Fiche de cours **4ème Maths**

Coniques

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Définition (conique)

Soit F un point , D une droite ne contenant pas F et e > 0.

On appelle conique d'excentricité e , de foyer F et de directrice D l'ensemble

$\zeta = \{M \in \wp / \quad MF = e.d(M,D)\} = \left\{M \in \wp / \quad \frac{MF}{MH} = e\right\}$ où H le projeté orthogonale de M sur la droite D.

- Si e < 1 : on dit que ζ est une ellipse.
- Si e = 1 : on dit que ζ est une parabole.
- Si e > 1 : on dit que ζ est une hyperbole.

La droite Δ passe par F et perpendiculaire à la directrice s'appelle l'axe focal de conique.

Parabole

Dans le cas où les vecteurs $\overrightarrow{OF}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires, la courbe $\wp$ d'équation $\boxed{y^2 = 2px}$ est appelée parabole de sommet O=F*K, d'axe focal $(O;\vec{i})$ et de paramètre $\lvert p\rvert$. Elle admet un foyer F de cordonnées $\left(\frac{p}{2},0\right)$ et une directrice D d'équation $x = -\frac{p}{2}$. ($K = D \cap (xx')$)	Dans le cas où les vecteurs $\overrightarrow{OF}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires, la courbe $\wp$ d'équation : $\boxed{x^2 = 2py}$ est un parabole de sommet O=F*K, d'axe focal $(O;\vec{j})$ et de paramètre $\lvert p\rvert$. Elle admet un foyer F de cordonnées $\left(0,\frac{p}{2}\right)$ et une directrice D d'équation $y = -\frac{p}{2}$. ($K = D \cap (yy')$)
Soit $M_0(x_0,y_0)$ une point de $\wp$. L'équation de tangente T au point M_0 est : $y_0 y = p(x + x_0)$	Soit $M_0(x_0,y_0)$ une point de $\wp$. L'équation de tangente T au point M_0 est : $x_0 x = p(y + y_0)$

Hyperbole

Soit a>0 et b>0.

La courbe **H** d'équation $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ est appelée hyperbole de centre O, d'axe focale $(O;\vec{i})$ et d'excentricité $e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{c}{a} > 1$ avec $c^2 = a^2 + b^2$. Elle est constituée de deux composantes connexes H_1 et H_2 et admet deux couples foyer-directrices (F, D) et (F' , D'), avec F(c,0) , F'(-c,0) et D et D' d'équation cartésiennes $x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c}$	La courbe **H** d'équation $\boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ est une hyperbole de centre O d'axe focale $(O;\vec{j})$ et foyer F(0,c), de directrice d'équation $y = \frac{b}{e} = \frac{b^2}{c}$ d'excentricité $e = \frac{c}{b}$ avec $c^2 = a^2 + b^2$. Elle est constituée de deux composantes connexes H_1 et H_2 et admet deux couples foyer-directrices (F, D) et (F' , D'), avec F(0,c) , F'(0,-c) et D et D' d'équation cartésiennes $y = \frac{b}{e} = \frac{b^2}{c}$ et $y = -\frac{b}{e} = -\frac{b^2}{c}$

Les points S et S' de cordonnées (a,0) et (-a,0) sont appelés sommets de l'hyperbole **H,** qui admet également deux asymptotes Δ et Δ' d'équation $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ et $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ S et S' sont les barycentres respectifs des points (F,1) , (K,-e) et (F,1) et (K,-e) où K est le projeté orthogonale de F sur D.	Les points S et S' de cordonnées (0,b) et (0,-b) sont appelés sommets de l'hyperbole **H,** qui admet également deux asymptotes Δ et Δ' d'équation $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ et $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

Soit $M_0(x_0,y_0)$ une point de **H.** L'équation de tangente T au point M_0 est : $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$

Ellipse

Soit $a \geq b > 0$. Alors la courbe ξ d'équation $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ est appelée ellipse d'axe focal $(O;\vec{i})$ de demi grand axe a , de demi petit axe b et d'excentricité $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{c}{a}<1$ avec $a^2 = c^2 + b^2$ C'est une conique admettant deux couples foyer-directrices (F, D) et (F' , D'), avec F(c,0) ,F'(-c,0) , et D et D' d'équation cartésiennes $x=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}$ et $x=-\frac{a}{e}=-\frac{a^2}{c}$. Les points A(a,0) , B(0,b) C(-a,0) et D(0,-b) sont appelés les sommets de l'ellipse ξ A et C sont les sommets principaux ils sont les barycentres respectifs des points (F,1) , (K,-e) et (F,1) et (K,-e) où K est le projeté orthogonale de F sur D.	Soit $b > a > 0$. Alors la courbe ξ d'équation $\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$ est appelée ellipse d'axe focal $(O;\vec{j})$ de demi grand axe a , de demi petit axe b et d'excentricité $e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\frac{c}{b}<1$ avec $c^2 = b^2 - a^2$ C'est une conique admettant deux couples foyer-directrices (F, D) et (F' , D'), avec F(0,c) , F'(0,-c) , et D et D' d'équation cartésiennes $y=\frac{b}{e}=\frac{b^2}{c}$ et $y=-\frac{b}{e}=-\frac{b^2}{c}$. Les points A(a,0) , B(0,b) C(-a,0) et D(0,-b) sont appelés les sommets de l'ellipse ξ B et D sont les sommets principaux ils sont les barycentres respectifs des points (F,1) , (K,-e) et (F,1) et (K,-e) où K est le projeté orthogonale de F sur D.

Soit $M_0(x_0,y_0)$ une point de ξ . L'équation de tangente T au point M_0 est : $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$

Ensembles des points

L'ensemble des points M(x,y) du plan tels que : $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ est une

AB	Courbe
AB = 0	Parabole ou deux droites parallèles ou une droite ou le vide
AB < 0	Hyperbole ou deux droites sécantes.
AB > 0	Ellipse ou cercle ou un points ou le vide.

Séries d'exercices *4ème Maths*

Coniques

Pour tous les exercices le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, p un réel strictement positif.

EXERCICE N°1 (Définition de parabole)

Soit D la droite d'équation $x = \frac{p}{2}$ et F le point de cordonnées $\left(\frac{p}{2},0\right)$

Soit $\wp = \{M(x,y) / MF = MH\}$ où H est le projeté orthogonale de point M sur D.

Montrer que $M \in \wp$ équivaut à y² = 2px.

EXERCICE N°2

1°)Pour chacune des paraboles suivantes, déterminer son foyer, son sommet et une équation se sa directrice.

a) $y^2 = 4x$, b) $x^2 = 6x$, c) $y^2 = -8x$, d) $x^2 = -3y$

2°)Montrer que les courbes $\wp_1$, $\wp_2$ et $\wp_3$ d'équations respectives $x^2 = 5x - 1$,

$x^2 - 4y + 2x - 1 = 0$

et $y^2 - x + y = 0$ sont des paraboles dont on déterminera les éléments caractéristiques .

3°)Vérifier que $A(2,1) \in \wp_3$ et écrire l'équation de tangent T à $\wp_3$ en point A.

4°)Déterminer les cordonnées de point $B \in \wp_3$ tel que la tangente à $\wp_3$ en point B est perpendiculaire à T.

EXERCICE N°3

Soit $\wp$ la parabole d'équation y² = 2px (p > 0) de foyer F et de directrice D.

On considère une droite variable Δ passant par F coupe la parabole $\wp$ en M et M'.

1°)Déterminer l'ensemble des milieux de [MM'].

2°)Montrer que $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = \frac{2}{p}$

3°)On désigne par T et T' les tangentes à la parabole $\wp$ issues respectivement des points M et M'.

a- Montrer que T est perpendiculaire à T'.

b- Soit $\{A\} = T \cap T'$. Montrer que $A \in D$

EXERCICE N°4

Soit $\wp$ la parabole d'équation y² = 2px (p > 0) de foyer F et de directrice D.

Soient M et M' deux points de la parabole $\wp$ tel que le triangle MOM' est rectangle en O.

Montrer que les droites (MM') coupe l'axe focale de $\wp$ en un point fixe qui l'on déterminera .

EXERCICE N°5

Soit $\wp$ la parabole d'équation y² = 2px (p > 0) de foyer F et de directrice D.

1°)A quelle condition la droite d'équation ax + by + c =0 est-elle tangente à la parabole $\wp$.

2°)La tangente en un point M de parabole $\wp$ coupe l'axe de symétrie en un point A.

Montrer que la tangente au sommet de $\wp$ passe par I=M*A.

3°)Soit T_1 et T_2 deux tangentes perpendiculaires à la parabole $\wp$.

Calculer en fonction de p: $d(O,T_1) \times d(F,T_2)$

($d(A,\Delta)$: la distance de point A à la droite Δ)

EXERCICE N°6

Soit H est l'orthocentre des triangles formés par trois tangents à une parabole de directrice D.

Montrer que $H \in D$

EXERCICE N°7 (Définition d'hyperbole)

a,b et c trois réels strictement positifs tels que $c^2 = a^2 + b^2$. On donne le point F(c,0) et la droite D d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. Soit $\mathbf{H} = \{M(x,y) / aMF = cMH\}$ où **H** est le projeté orthogonale de point M sur D.

1°)Montrer $M \in \mathbf{H}$ équivaut à $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2°)Prouvé qu'il existe un second point F' et une droite D' tels que, avec les notations correspondantes $\frac{MF'}{MF} = \frac{MH'}{MH}$

3°)Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$?

EXERCICE N°8

1°)Pour chacune des hyperboles suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets et une équation de chacune des directrices et son excentricité

a) $4x^2 - 36y^2 = 121$, c) $-9x^2 + 4y^2 = 196$; d) $2x^2 - 2y^2 = 1$

2°)Identifiés les ensembles des points M(x,y) vérifiant :

a) $x = \frac{2}{\cos t}$ et $y = 3\tan t$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

b) $x = 2\left(t + \frac{1}{t}\right)$ et $y = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$.

c) $x = \frac{1}{\cos 2t}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan 2t$, $t \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

EXERCICE N°9

1°)A quelle condition la droite d'équation $px + py + r = 0$ est-elle tangente à l'hyperbole **H** d'équation
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2°)Quel est l'ensemble des points par lesquelles passent deux tangentes à l'hyperbole **H** qui soient perpendiculaires?

3°)a)Soit P un point du plan de cordonnées (u,v) . Discuter le nombre de tangentes à l'hyperbole **H** passant par P.

b)Dans le cas où il existe deux tangente, écrire l'équation de la droite qui les joint.

EXERCICE N°10

Soit l'hyperbole **H** d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ de foyer F associe à la directrice D et F' le foyer associé à la directrice D' de **H**. Soit T une tangente à **H**. Calculer en fonction de a et b : $d(F,T) \times d(F',T)$.

EXERCICE N°11 (Définition d'un ellipse)

a,b et c trois réels strictement positifs tels que $a^2 = b^2 + c^2$. On donne le point F(0,c) et la droite D d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. Soit $\xi = \{M(x,y) / aMF = cMH\}$ où ξ est le projeté orthogonale de point M sur D.

1°)Montrer $M \in \xi$ équivaut à $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2°)Prouvé qu'il existe un second point F' et une droite D' tels que, avec les notations correspondantes $\frac{MF'}{MF} = \frac{MH'}{MH}$

3°)Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$?

EXERCICE N°12

1°)Pour chacune des ellipse suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets et une équation de chacune des directrices et son excentricité

b) $4x^2 + 36y^2 = 121$, c) $9x^2 + 4y^2 = 196$; d) $2x^2 + 2y^2 = 1$

2°)Identifiés les ensembles des points M(x,y) vérifiant :

a) $x = 5\cos t$ et $y = 3\sin t$, $t \in \mathbb{R}$.

b) $x = \dfrac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$ et $y = \dfrac{e^{t}}{e^{2t} + 1}$, $t \in \mathbb{R}$.

EXERCICE N°13

Soit l'ellipse ξ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, a > b.

Soit M un point de ξ d'abscisse x_0.

1°)Définir ses foyers F et F', ses sommets et une équation de chacune des directrices et son excentricité.

2°)Calculer MF et MF' et vérifier que MF + MF' = 2a.

3°) On considère une droite variable Δ passant par F coupe la l'ellipse ξ en M et M'.

Prouver que $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FM'} = \dfrac{2a}{b^2}$

4°)La droite (MF') recoupe ξ en N. Montrer que $\dfrac{FM}{FN} + \dfrac{F'M}{F'N} = \dfrac{4a^2 - 2b^2}{b^2}$

EXERCICE N°14

Déterminer la nature et les éléments de la courbe d'équation :

1°) $x^2 + 4y^2 + 2x = 1$

2°) $x^2 - 8y^2 + 2x - 16y = 1$

3°) $mx^2 + 4mx + (m - 1)y^2 + 2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$

5°) $y^2 - 4y = 2x - \dfrac{x^2}{m}$, $m \in \mathbb{R}^*$

EXERCICE N°15

On considère deux points distincts donnés F et F' du plan orienté. On note O le milieu de [FF'] et Δ la médiatrice de ce segment. On pose c = OF. On note A et B les points de Δ tels que OA = OB = c.

On note s la symétrie centrale de centre F et r la rotation de centre F et d'angle dont une mesure est $\dfrac{\pi}{2}$.

Soit D et D' les droites symétriques de D par rapport à F et F'.

1°) a) On considère les points P = r (A) et Q = s (A). Prouver que r (Q) = B.

Déterminer la nature du quadrilatère APQB et tracer ce quadrilatère sur la figure.

b) Déterminer les images respectives du segment [AB] par s, par r et par r o s.

c) À tout point N du segment [AB], on associe les points H = s(N), I = r (N) et J=r(H)=(r o s) (N).

Déterminer la nature du quadrilatère NIHJ et tracer ce quadrilatère sur la figure.

2°) On note Γ le cercle de centre N et de rayon NI.

a) Montrer que, pour tout point M du plan, $MH^2 + MN^2 = 2(MF^2 + NF^2)$.

b) En déduire que Γ est l'ensemble des points M du plan vérifiant $MH^2 - 2MF^2 = 0$

3°) On note K la projection orthogonale de H sur Δ et on pose α = ON où $0 \leq \alpha \leq c$.

Exprimer NK en fonction de α, puis NF et NI en fonction de α et de c. En déduire que le cercle Γ coupe la droite (HK) en deux points M_1 et M_2 distincts ou confondus.

4°) Prouver que $\dfrac{M_1F}{M_1H} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

En déduire que lorsque N parcourt le segment [AB], les points M_1 et M_2 appartient à une ellipse E dont F est un foyer et dont on précisera l'excentricité et la directrice associée à F.

Placer les sommets de E et tracer cette ellipse.

EXERCICE N°16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par M, N, P trois points distincts de ce plan d'affixes respectives m, n, p.

1°)Démontrer que le triangle MNP est rectangle en N si et seulement si le complexe $i\frac{p-n}{m-n}$ est un réel non nul.

2°)Dans cette question, M, N, P sont d'affixes respectives z, z^2, z^4.

a) Quelles conditions doit vérifier z pour que M, N, P soient distincts deux à deux ?

b) Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe z = x + iy du plan tels que le triangle MNP soit rectangle en N est une conique Γ d'équation $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$, privée de deux points que l'on précisera.

3°) Préciser la nature de Γ et déterminer ses éléments géométriques (sommets, foyers, excentricité, asymptotes).

4°) Représenter Γ et mettre en place sur la figure les sommets, les foyers et les asymptotes de Γ.

EXERCICE N°17

Soit ζ l'ensemble des points dont les cordonnées dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, vérifient : $13x^2+13y^2-24xy-25=0$

1°)Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Ecrire la forme complexe de r .

2°)Déterminer une équation de la courbe $r(\zeta)$. Préciser sa nature et ses éléments géométriques.

3°)En déduire la nature et les éléments géométriques de ζ.

EXERCICE N°18

Dans le plan complexe, on considère l'ensemble E des points M d'affixe z tels que

$z^2-(1+i)^2=\bar{z}^2-(1-i)^2$

1°)Déterminer et construire E.

2°)Déterminer et construire l'ensemble F des points M tels que $[z-(1+i)][\bar{z}-(1-i)]=8$

3°)Vérifier qu'il existe un point de $E\cap F$ où les deux courbes ont même tangente.

EXERCICE N°19

A tout point M du plan de cordonnées x , y on associe son affixe z = x + iy $(x,y\in\mathbb{R})$

On appelle ζ l'ensemble des point M de plan dont l'affixe z satisfait la relation

$(*):\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right|=\left|z-\frac{1+i}{2}\right|$

1°)Démontrer que ζ admet pour équation dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$:

$x^2+y^2-2xy-2x-2y+1=0$.

2°)On pose $\vec{e_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$ et $\vec{e_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}+\vec{j})$.Montrer que $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ est un repère orthonormé et déterminer une équation de ζ dans le repère $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

3°)Quelle est la nature de ζ et quelles sont ses éléments caractéristiques?

4°)Que signifie géométriquement le relation $(*)$. Construire ζ.

EXERCICE N°20

Dans le plan P orienté par un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe H d'équation : $x^2-4y^2-2x-3=0$

1°)Montrer que H est un hyperbole, déterminer les sommets de H et ses asymptotes.

2°)a)Vérifier que le point $M_0(1+2\sqrt{2},1)$ est un point de H.

b)Donner une équation de la tangente (T) à H en M_0

3°)Soit θ un réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation dans C :

(E_θ) : $(\cos^2\theta)z^2 - 2(\cos^2\theta + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$

a)Résoudre l'équation (E_θ)

b)M' et M" sont les images respectives des solutions z' et z".
Montrer que M' et M" varient sur une branche B de l'hyperbole H.