Nombre complexe

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : ÉQUIPE ACADEMIQUE MATHEMATIQUES

Nombres Complexes

Historiquement, les nombres complexes prennent naissance au XVIIème siècle lorsqu'un italien, Gerolamo Cardano(1501-1576), au nom francisé de Jérôme Cardan, introduisit la racine de $-i^2$ pour résoudre des équations du troisième degré. En 1572, un autre italien, Rafaele Bombelli (1526 ; 1573) publie "Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri" dans lequel il présente des nombres de la forme a + b et poursuit les travaux de Cardansur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré.

A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne lesconsidère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.La notation i apparaît en 1777 siècle avec Leonhard Euler (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires. Euler établie également une célèbre relation de l'algèbre qui lie quatre nombres fondamentaux e, i, π et 0 : $e^{i\pi} + 1 = 0$. C'est avec Carl Friedrich Gauss (1777 ; 1855) que les nombres complexes acquièrent le statut de nombre à part entière.

En 1837, William Hamilton (1805 ; 1865) propose de les définir comme couple de nombres réels tels qu'ils le sont aujourd'hui.

RESUME DU COURS

Aspect algébrique :

- $a+ib=a'+ib'$ **si et seulement si** $a=a'$ et $b=b'$.
- • z est réel **si et seulement si** $\mathrm{Im}(z)=0$.
  • z est imaginaire **si et seulement si** $\mathrm{Re}(z)=0$.
- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{(z)^n}=(\overline{z})^n$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2\,i}$;

$z\overline{z}=(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2$;

- $z=\overline{z}$ **si et seulement si** z est réel.
- $z=-\overline{z}$ **si et seulement si** z est imaginaire.

Module :

Soit $z=a+ib$ d'image M

- $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
- si $|z|=0$ alors $z=0$
- $|zz'|=|z||z'|$; $|\overline{z}|=|z|$; $|z|^2=z\overline{z}$; $|z^n|=|z|^n$; $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$; $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$
- $|z|=OM$; $MN=|z_N-z_M|$

Argument :

Soit $z \in \mathbb{C}$, l'argument de z est un réel θ tel que $\theta \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$

* $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right) \equiv \arg(z)[2\pi]$; $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;

$\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

* $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$; $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
* $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$; $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$
* Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z)[2\pi]$
* Si $k < 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

Affixe d'un vecteur :

$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Aspect trigonométrie :

* pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$, c'est la **forme trigonométrique** de z et $|z|\ e^{i\theta}$ est son **écriture exponentielle.**

* $z = a + ib = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

* **Si** M est l'image de z dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ alors $M \in \mathscr{C}(O, |z|)$ et à la droite **[OA)** tel que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$

Propriétés

- Pour tout réel θ ; $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = -i$; $e^{i0} = 1$; $e^{i\pi} = -1$.
- $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$; $\left|e^{i\theta}\right| = 1$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$; $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;

$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$

Formule de Moivre :

Pour tout réel $n \in IN$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Formule d'Euler :

$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ et $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

Angles orientés :

- $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.
- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{CD}{AB}(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \theta[2\pi]$.

Nombres complexes et géométrie

* $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ sont colinéaires, $\Leftrightarrow$ **det** $(\vec{w}, \vec{w_1}) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w_1}}}$ $(\vec{w_1} \neq \vec{0})$ est réel.

* $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ sont orthogonaux, $\Leftrightarrow$ $\vec{w_1} \bullet \vec{w_1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w_1}}}$ $(\vec{w_1} \neq \vec{0})$ est imaginaire pur.

* Soit ABCD un quadrilatère du plan.

  - ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow$

    $z_A + z_C = z_B + z_D$

  - ABCD est un rectangle $\Leftrightarrow$ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ et $AC = BD \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$ et

    $|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$

  - ABCD est un rectangle $\Leftrightarrow$ $z_B - z_A = z_C - z_D$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

  - ABCD est un losange $\Leftrightarrow$ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ et $AB = AD \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$ et

    $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

  - ABCD est un losange $\Leftrightarrow$ $z_B - z_A = z_C - z_D$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

  - ABCD est un carré $\Leftrightarrow$ ABCD est à la fois un rectangle et un losange.

    $\Leftrightarrow$ $z_B - z_A = z_C - z_D$ et $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = i$ **OU** $-i$.

Remarques importantes dans la pratique :

✱ $\cos\theta = \cos\theta' \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \theta' + 2k\pi \\ \theta = -\theta' + 2k\pi \end{cases}$; $(k \in \mathbb{Z})$; $\begin{cases} \cos(\theta+\theta') = \cos\theta \, \cos\theta' - \sin\theta \, \sin\theta' \\ \cos(\theta-\theta') = \cos\theta \, \cos\theta' + \sin\theta \, \sin\theta' \end{cases}$

✱ $\sin\theta = \sin\theta' \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \theta' + 2k\pi \\ \theta = \pi - \theta' + 2k\pi \end{cases}$; $(k \in \mathbb{Z})$; $\begin{cases} \sin(\theta+\theta') = \sin\theta \, \cos\theta' + \sin\theta \, \cos\theta' \\ \sin(\theta-\theta') = \sin\theta \, \cos\theta' - \sin\theta \, \cos\theta' \end{cases}$

✱ $tg\theta = tg\theta' \Leftrightarrow \theta = \theta' + k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$

✱ $\sin(2\theta) = 2 \sin\theta \cdot \cos\theta$

✱ $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$\Rightarrow 1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$ et $1 - \cos(2\theta) = 2\sin^2\theta$

✱ $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)} \right)$

✱ $e^{i\theta} + 1 = e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

✱ $e^{i\theta} - 1 = e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) = 2\,i\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

✱ $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \begin{cases} 0 \;[2\pi] , & \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires de } \textbf{même} \text{ sens.} \\ \pi \;[2\pi] , & \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires de sens contraires.} \end{cases}$

Ensemble des points M :

Etant donnés deux points distincts A et B et un réel θ.

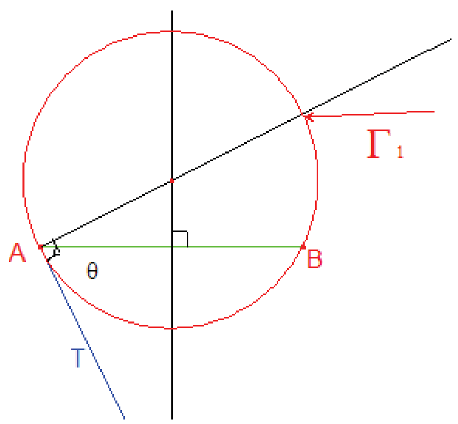
- L'ensemble des points M tels que $\boxed{MA = MB}$ est : la médiatrice de segment $[AB]$.
- L'ensemble des points M tels que $\boxed{MA = r \in IR_+^*}$ est : le cercle de centre A et de rayon r.
- L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires est : la droite (AB)
- L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux est : le cercle de diamètre $[AB]$.

- L'ensemble des points M tels que $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \theta[\pi]}$ est :

$$\begin{cases} \text{si } \theta \equiv 0[\pi], \boxed{\text{la droite (AB) privée des points A et B}} \\ \text{si } \theta \not\equiv 0[\pi], \text{le cercle } \Gamma \text{ passant par A et B et tangante en A à la droite AT} \\ \text{telle que } (\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) \equiv \theta[\pi], \text{ privé des points A et B.} \end{cases}$$

- L'ensemble des points M tels que $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \theta[2\pi]}$ est :

$$\begin{cases} \text{si } \theta \equiv 0[2\pi], \boxed{\text{la droite (AB) privée du segment } [AB]} \\ \text{si } \theta \equiv \pi[2\pi], \boxed{\text{le segment } [AB] \text{ privée des points A et B.}} \\ \text{si } \theta \not\equiv 0[2\pi] \text{ et si } \theta \not\equiv \pi[2\pi], \text{un arc de cercle } \Gamma_1 \text{ d'extrémités A et B privée des points A et B} \\ \text{situé dans le demi-plan de frontière (AB) et ne contenant pas la demi-droite } [At) \text{ définie par:} \\ (\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) \equiv \theta[2\pi] \text{ où } \Gamma_1 \text{ cercle passant par A et B et tangante en A à la droite AT} \\ \text{telle que } (\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$



Racine nième d'un nombre complexe :

✱ Soit $u = R e^{i\theta}$; $R > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle racines nième de z, les nombres complexes solutions de l'équation **$z^n = u$**.

L'ensemble de solution de **$z^n = u$** est $S = \left\{ \sqrt[n]{R}\ e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} \ /\ k \in \{0,1,\dots(n-1)\} \right\}$.

✱ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points d'affixes les solutions de l'équation **$z^n = u$** sont les sommets d'un polygone régulier à n cotes et inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{R}$.

✱ Tout nombre complexe non nul admet n racines nième.

✱ Les racines de l'équation **$z^n = 1$** sont appelées **racines nième de l'unité.**

✱ L'équation **$z^2 = u$** admet, dans $\mathbb{C}$ deux solutions opposées :

$z_1 = \sqrt{|u|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ et $z_2 = -\sqrt{|u|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ Ces solutions sont appelés racines carrées du nombre complexe u

✱ Les racines carrées de $u = a + bi$ (**ou les solutions de l'équation $z^2 = u$**) sont de la forme

$z = x + iy$ tel que : $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

Equation du second degré :

✱ L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c sont trois complexes tel que $a \neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions : $z' = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z'' = \frac{-b-\delta}{2a}$ avec δ est une racine carrée du nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$

✱ Soit L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c sont trois complexes tel que $a \neq 0$)

Si z' et z'' sont les solutions de cette équation **alors** :

$az^2 + bz + c = a(z-z')(z-z'')$; $z' + z'' = -\frac{b}{a}$ et $z' . z'' = \frac{c}{a}$

✱ Soit L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c sont trois nombres réels tel que $a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet dans IR deux solutions distinctes :

$z' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet dans IR une solution double : $z' = z'' = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, l'équation admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions conjuguées :

$z' = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z'' = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

✱ Soit L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c sont trois complexes tel que $a \neq 0$)

- Si $a + b + c = 0$, l'équation admet deux solutions : $z' = 1$ et $z'' = \frac{b}{a}$

- Si $a - b + c = 0$, l'équation admet deux solutions : $z' = -1$ et $z'' = -\frac{b}{a}$

Equation de degré supérieure à deux :

✱ Soit (E) une équation du $3^{ième}$ degré ayant une racine z_0 alors (E) s'écrit sous la forme :

$(z - z_0)(az^2 + bz + c) = 0$ où a, b et c sont trois nombres réels tel que $a \neq 0$.

✱ Une équation de degré n supérieur à 3 nécessite un changement de variable ou la donnée de **n–2 racines apparentes.**

Nombres complexes et transformations du plan :

Translation

Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan d'affixe $b \in \mathbb{C}$. $t_{\vec{v}} : P \to P, M(z) \mapsto M'(z')$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow z' - z = b \Leftrightarrow z' = z + b.$$

Propriété :

($F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \to z' = z + b$) est la transformation complexe associée à la translation de vecteur $\vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur d'affixe b.

Homothétie

Soit $h_{(\Omega, k)}$ une homothétie de centre Ω et de rapport k

$h_{(\Omega, k)} : M(z) \mapsto M'(z') \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega) \Leftrightarrow z' = kz + (1 - k)\, z_\Omega$

Propriété :

Pour tout réel $k \in IR^*\backslash\{1\}$ et pour tout complexe b, l'application :

$f : P \to P, M(z) \mapsto M'(z') / z' = kz + b$ est l'homothétie de rapport k et de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-k}\right)$

Rotation

Soit $R_{(\Omega, \theta)}$ la rotation de centre Ω et d'angle θ.

$R_{(\Omega, \theta)} : M(z) \mapsto M'(z') \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z - z_\Omega| = |z' - z_\Omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|z' - z_\Omega|}{|z - z_\Omega|} = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega) \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})z_\Omega$$

Propriété :

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$ et $a \neq 1$

L'application $f : P \to P, M(z) \mapsto M'(z') / z' = az + b$ est la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\theta \equiv \arg(a)\ [2\pi]$.

CASIO fx-570 ES ou fx-570 ES PLUS

▸ Le mode CMPLX : 

CMPLX comme « **complexes** » est le mode dans lequel il faut mettre la calculatrice pour réaliser des calcul contenant des nombres complexes. Il s'obtient en pressant successivement la touche  et la touche 

▸ Forme algébrique : 

Exemple : $(1+2i)^2=-3+4i$

Appuyez sur ces touches : 

▸ Forme Trigonométrique : 

Spécifier l'unité d'angle par défaut <u>en radians</u> : 

Exemple : $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$

Appuyez sur ces touches :