Fiche de cours *4ème Maths*

Nombres complexes

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Propriétés : Soit M un point d'affixe $z = a + ib,\quad a,b \in R$

$a = \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$	$b = \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$	$\lvert z\rvert = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$
$z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$	$\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$	$\bar{z} \times z = \lvert z\rvert^2 \;,\; \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{\lvert z\rvert^2} \;,\; z \in C$
$z \in R \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z$	$z \in iR \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$	$AB = \lvert z_B - z_A\rvert$
$\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A$	$I = A * B \Leftrightarrow \quad z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$	$\mathrm{Aff}\left(a\vec{u} + b\vec{v}\right) = a\mathrm{Aff}\left(\vec{u}\right) + b\mathrm{Aff}\left(\vec{v}\right)$
$\arg(z) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}[2\pi]\right) \;, z \in C^*$	$a \in R_+ :\quad z^2 = a \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{a} \quad$ ou $\quad z = -\sqrt{a}$ $a \in R_- :\quad z^2 = a \Leftrightarrow \quad z = i\sqrt{\lvert a\rvert} \quad$ ou $\quad z = -i\sqrt{\lvert a\rvert}$	$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Propriétés : Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier n on a :

$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$	$\overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z'}$	$\overline{z^n} = \left(\bar{z}\right)^n$
$\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}, (z \neq 0)$	$\overline{\left(\dfrac{1}{z^n}\right)} = \dfrac{1}{\left(\bar{z}\right)^n}, (z \neq 0)$	$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}, (z' \neq 0)$

$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$
$\left\lvert\dfrac{1}{z}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z\rvert}, (z \neq 0)$	$\left\lvert\dfrac{1}{z^n}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z\rvert^n}, (z \neq 0)$	$\lvert z + z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$

Forme cartésien – Forme trigonométriques

$a = r\cos\theta ,\quad b = r\sin\theta$

Forme cartésien $z = a + ib$	$\longleftarrow$ $\longrightarrow$	Forme trigonométriques $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), r > 0$

$r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2} ,\quad \cos\theta = \dfrac{a}{r},\quad \sin\theta = \dfrac{b}{r}$

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls d'écriture trigonométriques :

$z = [r,\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = [r',\theta'] = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$\bar{z} = [r,-\theta]$	$-z = [r,\pi+\theta]$	$kz = [kr,\theta], k > 0$	$kz = [-kr,\pi+\theta], k < 0$
$zz' = [rr',\theta+\theta']$	$\dfrac{1}{z} = \left[\dfrac{1}{r},-\theta\right]$	$\dfrac{z}{z'} = \left[\dfrac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$	$z^n = [r^n,n\theta], n \in Z$

Forme exponentielle

Pour tout réel θ , on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.

$e^{i0} = 1$	$e^{i\pi} = -1$	$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

$\lvert e^{i\theta}\rvert = 1$	$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$	$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$	$-e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$

$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$	$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$	$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta+\theta')}$	$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, n \in Z$

Formule de Moivre

Pour tout réel φ et tout entier n , on a : $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

Formule d'Euler

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Racines nièmes

Soit a un nombre complexe non nul et $n \in N^*$ tel que $a = [r, \theta]$.

L'équation $z^n = a$ admet dans C, n solutions distinctes définis par $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$,
$k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

Conséquences :

Les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Théorème

Soit a un nombre complexe non nul d'argument φ. L'équation z² = a admet dans C deux solutions opposées :

$$z_1 = \sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

Ces solutions sont appelées racines carrées du nombre complexe a .

Théorème

L'équation az² + bz + c = 0 (a , b et complexes et a non nul) admet deux solutions dans C :

$$z_1 = \frac{-b+\sigma}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\sigma}{2a}$$ où $\Delta = b^2 - 4ac$ et σ est une racine carrée de Δ

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$	$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$	$z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

A retenir : Soit $z^2 = a + ib$, $a, b \in R$, avec $z = x + iy$ alors on a $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$

Théorème

Soit $a_0, a_1, ..., a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0$, $n \geq 2$.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.

Si z_0 est un zéro de P, alors $P(z) = (z - z_0) g(z)$, où g(z) est se la forme $a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + ... + b_0$, avec $b_0, b_1, ..., b_{n-2}$ complexes.

Maths aux lycées

Séries d'exercices — 4ème Maths

Nombres complexes

EXERCICE N°1

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. On pose : $z_1 = \dfrac{a+ib}{a-ib}$ et $z_2 = \dfrac{a-ib}{a+ib}$

Montrer que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

EXERCICE N°2

Soit a , b et c trois nombres complexes de modules sont égaux à 1 et tel que: $a + b + c =$

1.Calculer $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

EXERCICE N°3

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Soit $Z = \dfrac{z+1}{z-i}$ avec $z = x + iy$ où $x , y \in R$

1°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que $|Z| = 1$

2°)En déduire l'ensemble des points M , images de z , tels que $\left|\dfrac{z+1}{z-i}\right| = 1$

3°)Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y .

4°)Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit un réel.

5°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit imaginaire pur.

6°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que $\arg(Z) \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi]$.

EXERCICE N°4

1°)Résoudre dans C l'équation : (E): $z^3 = 1$.(On note par j la racine de partie imaginaire positive.)

2°) Ecrire les racines de (E) sous formes trigonométriques.

3°)Calculer j^2 et $1 + j + j^2$.

4°)Montrer que : $(a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+cj+bj^2) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

(avec a, b et c des nombres complexes)

5°)On considère les points A , B , C d'affixes respectifs a , b et c .

Montrer que les relations : $\begin{cases} a+bj+cj^2 = 0 \\ b+cj+aj^2 = 0 \\ c+aj+bj^2 = 0 \end{cases}$ sont équivalentes et sont conditions nécessaires et suffisantes pour que le triangle ABC soit équilatérale .

EXERCICE N°5

Soit dans le plan complexe, les points A(3) , B(-3) et M(z) tels que : $(*)$: $\dfrac{MB}{MA} = 2$

1°)Montrer que $(*) \Leftrightarrow (z-5)(\bar{z}-5) = 16$.

2°)En déduire l'ensemble des points M.

EXERCICE N°6

Soit z un nombre complexe. Soit $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ où a , b et c des nombres complexes.

z_1 , z_2 et z_3 sont les racines de l'équation $P(z) = 0$

1°)Montrer que $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ et $c = -z_1z_2z_3$

2°)Application 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}^3$: $\begin{cases} xyz = 1 \\ xy + yz + zx = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

3°)Applications 2 :
Déterminer les nombres complexes de modules inférieurs à 1 et vérifiant les égalités :
$xyz = x + y + z = 1$.

EXERCICE N°7
Soit : $z = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$
1°)Soit $z' = (1+i)z$. Ecrire z' sous la forme cartésienne puis sous la forme trigonométrique
2°)En déduire z sous leurs formes trigonométriques.
3°)En déduire alors la valeurs de $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$

EXERCICE N°8
Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$.
1°)Ecrire z sous forme trigonométrique puis exponentielle .
$z_1 = \sin\theta + i\cos\theta$, $z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$, $z_3 = \dfrac{\sin\theta + i\cos\theta}{1 + \cos\theta + i\sin\theta}$
2°) Déterminer l'ensemble des points $M_i(z_i)_{i\in\{1,2,3\}}$ lorsque θ décrit $[0, \pi[$.

EXERCICE N°9
On donne dans le plan complexe trois points M , N et P d'affixes respectives
z , z² et z³. Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels le triangle MNP est rectangle en M.
EXERCICE N°10
On donne le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1°) Exprimer z² sous forme algébrique
2°) Exprimer z² sous forme exponentielle.
3°) En déduire z sous forme exponentielle.
EXERCICE N°12

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que : $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$ et

$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

EXERCICE N°13
Soit a et b deux nombres réels, on considère les nombres complexes z et z' de module 1 et d'arguments respectifs a et b.

1°)Montrer, en utilisant la forme exponentielle de z et z', que $\dfrac{(z+z')^2}{zz'}$ est un réel positif ou nul.

2°)En déduire que $2\arg(z+z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$.
3°)On appelle M et M' les images de z et z' dans le plan muni d'un repère orthonormé direct de centre O et N le point tel que OMNM' soit un parallélogramme. Interpréter géométriquement l'égalité précédente à l'aide de ces points.
EXERCICE N°14
Résoudre dans C :
1°) $z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$; 2°) $(z-1)^6 = (z-1)^3 + 1$;

3°) $(1-i)z^2-(5+i)z+6+4i=0$;3°) $z^5=\frac{8(1+i)}{\sqrt{3}-i}$; 4°) $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4=\frac{1+ia}{1-ia}$ où $a\in\mathbb{R}$.

EXERCICE N°15

On considère l'équation (E) : $z^3+(2-2i)z^2+(5-4i)z-10i=0$.

1°)Montrer que (E) admet un solution imaginaire pure.

2°)Résoudre alors (E) dans C.

EXERCICE N°16

Résoudre dans C l'équation : $z^3+(2-3i)z^2-(7+i)z+17i-2=0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.

EXERCICE N°17

On considère l'équation (E) : $z^4-2z^3-z^2-2z+1=0$.

1°)Vérifier que (E) est équivalente au système : $\begin{cases} Z=z+\frac{1}{z} \\ Z^2-2Z-3=0 \end{cases}$

2°)En déduire la résolution de (E)dans C.

EXERCICE N°18

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère la suite de points M_n du plan d'affixes respectives non nulles z_n définies par :

$z_0=8$ et pour tout entier naturel n : $z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n$.

1°) calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.

2°) Calculer z_1, z_2, z_3 et vérifier que z_3 est réel.

Placer dans le plan P les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

3°) Montrer que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et comparer les longueurs OM_{n+1} et M_nM_{n+1}.

EXERCICE N°19

Soit $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et (E_φ) l'équation : $z^2-(3\cos\varphi+1+i\cos\varphi)z+2\cos\varphi(\cos\varphi+1+i\cos\varphi)=0$

1°)Montrer que l'équation (E_φ) admet une solution réelle z_1 que l'on calculera et en déduire l'autre solution z_2 .

2°)Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs z_1 et z_2 .

(a) Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque φ décrit l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

(b) Montrer que $2M_1M_2^{\,2}=1+(2\cos\varphi-1)^2$.

(c) Pour quelle valeur de φ la distance entre M_1 et M_2 est maximale.

(a) Déterminer le réel φ tel que OAB soit isocèle .

EXERCICE N°20

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le quadrilatère ABCD tel que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\alpha\ [2\pi]$, $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})=\beta\ [2\pi]$, $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$.

On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que : $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP})=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$,

$(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DQ})=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BN})=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D, m, n, p et q les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1°) Démontrer les relations suivantes : $m = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - b) + b$, $n = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b) + b$, $p = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - d) + d$,

$q = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - d) + d$.

2)° En utilisant les relations précédentes :

a) Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.

b) Démontrer que l'on a : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{QP}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, AC = QP et $(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, et NP = BD.

3°) Démontrer que MNPQ est un carré si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD vérifient AC = BD et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{6} + k\pi$ où k est un entier relatif.

EXERCICE N°21

z et z' sont deux nombres complexes donnés non nuls.

Montrer que $|z + z'| = |z| + |z'|$ si, et seulement si, arg z = arg z' + 2 k π avec k dans ℤ.

EXERCICE N°22

Soit un triangle ABC, on note O le centre de son cercle circonscrit.
Dans un repère orthonormal de centre O, on note a, b et c les affixes des points A, B et C.
Soit H le point d'affixe h = a + b + c.

1°) Démontrer que |a| = |b| = |c|.

2°) a) Soit $w = \bar{b}c - b\bar{c}$. Calculer $w + \bar{w}$. En déduire que w est un imaginaire pur.

b) Démontrer, à l'aide du a), que les nombres $(b + c)(\bar{b} - \bar{c})$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont des imaginaires purs.

3°) a) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.
b) En utilisant les résultats précédents, démontrer que (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC.
c) Expliquer, sans calculs supplémentaires, pourquoi H est l'orthocentre du triangle ABC.

EXERCICE N°23

Soit f l'application qui, à tout nombre complexe z différent de i associe z' tel que :

$$z' = f(z) = i + \frac{2}{\bar{z} + i}$$

On note T l'application du plan complexe privé du point A d'affixe i, dans le plan complexe, définie par :
M' = T(M), M et M' étant les points d'affixes respectives z et z'.
1°) a) Calculer f(1) et f(2 + i).
b) Résoudre l'équation f(z) = 0.
2°) a) Calculer : $\arg[(z' - i)(\bar{z} + i)]$
b) Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?
3°) a) Exprimer l'affixe z" de M" = (ToT)(M) en fonction de l'affixe z de M.
b) Que peut-on dire de ToT ?
4°) On appelle (J) l'ensemble des points du plan invariants par T.
a) Démontrer que M appartient à (J) si et seulement si $AM = \sqrt{2}$
b) Caractériser géométriquement (J).
5°) Dans cette question, on suppose que $z = 1 + i + e^{i\theta}$, où θ est un nombre réel ; on notera B le point d'affixe 1 + i.

a) Quelle est la courbe (Γ) décrite par le point M, d'affixe z, lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$?

b) Montrer que : $z' - i = 1 + i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ avec $z' = f(z)$.

c) A quelle courbe (L) appartient le point M' d'affixe z' ?

d) En déduire $T(\Gamma)$, image de (Γ) par T. Construire (Γ) et $T(\Gamma)$ dans un repère orthonormal.

EXERCICE N°24

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les applications : $f : \mathbb{C}-\{-i\} \to \mathbb{C}-\{-i\}$; $z \mapsto f(z) = \frac{z-1}{i(z+i)}$

et $F : \wp-\{B\} \to \wp-\{B\}$; $M(z) \mapsto F(M) = M'(z' = f(z))$ où B est le point d'affixe (-i).

1°)Montrer que f est involutive (c-a-d $f \circ f = Id_{\mathbb{C}-\{-i\}}$) et en déduire que f est bijective.

2°)(a) Vérifier que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$.

(b)En déduire que $\forall M \in P\setminus\{B\}$, $\begin{cases} BM \times BM' = \sqrt{2} \\ (\vec{u},\overrightarrow{BM}) + (\vec{u},\overrightarrow{BM'}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

3°)Déterminer les images par F de la droite (D) : y=x −1 et du cercle (C) de centre B et de rayon 1 .

EXERCICE N°25

Pour tout nombre complexe z on pose : $f(z) = z^3 + 2(i-\sqrt{3})z^2 + 4(1-i\sqrt{3})z + 8i$

1°)Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2°)Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$.

On notera z_1 et z_2 les deux autres racines, tel que $Im(z_1) < 0$.

3°)On pose $\omega = \frac{z_1}{z_0}$. Donner la dorme trigonométrique de ω.

4°)Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A tout nombre complexe z non nul on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixe respectives z, ωz et $\omega^2 z$.

Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

EXERCICE N°26

Le plan complexe $\wp$ étant rapporté à un repère orthonormé direct, on considère l'application :

$s : \wp \to \wp$, $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = (2+i)\bar{z} + 1 - 3i$.

1°)Vérifier que A(0,-1) est l'unique point invariant par s.

2°)Montrer que s est bijective et expliciter son application réciproque notée s^{-1}.

3°)Prouver que pour tout $M \in \wp-\{A\}$, d'image M' par s on a : $AM' = \sqrt{5}AM$.

4°)Montrer que pour tous points deux à deux distincts $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ d'images respectives $M_1'(z_1')$, $M_2'(z_2')$ et $M_3'(z_3')$ par s on a : $\left(\overrightarrow{M_1'M_2'},\overrightarrow{M_1'M_3'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_2}\right)[2\pi]$.

5°)Déterminer l'ensemble des points $M(z)$du plan tels que : $Arg(z') \equiv 0[2\pi]$.

6°) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$du plan tels que : $(z')^3 = 1$.(utiliser 2)

EXERCICE N°27

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$. Montrer que $\dfrac{\beta}{1+\beta^2}+\dfrac{\beta^2}{1+\beta^4}+\dfrac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$

EXERCICE N°28

On considère un cercle de centre O et trois points A, B et C de ce cercle. On désigne par A′, B′ et C′ les images respectives des points A, B et C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

Soient U, V , W les milieux respectifs des segments [A′B], [B′C] et [C′A]. Démontrer que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral.

EXERCICE N°29

1°)(a)Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$

(b)En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation : $z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0$ où n est un entier naturel non nul.

2°)Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1$

(a))Justifier la factorisation suivante de P_α :

$$P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)+1\right)\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right)+1\right)\ldots\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}\right)+1\right)$$

(b) Calculer $P_\alpha(1)$. En déduire que $\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2n}\right)\sin^2\left(\dfrac{\alpha+2\pi}{2n}\right)\ldots\sin^2\left(\dfrac{\alpha+2(n-1)\pi}{2n}\right) = \dfrac{\sin^2(\alpha/2)}{4^{n-1}}$

3°)Pour tout α appartenant à $]0,\pi[$, et pour tout entier naturel $n \geq 2$ on pose :

$$H_n(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{2n}\right)\ldots\sin\left(\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{2n}\right)$$

(a) Montrer que, pour tout α non nul on a : $2^{n-1}H_n(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2n)}$

(b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0?

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on a:

$$H_n(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$