TAKIACADEMY.COM
" JAMAIS PLUS SIMPLE "

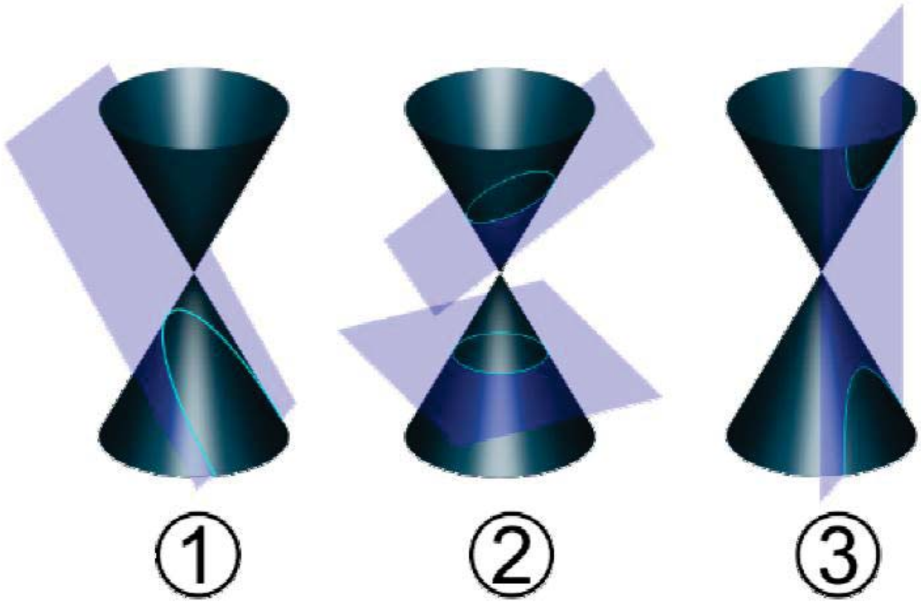
Coniques

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Coniques

Sur la figure suivante, ① représente une **parabole**, ② un **cercle** et une e**llipse** et ③ une **hyperbole** :



Cette approche, qui a donné leur nom aux « **coniques** », en allemand « **Kegelschnitt** », en anglais « **conic section** », est cependant un peu difficile à mettre en oeuvre quand on veut obtenir des propriétés plus précises de ces figures puisqu'il faut travailler dans l'espace !

RESUME DU COURS

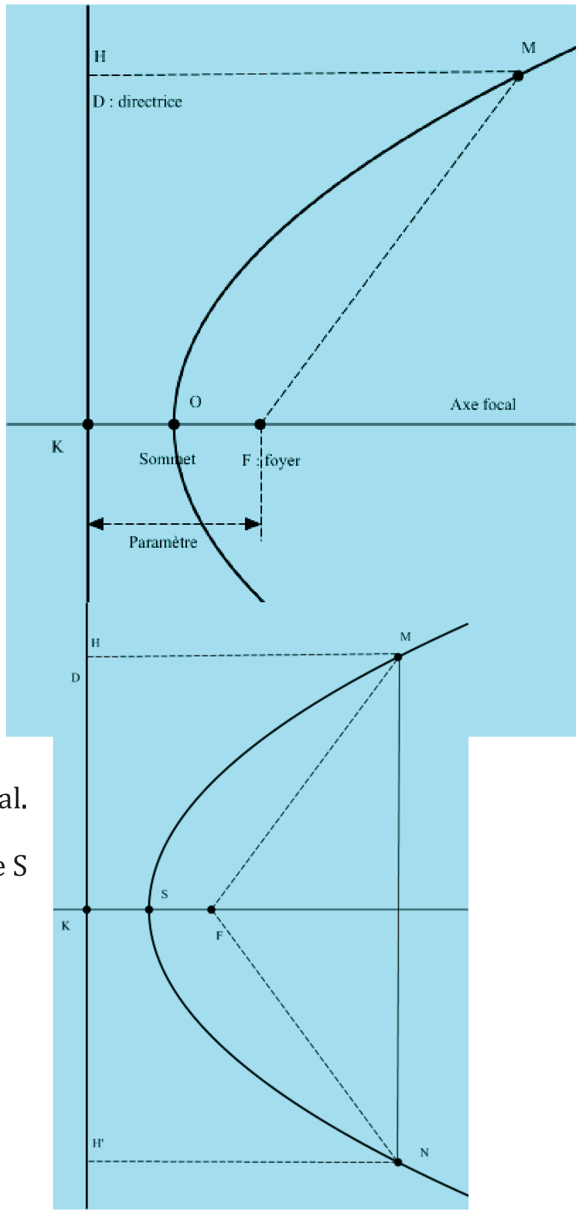
1°) La parabole

Définition

Etant donnés une droite D et un point F n'appartenant pas à D,

On appelle **parabole** de **foyer F** et de **directrice D** l'ensemble des points M du plan tels que **MF = MH** où H = $p_D^{\perp}(M)$ ou bien **MF = d(M, D).**

On note $P_{(F,\,D)} = \{M \in P \ / \ MF = d(M, D)\}$.



Vocabulaire

P une parabole de foyer F et de directrice D.La perpendiculaire D menée de F est appelée **axe focal**d(F, D) est appelée **paramètre** de P .

Théorème

Toute parabole admet comme axe de symétrie son axe focal.

Toute parabole rencontre son axe focal en un point unique S appelé sommet de la parabole

Le sommet de $P_{(F,\,D)}$ est le milieu de [FK] où

K = $p_D^{\perp}(F)$.

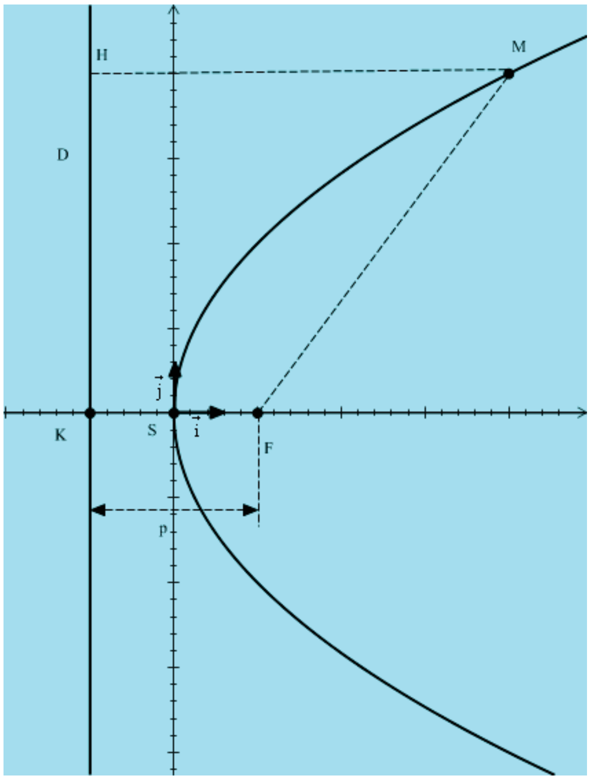
Equation réduite d'une parabole

Théorème

P une parabole de sommet S, de foyer F, de paramètre p et de directrice D.

On munit le plan à un repère orthonormé $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$ où $\vec{i}=\dfrac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$

La parabole P a pour équation $\mathbf{y^2 = 2p}\boldsymbol{x}$, D : $x=-\dfrac{p}{2}$ et $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$.



Inversement

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, l'ensemble des points M(x, y) tels que $\mathbf{y^2 = 2p}\boldsymbol{x}$ **(p > 0)** est la parabole de foyer $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, de directrice D : $x=-\dfrac{p}{2}$, de paramètre p et de sommet O.

$\mathbf{y^2 = 2p}\boldsymbol{x}$ est l'équation réduite de P.

Deuxième forme

R = $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan

Une courbe (Γ) ayant pour équation dans R : ($x^2 = 2ky$; $k \in IR^*$) est une parabole, son foyer est le point $F\left(0,\dfrac{k}{2}\right)$ et sa directrice est la droite D : $y=-\dfrac{k}{2}$

Le point Ω est le sommet de cette parabole, la droite $\left(\Omega,\vec{j}\right)$ est son axe

Le réel positif p = | k | est son paramètre.

Tangente à une parabole

Théorème

$\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan.

P est une parabole d'équation $y^2 = 2kx$; $k \in IR^*$

P admet en chacun de ses points $M_0(x_0, y_0)$ une tangente (T) ayant pour équation cartésienne dans le même repère : $yy_0 = k(x + x_0)$

<u>En particulier</u> : P admet en son sommet S une tangente dont l'équation cartésienne dans le même repère est celle de la droite $(S, \vec{j})$, elle est donc parallèle à la directrice D de P.

<u>Deuxième forme</u>

Si la parabole P a pour équation cartésienne dans $(S, \vec{i}, \vec{j})$: (x^2 = 2ky ; k ∈ IR*) alors la tangente (T) à P en un point $M_0(x_0, y_0)$ de P a pour équation cartésienne dans le même repère : $xx_0 = k(y + y_0)$.

<u>En particulier</u> :

La tangente à P en son sommet S a pour équation (y = 0), c'est la droite $(S, \vec{i})$ parallèle à la directrice D : $y = -\frac{k}{2}$.

2°) L'hyperbole

<u>Définition</u>

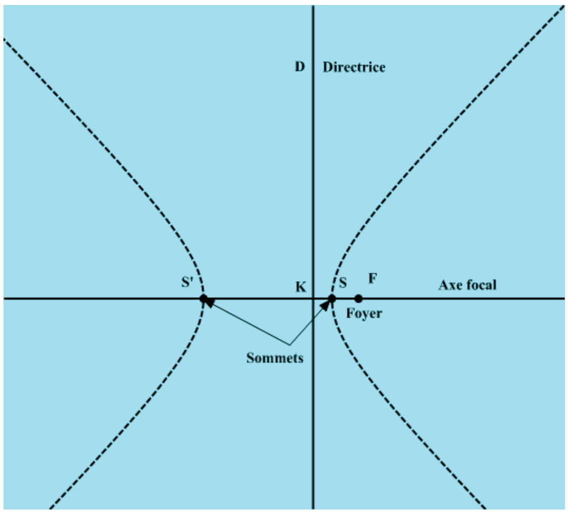
Etant donnés une droite D, un point F n'appartenant pas à D et un réel **<u>e > 1</u>**.

On appelle hyperbole de foyer F, de directrice D et

d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan tels que

$\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.

On note $H_{(F, D, e)} = \left\{ M \in P \,/\, \frac{MF}{MH} = e, \text{ où } H = p_D^{\perp}(M) \right\}$.



• La perpendiculaire à D passant par F est appelée axe focal de l'hyperbole.

• L'axe focal de H est un axe de symétrie pour H .

• H rencontre son axe focal en deux points S et S′ appelés sommets de H et ils sont les barycentres respectifs des points (F, 1) ; (K, e) et (F, 1) ; (K, - e) où K = $p_D^{\perp}(F)$

Equation réduite d'une hyperbole

Théorème

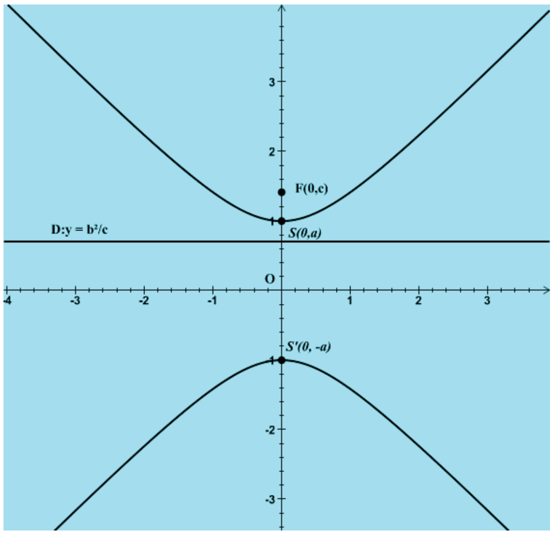
Soit H une hyperbole de foyer F, de directrice D, d'excentricité e et de sommets S et S′.

On désigne par O le milieu de [SS′], on pose $\vec{i}=\frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$ directeur de D

Si S(a, 0) et F(c, 0) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ alors l'hyperbole H a pour équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, avec

$b^2 = c^2 - a^2$ Inversement : L'ensemble des points M(x, y) dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan tels que : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > 0 et b > 0) est une hyperbole de foyer F(c, 0), de directrice D : $x=\frac{a^2}{c}$, d'excentricité

e = $\frac{c}{a}$ et de sommets S(a, 0) et S′(-a, 0) avec c = $\sqrt{a^2+b^2}$.

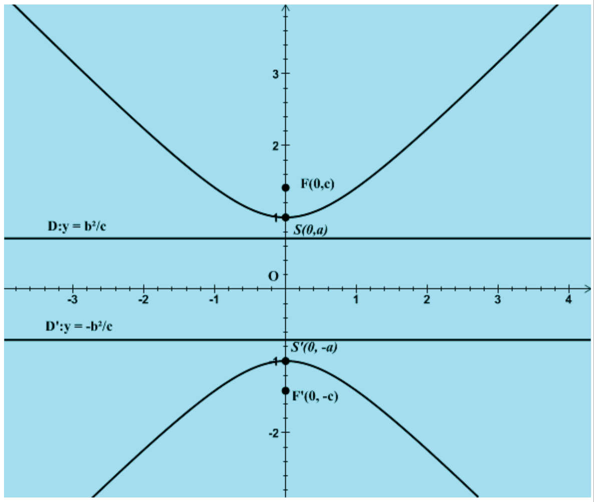


Deuxième forme

La courbe H : $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan est une hyperbole de centre O, de foyer F(0, c), de directrice D : $y=\frac{b^2}{c}$, d'excentricité e = $\frac{c}{b}$ et de sommets S(0, b) et S′(0, -b) avec c = $\sqrt{a^2+b^2}$.

Remarque

• Toute hyperbole admet un centre de symétrie, qui est le milieu de ses sommets (c'est une conique à centre)



• Toute hyperbole admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice passant par le centre appelé axe transverse.

• L'existence d'un centre de symétrie implique l'existence d'une deuxième directrice D′ et d'un autre foyer F′ symétriques respectifs de D et F.

On dit que F est le foyer associé à la directrice D et F ′ est le foyer associé à la directrice D′.

Tangentes et asymptotes à une hyperbole

Théorème

- Soit H : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

H admet deux asymptotes d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$ dans le même repère

La tangente à H en un point $M_0\left(x_0,y_0\right)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ dans le même repère.

- Si H : $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

H admet deux asymptotes d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$ dans le même repère

La tangente à H en un point $M_0\left(x_0,y_0\right)$ a pour équation $-\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ dans le même repère.

Remarque

- Si a = b alors H est dite équilatère, ses asymptotes sont perpendiculaires et son excentricité e = $\sqrt{2}$.
- La tangente au sommet d'une hyperbole est parallèle aux directrices.

Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

Théorème :

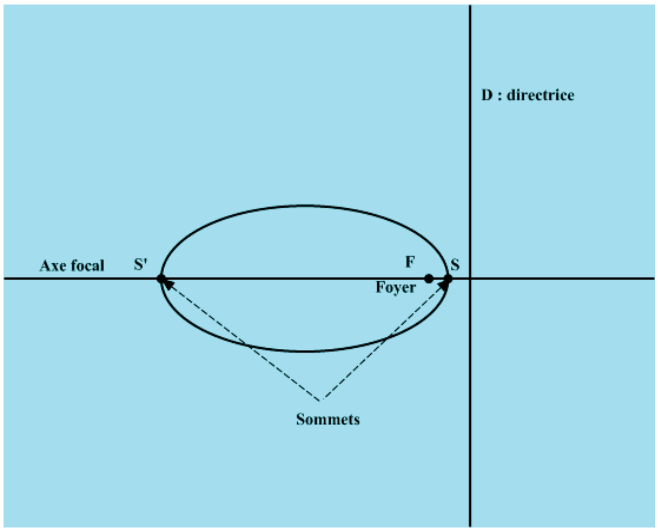
Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a pour équation XY = k où k est un réel non nul.

3°) L'ellipse

Définition

Etant donnés une droite D, un point F n'appartenant pas à D et un réel **0 < e < 1**.

On appelle ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.



On note $E_{(F, D, e)} = \left\{ M \in P / \frac{MF}{MH} = e, \text{ où } H = p_D^{\perp}(M) \right\}$.

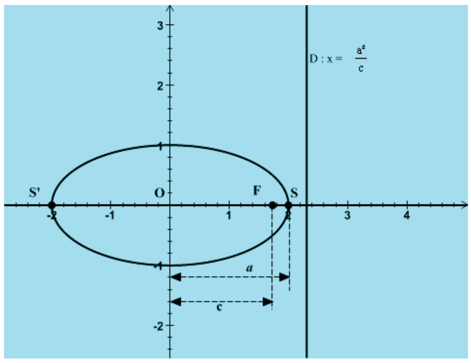
- La perpendiculaire à D passant par F est appelée axe focal de l'ellipse.
- L'axe focal de E est un axe de symétrie pour E .
- E rencontre son axe focal en deux points S et S′ appelés sommets principaux de E et ils sont les barycentres respectifs des points (F, 1) ; (K, e) et (F, 1) ; (K, - e) où K = $p_D^{\perp}(F)$

<u>Equation réduite d'une ellipse</u>

<u>Théorème</u>

Soit E une ellipse de foyer F, de directrice D, d'excentricité e et de sommets principaux S et S′.

On désigne par O le milieu de [SS′], on pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$ directeur de D



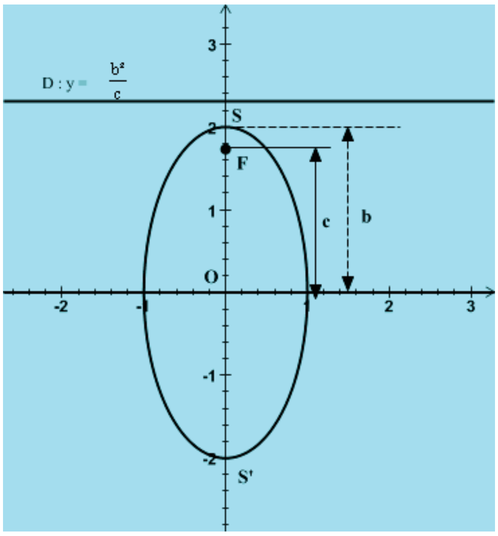
Si S(a, 0) et F(c, 0) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ alors l'ellipse E a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec

$\mathbf{b^2 = a^2 - c^2}$

Inversement : L'ensemble des points M(x, y) dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a >$ b > 0) est une ellipse de foyer F(c, 0), de directrice D : $x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité e = $\frac{c}{a}$ et de sommets principaux S(a, 0) et S′(-a, 0) avec c = $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Deuxième forme



La courbe E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan avec $0 < a <$ b est une ellipse de centre O, de foyer F(0, c), de directrice D : $y=\frac{b^2}{c}$, d'excentricité e = $\frac{c}{b}$ et de sommets principaux S(0, b) et S′(0, -b) avec c = $\sqrt{b^2-a^2}$.

Remarque

- Toute ellipse admet un centre de symétrie, qui est le milieu de ses sommets principaux (c'est une conique à centre)
- Toute ellipse admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice passant par le centre.
- Ce deuxième axe coupe l'ellipse en deux points appelés sommets secondaires.
- L'existence d'un centre de symétrie implique l'existence d'une deuxième directrice D′ et d'un autre foyer F′ symétriques respectifs de D et F.

On dit que F est le foyer associé à la directrice D et F ′ est le foyer associé à la directrice D′.

Tangentes à une ellipse

Théorème

Soit E : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ **a > 0 et b > 0**

La tangente à E en un point $M_0\left(x_0,y_0\right)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ dans le même repère.