Résumé du cours de

Mathématiques

BAC

SOMMAIRE

Signe d'un binôme

Signe et factorisation d'un polynôme

Signe du binôme $ax+b \; ; \; (a \neq 0)$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe de (-a)	0	Signe de (a)

Signe et factorisation du pôlynome $ax^2+bx+c \; ; \; (a \neq 0)$:

<table>
<tr><th colspan="2">Discriminant</th><th>Solution de l'équation : $P(x)=0$ $x \in \mathbb{R}$</th><th>Signe de $P(x)$</th><th>Factorisation de $P(x)$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = b^2-4ac$</td><td>$\Delta \prec 0$</td><td>$S=\varnothing$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">Signe de a</td></tr></table></td><td>Impossible à l'aide
De deux polynômes</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$</td><td><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr></table></td><td>$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)$</td></tr>
<tr><td>$\Delta \succ 0$</td><td>$S=\{x_1;x_2\}$
$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$x_1$</td><td></td><td>$x_2$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de $-$a</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr></table>**(Supposons que $x_1 \prec x_2$)**</td><td>$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$</td></tr>
</table>

Si x_1 et x_2 sont solutions de l'équation : $ax^2+bx+c=0 \; ; \; x \in \mathbb{R}$ et $(a \neq 0)$

Alors on a : $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Identités remarquables

Domaine de définition d'une fonction numérique

Identités remarquables:

Pout tous réels a et b

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Domaine de définition de certaines fonctions numériques:

f est une fonction à variable réelle x définie par	Domaine de définition de f
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \succ 0\}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0 \text{ et } Q(x) \succ 0\}$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\right\}$

Limites

Limites des fonctions $(n \in \mathbb{N}^*) x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ et leur inverses:

$\lim_{x\to 0} x^n = 0$	$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$
$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Si n est pair	**Si n est impair**
$\lim_{x\to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x\to +\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x\to -\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x\to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

Limites des fonctions polynômiales et des fonctions rationnelles au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

La limite d'un polynôme au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ est la limite de son terme de plus grand degré	**La limite d'une fonction rationnelle au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du quotient de ses termes de plus grand degré**

Limite des fonctions trigonométriques:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Limites des fonctions de type : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$\lim_{x\to x_0} u(x)$	$\lim_{x\to x_0} \sqrt{u(x)}$
$l \geq 0$	$\sqrt{l}$
$+\infty$	$+\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Limites et ordre:

$\left.\begin{array}{l} u(x) \le f(x) \le v(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = l \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$	$\left.\begin{array}{l} \lvert f(x) - l \rvert \le u(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
$\left.\begin{array}{l} f(x) \le v(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$	$\left.\begin{array}{l} u(x) \le f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Operations sur les limites:

Limite de la somme de deux fonctions:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l			$-\infty$		$+\infty$	
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)+g(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Limite du produit de deux fonctions:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$l \succ 0$		$l \prec 0$		$-\infty$		$+\infty$		0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)+g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Limite du quotient de deux fonctions:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l		$l \succ 0$		$l \prec 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$l' \ne 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Continuité

La continuité en un point:

Définition :

f continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

La continuité à droite – à gauche – en un point:

f continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

f continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

f continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ continue à droite et à gauche en x_0

La continuité sur un intervalle:

f continue sur un intervalle ouvert $]a;b[$, si f est continue en tous points de cet intervalle

f continue sur un intervalle fermé $[a;b]$, si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, et continue à droite en a, et à gauche en b

Operations sur les fonctions continues:

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel quelconque

- Les fonctions : $f+g$; $f \times g$; $k \times f$ sont aussi continues sur I
- Si on a $(\forall x \in I); g(x) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I

Résultats:

- Tout polynôme est continu sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

La continuité d'un composé de deux fonctions:

Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I

Image d'un intervalle par une fonction continue:

- L'image d'un segment (intervalle fermé) par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Cas particulier:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Le tableau suivant montre la nature de l'intervalle $f(I)$

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(\text{b});f(\text{a})]$
$[a;b[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to b^-} f(\text{x})\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(\text{x});f(\text{a})\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(\text{x});f(\text{b})\right]$	$\left[f(\text{b}); \lim\limits_{x\to a^+} f(\text{x})\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(\text{x}); \lim\limits_{x\to b^-} f(\text{x})\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(\text{x}); \lim\limits_{x\to a^+} f(\text{x})\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to+\infty} f(\text{x})\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(\text{x});f(\text{a})\right]$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty;a]$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(\text{x});f(\text{a})\right]$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to-\infty} f(\text{x})\right[$
$]-\infty;\text{a}[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.):

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel α dans l'intervalle $[a;b]$ tel que : $f(\alpha)=\beta$

Résultats:

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)\prec 0$ Alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α sur l'intervalle $[a;b]$
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)\prec 0$ Alors l'équation $f(x)=0$ possède une et une seule solution α sur l'intervalle $[a;b]$

Méthode de dichotomie:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ et $f(a)\times f(b)\prec 0$

Et soit α l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[a;b]$

Si $f(a)\times f\left(\frac{\text{a}+\text{b}}{2}\right)\prec 0$	Si $f(b)\times f\left(\frac{\text{a}+\text{b}}{2}\right)\prec 0$
Alors $a\prec\alpha\prec\frac{\text{a}+\text{b}}{2}$ et cette encadrement a une capacité qui vaut: $\frac{\text{b}-\text{a}}{2}$, on refait la même chose avec l'intervalle $\left[a;\frac{\text{a}+\text{b}}{2}\right]$ pour obtenir une meilleure précision de l'encadrement de α	Alors $\frac{\text{a}+\text{b}}{2}\prec\alpha\prec b$ et cette encadrement a une capacité qui vaut: $\frac{\text{b}-\text{a}}{2}$, on refait la même chose avec l'intervalle $\left[\frac{\text{a}+\text{b}}{2};b\right]$ pour obtenir une meilleure précision de l'encadrement de α

Remarque : et ainsi de suite jusqu'à obtention de la précision d'encadrement demandée

Dérivabilité en un point:

On dit qu'une fonction f est dérivable en un point x_0 si la limite : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie

Cette limite est nommée le nombre dérivé de la fonction f en x_0 et on écrit : $f'(x_0)$

Equation de la tangente à la courbe d'une fonction – la fonction affine tangente à la courbe d'une fonction:

Soit f une fonction dérivable en x_0

- L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est :
  $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ est la fonction affine tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse x_0 et c'est une approche de la fonction f au voisinage de x_0

Dérivabilité à droite – à gauche, en un point:

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si la limite : $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ est finie

Cette limite est nommée le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_0 et on écrit : $f_d'(x_0)$

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite : $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ est finie

Cette limite est nommée le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_0 et on écrit : $f_g'(x_0)$

On dit qu'une fonction f est dérivable en un point x_0 si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0, et $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$

La dérivabilité et la continuité:

Si une fonction f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0

Tableaux des dérivées de quelques fonctions usuelles:

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	
x	1	$(x \in \mathbb{R})$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	
x^r	rx^{r-1}	$\left(r \in \mathbb{Q}^* - \{1\}\right)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	

Opérations sur les fonctions dérivables:

$(u+v)'=u'+v'$	$(u-v)'=u'-v'$	$(k\in\mathbb{R});(ku)'=ku'$
$(uv)'=u'v+uv'$	$(u^n)'=nu'u^{n-1}$	
$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=\dfrac{-v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	

La dérivée du composé de deux fonctions – la dérivée de la fonction racine carré:

$(u\circ v)'=v'\times[u'\circ v]$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

La dérivation et les variations d'une fonction:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

$\forall x\in I;f'(x)\geq 0\left(f'(x)\succ 0\right)$ $\Leftrightarrow$ f est croissante (strictement croissante) sur l'intervalle I

$\forall x\in I;f'(x)=0$ $\Leftrightarrow$ f est constante sur l'intervalle I

$\forall x\in I;f'(x)\leq 0\left(f'(x)\prec 0\right)$ $\Leftrightarrow$ f est décroissante (strictement décroissante) sur l'intervalle I

La dérivation et l'interprétation géométrique:

La limite	Déduction	Interprétation géométrique la courbe (C_f) admet :
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=a;(a\neq 0)$	f est dérivable en x_0	Une tangente au point $A(x_0;f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=0$		Une tangente horizontale au point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=a;(a\neq 0)$	f est dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente à droite du point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=0$		Une demi-tangente horizontale au point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f n'est pas dérivable à droite en x_0	Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0;f(x_0))$ dirigé vers le bas
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=+\infty$		Une demi-tangente verticale à droite au point $A(x_0;f(x_0))$ dirigé vers le haut
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=a;(a\neq 0)$	f est dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente à gauche du point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=0$		Une demi-tangente horizontale au point $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en x_0	Une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0;f(x_0))$ dirigé vers le haut
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=+\infty$		Une demi-tangente verticale à gauche au point $A(x_0;f(x_0))$ dirigé vers le bas

Axe de symétrie:

La droite d'équation cartésienne $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $(\forall x \in D_f);(2a-x) \in D_f$
- $(\forall x \in D_f);f(2a-x) = f(x)$

Cas particulier : si $a = 0$; f est une fonction paire

Centre de symétrie:

Le point $I(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $(\forall x \in D_f);(2a-x) \in D_f$
- $(\forall x \in D_f);f(2a-x)+f(x) = 2b$

Cas particulier : si $a = b = 0$; f est une fonction impaire

point d'inflexion:

Le point d'inflexion d'une courbe est le point en lequel change la concavité de cette courbe
Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse x_0
Si f' s'annule en x_0 sans changer de signe, alors (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse x_0

Les branches infinies

f une fonction et ξ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

La droite $D: x = a$ est une asymptote à la courbe ξ_f **(verticale)**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

La droite $D: y = a$ est une asymptote à la courbe ξ_f **(horizontale)**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: La courbe ξ_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{\imath})$ au voisinage de ∞

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$:
  - $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \infty$: La droite $D: y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe ξ_f au voisinage de ∞
  - $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b$: La droite $D: y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe ξ_f au voisinage de ∞

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$: La courbe ξ_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{\jmath})$ au voisinage de ∞

$$\left|\begin{array}{l}\Delta : y = ax + b \\ \text{est une asymptote à } \mathscr{C} \text{ au voisinage de } \infty\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0\right.$$

La fonction réciproque

Propriété:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $f(I)$ vers l'intervalle I

Résultats:

- $\begin{cases} f(x)=y \\ x\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in f(I) \end{cases}$
- $(\forall x\in I);\left(f^{-1}\circ \mathrm{f}\right)(x)=f^{-1}(\mathrm{f(x)})=x$
- $(\forall y\in f(I));\left(\mathrm{f}\circ f^{-1}\right)(\mathrm{y})=\mathrm{f}\left(f^{-1}(\mathrm{x})\right)=y$

Détermination de la formule de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Soit x un élément de l'intervalle $f(I)$ et y un élément de l'intervalle I
En utilisant l'équivalence suivante : $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=f(y)$ et en cherchant y en fonction de x on trouve ainsi la formule de $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$

Continuité de la fonction réciproque:

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors la fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, de même sens de monotonie que f

Dérivabilité de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Soit x_0 un élément de l'intervalle $f(I)$ et $y_0=f(x_0)$
Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)\neq 0$
Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et on a : $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(\mathrm{y_0}))}$

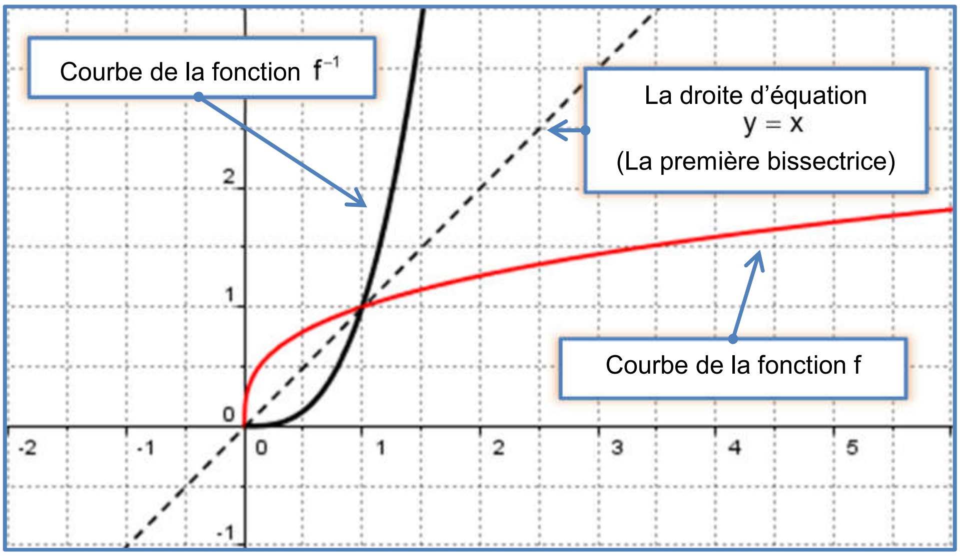
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Si f est dérivable sur l'intervalle I et sa fonction dérivée f' ne s'annule pas sur cet intervalle I
Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$
Et on a : $(\forall x\in f(I));\left(f^{-1}\right)'(\mathrm{x})=\dfrac{1}{f'\left(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})\right)}$

Monotonie de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
La fonction réciproque f^{-1} est aussi strictement monotone et de même monotonie que la fonction f

La représentation graphique de la fonction réciproque:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Les représentations graphiques des fonctions f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétrique par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation : $y = x$) du repère.



Remarques importantes:

La courbe (C_f)	La courbe $(C_{f^{-1}})$
$A(a;b) \in (C_f)$	$A'(b;a) \in (C_{f^{-1}})$
Admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$	Admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$
Admet une asymptote horizontale d'équation : $y = b$	Admet une asymptote verticale d'équation : $x = b$
Admet une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$	Admet une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$ (qu'on détermine à partir de la relation $x = ay + b$)
Admet une tangente (ou une demi-tangente) verticale	Admet une tangente (ou une demi-tangente) horizontale
Admet une tangente (ou une demi-tangente) horizontale	Admet une tangente (ou une demi-tangente) verticale

La fonction racine d'ordre n { la racine $n^{ième}$ }(n ϵIN*)

Les puissances radicales

Propriété et définition:

La fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ admet une fonction réciproque nommée la fonction racine d'ordre n ou racine $n^{ième}$ et qui est notée : $\sqrt[n]{\ }$

$$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 ; \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

Cas particuliers:

- $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$ (racine carrée)
- Le nombre $\sqrt[3]{x}$ s'appelle la racine cube de x

Propriétés:

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} \succ \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \succ y$

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 ; \forall (m;n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$

- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} ; y \neq 0$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$

Remarque importante (le conjugué):

$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$	$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \dfrac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}$

Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition D_f est :
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$D_f = [0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \geq 0\}$

Les limites:

$\lim_{x \to x_0} u(x)$	$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)}$
$l \geq 0$	$\sqrt[n]{l}$
$+\infty$	$+\infty$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
Si u est une fonction positive et continue sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ Et on a : $\forall x \in]0;+\infty[; \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I Et on a : $\forall x \in I ; \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{[u(x)]^{n-1}}}$

Résolution de l'équation $x^n = a$ avec $(x \in \mathbb{R})$ et $(a \in \mathbb{R})$:

	n est pair	n est impair
$a \succ 0$	$S = \left\{-\sqrt[n]{a};\sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a \prec 0$	$S = \varnothing$	$S = \left\{-\sqrt[n]{-a}\right\}$

Les puissances radiculaires d'un réel strictement positif:

Soit $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel non nul tel que : $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in]0;+\infty[; x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$

Remarques:

- $\forall x \in]0;+\infty[; \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
- Si f est une fonction numérique à variable réelle x définie comme suit : $(r \in \mathbb{Q}^*) ; f(x) = [u(x)]^r$

  Alors son domaine de définition est : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \succ 0\}$
- $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left((u(x))^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times u'(x) \times [u(x)]^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tout x et y de $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout r et r' de $\mathbb{Q}^*$	
$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$	$\left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'} = \left(x^{r'}\right)^r$
$(x \times y)^r = x^r \times y^r$	$\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$
$\frac{1}{x^r} = x^{-r}$	$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$

La suite arithmétique – la suite géométrique:

	D'une suite arithmétique	D'une suite géométrique
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$ (r est la raison)	$u_{n+1} = q \times u_n$ (q est la raison)
Le terme général	$u_n = u_p + (n-p)r$ ($p \leq n$)	$u_n = u_p \times q^{n-p}$ ($p \leq n$)
La somme de termes successifs	$u_p + ... + u_n = (n-p+1) \times \left(\frac{u_p + u_n}{2}\right)$	$u_p + ... + u_n = u_p \times \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}\right)$
a et b et c trois termes successifs	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

La suite majorée – la suite minorée:

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique

- $(\forall n \in I); u_n \leq M \Leftrightarrow (u_n)_{n\in I}$ est majorée par M
- $(\forall n \in I); u_n \geq m \Leftrightarrow (u_n)_{n\in I}$ est minorée par m
- $(u_n)_{n\in I}$ est bornée $\Leftrightarrow (u_n)_{n\in I}$ majorée et minorée

La monotonie d'une suite numérique:

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique

- $(\forall n \in I); u_{n+1} \leq u_n \, (u_{n+1} \prec u_n) \Leftrightarrow (u_n)_{n\in I}$ est décroissante (strictement décroissante)
- $(\forall n \in I); u_{n+1} \geq u_n \, (u_{n+1} \succ u_n) \Leftrightarrow (u_n)_{n\in I}$ est croissante (strictement croissante)
- $(\forall n \in I); u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n\in I}$ est constante

Remarque:

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique dont le premier terme est : u_p

- Si $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante, alors : $(\forall n \in I); u_n \leq u_p$
- Si $(u_n)_{n\in I}$ est croissante, alors : $(\forall n \in I); u_n \geq u_p$

Limite d'une suite:

Limite de la suite (n^{α}) avec $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

$\alpha \succ 0$	$\alpha \prec 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = 0$

Limite de la suite géométrique (q^n) avec $q \in \mathbb{R}$:

$q \succ 1$	$q = 1$	$-1 \prec q \prec 1$	$q \leq -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$	Pas de limite

Critères de convergence:

- Toute suite croissante et majorée est une suite convergente
- Toute suite décroissante et minorée est une suite convergente

$$\left.\begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{x\to+\infty} v_n = l \\ \lim\limits_{x\to+\infty} w_n = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} u_n = l$$

$$\left.\begin{array}{l} |u_n - l| \leq v_n \\ \lim\limits_{x\to+\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} u_n = l$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{x\to+\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} u_n = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{x\to+\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$$

Suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$:

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_n = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Avec f une fonction continue sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ et a un élément de I

Si (u_n) converge, alors sa limite l est la solution de l'équation : $f(x) = x$

Les fonctions primitives d'une fonction continue sur un intervalle:

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I
On dit que F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I
Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- F est dérivable sur l'intervalle I
- $(\forall x \in I);F'(x)=f(x)$

Propriétés:

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I
Si F est une fonction primitive de f sur l'intervalle I, alors toutes les fonctions primitives de f sont définies sur l'intervalle I comme suit :
$x \mapsto F(x)+k \;;\; (k \in \mathbb{R})$

Soit f une fonction numérique qui admet une fonction primitive sur un intervalle I
Et soit x_0 un élément de I et y_0 un réel quelconque de $\mathbb{R}$
Il existe une unique fonction primitive F de f sur l'intervalle I qui vérifie la condition initiale:
$F(x_0)=y_0$

Les primitives de $f+g$ et kf : $(k \in \mathbb{R})$

Propriété:

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I et k un réel
Si F et G sont deux primitives de f et g successivement sur l'intervalle I alors :

- $F+G$ est une fonction primitive de $f+g$ sur l'intervalle I
- kF est une fonction primitive de kf sur l'intervalle I

Tableau des primitives de quelques fonctions usuelles:

$f(x)$	$F(x)$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
x^r ; $(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + k$
e^x	$e^x + k$

Utilisation des formules de dérivée pour la détermination de quelques primitives:

$f(x)$	$F(x)$
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + \mathrm{k}$
$au'(x)$; $(\mathrm{a} \in \mathbb{R})$	$au(x)$
$u'(x) \times \mathrm{v(x)} + u(x) \times v'(x)$	$u(x) \times v(x) + \mathrm{k}$
$\frac{-v'(x)}{[\mathrm{v}(x)]^2}$	$\frac{1}{\mathrm{v}(x)} + \mathrm{k}$
$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[\mathrm{v}(x)]^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + \mathrm{k}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + \mathrm{k}$
$u'(x) \times [u(x)]^r$; $(r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + \mathrm{k}$
$\frac{u'(x)}{u(x)} + \mathrm{k}$	$\ln\|u(x)\| + \mathrm{k}$
$u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)} + \mathrm{k}$
$\cos(ax + b)$; $(\mathrm{a} \neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + \mathrm{k}$
$\sin(ax + b)$; $(\mathrm{a} \neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + \mathrm{k}$

Intégral d'une fonction continue sur un segment:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$
L'intégral de la fonction f entre a et b est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

propriétés:

$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

La linéarité:

$(k \in \mathbb{R})$; $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$	$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Relation de Chasles:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Intégral et comparaison:

Si : $\forall x \in [a;b]$ on a $f(x) \geq 0$ Alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$	Si : $\forall x \in [a;b]$ on a $f(x) \geq g(x)$ Alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

La valeur moyenne:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

La valeur moyenne de la fonction f sur le intervalle $[a;b]$ est le réel défini par : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Intégration par partie:

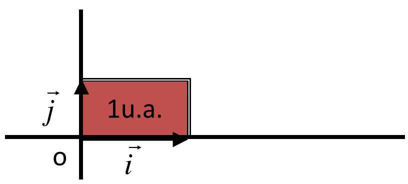
Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ à condition que f' et g' soient continues sur l'intervalle $[a;b]$

$$\int_a^b [f'(x)\times g(x)]dx = [f(x)\times g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x)\times g'(x)]dx$$

Calcul de l'aire algébrique d'un domaine plan:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$
L'unité de surface (u.a.): est la surface d'un rectangle défini par le point O (origine du repère) et les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$1u.a. = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$



Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

L'aire algébrique délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est représentée par :

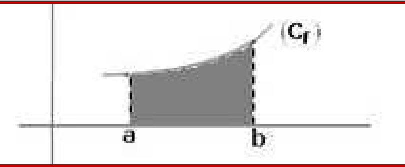
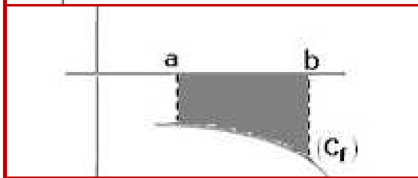
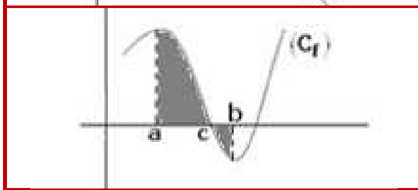
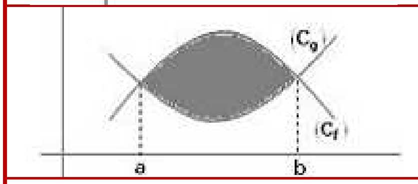
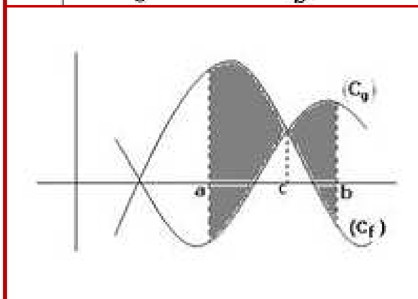
$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u.a.$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$

L'are algébrique comprise entre la courbe (C_f), la courbe (C_g), et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est représentée par :

$\left(\int_a^b |f(x)-\mathrm{g(x)}|dx\right)u.a.$

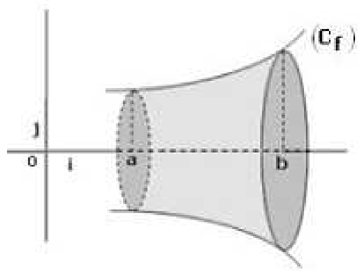
Cas particulier:

La représentation	Remarques	Aire algébrique du domaine plan gris dans la représentation
	f positive sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.a.$
	f négative sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b (-f(x))dx\right)u.a.$
	• f positive sur $[a;c]$ • f négative sur $[c;b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b (-f(x))dx\right)u.a.$
	(C_f) se situe au-dessus de (C_g) sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x)-\mathrm{g(x)}dx\right)u.a.$
	• (C_f) se situe au-dessus de (C_g) sur $[a;c]$ • (C_f) se situe au-dessous de (C_g) sur $[c;b]$	$\left(\int_a^c (f(x)-\mathrm{g(x)})dx+\int_c^b (\mathrm{g}(x)-f(\mathrm{x}))dx\right)u.a.$

Calcul d'un volume:

Le volume du solide engendré par un tour complet, de la courbe (C_f), autour de l'axe des abscisses dans un intervalle $[a;b]$ est :

$$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right]u.a.$$



Les fonctions logarithmiques

La fonction logarithme népérien:

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$ (ou $\log_e$), est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1

Déductions et propriétés:

$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$	$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r \ln x$; $(r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ • $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ • $\ln x \succ \ln y \Leftrightarrow x \succ y$		
$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ • $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

Si n est pair, alors $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \ln x^n = n \ln |x|$

Le Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0;+\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ et $u(x) \succ 0\}$

Les limites:

Limites principales		Déductions
$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$		$\lim_{x\to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$		$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim_{x\to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$		$\lim_{x\to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$		$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit a droite ou a gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Si u est strictement positive et continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

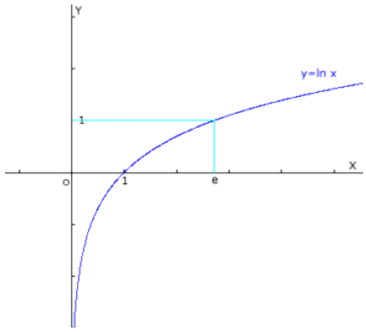
La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Si u est strictement positive et dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I \ ; \ (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

La représentation graphique:



signe de $\ln$ **:**

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$-$	0	$+$

La fonction logarithme de base a **avec** $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ **:**

Définition:

La fonction logarithme de base a est la fonction notée : $\log_a$

tel que : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier: la fonction $\log_{10}$ est la fonction logarithme décimal et on la note $\log$

Déductions et propriétés:

$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$	$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\log_a x^r = r \log_a x$ $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$ $\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$	

Limites et inéquations:

$a \succ 1$	$0 \prec a \prec 1$
$\log_a x \succ \log_a y \Leftrightarrow x \succ y$	$\log_a x \succ \log_a y \Leftrightarrow x \prec y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$

La dérivée:

$$\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Les fonctions exponentielles

La fonction exponentielle népérienne:

Définition :

La fonction exponentielle népérien, notée e^x (ou $\exp(x)$), est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto \ln x$, et qui est définie sur $\mathbb{R}$

Déductions et propriétés:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \succ 0$ $\ln e^x = x$	$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ $e^x \times e^y = e^{x+y}$ $\left(e^x\right)^r = e^{rx}$; $(r \in \mathbb{Q})$ $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad e^{\ln(x)} = x$	
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ • $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ • $e^x \succ e^y \Leftrightarrow x \succ y$	
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ • $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	

Si n est pair, alors $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right); \ln x^n = n \ln|x|$

Le Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u\}$

Les limites:

Limites principales

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$	$\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	

Déductions

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{e^{u(x)}}{[u(x)]^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [u(x)]^n e^{u(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit a droite ou a gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto e^{x}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$

Si u est continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

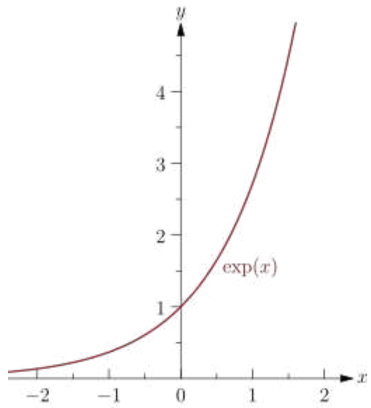
La fonction $x \mapsto e^{x}$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$; $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

Si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$\forall x \in I$; $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$

La représentation graphique:



La fonction exponentielle de base a avec $a \in \mathbb{R}_{+}^{*} - \{1\}$:

Définition:

La fonction exponentielle de base **a**, notée : a^{x} , est la réciproque de $\log_{a}$

Déductions et propriétés:

<table>
<tr><td>$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^{x} = e^{x \ln a}$
$\log_{a}(a^{x}) = x$</td><td rowspan="4">$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$
$a^{x} \times a^{y} = a^{x+y}$
$\left(a^{x}\right)^{r} = a^{rx}$
$\dfrac{1}{a^{x}} = a^{-x}$
$\dfrac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$</td></tr>
<tr><td>$\forall x \in]0;+\infty[\quad a^{\log_{a} x} = x$</td></tr>
<tr><td>$a^{x} = a^{x} \Leftrightarrow x = y$</td></tr>
<tr><td>$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in]0;+\infty[$
$a^{x} = y \Leftrightarrow x = \log_{a} y$</td></tr>
</table>

Limites et inéquations:

<table>
<tr><th>$a \succ 1$</th><th>$0 \prec a \prec 1$</th></tr>
<tr><td>$a^{x} \succ a^{y} \Leftrightarrow x \succ y$</td><td>$a^{x} \succ a^{y} \Leftrightarrow x \prec y$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \to +\infty} a^{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^{x} = 0$</td><td>$\lim\limits_{x \to +\infty} a^{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^{x} = +\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{x} - 1}{x} = \ln a$</td></tr>
</table>

La dérivée:

$\forall x \in]0;+\infty[$; $\left(\log_{a} x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Définition.

L'ensemble des nombres complexes s'écrit : $\mathbb{C}=\{z=a+ib \,/\, (a;b)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } i^2=-1\}$

L'écriture algébrique d'un nombre complexe:

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

- $a+ib$ est l'écriture algébrique du nombre complexe z
- Le nombre a est la partie réelle de z, notée : $\mathrm{Re}(z)$
- Le nombre b est la partie imaginaire de z, notée : $\mathrm{Im}(z)$

Cas particulier:

- Si $\mathrm{Im}(z)=0$, alors z est un nombre réel
- Si $\mathrm{Re}(z)=0$, alors z est un nombre imaginaire pur

Egalité de deux nombres complexes:

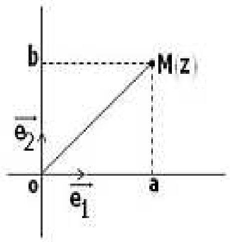
Soit z et z' deux nombres complexes

$$z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$$

Représentation graphique d'un nombre complexe:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$
On relie le nombre complexe z avec le point $M(a;b)$
Le nombre z s'appelle l'affixe du point M et le point M s'appelle l'image du nombre z et on écrit : $M(z)$



Conjugué d'un nombre complexe:

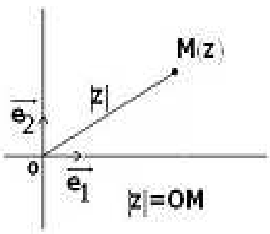
Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$
Le conjugué du nombre complexe z est le complexe noté $\overline{z}$ avec $\overline{z}=a-ib$

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n \quad (n\in\mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z'}}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad (z'\neq 0)$

- $\overline{z}=z \Leftrightarrow$
- $\overline{z}=-z \Leftrightarrow$
- $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=2\mathrm{Im}(z)$
- $z\times\overline{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$

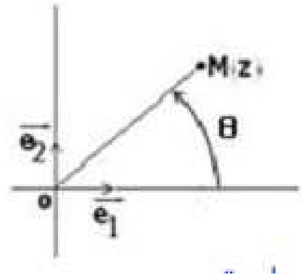
Module d'un nombre complexe:

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$
Le module du nombre complexe z est le nombre réel positif $|z|$ avec : $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$



$\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n \,;\, n\in\mathbb{N}^*$	$\lvert -z\rvert=\lvert z\rvert$	$\lvert z\times z'\rvert=\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$
$\lvert\overline{z}\rvert=\lvert z\rvert$	$\left\lvert\dfrac{1}{z'}\right\rvert=\dfrac{1}{\lvert z'\rvert}\ (z'\neq 0)$	$\left\lvert\dfrac{z}{z'}\right\rvert=\dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}\ (z'\neq 0)$

L'argument d'un nombre complexe non nul:



Soit z un nombre complexe non nul et M son image
L'argument du nombre complexe z est θ l'un des mesures de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{e_1};\overrightarrow{OM}}\right)$

On le note: $\arg(z)$ et on écrit: $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

La forme trigonométrique et la notation exponentielle d'un nombre complexe non nul:

Soit z un nombre complexe non nul
On pose : $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

- La forme trigonométrique du complexe z est : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r,\theta]$
- La notation exponentielle du complexe z est : $z = re^{i\theta}$

Cas particulier:
L'écriture trigonométrique (réduite) d'un nombre réel a non nul

$a \succ 0$	$a \prec 0$
$a = [a,0]$	$a = [-a,\pi]$
$ai = \left[a,+\frac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[-a,-\frac{\pi}{2}\right]$

$\arg(zz') = (\arg(z)+\arg(z'))[2\pi]$	$[r,\theta]\times[r',\theta'] = [r\times r',\theta+\theta']$	$re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'} = (r\times r')e^{i(\theta+\theta')}$
$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$	$\overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
$-\arg(z) = (\pi+\arg(z))[2\pi]$	$-[r,\theta] = [r,\pi+\theta]$	$-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
$\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$	$[r,\theta]^n = [r^n, n\times\theta]$	$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$	$\frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r},-\theta\right]$	$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = (\arg(z)-\arg(z'))[2\pi]$	$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

- $\forall k \in \mathbb{Z}$; $[r,\theta+2k\pi] = [r,\theta]$

- $arg(z) = k\pi \Leftrightarrow z$ est un réel ($k \in \mathbb{Z}$)
- $arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur ($k \in \mathbb{Z}$)

Formule de MOIVRE:

$\forall n \in \mathbb{N}$
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Formules d'EULER:

$\forall \theta \in \mathbb{R}$
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Résolution de l'équation $z^2 = a$ $(z\in\mathbb{C})$ avec $(a\in\mathbb{R})$:

L'équation		Ensembles de solutions
$z \in \mathbb{C}$; $z^2 = a$	$a \succ 0$	$S = \{-i\sqrt{a}; i\sqrt{a}\}$
	$a = 0$	$S = \{0\}$
	$a \prec 0$	$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

Résolution de l'équation $z \in \mathbb{C}$; $az^2+bz+c=0$ avec a et b et c des réels et $a \neq 0$:

L'équation		Ensembles de solutions
$z \in \mathbb{C}$; $az^2+bz+c=0$ $(\Delta=b^2-4ac)$	$\Delta \succ 0$	$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
	$\Delta=0$	$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
	$\Delta \prec 0$	$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

Notions géométriques:

La notion géométrique	La relation complexe
La distance AB	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$
I centre du segment $[AB]$	$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
Mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$	$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
A et B et C des points alignés	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} \in \mathbb{R}$
A et B et C et D des points cocycliques	$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C} \in \mathbb{R}$ ou $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_B-z_C}{z_D-z_C} \in \mathbb{R}$

La relation complexe	La notion géométrique
$\lvert z-z_A\rvert=r$; $(r \succ 0)$	$AM=r$ M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$	$AM=AB$ M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle rectangle au point A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1;\theta]$	ABC est un triangle isocèle au point A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{2}\right]$	ABC est un triangle rectangle et isocèle au point A
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$	ABC est un triangle équilatéral

La représentation complexe de quelques transformations usuelles:

La transformation	La représentation complexe
La translation : $t_{\vec{u}}$	$z'=z+b$, avec b est l'affixe du vecteur $\vec{u}$
L'homothétie : $h(\Omega;k)$	$z'-\omega=k(z-\omega)$, avec ω l'affixe du point Ω
La rotation : $R(\Omega;\theta)$	$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$, avec ω l'affixe du point Ω

Les équations différentielles

L'équation différentielle	La solution générale de L'équation différentielle
$y' = ay + b$	$y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$ $a \in \mathbb{R}^2$

L'équation différentielle	L'équation caractéristique	L'équation caractéristique admet :		La solution générale de L'équation différentielle
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$	$\Delta \succ 0$	Deux différentes solutions réelles r_1 et r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$	Une solution réelle r	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta \prec 0$	Deux solutions complexes conjuguées $r_1 = p - iq$ et $r_2 = p + iq$	$y(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)) e^{px}$ $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

Dans ce chapitre du cours, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Formule analytique du : produit scalaire-norme d'un vecteur-produit vectoriel:

Soit $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs de $\mathcal{V}^3$ (l'espace vectoriel)

$\vec{u}\vec{v} = aa' + bb' + cc'$ (Produit scalaire)

$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (norme d'un vecteur)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \\ \vec{k} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$$ (Produit vectoriel)

La distance:

La distance entre deux points A et B est égale à :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

La distance entre un point M et un plan (P) d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(M;(P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

La distance entre un point M et une droite $\Delta(A;\vec{u})$ est : $d(M;(\Delta)) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

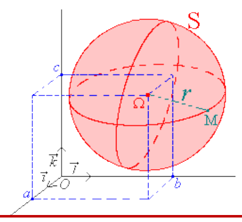
Equation d'un plan:

$(P): ax + by + cz + d = 0 \iff \vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal au plan (P)

Si A, B et C sont trois points non alignés, alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC), et dans ce cas on peut déduire l'équation cartésienne du plan (ABC) à l'aide de l'équivalence suivante : $M \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$

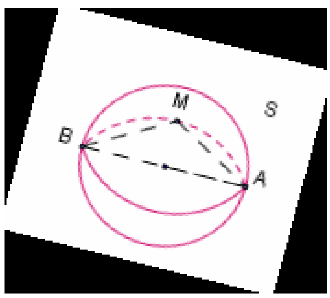
Equation d'une sphère:

L'équation d'une sphère (S) de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon r est : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$



L'équation d'une sphère (S) dont l'un de ces diamètres est $[AB]$ peut se déterminer à l'aide de l'équivalence suivante : $M \in (S) \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

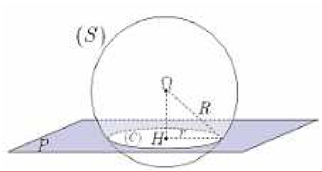
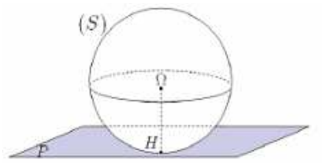
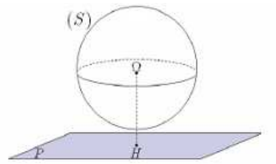
Remarque: dans ce cas la sphère (S) est de centre Ω milieu du segment $[AB]$ et de rayon $r = \dfrac{AB}{2}$



Intersection d'une sphère $S(\Omega;R)$ et un plan $(\mathrm{P}): \mathrm{ax}+\mathrm{by}+\mathrm{cz}+\mathrm{d}=0$:

Soit H la projection orthogonale du centre Ω sur le plan (P)

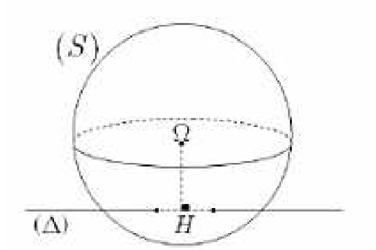
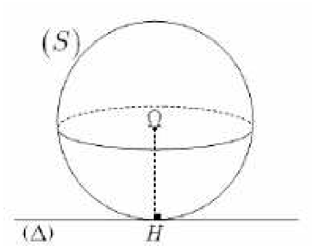
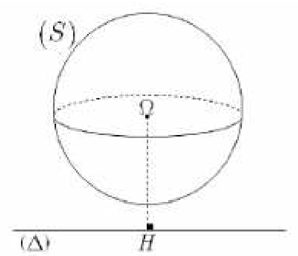
On pose : $d=\Omega H=d\left(\Omega;(\mathrm{P})\right)$

$d \prec R$	$d=R$	$d \succ R$
		
Le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$	Le plan (P) est tangent à la sphère (S)	Le plan (P) ne coupe pas la sphère (S)

Intersection d'une sphère $S(\Omega;R)$ et une droite (Δ) :

Soit H la projection orthogonale du centre Ω sur la droite (Δ)

On pose : $d=\Omega H=d\left(\Omega;(\Delta)\right)$

$d \prec R$	$d=R$	$d \succ R$
		
La droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points différents	La droite (Δ) est tangente à la sphère (S)	La droite (Δ) ne coupe pas la sphère (S)

Cardinal d'un ensemble:

Définition:

Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre des éléments de cet ensemble et on le note : $CardE$

Cas particulier: $Card\varnothing = 0$

Propriété:

A et B sont deux ensembles finis

$Card\left(A \bigcup B\right) = CardA + CardB - Card\left(A \bigcap B\right)$

Accompli d'un ensemble:

Définition :

Soit A une partie d'un ensemble fini E

L'accompli de A par rapport à l'ensemble E est l'ensemble noté $\overline{A}$ avec : $\overline{A} = \left\{x \in E \,/\, x \notin A\right\}$

Remarques:

- $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$
- $A \bigcup \overline{A} = E$
- $Card\,\overline{A} = CardE - CardA$

Le principe fondamental du dénombrement:

Si une opération globale peut se décomposer en p opérations élémentaires successives ($p \in \mathbb{N}^*$), ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de n_1 ; n_2 ;...; n_p manières différentes, alors l'opération globale peut se faire de: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_p$ manières différentes.

Arrangement avec répétition – sans répétition:

Arrangement avec répétition:

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$ ($p \leq n$)

Le nombre d'arrangement avec répétition, de p éléments parmi n , est : n^p

Arrangement sans répétition:

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$ ($p \leq n$)

Le nombre d'arrangement sans répétition, de p éléments parmi n , est :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1)}_{p-facteurs}$$

Cas particulier:

Tout arrangement sans répétition de n éléments parmi n éléments s'appelle une permutation de n éléments et il est égal à : $A_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$

Les combinaisons:

Soit E un ensemble fini contenant n éléments
Toute partie A de E contenant p éléments ($p \leq n$), s'appelle une combinaison de p éléments parmi n éléments, et le nombre de ses combinaisons est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Les nombres n! et A_n^p et C_n^p :

<table>
<tr><td colspan="1">$(n \in \mathbb{N}^*)$;</td><td colspan="3">$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$
$0! = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$</td><td colspan="2">$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$</td></tr>
<tr><td>$C_n^n = 1$</td><td>$C_n^1 = n$</td><td>$C_n^0 = 1$</td><td>$C_n^{n-1} = n$
$C_n^p = C_n^{n-p}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$C_n^p = C_n^{n-p}$</td><td colspan="2">$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$</td></tr>
</table>

Nombre de possibilité d'arrangement de n éléments:

Si on a, n_1 éléments de type A , et n_2 éléments de type B , et n_3 éléments de type C , parmi n éléments, avec $n = n_1 + n_2 + n_3$, alors le nombre de possibilité d'arranger ses éléments est : $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_{3!}}$

Quelques types de tirage:

On tire p éléments parmi n éléments ($p \leq n$) et on résume les résultats dans le tableau suivant :

Type de tirage	Nombre de tirages possibles	Importance de l'ordre de tirage
Simultané	C_n^p	Pas important
Successif et avec remise	n^p	important
Successif et sans remise	A_n^p	important

Terminologie:

Terme de probabilité	Son sens
Expérience aléatoire	Toute expérience qui admet plus d'un résultat
Univers des événements Ω	L'ensemble des événements possibles pour une expérience aléatoire
Evénement A	A est une partie de l'univers des événements Ω
Evénement élémentaire	Tout événement contenant un seul élément
Réalisation de l'événement $A \cap B$	Si A et B sont réalisés simultanément
Réalisation de l'événement $A \cup B$	Si A et B ou l'un des deux est réalisé
L'événement contraire de A	C'est l'événement $\overline{A}$ ($A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$)
A et B deux événements incompatibles	$A \cap B = \varnothing$

Stabilité d'un événement – probabilité d'un événement:

Définition:

Soit Ω l'univers des événements d'une expérience aléatoire

- Quand la probabilité d'un événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilise sur une valeur p_i, on dit que la probabilité de l'événement $\{\omega_i\}$ est : p_i et on écrit : $P(\{\omega_i\}) = p_i$
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités élémentaires qui le compose. C'est-à-dire, si $A = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; ...; \omega_n\}$ est un événement de l'univers Ω, alors la probabilité de l'événement A est : $P(A) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) + ... + P(\{\omega_n\})$

Propriétés:

Soit Ω l'univers des événements d'une expérience aléatoire

- $P(\varnothing) = 0$ et $P(\Omega) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$ pour tout événement A de Ω
- <u>Probabilité de l'union de deux événements:</u>
  Pour tous événements A et B de Ω
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - Si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, on dit que A et B sont incompatibles
- <u>Probabilité de l'événement contraire:</u>
  Pour tout événement A de Ω : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Hypothèse d'équiprobabilité:

Définition:

Si tous les événements élémentaires, dans une expérience aléatoire dont l'univers des événements est Ω, sont équiprobables, alors la probabilité de tout événement A de Ω est : $P(A) = \dfrac{Card A}{Card \Omega}$

Probabilité conditionnelle – indépendance de deux événements:

Définition:

Soit A et B deux événements liés à une même expérience aléatoire tel que : $P(A) \neq 0$

La probabilité d'un événement B sachant que l'événement A est réalisé est :

$$P_A(B) = P\left(B/_A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Pour tous événements A et B liés à une même expérience aléatoire tel que : $P(A)\times P(B)\neq 0$

On a : $P(A\cap B)=P(A)\times P\left(B/A\right)=P(B)\times P\left(A/B\right)$

Définition:

Pour tous événements A et B liés à une même expérience aléatoire
$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Leftrightarrow$ A et B sont deux événements indépendants

Propriété:

Soit Ω un univers d'événements d'une expérience aléatoire, et Ω_1 et Ω_2 deux sous-univers de Ω
($\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$ et $\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$)

Pour tout événement A de Ω : $P(A)=p(\Omega_1)\times p\left(A/\Omega_1\right)+p(\Omega_2)\times p\left(A/\Omega_2\right)$

Loi de probabilité d'une variable aléatoire:

Soit X une variable aléatoire sur Ω univers d'événements d'une expérience aléatoire
Pour déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X , on suit les deux étapes suivantes :

- Détermination de $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3;...;x_n\}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre X
- Calcul des probabilités $p(X=x_i)$ pour tout i de l'ensemble $\{1;2;3;...;n\}$

L'espérance mathématique – la variance – l'écart type d'une variable aléatoire:

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est représentée dans le tableau à côté :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Définitions:

L'espérance mathématique de X	$E(X)=x_1\times p_1+x_2\times p_2+x_3\times p_3+...+x_n\times p_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i$
La variance de X	$v(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\times p_i-\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i\right]^2$
L'écart type de X	$\sigma(X)=\sqrt{v(X)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\times p_i-\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i\right]^2}$

La loi binomiale:

Soit p la probabilité d'un événement A dans une expérience aléatoire
On répète cette épreuve n fois de suite
La variable aléatoire X qui lie chaque résultat au nombre de fois que cet événement se réalise s'appelle une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p

Et on a : $\forall k\in\{0;1;2;3;...;n\}$; $p(X=k)=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}$

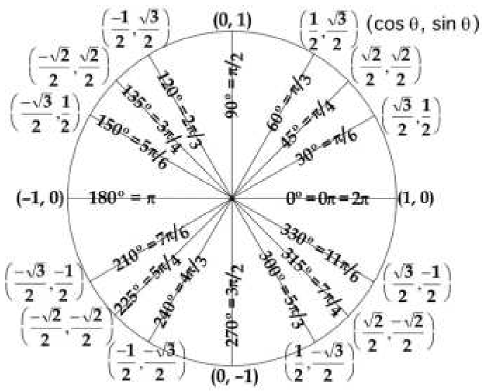
Et $E(X)=n\times p$

Et $v(X)=n\times p\times(1-p)$

Calcul trigonométrique (Rappel)

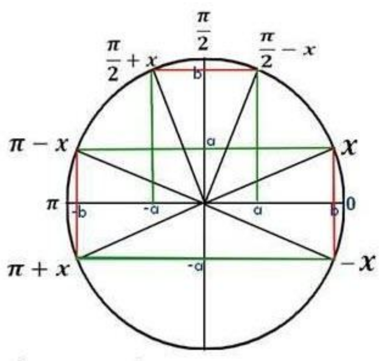
Tableau des valeurs habituelles et le cercle trigonométrique:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



Relations entre les Ratios trigonométriques:

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$



$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ $\tan(x + k\pi) = \tan x$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$-1 \le \cos x \le 1$ $-1 \le \sin x \le 1$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Equations trigonométriques essentielles:

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$

$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = (\pi - a) + 2k\pi$

$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$

Formules d'addition (soustraction):

$$\cos(a-b)=\cos a\times\cos b+\sin a\times\sin b$$
$$\sin(a-b)=\sin a\times\cos b-\cos a\times\sin b$$
$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$$

$$\cos(a+b)=\cos a\times\cos b-\sin a\times\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\times\cos b+\cos a\times\sin b$$
$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$$

Résultats:

En posant : $t=\tan\frac{a}{2}$

$$\sin a=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan a=\frac{2t}{1-t^2}$$

$$\sin 2a=2\sin a\times\cos a$$
$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a=\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$$

Linéarisation (Formules de CARNOT)

$$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$
$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$$
$$\tan^2 a=\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$

Formules produit-somme:

$$\cos a\times\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$
$$\sin a\times\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$
$$\sin a\times\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$
$$\cos a\times\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$

Formules somme-produit (formules de SIMPSON)**:**

$$\cos p+\cos q=2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$
$$\sin p+\sin q=2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$
$$\sin p-\sin q=2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$
$$\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\times\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\times\cos q}$$

Conversion de la formule $a\cos x+b\sin x$; $(a;b)\neq(0;0)$ **:**

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

Avec α un réel vérifiant : $\sin(\alpha)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos(\alpha)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$