noté $\boxed{i}$ tel que $\boxed{i^2 = -1}$

- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique : $\boxed{z = a + ib}$ avec a et b sont des réels.

L'écriture $\boxed{z = a + ib}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est appelé **forme algébrique** ou **forme cartésienne** du nombre complexe z.

- a est la partie réel de z noté $\boxed{Re(z)}$
- b est la partie imaginarie de z noté $\boxed{Im(z)}$

Remarques :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne :

- Si $b = 0$ alors z est dit réel.
- Si $a = 0$ alors z est dit imaginaire.

Définitions :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $M(a, b)$ un point du plan

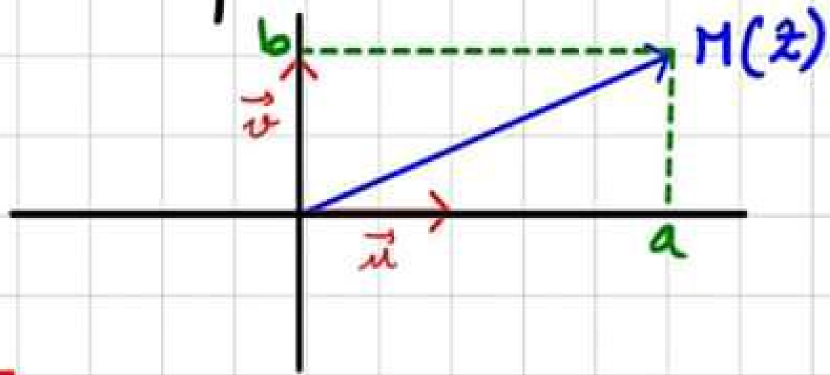
On appelle $\boxed{\text{affixe}}$ de M, le nombre complexe noté $\boxed{\text{aff}(M)}$ ou $\boxed{z_M}$ tel que

$$\boxed{z_M = a + ib}$$

Le nombre complexe $a + ib$ est dit

aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, on le note $\boxed{aff(\overrightarrow{OM})}$ ou $\boxed{z_{\overrightarrow{OM}}}$.

- $M(a, b)$ est le point image du nombre complexe $z = a + ib$



Propriétés :

A et B sont deux points du plan d'affixe respectifs z_A et z_B. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs et α, β deux réels.

- $\boxed{aff(\overrightarrow{AB}) = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$
- $\boxed{aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\, aff(\vec{u}) + \beta\, aff(\vec{v})}$

Définition : Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$ le nombre complexe défini par

$$\bar{z} = a - ib$$

Propriétés :

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

⚠ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

⚠ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

⚠ $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

⚠ $\left(\overline{z^n}\right) = \left(\bar{z}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

⚠ $z + \bar{z} = 2a$

⚠ $z - \bar{z} = 2ib$

⚠ $z\bar{z} = a^2 + b^2$

Théorème :

Soit z un nombre complexe

- z est réel ($z \in \mathbb{R}$) ssi $z = \overline{z}$
- z est imaginaire ($z \in i\mathbb{R}$) ssi $z = -\overline{z}$

Définition : Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe

On appelle module de z et on note $|z|$, le réel positif défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes

$$\boxed{|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|}$$

$$\boxed{|z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)}$$

$$\boxed{|\bar{z}| = |z|}$$

$$\boxed{\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)}$$

$$\boxed{|-z| = |z|}$$

$$\boxed{|z + z'| \leq |z| + |z'|}$$

Définition :

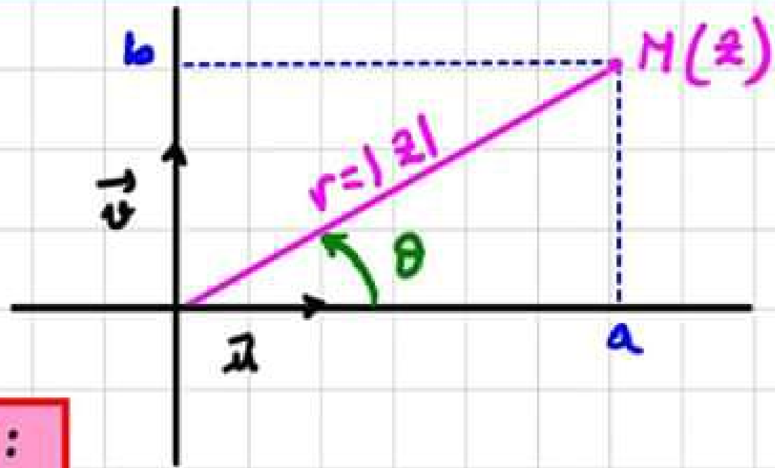
Le plan est muni d'un R.O.N $(O, \vec{u}, \vec{v})$

$z = a + ib$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$ est un nombre complexe non nul d'image M

On appelle **argument de z** et on note **$\arg(z)$**, toute mesure, en radian, de

l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$.

$$\arg(z) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) + 2k\pi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



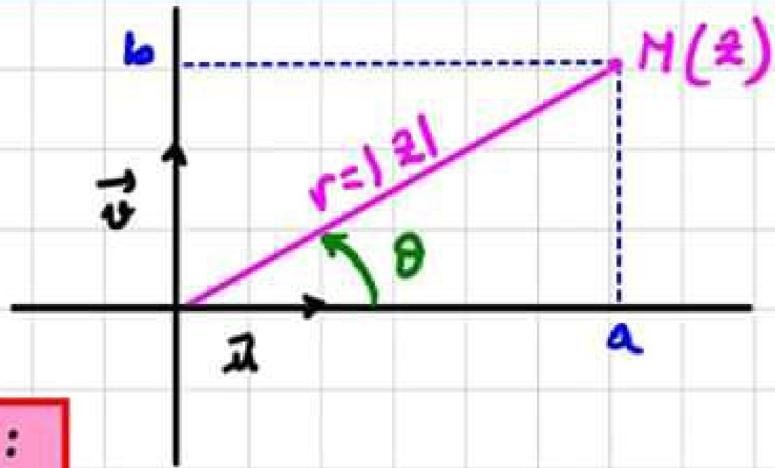
Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\frac{z}{\dots}\right) \dots \arg(z') + 2k\pi$

l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$.

$$\arg(z) = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) + 2k\pi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$

Théorème :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe nonnul et θ un argument de z, alors

$$a = |z| \cos\theta \quad \text{et} \quad b = |z| \sin\theta$$

ou encore

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

On a alors

$$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$$

Définition : Forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe non nul.

L'écriture de z sous la forme

$$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta) \text{ ou } [|z|, \theta]$$

où θ dési... argument de

est appelé écriture trigonométrique ou forme trigonométrique de z.

$|z|$ et θ sont les coordonnées polaire du point $M(z)$.

Propriétés :

Soient $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ deux nombres complexes non nuls, $r \in \mathbb{R}^*_+$; $r' \in \mathbb{R}^*_+$

$\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$\boxed{\overline{z} = [r, -\theta]}$$

$$\boxed{z . \overline{z} = [r r', \theta + \theta']}$$

$$\boxed{z^n = [r^n, n\theta]}$$

$$\boxed{\frac{1}{z'} = \left[\frac{1}{r'}, -\theta'\right]}$$

$$\boxed{\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]}$$

Définition : Forme exponentielle de z

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

Soit $z = [r, \theta]$ un nombre complexe non nul, l'écriture $\boxed{z = re^{i\theta}}$ est la forme exponentielle de z.

Propriétés :

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls.

$$\overline{z} = re^{-i\theta}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$z.z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Formule d'Euler :

Pour tout réel θ on a :

$$\boxed{\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta}\qquad\boxed{\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\sin\theta}$$

Formule de Moivre:

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{Z}$ on a :

$$\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}$$

Propriétés :

Soient $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives $z_{\vec{e_1}}$ et $z_{\vec{e_2}}$

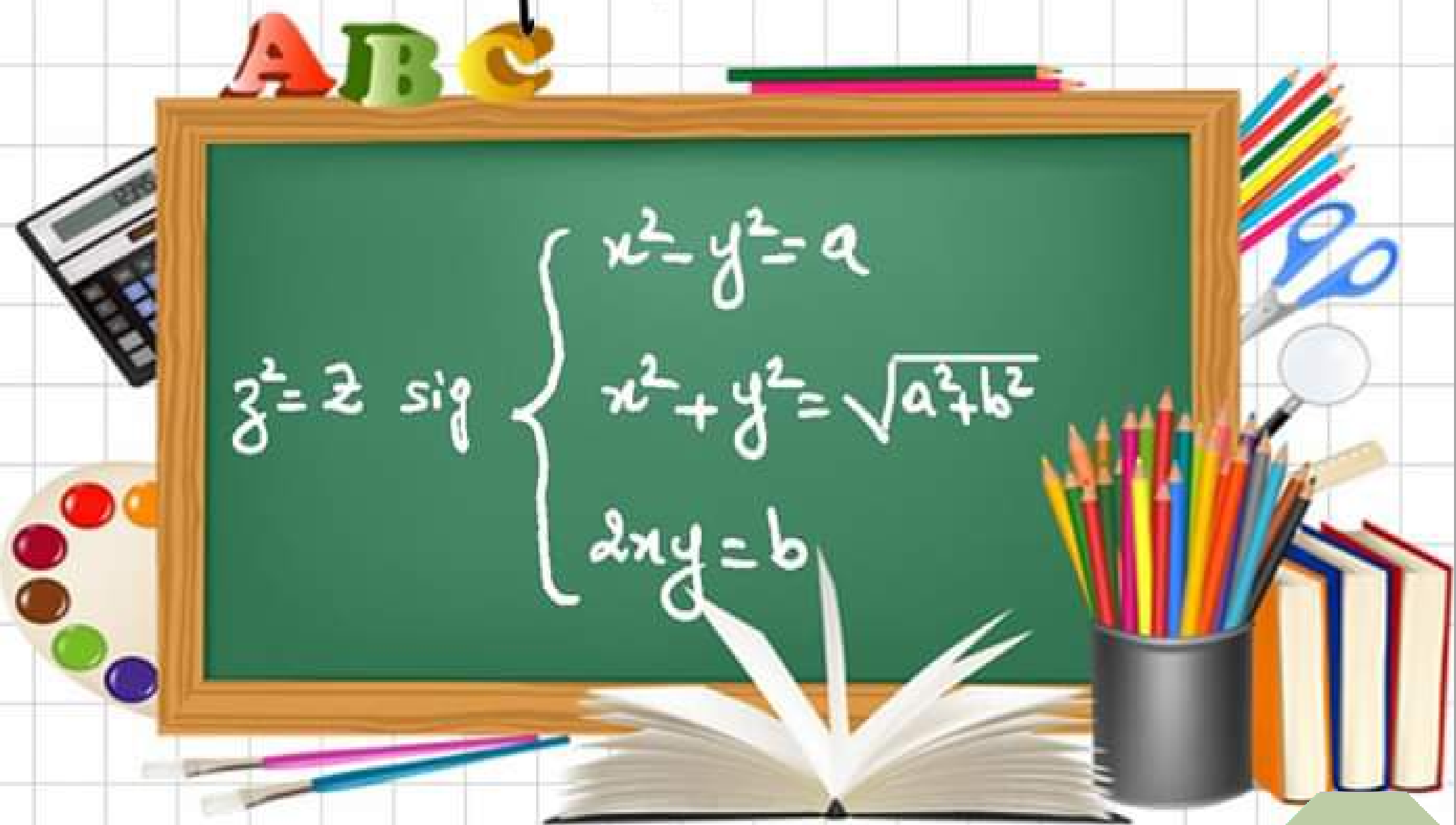
- $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\arg\left(\dfrac{z_{\vec{e_2}}}{z_{\vec{e_1}}}\right)+2k\pi\quad ; k\in\mathbb{Z}$
- $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont colinéaires ssi $\dfrac{z_{\vec{e_1}}}{z_{\vec{e_2}}}\in\mathbb{R}$
- $\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$ ssi $\dfrac{z_{\vec{e_1}}}{z_{\vec{e_2}}}\in i\mathbb{R}$.

Définition : racine carrée d'un nombre complexe

Soit Z un nombre complexe. On appelle **racine carrée de Z** tout nombre complexe $\boxed{z}$ vérifiant $\boxed{z^2 = Z}$

Théorème :

Soit $Z = a + ib$ et $z = x + iy$ deux nombres complexes non nuls



$$z^2 = Z \text{ ssi } \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Remarques :

- Tout nombre complexe non nul admet deux racine carrées opposées.
- Il est interdit d'utiliser la notation $\sqrt{\ }$ pour exprimer une racine carrée d'un nombre complexe.

Théorème :

Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. Les racines carrées de z sont :

$$\boxed{z_1 = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_2 = -\sqrt{r}\, e^{i\theta/2}}$$

Définition : Equation du second degré à coefficients complexes.

Soient a, b et c trois nombres complexes donnés tel que $a \neq 0$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ s'appelle équation du second degré à coefficients complexes.

Théorème :

Soit $(E) : az^2 + bz + c = 0$

On pose $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ le descriminent de l'équation (E).

* $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ une solution double $\boxed{z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}}$

* $\boxed{\text{Si } \Delta \neq 0}$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distincts :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}}$$

avec $\boxed{\delta \text{ une racine carrée de } \Delta}$

* Si z_1 et z_2 sont des solutions de (E), alors $\boxed{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)}$

Théorème :

Soit $(E) : az^2 + bz + c = 0$

Si z_1 et z_2 sont les solutions de (E)

alors $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Définition : Racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On appelle **racine $n^{ième}$ de z**, tout nombre complexe $\mathfrak{z}$ vérifiant $\boxed{\mathfrak{z}^n = z}$

Si $z = 1$, alors on dit que $\mathfrak{z}$ est une **racine $n^{ième}$ de l'unité.**

Théorème :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$

- Les n racine $n^{ième}$ de z sont les nombres complexes : $\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}}$

  avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

- Les images M_k des nombres complexes z_k sont les sommets d'un polygône régulier à n cotés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$