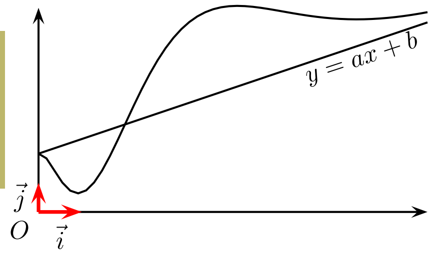
Il est possible de préciser la courbe représentative d'une fonction qui admet une limite **infini** en **l'infini**.

I Asymptote Oblique

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$ est asymptote oblique en $+\infty$ (*resp. en* $-\infty$) à $\mathcal{C}_f$ si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad (\textit{resp.} \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0)$$



Exemple 1 : $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 2x + 1 + \dfrac{1}{x} \end{array}$

- $\mathcal{C}_f$ admet-elle une droite comme asymptote en $+\infty$?
- Justifier.

Exemple 2 : $\begin{array}{rl} f : \mathcal{D}_f & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt{x^2 - 1} + 2x \end{array}$

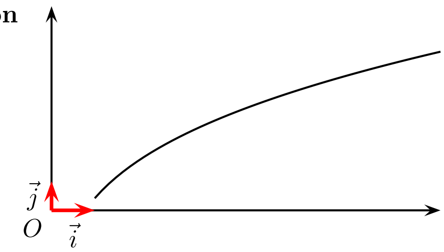
- Déterminer $\mathcal{D}_f$;
- Prouver que la droite $d : y = 3x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$;
- $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote oblique en $-\infty$? (*attendre ce qui suit pour répondre à cette question*)

II Branches paraboliques

II.1 Branche parabolique de direction (Ox)

On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique de direction asymptotique** (Ox) en $+\infty$ si :

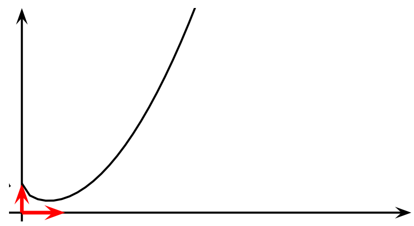
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$;



II.2 Branche parabolique de direction (Oy)

On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique de direction asymptotique** (Oy) en $+\infty$ si :

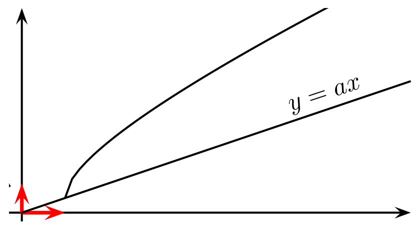
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$;



II.3 Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$

On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation** $y = ax$ en $+\infty$ si :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$;



III Synthèse sur les branches infinies

III.1 Résumé

f est définie sur un intervalle ouvert ou une réunion d'intervalles ouverts

Au voisinage d'un point c, borne réelle de l'intervalle I.

Si $\boxed{\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty}$

La droite d'équation $x = c$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Au voisinage d'une borne infinie de l'intervalle I, par exemple $+\infty$.

Si $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}}$

La droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

Si $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty}$

On poursuit les investigations ... en étudiant $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$\longrightarrow$ Si $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0}$, branche parabolique de directio asymptotique (Ox) ;

$\longrightarrow$ Si $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty}$, branche parabolique de directio asymptotique (Oy) ;

$\longrightarrow$ Si $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a}$, on poursuit notre recherche ...

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, branche parabolique de direc tion asymptotique la droite d'équation $y = ax$;
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, asymptote oblique d'équatio $y = ax + b$;

III.2 Des exemples

$\triangleright$ $\begin{aligned} f_0 : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2x^3}{(2x-1)^2} \end{aligned}$ $\triangleright$ $\begin{aligned} f_1 : [0;+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 - \sqrt{x} + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$ $\triangleright$ $\begin{aligned} f_2 : [1;+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{2} + \sqrt{2x-2} \end{aligned}$

III.3 Des situations « marginales »

Certaines situations aboutissent à l'absence de limite. Par exemple :

- $\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + \sin(2\pi x) \end{aligned}$
- $\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(\sin(2\pi x) + 2) \end{aligned}$