Maths aux lycées

Fiche de cours 4ème Maths

Similitudes du plan

On va travailler dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{e_1}\,,\,\overrightarrow{e_2}\right)$.

HOMOTHETIE

Définition

Soit Ω un point du plan et k un réel non nul. L'homothétie de centre Ω et de rapport k, notée $h_{\Omega;k}$ est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

Cas particuliers et premières propriétés

•Si $k=1$, $h_{\Omega;k} = id$. Si $k \neq 1$, Ω est le seul point fixe de $h_{\Omega;k}$.

•Si $k=-1$, $h_{\Omega;k} = s_\Omega$. Les symétries centrales sont aussi les homothéties de rapport -1.

•$h_{\Omega;k}$ est une bijection ; la bijection réciproque est $h_{\Omega;1/k}$.

•Si A et B sont deux points, et A' et B' leurs images par $h_{\Omega;k}$, on a $\overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B'} = k\overrightarrow{\Omega B}$, d'où par différence : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ et donc $A'B' = |k|AB$.

•Une homothétie de rapport k multiplie donc les distances par $|k|$ et les aires par k^2.

•Les seules homothéties qui sont des isométries sont l'identité ($k=1$) et les symétries centrales ($k=-1$).

• Les homothéties transforment respectivement un segment, une demi-droite, une droite, un cercle en un segment, une demi-droite, une droite, un cercle.

•Plus précisément, en conservant les notations précédentes :

- l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ et $A'B' = |k|AB$.
- l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$ qui est parallèle à (AB).
- l'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' et de rayon $|k|r$.

•Les homothéties conservent le parallélisme, la perpendicularité, les milieux, les barycentres et les angles orientés (que leur rapport soit positif ou négatif).

Écriture complexe des homothéties

L'homothétie $h_{\Omega;k}$ de centre Ω et de rapport k est la transformation qui, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = k(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

La transformation d'écriture complexe $z' = az + b$, où a est un réel non nul et b un complexe est :

- l'identité si $a=1$ et $b=0$;
- une translation si $a=1$ et $b \neq 0$;
- une homothétie de rapport a si $a \neq 1$.

Composée d'une homothétie et d'une translation

Soit f une homothétie de rapport k $(\neq 1)$ d'écriture complexe $z' = kz + b_1$ et g une translation d'écriture complexe $z' = z + b_2$.

La transformation gof associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe $z'' = (kz + b_1) + b_2 = kz + (b_1 + b_2)$.

gof est donc une homothétie de rapport k.

Composée d'une translation et d'une homothétie

Soit f une translation d'écriture complexe $z' = z + b_1$ et g une homothétie de rapport k $(\neq 1)$ d'écriture complexe $z' = kz + b_2$

La transformation gof associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe $z'' = k(z + b_1) + b_2 = kz + (kb_1 + b_2)$.

gof est donc une homothétie de rapport k.

Composée de deux homothéties

Soient f et g deux homothéties d'écritures complexes respectives $z' = k_1 z + b_1$ et $z' = k_2 z + b_2$, la transformation gof associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe

$z'' = k_2(k_1 z + b_1) + b_2 = k_1 k_2 z + (k_2 b_1 + b_2)$.

C'est une transformation dont l'expression complexe est de la forme $z'' = Kz + B$ où K est un réel.

Si $K = k_1 k_2 = 1$, gof est une translation.

Sinon gof est une homothétie de rapport $K = k_1 k_2$.

Remarque :en général**,** $gof \neq fog$. Si gof et donc également fog sont des homothéties, on peut montrer que les centres de f, g, gof et fog sont alignés.

SIMILITUDES DIRECTES

•On dit qu'une similitude est direct si elle est la composée d'une homothétie et d'une déplacement.

• Soit A , B , C et D des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$:

Il existe un unique similitudes directes f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$.

Forme réduite

Soit Ω un point du plan, α un angle orienté et k un réel strictement positif. La similitude directe de centre Ω, d'angle α et de rapport k, est la composée $r_{\Omega;\alpha} o h_{\Omega;k}$.

Cas particuliers et propriétés

•On a $r_{\Omega;\alpha} o h_{\Omega;k} = h_{\Omega;k} o r_{\Omega;\alpha}$.

Avec $k = 1$, on retrouve les rotations comme similitudes directes particulières.

On considère également les translations comme étant des similitudes directes particulières. Bien entendu les translations n'ont ni centre, ni angle, ni rapport mais sont définies par leur vecteur.

Ainsi tous les déplacements sont considérés comme des similitudes directes.

Avec $\alpha = 0$, on retrouve les homothéties de rapport positif comme similitudes directes particulières.

Avec $\alpha = \pi$, on retrouve les homothéties de rapport négatif.

Ainsi tous les homothéties sont considérés comme des similitudes directes.

Remarque : une homothétie de centre Ω et de rapport k $(k < 0)$ est considérée comme une similitude directe de centre Ω, d'angle π et de rapport $-k = |k|$. Il faut donc être prudent lorsque l'on parle du rapport d'une telle homothétie.

Les propriétés des similitudes directes découlent des propriétés des rotations et des homothéties.

•Une similitude directe de rapport k multiplie les distances par k et les aires par k^2.

•Les similitudes directes transforment respectivement un segment, une demi-droite, une droite, un cercle en un segment, une demi-droite, une droite, un cercle.

Plus précisément, avec les notations habituelles :

- l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ et $A'B' = kAB$.
- l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- l'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' et de rayon kr .

•Les similitudes directes conservent le parallélisme, la perpendicularité, les milieux, les barycentres et les angles orientés.

Écriture complexe des similitudes directes

La similitude directe de centre Ω, d'angle α et de rapport k est la transformation qui, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = ke^{i\alpha}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

La transformation d'écriture complexe $z' = az + b$, où a est un complexe non nul et b un complexe est :
- l'identité si $a = 1$ et Ω ;
- une translation si $a = 1$ et $b \neq 0$;
- une similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$ si $a \neq 1$.

SIMILITUDES INDIRECTES

•On dit qu'une similitude est indirect si elle est la composée d'une homothétie et d'une antidéplacement

•Soit A , B , C et D des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$:
Il existe un unique similitude indirecte S tel que $S(A) = C$ et $S(B) = D$

Forme réduite

Soit Ω un point du plan, D une droite et k un réel strictement positif. La similitude indirecte de centre Ω, d'axe D et de rapport k, est la composée $S_D o h_{\Omega;k}$.

Cas particuliers et propriétés

•On a $S_D o h_{\Omega;k} = h_{\Omega;k} o S_D$.

Pour $k = 1$, on retrouve les symétries axiales comme similitudes indirectes particulières.

•$D = \{M \in \wp / \ \overrightarrow{\Omega S(M)} = k\overrightarrow{\Omega M}\}$

•$S \circ S = h_{\Omega,k^2}$

•Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D, alors $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega S(M)}) \equiv -(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M})[2\pi]$ ($k \neq 1$)

•Une similitude indirecte de rapport k multiplie les distances par k et les aires par k^2.

•Les similitudes indirectes transforment respectivement un segment, une demi-droite, une droite, un cercle en un segment, une demi-droite, une droite, un cercle.
Plus précisément, avec les notations habituelles :
- l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ et $A'B' = kAB$.
- l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- l'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' et de rayon kr.

•Les similitudes indirectes conservent le parallélisme, la perpendicularité, les milieux, les barycentres

•Les similitudes indirectes change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Écriture complexe des similitudes indirectes

La similitude indirecte de centre Ω, d'axe D et de rapport k est la transformation qui, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = ke^{i2\theta}(\bar{z} - \overline{z_\Omega}) + z_\Omega$ où θ désigne une mesure de l'angle $(\vec{e_1} ; \vec{v})$.

La transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, où a est un complexe non nul et b un complexe est :
- l'identité si $a = 1$ et $b = 0$;
- Symétrie axiale ou symétrie glissante si $|a| = 1$
- Similitude indirecte de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \dfrac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$ si $|a| \neq 1$

Maths aux lycées

Séries d'exercices *4ème Maths*

Similitudes du plan

EXERCICE N°1

Dans le plan orienté, ABI est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit Ω le symétrique de B par rapport à (AI).

1°)Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en I.

a) Montrer que Ω est le centre de cette rotation.
b) Soit C =R(B). Montrer que I=A*C.

2°)A tout point M de [AB] distinct de A et de B, on associe le point M' de [IC] tel que AM =IM'. Montrer que le triangle ΩMM' est équilatérale.

3°)Soit G le centre de gravité du triangle ΩMM' et S la similitude direct de centre Ω qui transforme M en G.

a) Préciser le rapport et l'angle de cette similitude.
b) Montrer que S(B) = I et construire le point A' = S(A).
c) Montrer que les points I , G et A' sont alignés.

EXERCICE N°2

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan. A et B deux points de cordonnées respectives $(1,1)$ et $(0,2)$

1°)Soit g l'application définie par $g=t_{\overrightarrow{BO}}\circ r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)}$

a) Déterminer $g(B)$ et $g(O)$
b) Déterminer le nature et les éléments caractéristique de g

2°)Soit S l'application définie par $S=g\circ h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}$

a) Déterminer $S(A)$, puis déterminer la nature de S.
b) Soit OIAJ un carré de centre K ; déterminer $S(B)$; puis construire l'image du carré OIAJ par S.

EXERCICE N°3

Dans le plan orienté on considère le triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit H le milieu de [BC], I le milieu de [AC] et Δ la médiatrice de [BC]. On désigne par S la similitude direct de centre A et qui envoie B en I.

Soit M un point quelconque du plan et M' son image par S .

1°)Déterminer l'angle et le rapport de S.

2°)Construire le point J antécédent de B par S .

3°)Soit le point N l'image du point M par la symétrie orthogonale d'axe Δ .

a) Montrer que : BM' = BN si et seulement si JM = 2CM.
b) Déduire alors l'ensemble des points M tels que BM' = BN.

EXERCICE N°4

On considère , dans le plan orienté, un triangle ABC rectangle en A tel que AC = 2AB et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par F le projeté orthogonale de A sur (BC), $I=S_{(AB)}(F)$ et $J=S_{(AC)}(F)$

1°) a) Montrer que : $(BI)\perp(AI)$ et $(CJ)\perp(AJ)$.

b) Caractériser l'application : $S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$ et en déduire que A = I*J.

2°)Soit S la similitude direct qui transforme B en A et A en C.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que F est le centre de S.

c) Montrer que : $S(I) = J$. En déduire que CJ = IJ.

3°)Soit σ la similitude indirect qui transforme I en F et F en J.

a) Déterminer le rapport de σ

b) Déterminer Ω le centre de σ. Montrer que $\overrightarrow{\Omega J} = 4\overrightarrow{\Omega I}$

c) Soit E le point défini par $\overrightarrow{\Omega E} = 2\overrightarrow{\Omega I}$.

Montrer que l'axe (Δ) de σ est la médiatrice de $[EF]$

EXERCICE N°5

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB= 2AC.

Soit D et D' deux droites parallèles passant respectivement par B et C et ne contenant aucun des cotes du triangle ABC.

Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire à D et D'.

La droite Δ coupe les droites D et D' respectivement en I et J.

1°)Soit S la similitude direct qui transforme A en B et C en A.

a) Déterminer l'angle et le rapport de S.

b) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le projeté orthogonale de A sur (BC).

2°) a) Déterminer S(D') et S(Δ).

b)En déduire S(J)

c)Montrer que le cercle de diamètre [IJ] passe par Ω.

EXERCICE N°6 (Bac.M 2008p).

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), OAB est un triangle rectangle isocèle tel que OA = OB et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1°)Montrer que f est rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2°)a)Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.

b)Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).

Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude f .

3°)Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D.

a)Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire g(O).

b)Déterminer les images de C et D par $g \circ f^{-1}$. En déduire la nature de $g \circ f^{-1}$.

4°)Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$.

a)Déterminer les images des points J et I' par $g \circ f^{-1}$.

b)Montrer que les droites (IJ) , $(I'J')$ et (CD) sont concourantes.

EXERCICE N°7

Soit un triangle ABC non isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ à tout point M de la droite (AB) on associe le point N de la droite (AC) tel que M et n soient dans un même demi-plan ouvert de bord (BC) et BM = CN.

1°)Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que pour tout point M de (AB) on a r(M) = N et r(B) = C.

Préciser une mesure de son angle et construire son centre I.

2°)Soit O=B*C et $S_{(OI)}$ est le symétrie orthogonale d'axe (OI), h est l'homothétie de centre I et de rapport 2 On considère l'application $f = h \circ S_{(OI)} \circ r$

a) Déterminer f(B) et f(I).
b) Démontrer que f est une similitude indirect dont on précisera l'axe, le centre et le rapport.
c) Soit M' l'image de M par f . Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit la droite (AB)\{A} et le construire.
d) Soit H=M*N. Déterminer l'ensemble des points H lorsque M décrit la droite (AB)\{A}

EXERCICE N°8

Soit D une droite et O et M deux points symétriques par rapport à D et M' un point distinct de O et de M. On désigne par s la similitude indirect de rapport $k \neq 1$ et de centre O envoyant M sur M'.
Soit ζ un cercle de centre Ω passant par O et M et $\zeta' = s(\zeta)$.

1°)Construire le centre Ω' de ζ'.

2°)En déduire la construction de ζ'.

EXERCICE N°9

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
Donner dans chacun des cas suivants, le nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

a) $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 1 + 2i$
b) $z' = -2z + 1 + 2i$
c) $z' = (1+i)z + 1 + 2i$
d) $z' = (1+i)\bar{z} + 1 + 2i$

EXERCICE N°10

Soit s la similitude directe du plan de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de centre M_0 d'affixe $z_0 = 1 - i$.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1°)s a pour écriture complexe : $z' = \left(\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)z + 1 - i$.

2°)L'image par s de la droite D d'équation x + y = $\sqrt{2}$ est la droite D' d'équation y = $\sqrt{2}$.

3°)La réciproque s^{-1} de s a pour écriture complexe : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}z - 1$.

EXERCICE N°11

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle ABCD tels que AB = $\sqrt{2}$, AD = 1 ; $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$est un angle droit direct ;I désigne le milieu de [AB].
Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

Partie A

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(A ;\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que z' = az + b, a et b étant des nombres complexes avec $a \neq 0$.
1°) Déterminer les nombres a et b pour que S(D) = C et S(C) = B.
2°) Soit T la similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :
$z' = -\frac{i\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$.Déterminer le rapport et l'angle de T.
3°) Montrer que la similitude T transforme B en I.

4°) En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.
5°) Montrer que le centre Ω de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

Partie B

Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.
1°) Vérifier que les points C et I appartiennent à (E).
2°) a) Démontrer que pour tout point M du plan $MD^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{BD}$ où J est un point que l'on précisera.
b) Déterminer l'ensemble (E).
c) En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).

EXERCICE N°12

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3})$.

1°) Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.

2°) Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}i$

Calculer ΩM_0 et donner une mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_0})$.

3°) On considère la suite de points $(M_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$.
On note z_n l'affixe du point M_n.
a) Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
b) Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité : $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$
c) Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n puis déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.

4°)
a) On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5\,;-3)$ est solution, résoudre (E).
b) Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\mathrm{Im}(z) = 1$ et $\mathrm{Re}(z) \geq 0$. Caractériser géométriquement Δ et le représenter.
c) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

EXERCICE N°13

Soient s_1, s_2 et s_3 les trois similitudes définies par :

- A tout point M d'affixe z, s_1 associe le point M' d'affixe : $z' = \dfrac{-1+i}{2}z + \dfrac{3-i}{2}$
- s_2 est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle π.
- A tout point M(x ; y), s_3 associe le point M' de coordonnées : $\begin{cases} x' = -x + y - 1 \\ y' = -x - y + 2 \end{cases}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations :
$f = s_1 \circ s_2$ et $g = s_1 \circ s_3$.

EXERCICE N°14

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 5 cm.

A, B, C désignent les points d'affixes respectives 1 - i, i et -1. On note g l'application qui a tout point M du plan, d'affixe z associe le point g(M) d'affixe : $z' = \frac{1 - i + z + iz}{3}$

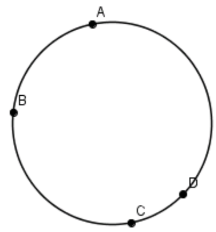
1°) a) Déterminer g(B).
b) On note I le milieu de [BC], prouver que les points O, A, I sont alignés, et placer les points O, A, B, C, I sur une figure.

2°) a) Prouver que g est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω, le rapport et l'angle.
b) Prouver que les points A, B, Ω sont alignés.

3°) a) Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$. Montrer que l'image de la droite (OB) par g est la droite (OI).
b) Soit O' l'image de O par g. Montrer que la droite (OO') est l'image par g de la droite (BO).
c) En déduire que les points I, O, O', A sont alignés.

4°) Montrer que les points I et Ω appartiennent au cercle de diamètre [BO'].

EXERCICE N°15 : Théorème de Ptolémée
Dans le plan orienté, on considère quatre points distincts A, B, C et D se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.



1°) Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme C en D. On désigne par E l'image du point B.
a) Montrer que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DE}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})[2\pi]$
b)Montrer que E est sur la droite (BD). Marquer le point E sur la figure. On admettra que E est sur le segment [BD].
c. Montrer que $AD \times BC = DE \times AC$.
2°)a)Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})[2\pi]$ puis que $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$.
b) Soit S´ la similitude directe de centre A qui transforme B en C. Montrer que D est l'image de E par cette similitude.
c) Prouver que $AB \times CD = AC \times BE$
3°) Utiliser ce qui précède pour démontrer la relation : $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.
Remarque : Cette relation est connue sous le nom de théorème de Ptolémée. Ptolémée était un mathématicien et astronome grec du II^{ème} siècle après J.-C. ; il utilisait cette relation pour calculer les longueurs des cordes d'arc de cercle, ancêtres de nos rapports trigonométriques.