Similitudes planes

Similitudes planes

Soit f une transformation du plan.

- f est une similitude (plane) si et seulement si f conserve les rapports de distance.
  f est une similitude plane si et seulement si il existe un réel strictement positif k tel que f multiplie les distances par k.
  k est uniquement défini et s'appelle le rapport de la similitude f.
- Une similitude de rapport k est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k.
- Toute similitude plane conserve les angles géométriques. Une similitude plane qui conserve les angles orientés est dite
- directe. Une similitude plane qui change les angles orientés en leur opposé est dite indirecte.
- Les similitudes planes directes sont les transformations du plan d'expression complexe

$$z' = az + b,\ a \text{ et } b \text{ complexes, } a \neq 0.$$

Les similitudes planes indirectes sont les transformations du plan d'expression complexe

$$z' = a\bar{z} + b,\ a \text{ et } b \text{ complexes, } a \neq 0.$$

Dans les deux cas, précédent le rapport de la similitude est $|a|$.

- La composée d'une rotation r et d'une homothétie h de rapport $k > 0$ n'ayant pas nécessairement mêmes centres est une similitude directe de rapport k. Quand r et h n'ont pas mêmes centres, on a en général $r \circ h \neq h \circ r$.
- Toute similitude plane directe f qui ni une translation, ni une homothétie s'écrit de manière unique $f = h \circ r$ où h est une homothétie et r est une rotation ayant mêmes centres. Dans ce cas, on a $h \circ r = r \circ h$.
- Toute similitude plane directe f qui n'est pas une translation admet un point fixe et un seul, son centre.

Etude de l'expression complexe d'une similitude plane directe

a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.
f est la transformation du plan d'expression complexe $z' = az + b$.

- Si $a \neq 1$, f est la similitude plane directe
  - de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ (ω est la solution de l'équation $z = az + b$)
  - de rapport $k = |a|$
  - d'angle $\theta = \arg(a)\ (2\pi)$.

Cas particuliers.

- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si a est réel et $a \neq 1$, f est l'homothétie
  - de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ (ω est la solution de l'équation $z = az + b$)
  - de rapport a.
- Si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, f est la rotation
  - de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ (ω est la solution de l'équation $z = az + b$)
  - d'angle $\theta = \arg(a)\ (2\pi)$.

Composition de similitudes

La composée d'une similitude de rapport k et d'une similitude de rapport k' est une similitude de rapport kk'. Toute similitude de rapport $k > 0$ est une bijection du plan sur lui-même et sa réciproque est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.

Détermination d'une similitude

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Il existe une similitude directe et une seule telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Son rapport est $\frac{A'B'}{AB}$ et son angle est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

Images de figures par une similitude

Une similitude de rapport $k > 0$ conserve le barycentre, transforme une droite en une droite, un segment en un segment, un triangle en un triangle semblable, transforme un cercle de rayon R en un cercle de rayon kR, multiplie les aires par k^2.