{[NH_4^+][OH^-]}{[NH_3]}$$

$$= \frac{yf^2}{c - yf}$$

$$= \frac{(\tau f . c)^2}{c - yf}$$

$$= \frac{(\tau f . c)^2}{c - \tau f . c}$$

$$= \frac{c^2(\tau f)^2}{c(1 - \tau f)} = \frac{c . \tau f^2}{1 - \tau f}$$

$ka_1 = 5.10^{-10}$.

$$\frac{\tau f^2 c}{1 - \tau f} = \frac{ke}{ka_1}$$

$$c = \frac{ke(1 - \tau f)}{\tau f^2 Ka}$$

$$= \frac{10^{-14}(1 - 0,01)}{0,01^2 . 5.10^{-10}} = 0,198 \ mol L^{-1}$$

$$pH = \frac{1}{2}[pKa + pKe + \log c]$$

$$= \frac{1}{2}[-\log(ka) + 14 + \log(0,198)]$$

$$= \frac{1}{2}[-\log(5.10^{-10}) + 14 + \lg(0,198)]$$

$= 11,29$

NH_3 / NH_4^+ $C_6H_5COOH / C_6H_5COO^-$

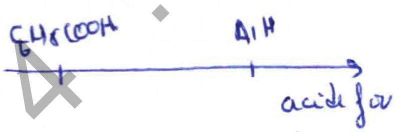
$NH_3 + C_6H_5COOH \rightleftharpoons NH_4^+ + C_6H_5COO^-$

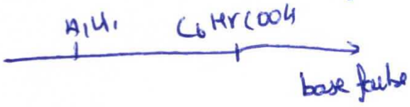
$$k = \frac{[NH_4^+][C_6H_5COO^-]}{[NH_3][C_6H_5COOH]}$$

$$k = \frac{ka_2}{ka_1}$$

$ka_2 = K . ka_1 = 10^5 . 5 . 10^{-10}$
$= 5.10^{-5}$

$pKa_2 = -\log(ka_2) = 4,30$.





INTERACTION ONDE - MATIERE

SERIES PILOTE SFAX

SERIE PILOTE SFAX

Exercice 2 : (5,5 pts)

Cet exercice décrit deux expériences utilisant une lumière de couleur rouge, émise par un laser, de longueur d'onde dans le vide λ = 633 nm.

1ère expérience : On place perpendiculairement et à quelques centimètres du laser une fente fine verticale de largeur a.

Un écran situé à une distance D = 3 m de la fente, montre des taches lumineuses reparties sur une ligne horizontale. La tache centrale, plus lumineuse que les autres et plus large.

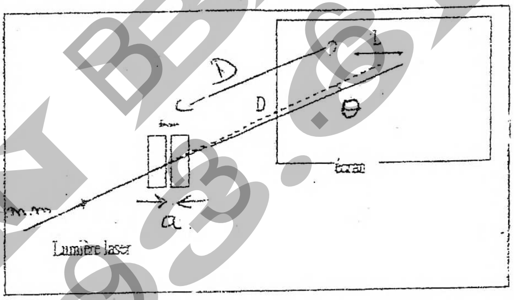
1/ Quel phénomène subit la lumière émise par le laser dans cette expérience ?

2/ L'angle θ représenté dans la figure ci-contre est donné par la relation : θ = λ/a

a- Que représente cet angle ?

b- Comment évolue la largeur L de la tache centrale lorsqu'on réduit la largeur a de la fente ?

c- Exprimer a en fonction de λ, D et L puis calculer sa valeur. on donne L = 38 mm



3/ En remplaçant la fente par un cheveux de diamètre d , la largeur de la tache centrale qui se forme sur l'écran devient L' = 1,5 cm. Calculer d.

2ème expérience : On utilise dans cette expérience comme milieu dispersif, un prisme en verre d'indice de réfraction n. On dirige suivant une incidence donnée le faisceau laser ver l'une des faces du prisme placé dans l'air . On constate que ce faisceau est dévié. Un écran placé derrière le prisme montre un point lumineux de même couleur que le faisceau incident.

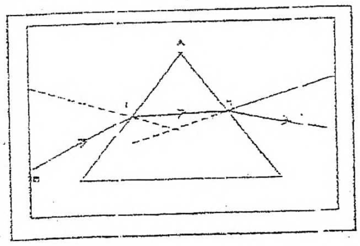
On rappelle que l'indice de réfraction n d'un milieu est le rapport de la célérité C de la lumière dans le vide par sa vitesse V dans le milieu considéré : n = C / V.

1 / Quelle est la nature de la lumière émise par le laser ?

2 / La célérité de la lumière dans le vide est $C = 3.\ 10^{8}\ m.s^{-1}$.

a- Rappeler la relation entre le fréquence ν de l'onde émise par le laser, sa longueur d'onde λ et C.

b- la valeur de ν varie-t-elle lorsque cette onde change de milieu de propagation ?



3/ L'indice de réfraction du verre pour la fréquence de l'onde utilisée est n = 1,61. Calculer la longueur d'onde λ' de cette onde dans le verre.

4/ Si on remplace la lumière du laser par une lumière blanche. Qu'observe-t-on sur l'écran ?

Ex 2 : (5,5pts)

Experience 1 :

5 1°/ Diffraction lumineuse

2°/ a- θ demi largeur angulaire

,5 b- L augmente

c- $\theta = \frac{\lambda}{a}$; $tg\theta = \frac{L/2}{D} = \theta$

,5 $\Rightarrow \frac{\lambda}{a} = \frac{L}{2D} \Rightarrow a = \frac{2D\lambda}{L}$

0,5 A.N : $a = \frac{2.3.633.10^{-9}}{38.10^{-3}} = 0,1$ mm

3°/ $d = \frac{2D\lambda}{L'} = \frac{2.3.633.10^{-9}}{1,5.10^{-3}}$

1 $d = 0,25$ mm

Experience 2

0,5 1°/ monochromatique car sur l'écran on obtient un seul point lumineux.

0,5 2°/ a- $c = \lambda \nu$

0,5 b- ν ne change pas

0,5 3°/ $\lambda' = \frac{\lambda}{n} = \frac{633}{1,61} = 393$ nm.

4°/ Plusieurs taches lumineuses

0,5 de couleurs différentes allant du rouge au violet.

SERIES PILOTE TUNIS

EXERCICE N°9

Interaction onde-matière

Exercice N°1

On dispose d'une cuve à ondes remplie d'eau et d'une lame vibrante (L) qui produit, à la surface de la nappe d'eau des ondes progressives, rectilignes, sinusoïdales et de fréquence N réglable. On suppose qu'il n'y a ni amortissement ni réflexion des ondes aux bords de la cuve

I - *La fréquence de la lame vibrante est réglée à la valeur* ***N1=11 Hz***

En éclairage stroboscopique et pour une fréquence Ne des éclaires, égale à ***11 Hz,*** *la surface de la nappe d'eau présente une série de rides équidistantes , rectilignes et immobiles comme le montre la* ***figure-1***

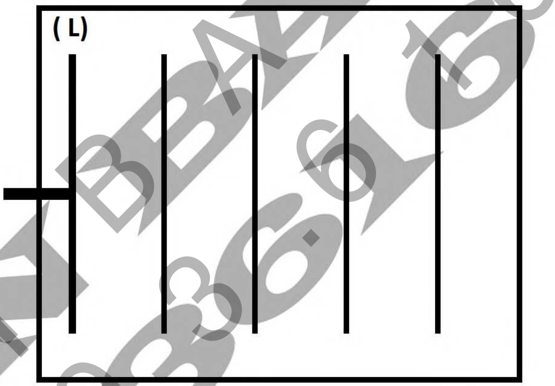


Figure-1

1.
   - a- *Définir la longueur d'onde λ*
   - b- *sachant que le schéma de la figure -1 est réalisé à l'échelle , déterminer la valeur de la longueur d'onde λ1 de l'onde créée à la surface de la nappe d'eau . En déduire la valeur de la célérité* ***V1*** *de l'onde*

2. *On règle la fréquence* ***N*** *de la lame à la valeur* ***N2=20Hz*** *et on mesure la distance* ***d2*** *séparant* ***5 rides*** *successives. On obtient une valeur de* ***3 cm***
   - a- *Calculer dans ce cas la valeur de la longueur d'onde* ***λ2*** *et la célérité* ***V2*** *de l'onde*
   - b- *Justifier que l'eau est un exemple de milieu dispersif*

3. *sachant que l'élongation d'un point A appartenant au sommet de la première ride comptée à partir de la lame (L) s'écrit :* $y_A(t) = 4.10^{-3}$ **Sin (** $40\pi t$ **),** *déterminer, en le justifiant , l'élongation* $y_B(t)$ *d'un point* ***B*** *appartenant au sommet de la troisième ride*

II- *un obstacle muni d'une fente* ***(F)*** *de largeur* ***a=8 mm*** *est placé parallèle à la lame et à une distance d de celle –ci.*

Pour une fréquence ***N2=20 Hz*** *et un instant donné , la forme des rides de l'onde qui se propage à la surface de la nappe d'eau avant la traversée de la fente (F) est donnée par la* ***figure-2***

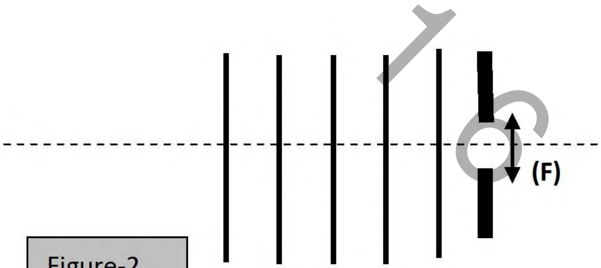


Figure-2

1-

a- Préciser l'ordre de grandeur de l avec lequel l'onde subit une diffraction au niveau de (F)

b- En déduire, s'il y a diffraction au de (F) à la fréquence ***N2*** *de la lame vibrante*

c- Dans l'affirmative représenter sur la figure-3, la forme des rides au-delà d la fente (F)

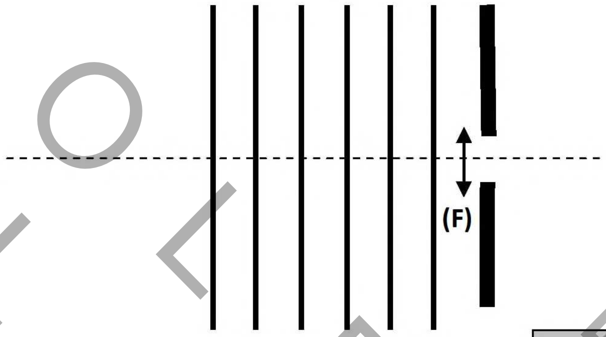


Figure-3

2-

a- On fixe de nouveau, la fréquence ***N*** *de la lame vibrante à la valeur* ***N1=11 Hz.*** *Représenter , à l'échelle , sur la figure-4 la forme des rides avant et après la traversée de la fente (F)*

Figure-4

b- Pour une valeur donnée de a montrer s'il faut diminuer ou bien augmenter la valeur de la longueur d'onde l pour rendre le phénomène observé plus net

Exercice N°2

Diffraction de la lumière

Un faisceau de lumière parallèle monochromatique, de longueur d'onde λ, produit par une source laser arrive sur un fil vertical, de diamètre **a** (a est de l'ordre du dixième de millimètre). On place un écran à une distance **D** de ce fil ; la distance D est grande devant **a** (voir la figure 1).

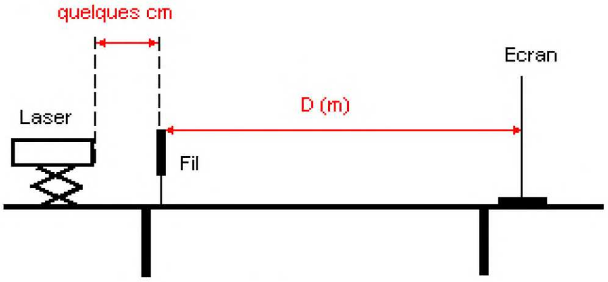


Figure 1

• 1- La figure 2 ci-dessous présente l'expérience vue de dessus et la figure observée sur l'écran.

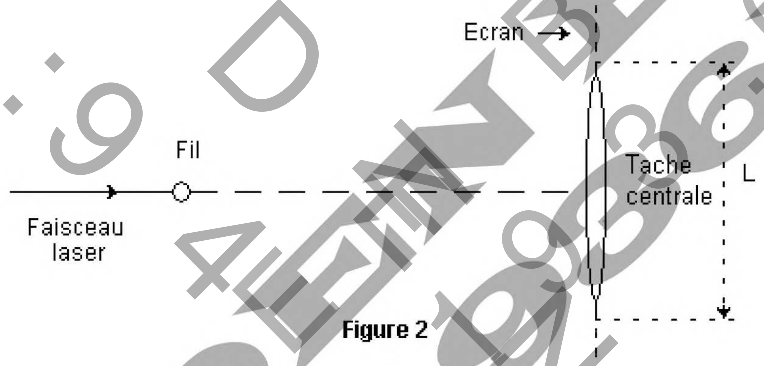


Figure 2

Quel enseignement sur la nature de la lumière ce phénomène apporte-t-il ?

Nommer ce phénomène.

• 2- Faire apparaître sur la figure 2 l'écart angulaire ou demi-angle de diffraction θ et la distance D entre l'objet diffractant (en l'occurrence le fil) et l'écran.

• 3- En utilisant la figure 2 exprimer l'écart angulaire θ en fonction des grandeurs L et D sachant que pour de petits angles exprimés en radian : $\tan\theta \approx \theta$.

• 4- Quelle expression mathématique lie les grandeurs θ, λ et a ? (On supposera que la loi est la même que pour une fente de largeur **a**). Préciser les unités respectives de ces grandeurs physiques.

• 5- En utilisant les résultats précédents, montrer que la largeur **L** de la tâche centrale de diffraction s'exprime par :

$$L = \frac{2\lambda D}{a}$$

● **6-** On dispose de deux fils calibrés de diamètres respectifs a_1 **= 60 mm** et a_2 **= 80** mm.

On place successivement ces deux fils verticaux dans le dispositif présenté par la figure 1.

On obtient sur l'écran deux figures de diffraction distinctes notées A et B **figure-3**

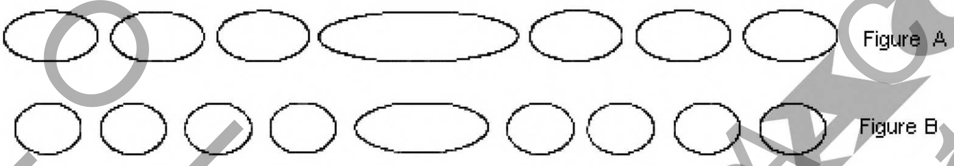


Figure 3

Associer, en le justifiant, à chacun des deux fils la figure de diffraction qui lui correspond.

● **7-** On cherche maintenant à déterminer expérimentalement la longueur d'onde dans le vide λ de la lumière monochromatique émise par la source laser utilisée.

Pour cela, on place devant le faisceau laser des fils calibrés verticaux.

On désigne par « a » le diamètre d'un fil. La figure de diffraction obtenue est observée sur un écran blanc situé il une distance D = 2,50 m des fils. Pour chacun des fils, on mesure la largeur **L** de la tâche centrale de diffraction.

- On trace la courbe L = fonction ($\frac{1}{a}$) = F($\frac{1}{a}$) (voir la figure 4)

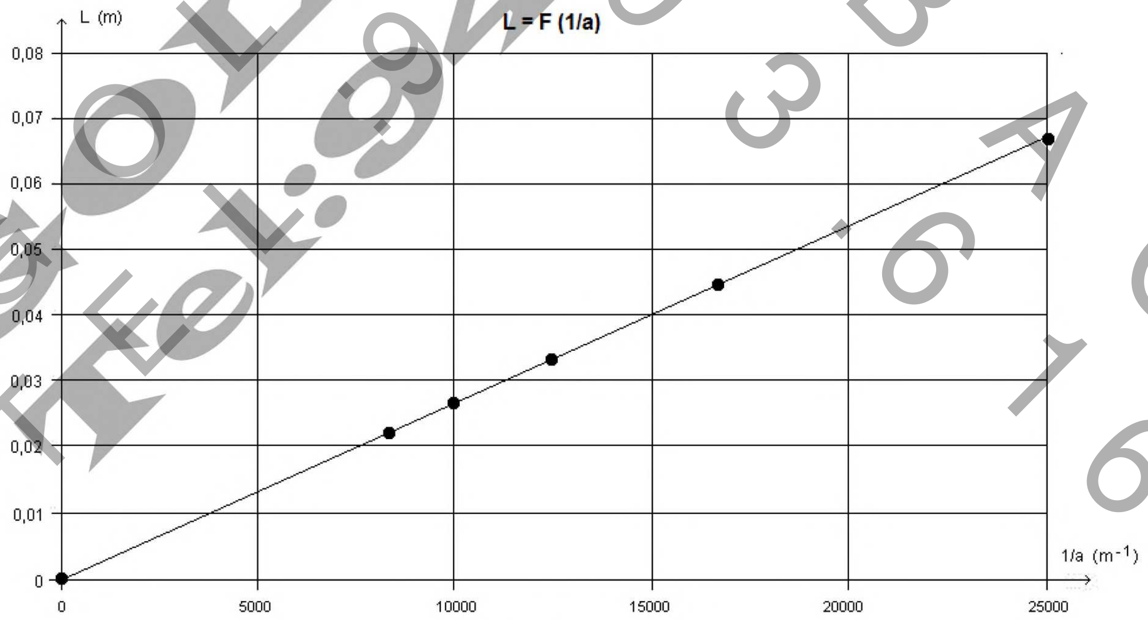


Figure 4

PILOTE MONASTIR

SERIE PILOTE MONASTIR

EXERCICE: 1 :

I- L'extrémité **S** d'une corde élastique, tendue horizontalement de longueur **L=1m**, est attachée à une lame vibrante horizontale. L'autre extrémité est placée de manière à éviter toute réflexion. A une date **t = 0**, l'extrémité **S**, qui était en position d'équilibre **O** est mise en vibrations verticales et sinusoïdales de fréquence **N** et d'amplitude **a**. La position **O** est l'origine du repère des espaces $(\mathbf{O},\vec{i})$.

1) Représenter le schéma du montage.

2) **a-** En lumière ordinaire, la corde prend l'aspect suivant :

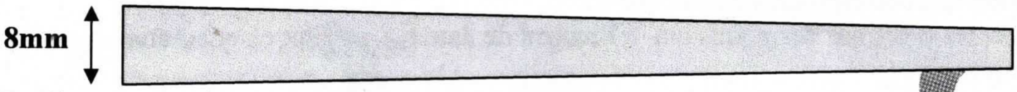


Figure-1-

Expliquer cette observation.

b- Dans notre cadre d'étude, en suppose que l'amortissement est négligeable. Déterminer l'amplitude **a**.

3) **a-** Définir : ▶une période spatiale ▶une période temporelle. De quoi dépend la période spatiale ?

b- Définir : ▶ un ébranlement ▶ une onde.

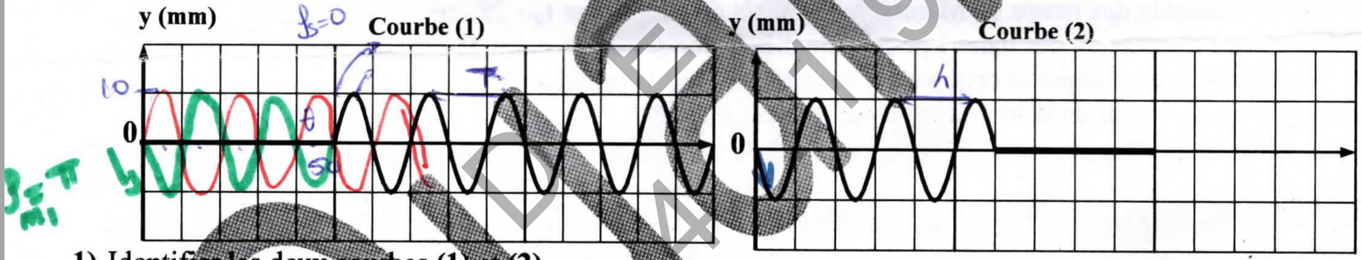
c- Justifier : l'onde étudiée est une onde mécanique et transversale.

d- Expliquer le fait que la propagation de l'onde correspond à une transmission de d'énergie et non pas un transport de matière.

e- Expliquer la phrase soulignée dans l'énoncée.

II- La figure **ci-dessous** montre deux courbes **(1)** et **(2)** : L'une représente le diagramme du mouvement d'un point $\mathbf{M_1}$ d'abscisse $\mathbf{x_1}$ dans le repère $(\mathbf{S},\vec{\mathbf{i}})$ et l'autre donne l'aspect de la corde à la date $\mathbf{t_0}$.

On donne les échelles des abscisses : un carreau → **10ms** et un carreau →**10 cm**.



1) Identifier les deux courbes **(1)** et **(2)**.

2) Déduire de ces deux courbes : la période temporelle **T**, la fréquence , la longueur d'onde **λ** , l'amplitude **a** des vibrations et la célérité de propagation **V**.

3) Déterminer l'abscisse $\mathbf{x_1}$ et l'instant $\mathbf{t_0}$.

4) Le mouvement de **S** débute son mouvement à l'origine des dates **t = 0 s**.

Déterminer, par deux méthodes, les équations horaires du mouvement de la source **S** et celle du mouvement du point $\mathbf{M_1}$. Comparer leurs états vibratoires.

5) **a-** Déterminer, par deux méthodes, le nombre et les abscisses des points qui vibrent en opposition de phase avec la source **S** à l'instant $\mathbf{t_0}$.

b- Représenter, sur la courbe **(2)**, les points d'élongation nulle et se déplaçant dans le sens positif.

6) On éclaire la corde avec un stroboscope à fréquence **Ne** variable.

Qu'observe-t-on pour : **Ne =50 Hz**. **Ne =49 Hz** et **Ne=51 Hz** ?

7) Représenter, sur un même graphe et avec deux couleurs différentes, l'aspect de la corde aux instants de dates $\mathbf{t_1=4{,}5.10^{-2}s}$ et $\mathbf{t_2=5.10^{-2}s}$.

8) **a-** Représenter le diagramme de mouvement d'un point $\mathbf{M_3}$ d'abscisse $\mathbf{x_3=0{,}3m}$.

b- Préciser, par deux méthodes, le sens de déplacement du point $\mathbf{M_3}$ à l'instant $\mathbf{t'_3=3{,}75.10^{-2}s}$.

9) Déterminer le nombre et les abscisses des points qui vibrent en quadrature retard de phase par rapport à un point $\mathbf{M_4}$ d'abscisse $\mathbf{x_4=0{,}5m}$.

EXERCICE: 2 :

Deux groupes d'élèves étudient la propagation d'une onde le long de deux cordes différentes.

I- Premier groupe :

Au cours de l'étude de propagation d'une onde le long de la première corde d'extrémité source **S_1** qui débute son mouvement à l'instant **t=0**, a donnée les courbes (**a**) et (**b**) **ci-dessous**.

1) Nommer chaque courbe et déterminer la double périodicité de l'onde étudiée.
En déduire la célérité de propagation de l'onde.

2) a- Représenter, en le justifiant, la sinusoïde des temps de la source **S_1**.
En déduire son équation horaire du mouvement.

b- Déterminer l'équation horaire du mouvement d'un point **M** situé à une distance **x** de la source.

3) a- A quel instant minimal **t_{min}** correspond la courbe (**b**) ?

b- Déterminer le nombre et les positions des points qui, à l'instant de date **t_{min}** vibrent en quadrature retard de phase par rapport à la source.

II- Deuxième groupe :

L'extrémité **S_2** d'une lame vibrante d'un vibreur, est animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de fréquence **N = 20 Hz**, et d'amplitude **a**. On relie l'extrémité **S_2** à une deuxième corde très longue.
Lorsque le vibreur fonctionne, la corde est le siège d'une onde mécanique progressive.

1) a- En lumière ordinaire, la corde prend l'aspect d'une bande floue de largeur **ℓ = 4 mm**.
Montrer que l'amortissement est négligeable et déduire la valeur de l'amplitude **a** du mouvement.

b- Comment peut-on mettre en évidence expérimentalement l'onde progressive le long de la corde ?

2) A l'instant de date **t=0**, **S_2** part de sa position d'équilibre dans le sens positif vers le haut.
A l'instant de date **t_1 = 125ms**, le point **M** de la corde, d'abscisse **x_1 = 62,5cm**, entre à son tour en vibration.

a- Calculer la célérité **V** de l'onde, le long de la corde. Déduire la longueur d'onde **λ**.

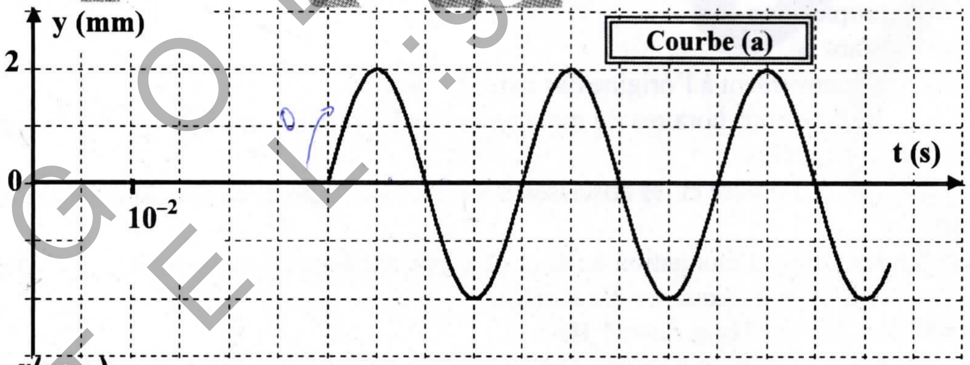
b- Etablir l'équation horaire du mouvement de la source **S_2**, déduire celle du point **M**.

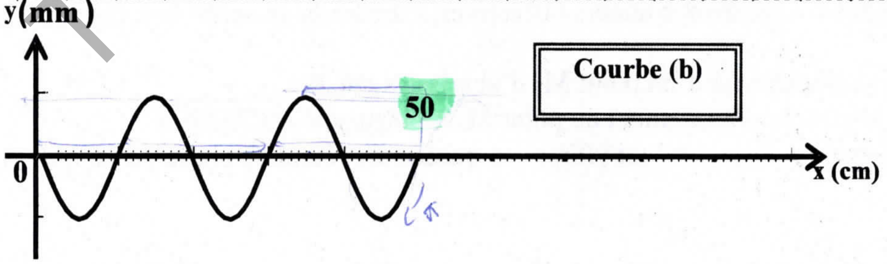
c- Tracer la sinusoïde des temps de **M** entre les instants de date **t=0** et **t_2= 225ms**.

d- Déterminer l'expression des dates **t** pour lesquelles l'élongation du point **M** est maximale.
Déterminer la date pour laquelle cette valeur est atteinte pour la première fois.
Quelle est alors la valeur de la vitesse du point **M** à cet instant ?

3) Déterminer le nombre et les positions des points qui, à l'instant **t_2** vibrent en quadrature retard de phase par rapport à **S_2**.

4) On fait varier la fréquence **N** du vibreur de **20Hz** à **80Hz**. Déterminer les fréquences qui permettent à un point **M_1** situé à une distance **x_1 = 20cm** de la source, de vibrer en opposition de phase avec la source **S_2**.



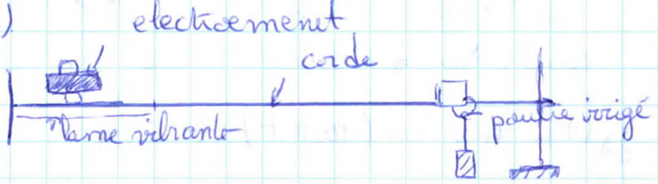


Serie 10.

Exercice N°1 :

I)

1)



2)a) On observe une bande floue à cause de la persistance de l'image sur la rétine humaine et la rapidité du mouvement f'c

- l'amplitude diminue en s'eloignant de la source à cause de l'amortissement.

b) $2a = 8.10^{-3} m$

$a = 4.10^{-3} m$

3)a) • une periode spatiale : c'est la longeur d'onde (λ) : c'est la distance parcouru pendant une periode temporelle.

• une periode temporelle : c'est la ~~mouvement~~ durée quelle l'onde a parcouru pendant une periode spatiale

la periode spatiale depend de ~~nature du~~ la frequence de vibreur et la cerelité de propagation ; donc la nature du milieu de propagation.

b) un ebranlement : est une déformation de courte durée imposée localement a un milieu élastique.

une onde : c'est la succession periodique d'ebranlement identiques émis régulièrement par une source d'un milieu propagateur

c) onde mécanique : Puisque la corde est constitue de la matière donc l'onde qui se propage le long de la corde est une onde mécanique,

onde transversale : Puisque la direction de propagation est ⊥ à la direction de l'ebranlement.

d) D'après le principe de propagation : tout point de la corde reproduit le mouvement de la source S mais après un retard θ qui est un mouvement oscillatoire qui se produit uniquement selon la verticale d'où : il y a une transmission de l'energie sans transport de la matière.

e) La corde est placé de façon à éviter toute reflexion pour supposé que l'onde est progressive d'où le milieu de propagation est un milieu ouvert ou illimitée.

II) 1) D'après le principe de propagation le point 1 reproduit le mouvement de la source S après un retard θ d'où la courbe I correspond au sinusoïde du temps qui traduit le diagramme du mouvement du point M_1 et par la suite la C_2 correspond à la sinusoïde d'espace qui traduit l'aspect de la corde à l'instant t_0.

2) $T = 20.10^{-3} s$

$N = 50 Hz$

$\lambda = v.T$ or $v = \lambda N$.

$\lambda = 0,2 m$.

$v = \lambda N = 10 ms^{-1}$.

3) $\theta_1 = 5.10^{-2} \vec{m} = 2,5T$

$x_1 = V\theta_1 = 10 . 5.10^{-2} = 0,5 m$ $\Big\}$ C_1

$= \frac{x_S}{v} = \frac{3\lambda}{v} = 3T =$

1) Jash) 1ère méthode C_1:

D'après le principe de propagation le point M_1 reproduit le mouvement de la source mais après un retard $\theta = 1,5T$ pour représenter le diagramme du mouvement, il suffit de translater celui de M_1 selon l'axe du temps et dans le sens (+) de $\theta_1 = 2,5T$.

$y_s(t) = a \sin(\omega t + \varphi_s) \ \forall t \geq 0.$

$a = 4 \cdot 10^{-3}$ m ⊕ $\omega = 2\pi N = 100\pi$ rad.s^{-1}

* φ_s ?

$$\begin{cases} y_s(t=0) = a \sin \varphi_s \ (1). \\ y_s(t=0) = 0 \ (2). \end{cases}$$

$(1) = (2) \rightarrow a \sin \varphi_s = 0$

$\varphi_s = 0$ ou $\varphi_s = \pi$ rad.

$\frac{dy_s}{dt}\Big)_{t=0} = a\omega \cos \varphi_s > 0 \ (\nearrow)$

$y_s(t) = 4 \cdot 10^{-3} \sin(100\pi t) \ \forall t \geq 0$

$\{$et t en (s) et y_s(m)$\}$

ou bien :

C_2 : D'après le principe du propagation

$y_{t_0}(x) = a \sin(\omega t_0 - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_s)$

$= a \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t_0 - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_s)$

$= a \sin(6\pi - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_s)$

$= a \sin(-\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_s)$

$$\begin{cases} y(x=0) = a \sin(\varphi_s) \ (1) \\ y(x=0) = 0 \ (2) \end{cases}$$

$(1) = (2).$

$a \sin(\varphi_s) = 0 \rightarrow \sin \varphi$

$\rightarrow \varphi_s = 0$ ou $\varphi_s = \pi$ rad

$\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big)_{x=0} = -a \frac{2\pi}{\lambda} \cos \varphi_s < 0 \ (\searrow)$

$\cos \varphi_s > 0 \Rightarrow \varphi_s = 0$

$y_s(t) = 4 \cdot 10^{-3} \sin(100\pi t) \ \forall t \geq \theta_1$

y(m) et t(s).

$y_{M_1}(t)$?

D'après le principe du propagation:

$y_{M_1}(t) = y_s(t - \theta_1)$

$= a \sin([\omega(t - \theta_1) + \varphi_s]$

$= a \sin[\omega t - \omega\theta_1 + \varphi_s]$

$= a \sin[\omega t - \frac{2\pi}{T}\theta_1 + \varphi_s]$

$= a \sin(\omega t - 5\pi)$

$= a \sin(\omega t - 4\pi - \pi)$

$= a \sin(\omega t + \pi).$

$\Rightarrow y_{M_1}(t) = 4 \cdot 10^{-3} \sin(100\pi t + \pi) \ \forall t \geq \theta_1 = 2,5T$

$y_{M_1}(t) = 0 \ \forall t < \theta_1 = 2,5T \ y_{M_1}$(m) et t(s)

2ième méthode:

D'après le principe du propagation:

$y(x,t) = a \sin(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_s)$

$y_{M_1}(t) = a \sin(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} + \varphi_s)$

$y_{M_1}(t) = a \sin(\omega t + \varphi_{M_1})$

$a = 4 \cdot 10^{-3}$ m. $\omega = 2\pi N = 100\pi$ rad.s^{-1}

$$\begin{cases} y_{M_1}(t = 2,75T) = a \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot 2,75T + \varphi_{M_1}) \\ y_{M_1}(t = 2,75T) = a \ (2) \end{cases}$$

$(1) = (2) \rightarrow a \sin(5,5\pi + \varphi_{M_1})$

$y_{M_1}(t) = a \sin(6\pi - 0,5\pi + \varphi_{M_1}) = 1$

$= 4 \cdot 10^{-3} \sin(-\frac{\pi}{2} + \varphi_{M_1}) = 1$

$-\frac{\pi}{2} + \varphi_{M_1} = \frac{\pi}{2}$

$= \pi$ rad.

$$\theta_3 = \frac{t_3}{T} = \frac{x_3}{\lambda} = 1,5.$$

$$t_3 = 1,5T.$$

D'après le principe du propagation :

$$y_m(x, t_3) = a\sin(\omega t_3 - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_s)$$

$$y_{m_3}(t) = a\sin(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} + \varphi_s)$$ 1,5

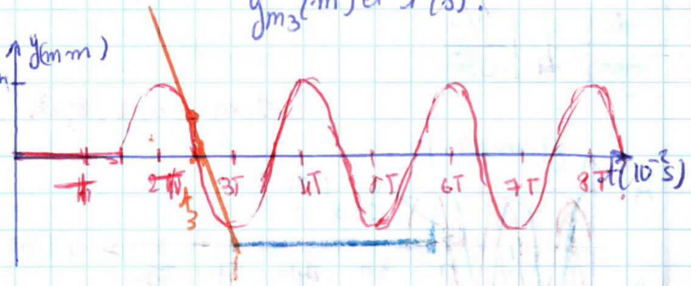
$$= a\sin(\omega t - 3\pi)$$

$$= a\sin(\omega t + \pi).$$

$$y_{m_3}(t_3) = 4.10^{-3}\sin(100\pi t + \pi)\ \forall t \geq 1,5T.$$

$$y_{m_3}(t) = 0\ \forall t \leq t_3 = 1,5T.$$

$y_{m_3}(m)$ et $t(s)$.



b) $t'_3 = 3,75.10^{-2}s$

$$\frac{t'_3}{T} = \frac{3,75.10^{-2}}{10^{-2}} = 1,875 \Rightarrow t'_3 = 1,875T$$

1ère méthode :

$$y_{m_3}(t_3) = \left(\frac{dy_{m_3}}{dt}\right)_{t_3} = 4.10^{-3}.100\pi\cos(100\pi.3,75.10^{-2} + \pi)$$ $\frac{3\pi}{4}$

$$= -0,4\frac{\sqrt{2}}{2} < 0.$$

→ Le pt M_3 se déplace dans le sens négatif à l'instant t_3.

$$0,75\pi = 2\pi - 0,25\pi = -\frac{\pi}{4}.$$

2ième méthode graphiquement "tang".

3) $x_{M_4} = 0,5m \Rightarrow x_{M_4} = 2,5\lambda$.

$$x_2 - x_1 = (k + \frac{1}{4})\lambda.$$

$$x_k = x_{M_4} + (k + \frac{1}{4})\lambda$$
$$= 2,5\lambda + k\lambda + \frac{1}{4}\lambda$$
$$= \frac{11}{4}\lambda + k\lambda. = (2,5 + \frac{1}{4} + k)\lambda$$

$$x_k = (k + \frac{11}{4})\lambda.$$

$$0 \leq x_k \leq 2,5\lambda$$

$$0 \leq k + \frac{11}{4} \leq 2,5$$

$$-2,25 \leq k \leq -0,25$$

$k \in \{2, -1\}$.

k	-2	-1
x	0,15	0,35.

il existe 2pts de la corde.

Exercice N°2:

I)

1). courbe (a) : la sinusoïde du temps

courbe (b) : sinusoïde d'espace

2) D'après la courbe (a) $T = 2.10^{-2}s$.

D'après la courbe (b) $\lambda = 0,2m$.

$v = \lambda N$ or $N = \frac{1}{T} = 50Hz$.

$v = 10\ ms^{-1}$.

3) a) D'après le principe du propagation ;

Le point M reproduit le mvt de la source mais après un retard θ = pour représenter le digramme, il suffit de translater celui du m selon l'axe du temps dans le sens (−) selon l'axe du temps.

b) $y_s(t) = a\sin(\omega t + \varphi_s)$ $t \geq 0$

$a = 2.10^{-3}m$.

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 100\pi\ rad\ s^{-1}$.

$$At = 0 \begin{cases} y_s(t=0) = a\sin(\varphi_s) \\ y_s(t=0) = 0. \end{cases}$$

$$a\sin(\varphi_s) = 0$$

$\sin(\varphi_s) = 0 \Rightarrow \varphi_s = 0$ ou $\varphi_s = \pi$.

or $\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = a\omega\cos(\varphi_s) > 0$ car ↗.

$$\cos\varphi_s > 0$$

$y_{m_1}(t) = 4\cdot10^{-3}\sin(100\pi t + \pi)$ $\forall$ $t \geq \theta$.

Le point m_1 vibre en opposition de phase % à la source S.

Ou bien : Graphiquement.

5) a). 1ère méthode : En opposition de phases.

$$\Delta x = x_m - x_s = x_k = (k + \frac{1}{2})\lambda$$

avec $0 \leq x_k \leq x_f$

$$0 \leq (k+\frac{1}{2})\lambda \leq 3\lambda$$

$$-0,5 \leq k \leq 2,5$$

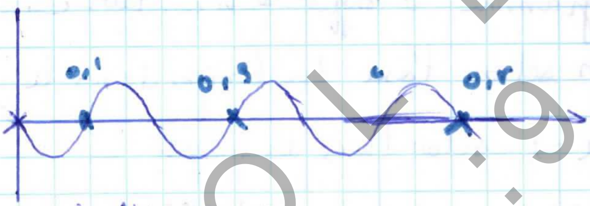
$$k \in \{0, 1, 2\}$$

k	0	1	2
x	0,1	0,3	0,5

: ils es

il existe 3 pts de la corde m, m', m'' d'abscisse respectives $x_m = 0,1$ m ; $x_{m'} = 0,3$ m ; $x_{m''} = 0,5$ m qui vibre en opposition de phase par % à S

2ème méthode :



6) $N_e = 50$ Hz

$\frac{N}{N_e} = 1$: la corde paraît comme une sinusoïde immobile

$N_e = 49$ Hz

$\frac{N}{N_e} = 1,02 > 1$ corde paraît comme une sinusoïde en mvt ralenti dans le sens réel

$N_e = 51$ Hz

$\frac{N}{N_e} = 0,98 < 1$: la corde paraît comme une sinusoïde en mvt accéléré dans le sens contraire

$v = \frac{dy}{dt} > 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} < 0$.

Rq : $y(x,t) = a\sin(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_s)$

$\frac{dy}{dt} = a\omega c$

$\frac{dy}{dx} = -a\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_s)$

f) D'après le principe du propagation :

$y(x,t) = ~~a\sin(\omega t + \varphi_{sc})~~$

$= a\sin(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_s)$

$y_{t_1}(x) = a\sin(\frac{2\pi}{T}t_1 - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_s)$

$= a\sin(4,5\pi - \frac{2\pi x}{\lambda})$

$= a\sin(4\pi + 0,5\pi - \frac{2\pi x}{\lambda})$

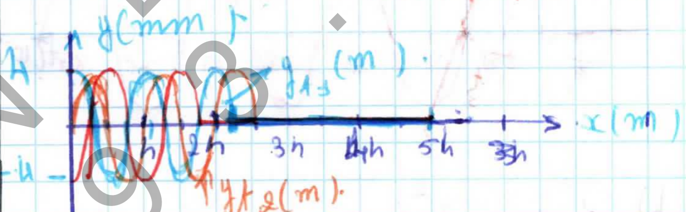
$y_{t_1}(x) = 4\cdot10^{-3}\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda})$ $\forall$ $x \leq x_1 = 2,25\lambda$

$y_{t_1}(x) = 4\cdot10^{-3}\sin = 0$ $x > x_1 = 2,25\lambda$

y (m) et x (m).

x	0	λ/4
y	4	0.

$L = 1\text{ m} = 0,2 \cdot 5 = 5\lambda$.



Pour $t_2 = 5\cdot10^{-2}$ s.

D'après le principe du propagation.

$y(x,t_2) = a\sin(\omega t - \frac{2\pi x_2}{\lambda} + \varphi_s)$

$y_{t_2}(x) = a\sin(\frac{2\pi t_2}{T} - \frac{2\pi x_2}{\lambda} + \varphi_s)$

Rq : ou bien :

$\Delta t = t_2 - t_1 = (5 - 4,5)\cdot10^{-2} = 0,5\cdot10^{-2} = \frac{2\cdot10^{-2}}{4}$

$= 0,25 = \frac{T}{4}$

$\Delta x = x_2 - x_1 = v\cdot\Delta t = v\cdot\frac{T}{4} = \frac{\lambda}{4}$

Pour représenter l'aspect de la corde à l'instant t_2 il suffit de translater selon l'axe de x et dans le sens (+) l'aspect de la corde à l'instant t_1 de $\Delta x = \frac{\lambda}{4}$.

$= a\sin(4\pi - \frac{2\pi x_2}{\lambda} + \varphi_s)$

$= a\sin(4\pi + 0,5\pi - \frac{2\pi x_1}{\lambda} + \varphi_s)$

PILOTE SOUSSE

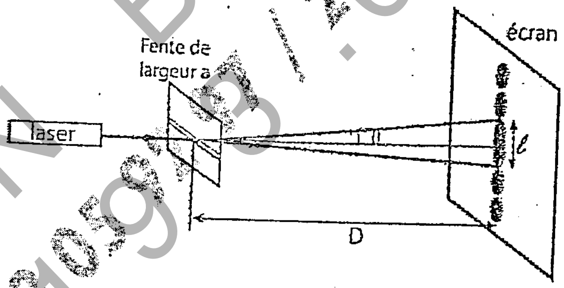
SERIE PILOTE SOUSSE

Exercice N° 1 :

Cet exercice décrit deux expériences utilisant une lumière de couleur rouge, émise par un laser, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 633$ nm.
On rappelle que l'indice de réfraction n d'un milieu est le rapport de la célérité c de la lumière dans le vide et de sa vitesse v dans le milieu considéré : $n = \frac{c}{v}$

PREMIÈRE EXPÉRIENCE

On place perpendiculairement au faisceau lumineux et à quelques centimètres du laser, une fente fine et horizontale de largeur *a*. Un écran situé à une distance D de la fente, montre des taches lumineuses réparties sur une ligne verticale. La tache centrale plus lumineuse que les autres, est la plus large (**voir figure 1**).



1) Quel phénomène subit la lumière émise par le laser dans cette expérience ? Que peut-on en conclure par analogie avec les ondes mécaniques ?

2) L'angle θ (de la figure 1) est donné par la relation :

$$\theta = \frac{\lambda}{a} \qquad \text{(relation (1))}$$

a- Comment évolue la largeur de la tache centrale lorsqu'on réduit la largeur de la fente ?

b- Exprimer θ en fonction de la largeur ℓ de la tache centrale et de la distance D (relation (2)). L'angle θ étant faible, on pourra utiliser l'approximation $\tan\theta \approx \theta$.

c- En utilisant les relations (1) et (2), montrer que la largeur *a* de la fente s'exprime par le relation : $a = \frac{2.\lambda.D}{\ell}$. Calculer *a*.

d- **On donne :** $\ell = 38$ mm et D = 3,00 m.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE

On utilise dans cette expérience, comme milieu dispersif, un prisme en verre d'indice de réfraction n.
On dirige, suivant une incidence donnée, le faisceau laser vers l'une des faces du prisme placé dans l'air. On observe que ce faisceau est dévié. Un écran placé derrière le prisme montre un point lumineux de même couleur (rouge) que le faisceau incident.

1) Quelle est la nature de la lumière émise par le laser ? Justifier votre réponse.

2) La célérité de la lumière dans le vide est $c = 3.10^8$ m.s^{-1}.

a- Rappeler la relation entre la longueur d' onde λ de l'onde émise par le laser, sa fréquence ν et sa célérité c. Calculer ν.

b- La valeur de ν varie-t-elle lorsque ette onde change de milieu de propagation ?

L'indice de réfraction du verre pour la équence ν de l'onde utilisée est n = 1,61.

– Calculer la longueur d'onde λ' de cette ond dans le verre.

c- On remplace la lumière du laser par un lumière blanche. Qu'observe-t-on sur l'écran ?

Exercice N°2 :

I–Un faisceau de lumière parallèle monochromatique, le longueur d'onde produit par une source laser arrive sur un cheveu vertical, de diamètr a . On place un écran à une distance D de ce cheveu ; la distance D est grande devant a (voir la igure 3)

1/ La figure 4 ci-dessous présente l'expérience vue d dessus et la figure observée sur l'écran.

a / Quel renseignement sur la nature de la lumière ce phénomène apporte-t-il ? Donner le nom de ce phénomène.

b/ En utilisant la figure 4 exprimer l'écart angulaire ϵ en fonction des grandeurs L et D sachant que pour de petits angles exprimés en radian : tg θ ≈ ϵ

figure 3

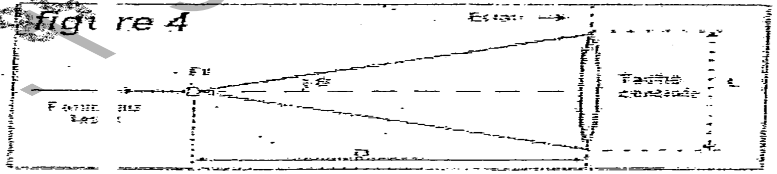


figure 4

c/ Quelle expression mathématique lie les grandeurs ϵ , λ et a ?

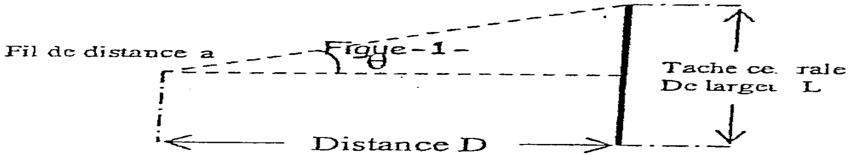
d/ En utilisant les résultats précédents, Etablir l'expre sion de la largeur de la tâche centrale de diffraction en fonction de D, et a.

2/ On dispose de deux cheveux calibrés de diamètres r spectifelles a_1 =0,06mm et a_2=0,08 mm.

On place successivement ces deux cheveux verticaux da s le dispositif présenté par la figure 3. On obtient sur l'écran deux figures de diffrac ion distinctes tel que les franges centrales de largeur srespectives L_1 et L_2 .Calculer L_2 si $_1$ = 5 mm.

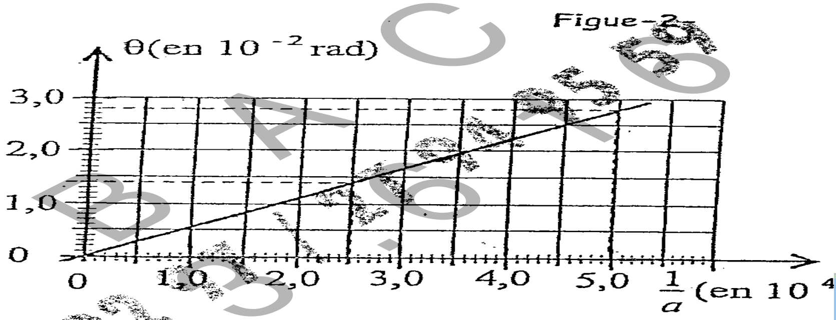
Exercice N°3 :

On réalise une expérience de dif raction à l'aide d'un laser émettant une lumière monochromatique de longueur d' ıde λ.
À quelques centimètres du laser, n place successivement des fentes verticales de largeur connues. On désigne par a la largeur de la fente.
La figure de diffraction obtenue st observée sur un écran blanc situé à une distance D = 1,60 m des fentes. Pour chacu des fentes, on mesure la largeur L de la tache centrale.
À partir de ces mesures et des do nées, il est possible de calculer l'écart angulaire θ du faisceau diffracté. (voir figure 1 -après).



Figue-1-

Figue-2-



1-a L'angle θ étant petit, θ , exprimé en radian, on a la relation: $\tan\theta \approx \theta$ en radian.
Donner la relation entre L et D qui a pe mis de calculer θ pour chacune des fentes.

b- Donner la relation liant θ, λ et a. F éciser les unités de θ, λ et a.

c- On trace la courbe $\theta = f(\frac{1}{a})$. elle-ci est donnée sur la figure-2-ci-dessus :

Calculer la valeur de la pente de cette courbe.

d- En déduire la longueur d'onde de la lumière monochromatique utilisée ?

e- Pour augmenter l'écart angulair θ du faisceau diffracté faut-il diminuer ou augmenter la distance D ? Justifier.

2- Un fil, placé à la position exacte de a fente du dispositif précédent, produit exactement la même figure sur l'écran.
Des élèves décident de mettre en œ vre cette expérience pour mesurer le diamètre d d'un cheveu qu'ils sont placés ur un support.
Il obtiennent une tache centrale de l rgeur : L' = 18mm lorsque l'écran est à D = 1,50m du cheveu.

Calculer approximativement par <u>deux mé hodes</u> le diamètre d du cheveu.

Exercice N°1 :

1ère expérience :

1) – La lumière subit la diffraction au niveau de la fente – cet expérience met en évidence la nature ondulatoire de la lumiè

2) a) si $a \searrow \Rightarrow \theta \nearrow$ et par suite la largeur de la tache centra
car $\theta = \frac{\lambda}{a}$

b) $tg\,\theta = \frac{L}{2D}$ or θ est faible $\Rightarrow tg\,\theta \simeq \theta$ d'où $\theta = \frac{L}{2D}$

c) $\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{L}{2D}$ d'où $L = \frac{2\lambda D}{a} \Rightarrow a = \frac{2\lambda D}{L}$

AN : $a = \frac{2 \times 3 \times 633\ 10^{-9}}{38\ 10^{-3}} = \underline{10^{-4} m}$

2ème expérience :

1) La lumière du laser ne subit pas de dispersion ell
monochromatique

2) a) – $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\ 10^{8}}{633\ 10^{-9}} = \underline{4,74\ 10^{14}\ Hz}$

b) – la fréquence ν reste inchangée lorsque l'onde c
le milieu de propagation.

c) – $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{v}{\lambda'} \Rightarrow \lambda' = \lambda \frac{v}{c} = \frac{\lambda}{n}$

$\lambda' = \frac{633}{1,61} = \underline{393\ nm}$

d) – sur l'écran, on observe un spectre continu
la lumière blanche.

Exercice N°2 :

I a) – c'est la nature ondulatoire de la lumière
" le phénomène de diffraction.

b) – $tg\,\theta = \frac{L}{2D}$ or θ est faible. $tg\,\theta \simeq \theta$.

$\theta = \frac{L}{2D}$

c) $\theta = \frac{\lambda}{a}$

d) $\theta = \lambda \quad - \quad L$

$L_1 = \frac{2\lambda D}{a_1}$ $\Rightarrow$ $\frac{L_1}{L_2} = \frac{a_2}{a_1}$ $\Rightarrow$ $L_2 = \frac{L_1 a_1}{a_2}$

$L_2 = \frac{2\lambda D}{a_2}$

$L_2 = \frac{5 \times 0{,}06}{0{,}8} = \underline{3{,}75\ mm}$.

Exercice N°3:

1) a) - $tg\theta = \frac{L}{2D}$ or θ est faible. $\theta = \frac{L}{2D}$

b) $\theta = \frac{\lambda \leftarrow m}{a \leftarrow m}$ ②
$\nearrow$ rad.

c) la courbe $\theta = f(\frac{1}{a})$ est une droite d'eq $\theta =$

avec $A = \frac{(2{,}8 - 1{,}4)10^{-2}}{(5 - 2{,}5)10^4} = \underline{0{,}56\,10^{-6}\ m} = \underline{0{,}56\ \mu m}$

d) par identification ① = ② $\Rightarrow$.

$A = \lambda = \underline{0{,}56\ \mu m}$.

2) - 1ère méthode:

$\frac{L'}{2D} = \frac{\lambda}{d}$ $\Rightarrow$ $d = \frac{2\lambda D}{L'} = \underline{9{,}33}$

2ème méthode: Graphiquement.

$\theta = \frac{L'}{2D} = 0{,}6\cdot10^{-2}$ rad.

graphiquement $\theta = 0{,}6\,10^{-2}$ rad $\longrightarrow$:

$\frac{1}{d} = 1{,}07\,10^4\ m^{-1}$

$\Rightarrow$ $\underline{d = 9{,}34\,10^{-5} m}$

3-a) On a : $U_m = Z_2.I_{2m} = Z_2.I_2\sqrt{}$. ce qui donne : $Z_2 = 150\ \Omega$. (2x0,25)

0,25 0,25

b) On a : $Z = \sqrt{R_t^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ or la résistance totale du circuit est $R_t = 150\ \Omega$. D'autre part Z = 150 Ω. Donc $R_t = Z_2$. 0,25 Ainsi, l'impédance Z_2 est minim ale, par la suite le circuit RLC est le siège d'une résonance d'intens ité. 0,25 justifi 0,25. (3x0,25)

c) A la résonance d'intensité on a :

$4\pi^2N_2^2LC = 1 \Rightarrow \quad L = \frac{1}{4\pi^2N_2^2C} = 0,16\ H$ (2x0,25)

0,25 0,25

$\begin{cases} Z = R \\ L\omega = \frac{1}{C\omega} \\ \varphi = 0 \end{cases}$

Exercice 2 (4 points)

1-1-a) Définition de la longueur d'onde 0.25

b) La distance qui sépare la premièr e de la quatrième ride est: D= 3,9 cm.

Par conséquent : $D = 3\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 1,3$ cm 0,25 $1,2 \leq \lambda_1 \leq 1,4$. (3x0,25)

Accepter la mesure directe de la di stance entre deux rides consécutives.

La célérité v_1 de l'onde est : $v_1 = \lambda_1 . N_1 = 0,143\ m.s^{-1}$. 0,25

2-a) La distance D' qui sépare la premi ère ride de la cinquième ride est:

$D' = 4\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 0,75$ cm et par la suite $v_2 = \lambda_2.N_2 = 0,150\ m.s^{-1}$. 0,25 (2x0.25)

0,25

b) Dans l'eau, la célérité de l'onde dé pend de sa fréquence d'émission. 0.25

Donc, l'eau est un milieu dispersif.

3- La troisième ride est située à 2λ de la première (θ = 2T). Le point B appartenant au sommet de la troisi ème ride, vibre en phase avec le point A. 0.5

0,25

en

$y_B(t) = y_A(t-\theta)$, avec $\theta = \frac{AB}{v}$ pour $t \geq \theta + t_A$. e'eq exigé

0,25

Ainsi, $y_B(t) = y_A(t-\theta) = 4.10^{-3}\sin(40\ t)$ pour $t \geq \theta + t_A$. 0.25

II-1-a) La valeur de λ doit être compar able à la largeur a de la fente. a < λ

b) $N_2 = 20$ Hz et d'après 2-a) on a $\lambda_2 = 0,75$ cm. largement > 2 x 0.25

λ_2 est comparable à la valeur a d 'où la possibilité de la diffraction de l'onde.

a > λ il n'y a pas de diffraction

b) Le phénomène de diff est plus appréciable pour λ > a

ONDE PROGRESSIVES

RESUME PILOTE
TUNIS ET SFAX

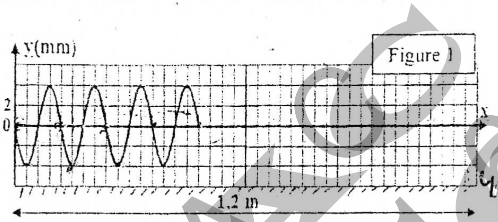
SERIES PILOTE SFAX

62/8

LYCEE M^{ed} ALI SFAX 2014 / 2015	**Les ondes mécaniques progressives sinusoïdales (1)**	M^{me} AMMAR.F Classe : 4ème

Exercice N° 1

Un électroaimant communique à l'extrémité S d'une lame vibrante un mouvement sinusoïdal de fréquence N. On fixe à l'extrémité S de la lame une corde élastique tendu horizontalement de longueur L = 1,2 m. A l'autre extrémité de la corde, on place du coton. Lorsque la lame vibre, la corde est le siège d'une onde progressive transversale dont la célérité de propagation est égale à 6 m.s^{-1}. L'origine des dates correspond au début du mouvement de la lame. La courbe de la figure 1 représente l'aspect de la corde à une date t$_1$.



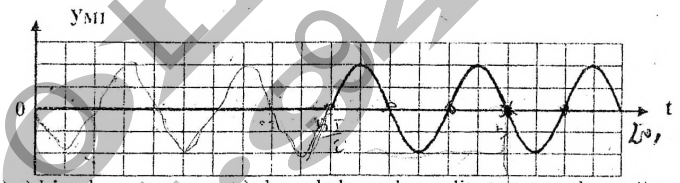
1) Donner la définition de la longueur d'onde λ, puis déterminer graphiquement sa valeur.
2) Déterminer la valeur de t$_1$.
3) La lame étant en vibration.
   a) Quel est l'aspect de la corde observée en lumière ordinaire ? Interpréter cette observation.
   b) On éclaire la corde par un stroboscope électronique de fréquence Ne réglable. Quel est l'aspect de la corde observée lorsque Ne = 24,9 Hz ?
4) Soient M$_1$ et M$_2$ deux points de la corde d'abscisses respectives x$_1$ = 15 cm et x$_2$ = 24 cm dans le repère d'origine S et d'axe $\overline{Sx}$.
   a) Déterminer graphiquement l'élongation y de M$_1$ à la date t$_1$ et déduire la phase initiale de la source S.
   b) Déterminer l'abscisse du point le plus proche de M$_1$ et qui vibre en opposition de phase avec la source à la date t$_2$ = 0,04 s.
   c) Représenter, dans l'intervalle de temps [0 ; 0,08s] le diagramme du mouvement du point M$_2$, en prenant comme échelle : 1 cm pour t = 0,01 s et 1 cm pour y = 0,4 cm.
5) Représenter l'aspect de la corde sur la figure 1 à la date t$_3$ = 0,21 s

EXERCICE N° 2 :

L'extrémité (S) d'une corde horizontale de longueur ℓ = 0,5 m est reliée à une lame vibrante animée d'un mouvement sinusoïdal transversal d'amplitude a et de fréquence N. L'autre extrémité de la corde est reliée à un système absorbant pour éviter toute réflexion

La lame commence son mouvement à l'instant t = 0s, la célérité de propagation de l'onde issue de (S) est notée C.

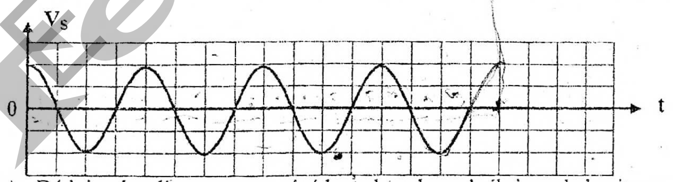
La courbe ci-dessous représente le diagramme du mouvement d'un point M$_1$ situé à la distance d = OM$_1$ = 25 cm de la source (S).



Echelle :
Abscisse : 2,5 ms/div

1°) a) L'onde se propageant le long de la corde est dite transversale, expliquer ?
b) Déterminer la célérité C de propagation de l'onde ?
c) Définir la longueur d'onde λ et déterminer sa valeur .

2°) Le diagramme ci dessous est celui de la vitesse de la source (S) : V$_S$ = f (t) .



Echelle :
Ordonnée : 0,4 π m.s^{-1}/div

a) Déduire des diagrammes précédents la valeur algébrique de la vitesse du point M$_1$ à l'instant de date t$_1$ = 4.10^{-2}S
b) Ecrire l équation horaire du mouvement de la source (S) et celle du point M$_1$.

3°) a) Représenter l'aspect de la corde à l'instant de date t$_2$ = 3,5 .10^{-2} s

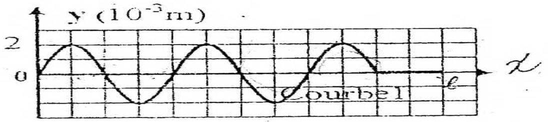
b) Déterminer les abscisses des points de la corde qui à la date $t_3 = 4,5.10^{-2}s$, ont même élongation que le point M_1 et allant dans le sens négatif des élongations.

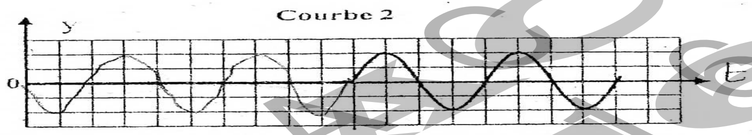
4°) A quelle distance de M_1 se trouve le point P le plus proche de M_1 qui vibre en quadrature retard de phase avec la source (S) tel que **OP > OM$_1$**.

5°) On éclaire la corde à l'aide d'un stroboscope de fréquence Ne réglable. Quel est l'aspect observé de la corde pour :

- Ne = 25 Hz.
- Ne = 12,6 Hz

ECERCICE3





L'extrémité (S) d'une corde horizontale de longueur $\ell = 0,6$ m est reliée à une lame vibrante animée d'un mouvement sinusoïdal transversal d'amplitude a et de fréquence N. L'autre extrémité de la corde est reliée à un système absorbant pour éviter toute réflexion.
La lame commence son mouvement à l'instant t = 0s et la source (S) a pour équation horaire : $y_S(t) = a \sin(\omega t + \varphi_S)$ pour $t \geq 0s$.

On a représenté la sinusoïde des temps d'un point A situé à une distance x_A du point S ,A est atteint par l'onde après un retard $\theta_A = 2,5.10^{-2}$ s et l'aspect de la corde à une date t_1.

1) Identifier la courbe 1 et la courbe 2 justifier la réponse.
2) Déduire de ces graphes la longueur d'onde λ, la période T, l'abscisse x_A et la date t_1
3) Déterminer la célérité de propagation de l'onde le long de cette corde.
4) Montrer que : $y_S(t) = 2.10^{-3} \sin(200\pi t)$ pour $t \geq 0s$.
5) Ecrire la loi horaire du mouvement du point A.

Déterminer, à la date t_1, le lieu des points qui vibrent en quadrature de phase avec la source

EXERCICE N° 4 :

On relie l'extrémité S d'une corde élastique de longueur L = 1m à un vibreur qui impose un mouvement sinusoïdal d'équation $y_S(t) = a \sin(\omega t + \varphi_S)$ pour $t \geq 0$.
La célérité de propagation de l'onde est $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$
A une date t_1 la corde prend l'aspect suivant :

A et B sont deux points de la corde tels que $x_A = 7,5$ cm et $x_B = 47,5$ cm (voir figure ci-dessous).

1°) Déterminer :
   a- La valeur de l'instant t_1.
   b- La période temporelle T.
2°) Etablir l'équation horaire du mouvement de S.
3°) Etablir l'équation de l'onde progressive.
4°) Déterminer les abscisses des points qui vibrent en quadrature de phase avec le point B, à l'instant t_1.
5°)
   a- A quelles dates le point A passe t-il par sa position d'équilibre dans le sens négatif ($t \leq t_1$)?
   b- Représenter la sinusoïde des temps de ce point A sur la feuille annexe (Figure -3).
6°)
   a- Représenter l'aspect de la corde à l'instant $t_2 = 2T + 5\frac{T}{8}$ sur la feuille annexe (Figure -3).
   b- Déterminer, à l'instant t_2, les positions des points d'élongation $(\frac{a}{2})$ allant dans le sens positif des élongations. Placer ces points sur la courbe tracée.

Exercice n°1 64

1/ c'est la distance parcourue par l'onde pendant une période de temps.

valeur :

$4\lambda = \frac{4}{10} L \Rightarrow \lambda = \frac{L}{10} = \frac{1,2}{10} = 0,12m$

$\lambda = 12cm$

2/ $x_6 = v.t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{x_6}{v} = \frac{4\lambda}{v} = 4T$

$t_1 = 4 \frac{0,12}{6} = 8.10^{-2}s =$

3) a/ La corde apparait sous la forme d'une bande floue

$\Rightarrow$ Tous les points de la corde en vibration.

b/ $N_e = 24,5 Hz$

$N = \frac{1}{T}$ avec $T = \frac{t_1}{4} = 2.10^{-2}s$

$\Rightarrow N = 50 Hz$.

d'où N_e est légèrement inferieure à $25 Hz \left(\frac{N}{2}\right) \Rightarrow$ La corde est observée sous la forme d'une sinusoïde en mvt ralenti dans le sens direct.

4) a/ $x_1 = 15cm = \frac{5\lambda}{4}$

d'après l'aspect observé à t

$y_{M_1} = -a = -4mm$

$y_{M_1} = a\sin(2\pi Nt + \varphi_M)$; $t \geq \frac{x_1}{v}$

$y_{M_1}(t_1) = a\sin(2\pi N t_1 + \varphi_{M_1}) = -a$

$\Rightarrow \sin(100\pi \times 8.10^{-2} + \varphi_M) = -1$

$\Rightarrow \sin(\varphi_M) = 1$

$\Rightarrow \varphi_{M_1} = -\frac{\pi}{2}$

or $\varphi_{M_1} = -\frac{2\pi x_1}{\lambda} + \varphi_s$

$\Rightarrow \varphi_s = \varphi_{M_1} + \frac{2\pi x_1}{\lambda}$

$= -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} . \frac{5}{4}\lambda = 2\pi$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_s = 0 \ rad}$

b/ Les points vibrent en opposition de phase avec la source, vibrent en quadrature de retard avec le point M_1.

$\varphi_{M_1} - \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\frac{2\pi}{\lambda} x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$

$x = (k + \frac{1}{2})\lambda \quad k \in \mathbb{N}$

Le point le plus proche est d'abs

$x_1 = \frac{3\lambda}{2} \quad (k = 1)$.

Autre méthode

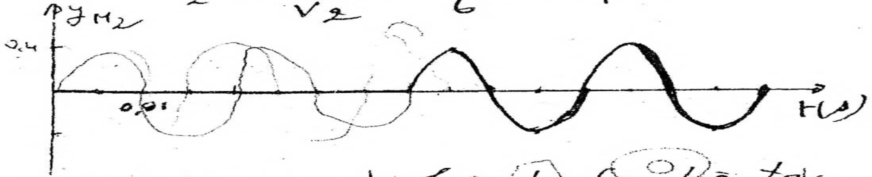
Les points vibrant en opposition de phase avec la source sont distant de $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ de la source.

D'après l'aspect observé à t_2 il y a deux points d'abscisses $\frac{\lambda}{2}$ et $\frac{3\lambda}{2}$

or $x_{M_1} = \frac{5\lambda}{4} \Rightarrow$ Le point le plus proche est d'abscisse $\frac{3\lambda}{2}$.

c/ Le pt M_2 reprend le m^vt de la (65) source avec un retard horaire

$$\theta_2 = \frac{x_2}{V_2} = \frac{0,24}{6} = 0,04 s = \frac{2}{?}T$$



5/ L'abscisse du front d'onde à t_3 :

$x_f = v . t_3 = 6 \times 0,21 = 1,26 m > L$

⇒ Toute la corde est en vibration.

à $t_3 = 0,21 s$ $\begin{cases} y_s = a\sin(2\pi N t_3) \\ V_s = 2\pi N a \cos(2\pi N t_3) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_s = 0,4 . 10^{-2} \sin(100\pi \times 0,21) = 0 \\ V_s = 100\pi\, 0,4 . 10^{-2} \cos(100\pi \times 0,21) < 0 \end{cases}$

⇒ Le point d'abscisse $x = \frac{\lambda}{4}$ est une crête.

Exercice n°2.

1/a/ chaque point M de la corde se déplace dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.

b/ Le pt M_1 reprend le m^vt de la source avec un retard horaire

$\theta_1 = \frac{x_1}{C} \Rightarrow C = \frac{x_1}{\theta_1}$

d'après la courbe. $\theta_1 = 10 \times 2,5 = 25 ms$

$\Rightarrow C = \frac{25.10^{-2}}{25.10^{-3}} = 10 m.s^{-1}$.

c/ c'est la distance parcourue par l'onde pendant une période de temps.

valeur : $\lambda = C \times T$

or $T = 2,5 \times 4 = 10 ms = 10^{-2} s$

d'où $\lambda = 10 \times 10^{-2} = 0,1 m$.

2/a/ à $t_1 = 4 10^{-2} s = \theta_{M_1} + \frac{3}{2}T$; $y_{M_1} = 0$

a à $\theta_n = \frac{5T}{2}$: $y_M = 0$ en se déplaçant dans le sens positif ⇒ $V_0 > 0$

⇒ à $t_2 = 4.10^{-2}$; $V_{M_1} < 0$

d'après la courbe de V_S on déduit que $V_{M_1} = -0,4\pi \times 2$
$= -0,8\pi m.s^{-1}$

b) $y_s(t) = a\sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_s)$; $t \geq 0$

$a = ?$ $V_0 = \frac{2\pi}{T}.a \Rightarrow a = \frac{T . V_0}{2\pi}$

$\Rightarrow a = \frac{10^{-2} \times 0,8\pi}{2\pi} = 4.10^{-3} m$.

φ_s : $t = 0$ $\begin{cases} y_s = 0 \\ V_s > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\sin\varphi_s = 0 \\ \omega a \cos\varphi_s > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \sin\varphi_s = 0$ et $\cos\varphi_s > 0$ $\Rightarrow \varphi_s = 0 rad$

$\boxed{y_s(t) = 4.10^{-3}\sin(200\pi t)}$, $t \geq 0$

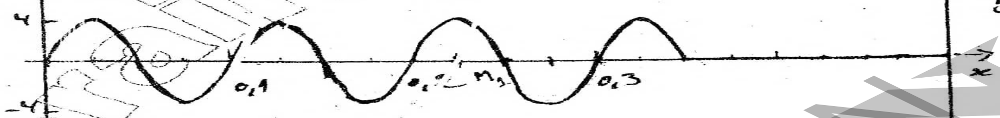
$y_{M_1} = a\sin(2\pi Nt + \varphi_{M_1})$; $t \geq \theta_2$ (66)

à θ_2 ; $v_{M_1} = -v_{M_2}$ et $y_{M_1} = 0 = y_{M_2}$ } ⇒ M₁ vibre en opposition de phase par rapport à S :

$\varphi_M - \varphi_s = \pi \Rightarrow \varphi_M = \pi + \varphi_s = \pi$ rad

1) $y_{M_1}(t) = 4.10^{-3}\sin(200\pi t + \pi)$; $t \geq \frac{5}{2}T$

3) a/ à $t_2 = 3,5.10^{-2}s = 3,5T$, Le front d'onde est d'abscisse : $x_f = v.t_2 = 3,5.V.T = 3,5\lambda$ ⇒ $x_f = \frac{7}{2}\lambda$



b/ à $t_3 = 4,5.10^{-2}s$ $\begin{cases} y_{M_1} = 0 \text{ et } v_{M_1} > 0 \\ x_f = 4,5\lambda \end{cases}$

Les points ont la même élongation que M₁ et allant en sens négatif des élongations vibrent en opposition de phase avec M₁ donc ils sont distant de M₁ de $(2K+1)\frac{\lambda}{2}$

Il y a 5 points d'abscisse :

$x_0 = 0$ (la source S)

$x_1 = \lambda$; $x_2 = 2\lambda$; $x_3 = 3\lambda$ et $x_4 = 4\lambda$

4) M vibre en quadrature retard de phase avec la source ⇒ vibre en quadrature d'avance de phase avec M₁ : $\varphi_{M_1} - \varphi_M = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow \pi + \frac{2\pi x}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\lambda}{4} + k\lambda$ $K \in IN$

M₁ est d'abscisse $x_1 = \frac{5}{2}\lambda$

P est le plus proche de M

$x_P - x_{M_1}$ est minimale

$\Rightarrow \frac{\lambda}{4} + k\lambda - \frac{5}{2}\lambda$ est minimal

$\Rightarrow -\frac{9}{4}\lambda + k\lambda$ est minimale.

or $OP > OM_1 \Rightarrow -\frac{9}{4}\lambda + k\lambda > 0$

$\Rightarrow k\lambda > \frac{9}{4}\lambda \Rightarrow k > \frac{9}{4} \Rightarrow k = 3$

d'où $x_P = \frac{13}{4}\lambda$

5) * $N_e = 25Hz = \frac{N}{4}$; $N = 100Hz$

⇒ La corde apparait immobile sous la forme sinusoidale.

* $N_e = 12,5Hz$ légèrement supérieure à $\frac{N}{8}$ ⇒ La corde apparait en mvt ralenti dans le sens inverse sous la forme d'une sinusoide.

Exercice n°3

1/ * La courbe (1) : $y = f(x)$ c'est la sinusoide d'espace car elle donne la forme de la corde à la date t_1

* La courbe (2) : $y_A = g(t)$ c'est la sinusoide de temps du point A

2/ * courbe (1) donne

$\lambda = \frac{\ell}{12} \times 4 = \frac{0,6}{12} \times 4$

$\Rightarrow \underline{\lambda = 0,2m}$

* Valeur T : $\theta_A = \frac{5}{2}T \Rightarrow T = \frac{2}{5}\theta_A$ (67)

$T = \frac{2}{5} \times 2{,}5.10^{-2} = 10^{-2}s$

* valeur x_A : $\theta_A = \frac{x_A}{V} \Rightarrow x_A = V.\theta_A$

$x_A = \frac{5}{2}T.V = \frac{5}{2}\lambda = 0{,}5m$

* valeur t_1 :

$x_B = Vt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{x_B}{V} = \frac{\frac{5}{2}\lambda}{V} = \frac{5}{2}T$

$\boxed{t_1 = 2{,}5.10^{-2}s}$

3/ $V = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}2}{10^{-2}} = 20\,m.s^{-1}$

4) $y_s(t) = a\sin(2\pi Nt + \varphi_s) . t \geq 0$

Le front d'onde est une crête

$\Rightarrow$ à $t = 0$; $V_s > 0$

$\Rightarrow \begin{cases} y_0 = 0 \\ V_s > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\sin\varphi_s = 0 \\ 2\pi Na\cos\varphi_s > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi_s = 0 \\ \cos\varphi_s > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi_s = 0\,rad.$

$a = 2mm = 2.10^{-3}m$

$\omega = 2\pi N = \frac{2\pi}{T} = 200\pi\,rad.s^{-1}$

$\Rightarrow y_s(t) = 2.10^{-3}\sin(200\pi t), t \geq 0$

5) $y_A(t) = a\sin(2\pi Nt + \varphi_A), t \geq \theta_A$

à $t = 2{,}75T$; $y_A = a$

$\Rightarrow a\sin(200\pi.2{,}75.10^{-2} + \varphi_A) = a$

$\Rightarrow \sin(-\frac{\pi}{2} + \varphi_A) = 1$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + \varphi_A = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \varphi_A = \pi\,rad.$

$\boxed{y_A(t) = 2.10^{-3}\sin(200\pi t + \pi), t \geq \frac{5}{2}T}$

6/ M vibre en quadrature d'avance de phase avec la source

$\varphi_S - \varphi_M = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow \boxed{x = k\lambda - \frac{\lambda}{4}}$; $k \in IN^*$

à t_1 : $x \leq \frac{5}{2}\lambda$

$\Rightarrow 0 \leq k\lambda - \frac{\lambda}{4} \leq \frac{5}{2}\lambda$

$0 \leq k - \frac{1}{4} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}$

$k \in \{1, 2\} \Rightarrow$ Il y a deux point d'abscisse $x_1 = \frac{3}{4}$ et $x_2 = \frac{7\lambda}{4}$

Exercice n°4

1) a — $2\lambda = x_B - x_A = 47{,}5 - 7{,}5 = 40\,cm$

$\lambda = \frac{40}{2} = 20\,cm$

$x_B = V.t_1 = \frac{19}{8}\lambda \Rightarrow t_1 = \frac{x_B}{V}$

$t_1 = \frac{47{,}5.10^{-2}}{10} = 4{,}75.10^{-2}s.$

b) $T = ?$ $\lambda = V.T \Rightarrow T = \frac{\lambda}{V}$

$T = \frac{20.10^{-2}}{10} = 2.10^{-2}s$

2) $y_s(t) = a\sin(\omega t + \varphi_s)$; $t \geq 0$

* $a = 2.10^{-3}m$
* $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.10^{-2}} = 100\pi\,rad.s^{-1}$
* $\varphi_s = ?$ à $t_1 = 4{,}75.10^{-2}s$ $\begin{cases} y_s = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ V_s > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a\sin(100\pi \times 4{,}75.10^{-2} + \varphi_s) = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ \omega a\cos(4{,}75\pi + \varphi_s) > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin(4{,}75\pi + \varphi_s) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(4{,}75\pi + \varphi_s) > 0 \end{cases} \Rightarrow 4{,}75\pi + \varphi_s = -\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \varphi_s = -5\pi = \pi\,rad$

$\Rightarrow y_s(t) = 2.10^{-3}\sin(100\pi t + \pi)$ $t \geq 0$

Autre méthode pour φ_s (68)

Le front d'onde est une alternance négative donc à $t=0$, la source S se déplace dans le sens négatif des élongations à partir de sa position d'équilibre.

$$\begin{cases} y_s(t=0)=0 \\ V_s<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi_s=0 \\ \cos\varphi_s<0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_s=\pi\,(\text{rad})$$

3/ le pt M d'abscisse x reprend le mvt de la source avec le retard horaire $\theta=\frac{x}{V}$ d'où $y_M=y_s(t-\theta)$

$\Rightarrow y_M=a\sin(\omega(t-\theta)+\varphi_s)\ ;\ t\geq\theta$

$=2\,10^{-3}\sin(100\pi t-100\pi\cdot\frac{x}{V}+\pi)$

$=2.10^{-3}\sin(100\pi t-\frac{100\pi}{10}x+\pi)$

$y_M(t,x)=2.10^{-3}\sin(100\pi t-10\pi x+\pi),\ t\geq\frac{x}{V}$

4) les points qui vibre en quadrature de phase avec B à l'instant t_1 ont une élongation $|y|=a$

Il existe 5 points d'abscisses $\frac{\lambda}{8}$, $\frac{5\lambda}{8}$, $\frac{9\lambda}{8}$, $\frac{13\lambda}{8}$ et $\frac{17\lambda}{8}$

5/a) $y_A=a\sin(\omega t+\varphi_A)\ .\ t\geq\theta_A$

$=a\sin(100\pi t\underbrace{-10\pi.7{,}5.10^{-2}+\pi}_{\frac{\pi}{4}}),\ t\geq\frac{3}{8}T$

$=2.10^{-3}\sin(100\pi t+\frac{\pi}{4})\ .\ t\geq\frac{3}{8}T$

$y_A=0$ et $V_A<0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2.10^{-3}\sin(100\pi t+\frac{\pi}{4})=0 \\ \omega a\cos(100\pi t+\frac{\pi}{4})<0 \end{cases}$

$\Rightarrow\ 100\pi t+\frac{\pi}{4}=(2K+1)\pi\Rightarrow 100\pi t=2K\pi+\frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow\ t=KT+\frac{3}{8}T$

$t\leq t_1\ \Rightarrow 0<KT+\frac{3T}{8}\leq 2{,}375T$

$-\frac{3T}{8}<KT\leq 2{,}375T-\frac{3T}{8}$

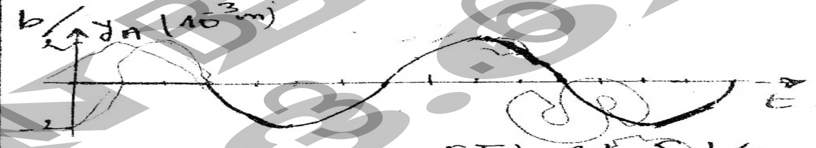
$-\frac{3}{8}\leq K\leq 2$

$K\in\{0,1,2\}$

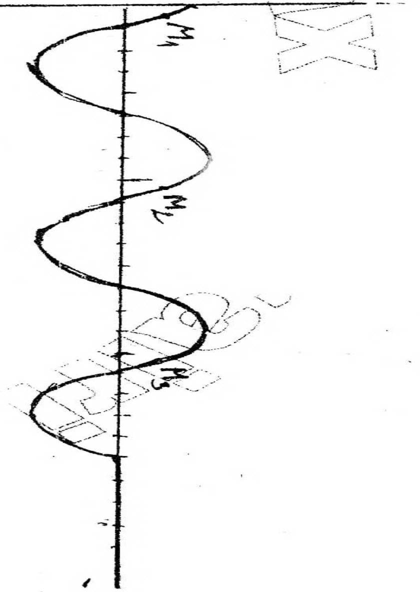
$\Rightarrow$ il y a trois dates tel que

$\frac{3}{8}T$, $\frac{11}{8}T$ et $\frac{19}{8}T$

b/



6/a) $x_6=V.t_2=V(2T+\frac{5T}{8})=2\lambda+\frac{5}{8}\lambda<L$



69

b) $y_M = 2.10^{-3} \sin(100\pi t_2 - 10\pi x + \pi)$, $x \leq x_6 = \frac{21}{8}\lambda$

$= 2\,10^{-3} \sin(100\pi \cdot \frac{21}{8} 2 10^{-} - 10\pi x + \pi) = 2.10^{-3} \sin(\frac{\pi}{4} - 10\pi x) = 2.10^{-3}$

$= 2.10^{-3} \sin(10\pi x + \frac{3\pi}{4})$. $x \leq \frac{21}{8}\lambda$

$V_M = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[2.10^{-3} \sin(100\pi t - 10\pi x + \pi)\right] = 0{,}2\pi \cos(100\pi t - 10\pi x + \pi)$

$V_M(t_2) = 0{,}2\pi \cos(100\pi \cdot \frac{21}{8} \cdot 2.10^{-2} - 10\pi x + \pi) = 0{,}2\pi \cos(\frac{\pi}{4} - 10\pi x)$

$= -0{,}2\pi \cos(10\pi x + \frac{3\pi}{4})$

$$\text{à } t_2 \begin{cases} y = \frac{a}{2} \\ V_M > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.10^{-3} \sin(10\pi x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{a}{2} \\ -0{,}2\pi \cos(10\pi x + \frac{3\pi}{4}) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(10\pi x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2} \\ \cos(10\pi x + \frac{3\pi}{4}) < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 10\pi x + \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow 10\pi x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{1}{120} + 0{,}2k$

$0 \leq x \leq x_6 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{120} + 0{,}2k \leq \frac{21}{8}\lambda$

$-\frac{1}{120} \leq 0{,}2k \leq \frac{21}{8} \times 0{,}2 - \frac{1}{120}$

$-0{,}041 \leq k \leq 2{,}583$

$k \in \{0, 1, 2\}$

il y a trois points d'abscisse :

k	0	1	2
x (m)	$\frac{1}{120} = \frac{\lambda}{24}$	$\frac{25}{24}\lambda$	$\frac{49}{24}\lambda$

SERIES PILOTE SOUSSE

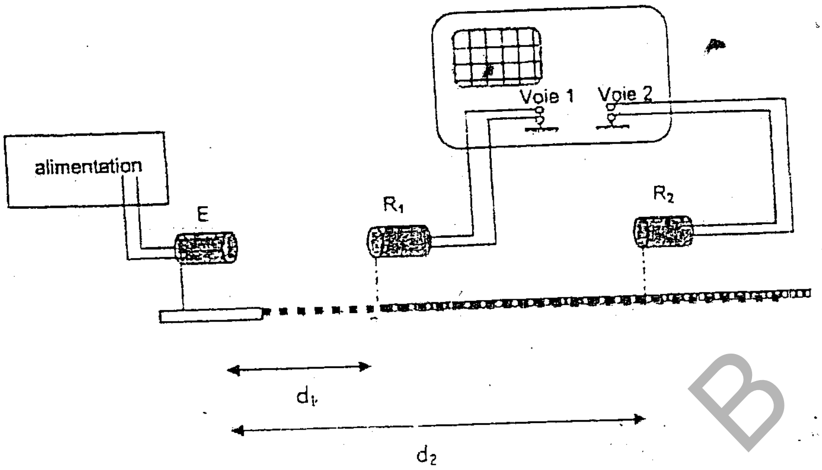
SERIE PILOTE SOUSSE

ε 11

Physique : (13pts)

Exercice n°1 : (4 points)

Un haut parleur E ,alimenté par un GBF emet une onde sonore de fréquence N=2KHz et de longueur d'onde λ . Deux microphones R_1 et R_2 considéres comme ponctuels , sont placés à une distance d_1 et d_2 du haut parleur . E, R_1 et R_2 sont alignés et les deux microphones sont reliés aux voies 1 et 2 d'un oscilloscope . Voir figure ci-dessous .



1.Répondre par vrai ou faux .

a. Le son est une onde transversale .

b. L'onde sonore se propage dans le vide longitudinalement.

c. La célerité de propagation de l'onde sonore dans l'air est de l'ordre de $3.10^8\ ms^{-1}$.

2. Qu'observe-t-on sur l'oscilloscope lorsque $d_1=d_2$.

3. La distance minimale non nulle séparant R_1 et R_2 pourque les deux courbes observées sur l'oscilloscope soient en phases est d= 17cm . En déduire la célerité du son dans l'air.

4. Les deux microphones sont séparées de d'=42,5 cm .

a. Exprimer le temps mis par l'onde sonore pour se propager de R_1 à R_2 en foction de la période T .

b. Les deux courbes ont_il la même amplitude ?Expliquer .

Exercice n°2 : (9 points)

Ex1 (4pts) 2,11

a/ faux (onde longitudinale)

b) faux (l'onde sonore ne se propage pas dans le vide)

c) faux ($v = 340 m s^{-1}$) ($C = 3 \cdot 10^8 m s^{-1}$ = vitesse de l'onde lumineuse)

2) Deux courbes en phases de m̂ amplitudes

3) deux courbes en phases $\Rightarrow d = d_2 - d_1 = k\lambda$

distance minimale $\Rightarrow k = 1$ $d = \lambda = 17 cm \Rightarrow \underline{\lambda = 17 cm}$

$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda N$. AN $v = 17 \cdot 10^{-2} \times 2 \cdot 10^3 = 340 m s^{-1}$

4) $d' = 42,5 cm$ $v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v}$ $\boxed{\Delta t = \frac{d'}{v}}$

$\Delta t = \frac{42,5 \cdot 10^{-2}}{340} = ~~4~~ 1,25 \cdot 10^{-3} (s)$

b) Non. les deux courbes n'ont pas la m̂ amplitude à cause du phénomène de dilution d'energie

$\boxed{\text{l'amplitude} \downarrow \text{ en s'éloignant de la source}}$

$y = a\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_S\right)$

$\varphi_M = -\frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_S$

$\varphi_B = -\frac{2\pi}{\lambda}x_B + \varphi_S$

$\varphi_A \; -\frac{2\pi}{\lambda}x_A + \varphi_S$

$\varphi_B - \varphi_A = \frac{2\pi}{\lambda}(-x_B + x_A)$

$\varphi_B - \varphi_A = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_B - x_A)$

$0 + 2K\pi = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_B - x_A)$

$K = \frac{-1}{\lambda}(x_B - x_A)$

$\boxed{x_B - x_A = K'\lambda}$

$d = d_2 - d_1 = k\lambda$

dist [illegible]

$K_1 = 1 \quad d = \lambda = 17cm$

c) $V = \frac{\lambda}{T} = \lambda N$

$V = \lambda N = 17 \cdot 10^{-2} \times 2000$

$= 340 m \cdot s^{-1} = cte$

$\varphi_B - \varphi_A = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_B - x_A)$

$\pi + 2K\pi = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_B - x_A)$

$1 + 2K = \frac{-2}{\lambda}(x_B - x_A)$

$x_B - x_A = -\frac{\lambda}{2}(1 + 2K)$

$x_B - x_A = (-1 + 2K)\frac{\lambda}{2}$

$x_B - x_A = [illegible]$

3) a) plus qu'on s'éloigne de S plus que l'amplitude diminue

Ex 1

- le son est une onde longitudinale
- le son est une onde mécanique (le son ne se propage pas dans le vide)
- la célérité de l'onde sonore 340 m.s^{-1}

2) si $d_1 = d_2$ un seul oscillogramme (2 courbes confondues de même amplitude)

$v = \lambda N$

$\overset{\uparrow}{?}$ $\quad$ * 2000 Hz

$d_2 - d_1 = k\lambda$

d'où $k = 1$

$d_2 - d_1 = \lambda = 17\,cm$

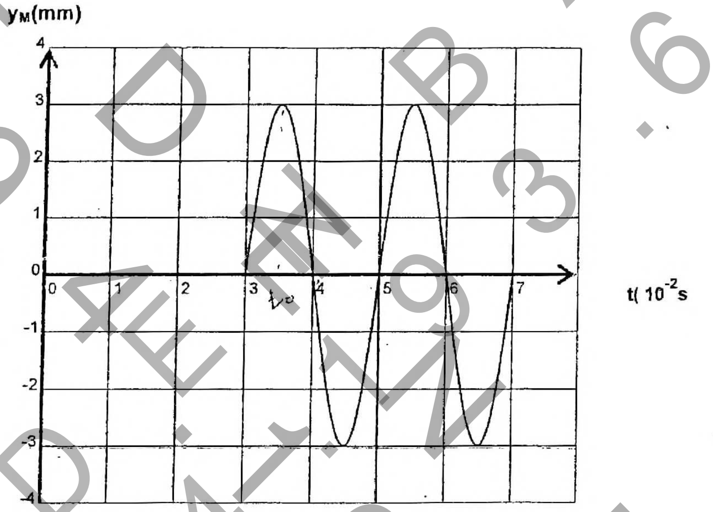
$V = \lambda N = 17\cdot 10^{-2} \times 2\cdot 10^{3} = 340\,m.s^{-1}$

LYCEE PILOTE TUNIS

EXERCICE 3

Une pointe liée à une lame vibrante produit en un point S de la surface libre d'une nappe d'eau au repos des vibrations sinusoïdales verticales. La source S débute son mouvement à l'instant de date t =0. On néglige l'amortissement et la réflexion des ondes issues de S.

1) Décrire, brièvement l'aspect de la surface de l'eau en lumière ordinaire.
2) Le phénomène observé est plus net au voisinage de S. Justifier.
3) La courbe d'évolution au cours du temps du mouvement d'un point M_1 du milieu de propagation se trouvant au repos à la distance $x = 1{,}5$ cm de S est représentée sur la figure ci-dessous



a) Montrer que la célérité de l'onde qui se propage à la surface de l'eau est $V = 0{,}5$ ms^{-1}.
b) Définir la longueur d'onde λ d'une onde progressive. Déterminer la valeur de λ de l'onde considérée.
c) Déterminer l'équation horaire du mouvement de M_1. On précisera les valeurs de l'amplitude de la pulsation et de la phase initiale.
d) Déduire l'équation horaire du mouvement de la source S.

4) a) Représenter une coupe transversale de la surface de l'eau à l'instant t_1=4,5.10^{-2} s

b) Déterminer les positions de tous les points de la surface de l'eau qui à t_1 vibrent en quadrature de phase avec la source S.

EXERCICE 4

On considère une corde parfaitement élastique et homogène dont l'extrémité S est reliée à un vibreur qui lui communique un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude a constante et de fréquence N. La source débute son mouvement à instant choisi comme origine des temps.

On fournit sur la figure ci -dessous, une représentation de l'aspect de la corde à l'instant de date t_1 =4.10^{-2} s

6) les pts qui à t_1 ont une élongation nulle et une vitesse négative sont au nbre de 4, leurs abscisses sont : 5 cm, 15 cm, 25 cm, et 35 cm.

7) Pourqu'il y ait immobilité apparente il faut que

$N = k N_e \qquad k \in \mathbb{N}^*$

$N_e = \frac{N}{k}$

$k = 1 \qquad N_e = N_{e_{max}} = N = 100\,Hz$

Exercice 3

1) A la surface de l'eau, on observe une alternance de rides circulaires brillantes et sombres centrées sur S et qui s'éloignent de celui-ci

2) L'amplitude décroit au fur et à mesure que l'on s'éloigne de S c'est que le pt reçoit d'autant moins d'énergie vibratoire qu'il se trouve éloigné de S
C'est le phénomène de dilution de l'énergie

3) a) le pt M_1 commence à vibrer après le retard $\theta_1 = \frac{x_1}{V}$

$\Rightarrow V = \frac{x_1}{\theta_1} = \frac{1.5\ 10^{-2}}{3\ 10^{-2}} = 0,5\ m.s^{-1}$

b) La longueur d'onde λ est la distance parcourue par l'onde pendant une période temporelle T

$\lambda = V.T$

$\lambda = 0,5 \times 2\ 10^{-2} = \underline{10^{-2}\ m}$

c) Si $0 \le t \le \theta_1$ $\quad y_{M_1}(t) = 0$ (7)

Si $t \ge \theta_1$ $\quad y_{M_1}(t) = a \sin(\omega t + \varphi_1)$

• $a = 3\,10^{-3}$ m

• $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,10^{-2}} = 100\pi \text{ rad.s}^{-1}$

• à $t_0 = 3{,}5\,10^{-2}$ s $\quad y_{M_1}(t_0) = a \sin(100\pi \times 3{,}5\,10^{-2} + \varphi_1) = a$

$\Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) = 1 \quad \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \pi$ rad

Si $0 \le t \le \theta_1$ $\quad y_{M_1}(t) = 0$

Si $t \ge \theta_1$ $\quad y_{M_1}(t) = 3\,10^{-3} \sin(100\pi t + \pi)$

d) $y_S(t) = a \sin(\omega t + \varphi_S)$

M_1 reproduit le mvt de S après le retard θ_1.

$t \ge \theta_1$ $\quad y_{M_1}(t) = y_S(t - \theta_1) = a \sin[\omega(t - \theta_1) + \varphi_S]$

$y_{M_1}(t) = a \sin[\omega t - \omega\theta_1 + \varphi_S]$

or $y_{M_1}(t) = a \sin[\omega t + \varphi_1]$

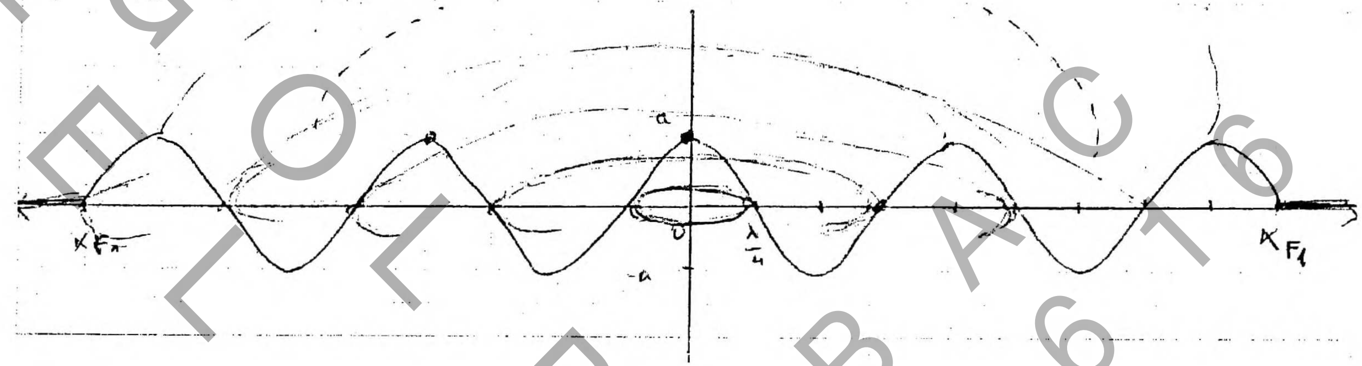
Donc $\varphi_1 = -\omega\theta_1 + \varphi_S \Leftrightarrow \varphi_S = \varphi_1 + \omega\theta_1$

$\varphi_S = \pi + 100\pi \times 3\,10^{-2} = 4\pi \equiv 0$ rad

$$\boxed{y_S(t) = 3\,10^{-3} \sin(100\pi t)}$$

4) a) Pendant t_1, l'onde a parcouru la distance

$$X_{F_1} = V.t_1 = \lambda N t_1 = \lambda \times 50 \times 4{,}5\ 10^{-2} = \frac{9\lambda}{4}$$



b) $y_S(t) = a \sin \omega t$

$$y_M(t) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

M et S vibrent en quadrature si $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_M = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{4} + k\frac{\lambda}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq x \leq X_{F_1} \qquad 0 \leq k\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \leq X_{F_1}$$

$$-\frac{\lambda}{4} \leq \frac{k\lambda}{2} \leq X_{F_1} - \frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{2X_{F_1}}{\lambda} - \frac{1}{2}.$$

$$-0{,}5 \leq k \leq 4 \qquad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

les pts qui à t_1 vibrent en quadrature de phase par rapport à S sont situés sur 5 cercles de rayons : 0,25 cm, 0,75 cm ; 1,25 cm, 1,75 cm et 2,25 cm

---

M_1 vibre en quadrature avance par rapport à M_2 $\quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

" " " retard " " " $\quad \varphi_1 - \varphi_2 = -\pi/2 + 2k\pi$

" en quadrature par rapport à M $\quad \varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2 + k\pi$