

# Fiche de cours

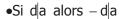
# 4 maths

# Arithmétiques

### Divisibilité dans Z

Soit a un entier et d un entier non nul.

On dit que d est diviseur de a ou a est divisible par d, s'il existe un entier q tel que Notation : da  $\Leftrightarrow \exists q \in Z / a = dq$ .



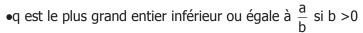
Soit a , b deux entiers non nuls et c un entier.

- •Si a|b et b|a alors a = b ou a = -b.
- •Si ab et bc alors ac
- •Si a|b et a|c alors a|xb + yc pour touts  $x, y \in Z$

### **Quotient et reste**

Soit a et b deux entiers avec b non nul.

On appelle quotient de a par b l'entier q défini de la manière suivante :



- •q est le plus petit entier supérieur ou égale à  $\frac{a}{b}$  si b <0
- •On appelle reste de a par b l'entier r = a bq ∃! $(q,r) \in Z \times N / a = bq + r$  et  $0 \le r < |b|$
- •Le reste de tout entier n dans la division euclidienne par un entier non nul b est un élément de l'ensemble  $\{0,1,2,...,|b|-1\}$

### Congruence modulo n Définition et notation:

Soit n un entier naturel non nul et a et b deux enters

\*)On dit que a est congru à b modulo n ( ou a sont congrus modulo n)si a – b est un multiple de n. On note alors  $a = b \pmod{n}$  ou  $a = b \pmod{n}$ 

\*)Pour tout entier a, il existe un unique  $r \in \{0,1,...,n-1\}$  tel que a = r[n]. On dit que r est le reste' modulo n de a.

### **Propriétés**

Soient a et b deux entiers relatifs non et  $n \in \mathbb{N}^*$ 

$$a \equiv b |n| \Leftrightarrow n |a - b|$$

$$a = b[n] \Leftrightarrow a = r[n] \text{ et } b = r[n]$$

$$a \equiv a[n]$$

Si a = b|n| alors b = a|n|

Si 
$$a = b[n]$$
 et  $b = c[n]$  alor  $c[n]$ 

Si a = b[n] et c = d[n] along a + c = b + d[n], ac = bd[n], ba = ba[n] ( $b \in Z$ ) et  $a^k = b^k[n]$  ( $b \in Z$ )

### Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premet et a un entier naturel alors :  $pa^p - a$ 

**Exemple:** Montrer que, si 13 n<sup>13</sup> alors 13 n.

On a : 13 est un proprier alors  $13|n^{13} - n$  et d'autre part on a :  $13|n^{13}$  alors

$$13|(n^{13}-(n^{13}-n))|$$

alors 13n









dient a et b deux entiers relatifs non nuls.

1°)Le plus grand entier qui divise à la fois a et b s'appelle le plus grand commun diviseur ou PGCD de a et b. On le note  $a \wedge b$ .

**Formellement :**  $d = a \land b$  si et seulement si  $\begin{cases} d|a \text{ et } d|b \\ \forall k \in D_a \cap D_b, k|d \end{cases}$ 

2°)La plus petit entier strictement positif qui est à la fois multiple de a er b s'app@ commun multiple ou PPCM de a et b. On le note a v b

am et bm **Formellement :**  $m = a \lor b$  si et seulement si  $\forall n \in M_a \cap M_b$ , m $\mid n$ 

3°)Deux entiers relatifs non nul a et b sont premiers entre eux lorsque les GCD est égale à 1.

### **Propriétés**

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

- $a \wedge b > 0$
- $a \wedge b = |a| \wedge |b|$
- Si b a alors  $a \wedge b = |b|$
- Si bne divise pas a et si r est le reste modulo b de a alors  $a \wedge b = b \wedge r$ .
- $a \wedge b = b \wedge a$
- Pour tout  $k \in Z^*$ :  $ka \wedge kb = |k|(a \wedge b)$
- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c , c \in Z^*$

- is  $a \lor b = |a|$
- If  $k \in Z^*$ :  $ka \lor kb = |k|(a \lor b)$
- $(b \lor c) = (a \lor b) \lor c , c \in Z^*$

### Théorème

Soit a et b deux entiers non nuls. Alors il existe unique couple d'entiers  $(\alpha',b')$  tel que

 $a = (a \wedge b)a'$ ,  $b = (a \wedge b)b'$  et  $a' \wedge b' = 1$ 

### Lemme de Gausse

Soit a, b et c trois entiers non nuls. Si

alors ac

### Théorème

Soit a et b deux entiers non nuls in entier.  $a \wedge b = 1$ alors ab n

### Théorème (inverse module )

Soit a et b deux entiers natures non nuls tels que  $b \geq 2$  et  $a \wedge b = 1$  .

Alors il existe un unique entier non nul  $u \in \{0,1,...,b-1\}$  tel que au = 1[b].

On dit que u est inverse modulo b.

# Identité de Bézout

Soit a et b deux entiers nuls

\*) a  $\wedge$  b = 1 si et seule vient si, il existe deux entiers u et v tels que au + bv = 1

\*)Soit  $d = a \wedge b$ , along it exists deux entiers u et v tels que au + bv = d **Equations de la forme :** ax + by = c.

Soit, a, b et c trois entiers et  $d = a \wedge b$ .

L'équation ax + by = c admet des solutions dans  $Z \times Z$ , si et seulement si d divise c.





# Séries d'exercices

# 4<sup>ème</sup> Maths

# Arithmétiques

### **EXERCICE N°1**

- 1°)Quel est le reste de la division par 7 du nombre 32<sup>45</sup>
- 2°) Quel est le reste de la division par 5 du nombre 24<sup>40</sup>
- 3°) Déterminer le chiffre des unités de l'écriture décimale de l'entier 7<sup>77</sup>.
- 4°) Déterminer le chiffre des dizaines de l'écriture décimale de l'entier 444 44°

### **EXERCICE N°2**

p et q sont des entiers naturels.

- 1°) Démontrez que  $2^{pq} 1$  est divisible par  $2^p 1$  et par  $2^q 1$ .
- 2°) Déduisez en que pour que  $2^n 1$  soit premier, il faut que n soit premier.
- 3°)Prouvez à l'aide d'un contre exemple que la condition « n est premier » n'est pas suffisante pour que  $2^n 1$  soit premier.

### **EXERCICE N°3**

Montrez que pour tout couple d'entier relatifs (x, y),  $y^2$  est divisible par 7 alors x et y sont aussi divisibles par 7.

### **EXERCICE N°4**

Soit  $n \in Z$ . Montrer que :  $\begin{cases} n^2 \equiv 0[8] oun^2 \equiv 4[8] & \text{si } n \equiv 0[2] \\ n^2 \equiv 1[8] & \text{si } n \equiv 1[2] \end{cases}$ 

### **EXERCICE N°5**

1°) Quel est le reste de la division eu division de  $3^{10} + 1$  par 10?

En déduire le reste de la division  $7^{10} + 1$  par 10.

- 2°) Soit  $r \in \mathbb{N}$ ,  $0 \le r \le 9$  . Montre to a 10 divise  $r^{10} + 1$  si, et seulement si,  $r \in \left\{3,7\right\}$  .
- 3°) Déterminer l'ensemble des unitiers naturels x tels que 10 divise  $x^{10} + 1$ .

### **EXERCICE N°6**

On se propose de déterminer tous les couples d'entiers naturels  $(x,y) \in N \times N$ , solutions de l'équation :

- (E):  $2^x 3^y = 1$
- 1°) Soit  $k \in N$ .
- a) Quel est le restr de la division euclidienne de 9 k par 8 ?
- b) Déterminer les restes de la division euclidienne de 3 <sup>2 k</sup> + 1 par 8, puis de 3 <sup>2 k + 1</sup> + 1 par 8.







Maths Solt (x, y)  $\in$  N  $\times$  N, un couple solution de l'équation (E). Montrer, à l'aide de 1°) que  $x \le 2$ . The déduire tous les couples (x,y)  $\in$  N  $\times$  N, solutions de l'équation (E).

### **EXERCICE N°7**

- $1^o) \text{Montrer que pour tout entier } n \geq 3 \ : \ 5^{2^{n-2}} 1 = 4 \bigg( 1 + 5^{2^1} \bigg) \bigg( 1 + 5^{2^2} \bigg) ... \bigg( 1 + 5^{2^{n-3}} \bigg) \bigg( 1 + 5^{2^n} \bigg) \bigg($
- 2°)En déduire que pour tout entier  $n \ge 3$  ,  $2^n$  divise  $5^{2^{n-2}}-1$  et  $2^{n+1}$  ne divise  $3^{2^{n-2}}-1$

### **EXERCICE N°8**

Montrer que pour tout n de N :  $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$  est divisible par  $2^n$ .

### **EXERCICE N°9**

Montrer que pour tout n de  $N^*$ :

1°)5 divise 
$$2^{2n+1} + 3^{2n+1}$$

 $2^{\circ}$ )9 divise  $4^{n} - 1 - 3n$ 

### **EXERCICE N°10**

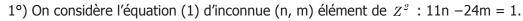
Montrer que pour tout n de  $N^*$ :

5 divise  $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$  si et seulement si équivaut à  $\frac{1}{2}$  ne divise pas n.

### **EXERCICE N°11**

- 1°) On considère l'équation (E) : 17x 6y = 2, et y sont des entiers.
- a) Résoudre dans  $Z^2$  l'équation 17x = 6y.
- b) Déterminer une solution particulière de
- c) En déduire tous les couples de Z² solution de l'équation (E).
- d) Montrer que le PGCD des couples solutions de (E) est 1 ou 2.
- e) Déterminer les couples (x; y) de  $\mathbb{Z}^2$  politions de (E) dont le PGCD est 2.
- f) Déterminer le couple  $(x_0; y_0)$  somme de (E) tel que :  $x_0 \wedge y_0 = 2$  et  $100 \le y_0 \le 150$
- 2°) Une bande de 17 pirates segremparé d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partage d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partage d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partage d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partage d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partage d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partage d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partage d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partage d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partage d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partage d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partage d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partage d'un butin composé de pièces d'or au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais leur bateau fait naufrage et seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés : le partage d'un butin composé de pièces d'or au cuisinier.
- a) On note N le nombre de pièces d'or du butin, x le nombre de pièces de chaque pirate avant le naufrage et y le nombre de pièces d'or de chaque pirate après le naufrage. Exprimer N en fonction de x puis en fonction de y.
- b) Ecrire alors la relation liant x et y.
- c) En utilisant les résultats de la question 1°c), déterminer la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates avec du civet de rate.

# Maths Soit dans $Z \times Z$ l'équation (E) : 2x - 8y = 5. EXERCICE N°12



- a) Justifier, que cette équation admet au moins une solution.
- b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'écon (1).
- c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
- 2°) a) Justifier que  $10^p-1$  divise  $10^{pk}-1$  , k, p  $\in$  N .
- b) (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1) montrer que l'on peut écrire :  $(10^{11n} 1) 10(10^{24m} 1) = 9$ .
  - c)En déduire l'existence de deux entiers N et M tels que : $(10^{11} 1)$ N = 9.
  - d) Montrer que tout diviseur commun à  $10^{24}$  –1 et  $10^{11}$  –1 divise §
  - e) Déduire des questions précédentes le PGCD de  $10^{24}$  –1 et  $10^{24}$  –1.

### EXERCICE N°13 : (BAC 2008.P)

1°)Soit dans  $Z \times Z$  l'équation (E) : 2x - 8y = 5.

Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels (x,

2°) a)Soit n , x et y trois entiers tels que 
$$\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$$

Montrer que (x, y) est une solutions de (E).

b)On considère le système (S)  $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ \text{où n expentier.} \end{cases}$ 

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si n = 23[24]

3°) a)Soit k un entier naturel.

Déterminer le reste de 2<sup>2k</sup> modulo 3 et le reste de 7<sup>2k</sup> modulo 8.

b)Vérifier que 1991 est une solution (\$\sigma\$) et montrer que l'entier (1991)^2008 – 1 est divisible par 24.

### **EXERCICE N°14**

- 1°)a) Déterminer deux entire relatifs u et v tels que 7u 13v = 1.
- b) En déduire deux entiement la fire  $u_0$  et  $v_0$  tels que  $14u_0 26v_0 = 4$ .
- c) Déterminer tous les fousses (a, k) d'entiers relatifs tels que 14a 26k = 4.
- 2°) On considère deux estiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note  $\phi(n)$  le reste de la division euclidienne de an + b par 26.

On décide de coop in message, en procédant comme suit :

A chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :





Maths													
Lettré	Α	В	С	D	Е	F	G	Н	I	J	К	L	М
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
•											•		<i>II</i>

Lettre	N	0	Р	Q	R	S	Т	U	V	W W	Υ
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	23	24

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associe puis on calcule (1). La

lettre  $\alpha$  est alors codée par la lettre associée à  $\phi(n)$  .

On ne connait pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

- a) Montrer que les entiers a et b sont tels que :  $\begin{cases} 5a+b\equiv 10\big[26\big]\\ 19a+b\equiv 14\big[26\big] \end{cases}$
- b) En déduire qu'il existe un entier k tel que 14a 26k = 4.
- c) Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec  $0 \le a \le 2$  tels que

$$\begin{cases} 5a + b \equiv 10[26] \\ 19a + b \equiv 14[26] \end{cases}$$

- $3^{\circ}$ ) On suppose que a = 17 et b = 3.
- a) Coder le message « GAUSS ».
- b) Soit n et p deux entiers naturels quelconques (nontrer que, si  $\varphi(n) = \varphi(p)$ , alors

$$17(n-p)\equiv 0\big[26\big]$$

En déduire que deux lettres distinctes de l'apprapet sont codées par deux lettres distinctes.

- 4°) On suppose que a = 17 et b = 3.
- a) Soit n un entier naturel.

Calculer le reste de la division euclidie  $\phi$  de  $23\phi(n) + 9 - n$  par 26

- b) En déduire un procède de décadage.
- c) En déduire le décodage du n essage « KTGZDO ».

### **EXERCICE N°15 : SUITE DE FIBONNACCI**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $f_n = 1$  et pour tout n de  $\mathbb{N}$  :  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ .

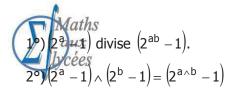
- 1°) Montrer que pour tout de N : 2 divise  $\mathbf{f}_{\mathbf{n}}$  si et seulement si 3 divise n.
- 2°) Montrer que pour  $\mathbb{R}^n$  de  $\mathbb{N}$  : 3 divise  $f_n$  si et seulement si 4 divise n.
- 3°) Montrer que pour sout n de N : 4 divise  $f_n$  si et seulement si 6 divise n.

# EXERCICE N°16: NOMBRES DE MERSENNE

Soient a,b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que :







 $3^{\circ}$ )Si  $2^{a} - 1$  premier alors a premier.

### **EXERCICE N°17 :NOMBRES DE FERMAT**

### Partie A.

On appelle nombres de Fermat les nombres entiers  $F_n = 2^{2^n} + 1$  où n est un entier naturel.

Montrer que pour tout n de  $N^*$ :  $F_n$  divise  $2^{F_n} - 2$ 

### Partie B.

On se propose de démontrer que : " si le nombre (2<sup>n</sup> + 1) est premier and s le nombre n est une puissance de 2. "

- I. Soient b et p deux entiers naturels non nuls.
- 1°) Factoriser  $b^{2p+1}$  b. En déduire que  $b^{2p+1}$  b et  $b^{2p+1}$  + 1 what divisibles par b + 1.
- 2°) Démontrer que : quels que soient les entiers a, m, p  $a^{m(2p+1)} + 1$  est divisible par  $a^m + 1$  .
- II. 1°) a) Soit n un entier naturel tel que le nombre (2<sup>n</sup> x poit premier.

Démontrer par l'absurde que n ne peut pas avoir de divers impairs autre que 1.

- b) Conclure.
- $2^{\circ}$ ) a) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que  $F_n$  n'est pas un nombre premier.
- b) Waclav Franciszek Sierpinski (1882 1900) démontré que tout nombre de Fermat, non premier, admet un diviseur de la forme : k + 1, où k est un entier naturel non nul. Vérifier que cela correspond à l'exemple précédent

### EXERCICE N°18 :THEOREME DE WILSON

Soit p un entier naturel premier. On note Ep l'ensemble  $\{1;2;...;p-1\}$  .

- 1°) Montrez que tout élément de Francier avec p.
- 2°)Montrez que pour tout a de propresse b unique dans Ep tel que  $ab \equiv 1[p]$ .
- 3°)Déterminez les a éléments de tels que  $a^2 \equiv 1[p]$ .
- 4°) Montrez que  $(p-1)! \equiv p$
- 5°)Déduisez-en que pour per pentier naturel premier, (p-1)!+1 est divisible par p.

### **EXERCICE N°19**

Soient  $a \in Z$  impairet  $n \in N$  tel que  $n \ge 3$  . Etablir :  $a^{2^{n-2}} \equiv \mathbb{1}[2^n]$ 

### **EXERCICE N°20**

Montrez que, pour tout b entier  $\geq 3$ , le nombre  $x = 1 + b + 2b^2 + b^3 + b^4$  n'est pas un nombre premier.



### **EXERCICE N°21**

- Soit pour tout n de N\* :  $s_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$
- 1°) Montrer que pour tout n de N\* :  $s_n = (2n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k(2n+1-k)}$
- 2°)En déduire que pour tout n de  $N^*$ :  $s_n$  est un entier divisible par 2n+1.

### **EXERCICE N°22**

- 1°)Décomposer 319 en facteurs premiers.
- 2°)Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre il en est de même pour les nombres : 3x + 5y et x + 2y.
- 3°)Résoudre dans  $N^2$  le système d'inconnues a et b :  $\begin{cases} (3a + 5b)(a) \\ (3a + 5b)(a) \end{cases}$



où m est le PPCM

de a et b.

### **EXERCICE N°23**

- 1°) a est un entier naturel. Montrez que a⁵ a est die par 10.
- 2°) a et b sont des entiers naturels avec  $a \ge b$ . Dépontrez que si  $a^5$   $b^5$ est divisible par 10 alors  $a^2 b^2$  est divisible par 20.

### **EXERCICE N°24**

Montrer que les entiers suivants sont comp

$$1^{o}\big)n^{4}\,-n^{2}+16$$
 ,  $n\in\,Z$ 

$$2^{\circ}$$
) $4n^{3} + 6n^{2} + 4n + 1$ ,  $n \in N^{*}$ 

$$3^{o})2^{4n+2}+1\text{ , }n\in N^{\ast }$$

### **EXERCICE N°25**

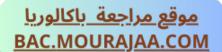
- 1°) Montrer que pour tout n de  $(n^2 + n) \wedge (2n + 1) = 1$
- 2°)Montrer que pour tout mue  $N^*$  :  $(n^3 + 2n) \land (n^4 + 3n^2 + 1) = 1$
- 3°) Montrer que pour tout de  $N^*: (n^2+1) \land ((n+1)^2+1) \in \{1,5\}$

# **EXERCICE N°26**

- 1°) Montrer que pou tout n de Z:42 divise  $n^7 n$
- 2°) Montrer que n tout n de Z: 2730 divise  $n^{13} n$
- 3°) Montrer que pour tout n de Z :  $2^{15} 2^3$  divise  $n^{15} n^3$

# **EXERCICE N°27**







### **EXERCICE N°28**

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1Démontrer que si  $(a^2 + a b - b^2)^2 = 1$ , alors a et b sont premiers entre eux.

2° On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs (a ; b) terminer les couples d'entiers strictement positifs (a ; b)

 $(a^2 + a b - b^2)^2 = 1$ . Un tel couple sera appelé solution.

- a) Déterminer a lorsque a = b.
- b) Vérifier que (1; 1), (2; 3) et (5; 8) sont trois solutions particulières.
- c) Montrer que si (a ; b) est solution et si a  $\neq$  b , alors  $a^2 b^2 < 0$ .
- 3° a) Montrer que si (x; y) est une solution différente de (1; 1) alors (x; y) et (y; y + x) sont aussi des solutions.
- b) Déduire de 2° b) trois nouvelles solutions.
- 4° On considère la suite de nombres entiers strictement positif définie par  $a_0 = a_1 = 1$  et pour tout entier n, n > 0,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ .

Démontrer que pour tout entier n > 0,  $(a_n ; a_{n+1})$  est solution. En déduire que les nombres  $a_n$  et  $a_{n+1}$  sont premiers entre  $a_n$ 

### **EXERCICE N°29**

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suival

« Étant donnés deux entiers naturels a et b non aux, si a  $\wedge$  b = 1 alors a²  $\wedge$  b² = 1».

Une suite  $(S_n)$  est définie pour n > 0 par  $S_n$ 

On se propose de calculer, pour tout entire fairer non nul n, le plus grand commun diviseur de  $S_n$  et  $S_{n+1}$ .

- 1°) Démontrer que, pour tout n > 0 an a:  $4S_n = n^2(n+1)^2$
- $2^{\circ}$  )Supposons que n est pair. Solt l'entier naturel non nul tel que n=2 k.
- a) Démontrer que  $S_{2k} \wedge S_{2k+1} + 1)^2 \times (k^2 \wedge (k+1)^2)$ .
- b) Calculer alors  $S_n \wedge S_{n+1}$
- 3°) Supposons que n est impair.

Soit k l'entier naturel nun tel que n = 2 k + 1.

- a) Démontrer que les entres 2 k +1 et 2 k +3 sont premiers entre eux.
- b) Calculer alors  $S_n$   $S_{n+1}$
- 4°) Déduire des précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle  $S_n$  et  $S_{n+1}$  sont premiers entre eux.

### **EXERCICE N°30**

Maths
19) Pour a = 2 puis pour a = 3, déterminer un entier naturel n non nul tel que  $a^n \equiv 1 \mod 7$ .

- a) Montrer que :  $a^6 \equiv 1 \mod 7$ .
- b) On appelle ordre de a mod 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non n
- $\equiv$  1 mod 7. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie  $a^r \equiv \frac{1}{2} (a^r + a^r)$

En déduire que k divise 6.

Quelles sont les valeurs possibles de k?

c) Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

3°)A tout entier naturel n, on associe le nombre  $A^n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ . Montrer que  $A^{2006} \equiv 6 \mod 7$ .

### **EXERCICE N°31**

### Partie A.

- 1°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4 ° est congru à 1 a dulo 3.
- $2^{\circ}$ ) Prouver que  $4^{28} 1$  est divisible par 29.
- 3° )Pour  $1 \le n \le 4$  , déterminer le reste de la division de  $4^n$  (

En déduire que, pour tout entier k, le nombre 4 4 k - 1 est diverble par 17.

- 4° )Pour quels entiers naturels n le nombre 4 n 1 est-it divisible par 5?
- 5° ) A l'aide des questions précédentes, déterminer qualité diviseurs premiers de  $4^{28} 1$ .

### Partie B.

Soit p un nombre premier différent de 2.

- 1° Démontrer qu'il existe un entier  $n \ge 1$  tel que  $1 \pmod{p}$ .
- 2° Soit n > 1 un entier naturel tel que  $4^n = p$  ( ). On note b le plus petit entier strictement positif tel que
- $4^b \equiv 1 \pmod{p}$  et r le reste de la division addidienne de n par b.
- a) Démontrer que  $4^r \equiv 1 \pmod{p}$ . En dequire que r = 0.
- b) Prouver l'équivalence :  $4^n 1$  est multiple de b.
- c) En déduire que b divise p 3

### **EXERCICE N°32**

1°)Calculer le  $(4^5 - 1) \land (4^5 - 1)$ .

 $2^{\circ}$ )( $u_n$ ) est la suite définite  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et, pour tout entier naturel n, par  $u_{n+2} = 5$   $u_{n+1} - 4$   $u_n$ .

Calculer u<sub>2</sub>, u<sub>3</sub> et u<sub>6</sub>

- 3°)a)Montrer que  $(u_n)$  vérifie, pour tout entier naturel n,  $u_{n+1} = 4 u_n + 1$ .
- b)Montrer que, pour mut entier naturel n, un est un entier naturel.
- c)En déduire, pour tout entier naturel n, le  $u_n \wedge u_{n+1}$  .







a) Montrer que  $(\nu_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme  $\nu_0$ 

b)Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de n.

c)Déterminer, pour tout entier naturel n, le  $(4^n-1) \mathrel{\wedge} (4^{n+1}-1)$  .

