TAKIACADEMY.COM
" JAMAIS PLUS SIMPLE "

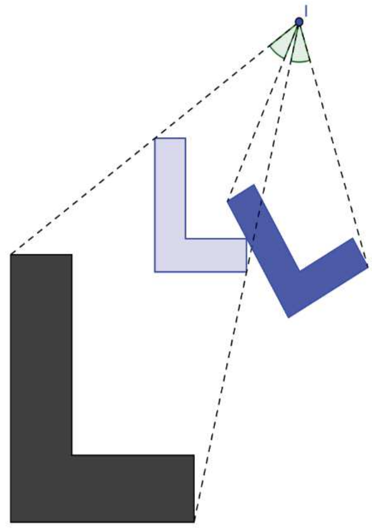
Similitudes

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

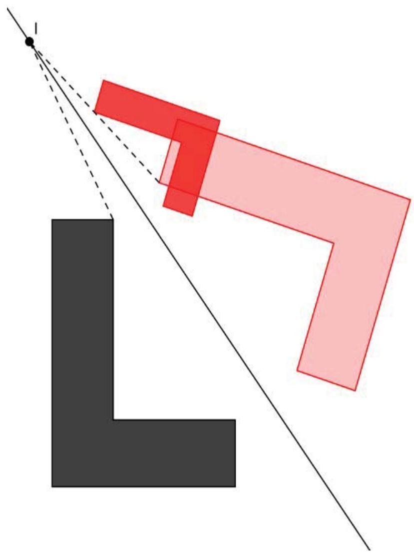
Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

SIMILITUDES

Le L bleu est l'image du L noir par la composée d'une homothétie et d'une rotation (similitude directe)



Le L inversé rouge est l'image du L noir par la composée d'une homothétie et d'une symétrie axiale (similitude indirecte)



★★★★★★★★★★

RESUME DU COURS

★★★★★★★★★★

I- Vocabulaire. (f est une application du plan dans lui-même).

Transformation du plan	C'est une bijection c'est-à-dire que tout point du plan a un, et un seul antécédent par f.
Identité	C'est la transformation qui laisse tous les points fixes, notée Id.
Transformation réciproque	Notée f^{-1}, est définie par : $f(M) = N \Leftrightarrow M = f^{-1}(N)$ On a : $fof^{-1} = Id$
Similitude	C'est une transformation du plan qui conserve les rapports de distances.
Rapport de similitude	C'est un réel **strictement positif** par lequel la similitude multiplie les distances.
Isométrie	Similitude de rapport 1, ou transformation qui conserve les distances.
Similitude directe	C'est une similitude qui conserve les angles orientés.
Déplacement	C'est une similitude directe de rapport **1** : **translation ou rotation**.
antidéplacement	C'est une similitude directe de rapport **1** : symétrie (**axiale ou glissante**)
Centre d'une similitude	C'est l'unique point fixe d'une similitude directe.
Angle d'une similitude direct	C'est l'angle constant θ q formé par un vecteur et son image, autrement dit : $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}) \equiv \theta[2\pi]$
Axe d'une similitude indirecte de centre Ω et de rapport k	• C'est l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ où $M' = f(M)$. • L'axe porte la bissectrice intérieure de l'angle $M\widehat{\Omega}M'$ où $M' = f(M)$.

II- Opérations sur les similitudes.

(1) Toute similitudes f de rapport k (**$k \neq 1$**) possède un unique point invariant Ω.

Ω est appelé le centre de f.

(2) La **composée de deux similitudes directes** de rapport k et k' et d'angles θ et θ'est une similitude directe de rapport $k \times k'$ et d'angle $\theta + \theta'$.

(3) La **composée d'une similitude directe et d'une indirecte** est une similitude indirecte.

(4) Si f est une similitude de rapport k, sa réciproque f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

(5) Si f est une similitude directe de rapport k et d'angle θ, alors sa réciproque f^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

(6) Si f est une similitude directe de rapport k et d'axe Δ alors sa réciproque f^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'axe Δ.

(7) L'axe Δ d'une similitude indirecte de centre Ω et **la perpendiculaire** à Δ passant par Ω sont globalement invariants par f.

(8) Si f et g deux similitudes coïncident en deux points distincts alors $f = g$.

III - Propriétés géométriques.

Une similitude plane de rapport k.

• conserve les rapports de distances ; • conserve les angles géométriques ; • conserve l'alignement des points ; • transforme une droite (un segment) en une droite (un segment) ; • conserve le parallélisme et l'orthogonalité ;	• conserve le barycentre ; • transforme un triangle en un triangle de même forme (semblable) ; • transforme un cercle de rayon R en un cercle de rayon k× R ; • multiplie les aires par k^2.

IV- Ecriture complexe et éléments caractéristiques des similitudes.

Similitude directe	Ecrire complexe	$z' = az + b$ avec $a \in C^*$ et $b \in C$
	Rapport k	$k = \lvert a \rvert$
	Angle θ	$\theta \equiv \arg(a)[2\pi]$
	Centre Ω, Si a ≠ 1	Ω d'affixes ω avec $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ où $f(\Omega) = \Omega$
Similitude indirecte	Ecriture	$z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in C^*$ et $b \in C$
	Rapport k	$k = \lvert a \rvert$
	Centre Ω, Si a ≠ 1	Ω d'affixes z_Ω avec $z_\Omega = \dfrac{a\bar{b}+b}{1-\lvert a \rvert^2}$ où $f(\Omega) = \Omega$

V- Existences et décompositions.

Propriété : Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Il existe une unique similitude f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ et de rapport $\dfrac{A'B'}{AB}$

Décomposition d'une similitude directe :

Si f est une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, alors f peut s'écrire comme la composée de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k, avec la rotation r de centre Ω et d'angle θ.
On a ainsi : $f = h \circ r = r \circ h$.

Décomposition d'une similitude indirecte

- Si f est une similitude indirecte de centre Ω, de rapport k et d'angle Δ, alors f peut s'écrire comme la composée de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k, avec une symétrie axiale d'axe Δ. On a ainsi : $f = h \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h$.
- Si f est une similitude indirecte de centre Ω, de rapport k, alors $f \circ f$ est une homothétie de centre Ω et de rapport k^2.

VII- Points fixes.

Une similitude possédant **trois points fixes non alignés** est l'application identique (**ou l'identité**).
Une similitude possédant **deux points fixes** A et B est l'identité **ou** la symétrie d'axe (AB).
Une similitude **directe** possédant **deux points fixes** est l'application identique (**ou l'identité**).

Savoir …	Comment faire ?
… démontrer qu'une transformation f est une similitude	• Démontrer que f multiplie toutes les distances par un même nombre k. • Ecrire f sous la forme d'une composée de translations, rotations, homothéties, symétries axiales. • Etablir que l'écriture complexe de f dans un repère orthonormé direct du plan est de la forme : $z' = az + b$ ou bien $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

... déterminer le rapport k d'une similitude f : M $\mapsto$ M'	• Si A et B sont deux points distincts alors $k = \dfrac{A'B'}{AB}$. • Si f a pour écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$ dans un repère orthonormé direct, alors $k = \lvert a \rvert$. • Si f est la composée de deux similitudes de rapports k_1 et k_2, alors $k = k_1 \times k_2$. • Si f est la réciproque d'une similitude de rapport k', alors $k = \dfrac{1}{k'}$
... démontrer qu'une transformation f est une symétrie axiale	On peut établir que f est une similitude distincte de l'identité qui admet au moins deux points fixes. La droite passant par ces deux points fixes est l'axe de la symétrie.
... démontrer qu'une transformation f est une similitude directe	• Démontrer que f est une similitude qui conserve les angles orientés. • Ecrire f comme la composée de similitudes directes (en particulier : translations, rotations, homothéties) • Ecrire f sous la forme d'une composée de **deux** similitudes directes. • Etablir que l'écriture complexe de f est z' = az + b avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
... déterminer l'angle θ d'une similitude directe f : M $\mapsto$ M'	• Si A et B sont 2 points distincts alors $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{f(A)f(B)}\right) [2\pi]$. • Si f a pour écriture complexe z' = az + b, alors $\theta \equiv \arg a\, [2\pi]$. • Si f est la composée de deux similitudes directes d'angles θ_1 et θ_2 alors $\theta \equiv \theta_1 + \theta_2\ [2\pi]$ • Si f est la réciproque d'une similitude d'angle θ' alors $\theta' \equiv -\theta\, [2\pi]$
... construire l'image M' d'un point M par une similitude directe f	• Si A' et B' sont les images de deux points distincts A et B, alors tout triangle ABM a pour image le triangle $A'B'M'$ directement semblable au triangle ABM. • Si f est la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, alors M' est le point tel que : $\Omega M' = k\Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$.
... définir une similitude directe	• Soit avec le centre, le rapport et l'angle si f n'est pas une translation. • Soit avec deux points A et B et leurs images A' et B'. • Soit avec un point A et son image A', le rapport de f et l'angle de f.