Limites de suites et de fonctions

Limites de suites

Soit u une suite réelle.

- Soit ℓ un réel. La suite u a pour limite ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- La suite u a pour limite $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ avec A réel contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- La suite u a pour limite $-\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec A réel contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Quand la suite u a une limite réelle, on dit que la suite u converge. Dans le cas contraire, on dit que la suite u diverge.

Si u, v et w sont trois suites réelles telles que, pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites u et w convergent vers une limite réelle commune ℓ, alors la suite v converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

Théorème. Toute suite réelle croissante et majorée converge. Toute suite réelle décroissante et minorée converge.
Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$. Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Théorème. Soient u et v deux suites telles que, pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Suites adjacentes. Soient u et v deux suites réelles. u et v sont deux suites adjacentes si et seulement si l'une des deux croît, l'autre décroît et leur différence tend vers 0.

Théorème. Deux suites adjacentes convergent et ont mêmes limites.

Limites de fonctions

Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ et ℓ un réel.

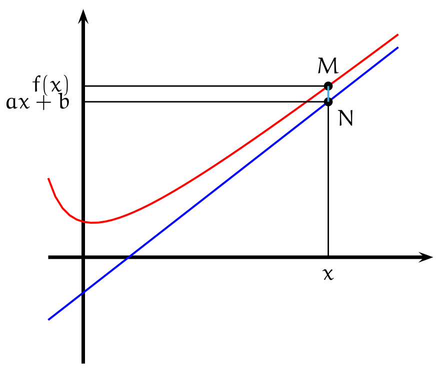
- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ avec A réel contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec A réel contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

On a des énoncés analogues et intuitifs pour toutes les autres situations.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une borne de I (a réel ou infini).
Si f, g et h sont trois fonctions définies sur I telles que, pour tout réel x de I, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si les fonctions f et h ont vers une limite réelle commune ℓ en a, alors la fonction g a une limite réelle en a et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une borne de I (a réel ou infini).
Soient f et g deux fonctions définies sur I telles que, pour tout réel x de I, $f(x) \leq g(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$. Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Droite asymptote à une courbe.



Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$.
Soient a et b deux réels et (D) la droite d'équation $y = ax + b$..

Soit M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x. Donc $M(x, f(x))$.

Soit N le point de (D) de même abscisse x. Donc $N(x, ax + b)$.

$$y_M - y_N = f(x) - (ax + b).$$

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Si pour tout réel x de I on peut écrire $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f.