Fiche de cours — 4ème Maths
Arithmétiques

Divisibilité dans Z

Soit a un entier et d un entier non nul.
On dit que d est diviseur de a ou a est divisible par d, s'il existe un entier q tel que $a = dq$.
Notation : $d|a \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} /\ a = dq$.

•Si $d|a$ alors $-d|a$

Soit a , b deux entiers non nuls et c un entier.
•Si $a|b$ et $b|a$ alors $a = b$ ou $a = -b$.

•Si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$

•Si $a|b$ et $a|c$ alors $a|xb + yc$ pour touts $x, y \in \mathbb{Z}$

Quotient et reste

Soit a et b deux entiers avec b non nul.
On appelle quotient de a par b l'entier q défini de la manière suivante :

•q est le plus grand entier inférieur ou égale à $\frac{a}{b}$ si $b > 0$

•q est le plus petit entier supérieur ou égale à $\frac{a}{b}$ si $b < 0$

•On appelle reste de a par b l'entier $r = a - bq$
$\exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / a = bq + r$ et $0 \le r < |b|$

•Le reste de tout entier n dans la division euclidienne par un entier non nul b est un élément de l'ensemble $\{0,1,2,...,|b| - 1\}$

Congruence modulo n

Définition et notation:

Soit n un entier naturel non nul et a et b deux entiers .
*)On dit que a est congru à b modulo n (ou a et b sont congrus modulo n)si $a - b$ est un multiple de n. On note alors $a \equiv b (\mathrm{mod}\, n)$ ou $a \equiv b[n]$
*)Pour tout entier a, il existe un unique entier $r \in \{0,1,...,n-1\}$ tel que $a \equiv r[n]$. On dit que r est le reste' modulo n de a .

Propriétés

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$

$a \equiv b[n] \Leftrightarrow n|a - b$

$a \equiv b[n] \Leftrightarrow a \equiv r[n]$ et $b \equiv r[n]$

$a \equiv a[n]$

Si $a \equiv b[n]$ alors $b \equiv a[n]$

Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors $a \equiv c[n]$

Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $a + c \equiv b + d[n]$, $ac \equiv bd[n]$, $ha \equiv ha[n]$ $(h \in \mathbb{Z})$ et $a^k \equiv b^k[n]$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et a un entier naturel alors : $p|a^p - a$

Exemple : Montrer que, si $13|n^{13}$ alors $13|n$.

On a : 13 est un nombre premier alors $13|n^{13} - n$ et d'autre part on a : $13|n^{13}$ alors

$13|(n^{13} - (n^{13} - n))$

alors $13|n$

PGCD et PPCM

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

1°)Le plus grand entier qui divise à la fois a et b s'appelle le plus grand commun diviseur ou PGCD de a et b. On le note $a \wedge b$.

Formellement : $d = a \wedge b$ si et seulement si $\begin{cases} d|a \text{ et } d|b \\ \forall k \in D_a \cap D_b ,\ k|d \end{cases}$

2°)La plus petit entier strictement positif qui est à la fois multiple de a er b s'appelle le plus petit commun multiple ou PPCM de a et b. On le note $a \vee b$

Formellement : $m = a \vee b$ si et seulement si $\begin{cases} a|m \text{ et } b|m \\ \forall n \in M_a \cap M_b ,\ m|n \end{cases}$

3°)Deux entiers relatifs non nul a et b sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est égale à 1.

Propriétés

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

• $a \wedge b > 0$ • $a \wedge b = \lvert a\rvert \wedge \lvert b\rvert$ • Si $b\lvert a$ alors $a \wedge b = \lvert b\rvert$ • Si b ne divise pas a et si r est le reste modulo b de a alors $a \wedge b = b \wedge r$. • $a \wedge b = b \wedge a$ • Pour tout $k \in Z^*$: $ka \wedge kb = \lvert k\rvert (a \wedge b)$ • $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $c \in Z^*$	• $a \vee b = \lvert a\rvert \vee \lvert b\rvert$ • $(a \wedge b) \times (a \vee b) = \lvert ab\rvert$ • Si $b\lvert a$ alors $a \vee b = \lvert a\rvert$ • Pour tout $k \in Z^*$: $ka \vee kb = \lvert k\rvert (a \vee b)$ • $a \vee b = b \vee a$ • $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $c \in Z^*$

Théorème

Soit a et b deux entiers non nuls. Alors il existe un unique couple d'entiers (a', b') tel que $a = (a \wedge b)a'$, $b = (a \wedge b)b'$ et $a' \wedge b' = 1$

Lemme de Gausse

Soit a, b et c trois entiers non nuls. Si $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a|bc \end{cases}$ alors $a|c$

Théorème

Soit a et b deux entiers non nuls et n un entier. Si $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a|n \\ b|n \end{cases}$ alors $ab|n$

Théorème (inverse modulo b)

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $b \geq 2$ et $a \wedge b = 1$.

Alors il existe un unique entier non nul $u \in \{0,1,...,b-1\}$ tel que $au \equiv 1[b]$.

On dit que u est inverse de a modulo b.

Identité de Bézout

Soit a et b deux entiers non nuls

*) $a \wedge b = 1$ si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$

*)Soit $d = a \wedge b$, alors il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$

Equations de la forme : ax+ by = c.

Soit, a, b et c trois entiers et $d = a \wedge b$.

L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $Z \times Z$, si et seulement si d divise c.

Séries d'exercices — 4ème Maths
Arithmétiques

EXERCICE N°1

1°)Quel est le reste de la division par 7 du nombre 32^{45}

2°) Quel est le reste de la division par 5 du nombre 24^{40}

3°) Déterminer le chiffre des unités de l'écriture décimale de l'entier 7^{77}.

4°) Déterminer le chiffre des dizaines de l'écriture décimale de l'entier 444^{444}.

EXERCICE N°2

p et q sont des entiers naturels.

1°) Démontrez que $2^{pq}-1$ est divisible par $2^{p}-1$ et par $2^{q}-1$.

2°) Déduisez en que pour que $2^{n}-1$ soit premier, il faut que n soit premier.

3°)Prouvez à l'aide d'un contre exemple que la condition « n est premier » n'est pas suffisante pour que $2^{n}-1$ soit premier.

EXERCICE N°3

Montrez que pour tout couple d'entier relatifs (x , y) , si x² + y² est divisible par 7 alors x et y sont aussi divisibles par 7.

EXERCICE N°4

Soit $n\in Z$. Montrer que : $\begin{cases} n^2 \equiv 0[8] \text{ ou } n^2 \equiv 4[8] & \text{si } n \equiv 0[2] \\ n^2 \equiv 1[8] & \text{si } n \equiv 1[2] \end{cases}$

EXERCICE N°5

1°) Quel est le reste de la division euclidienne de $3^{10}+1$ par 10 ?

En déduire le reste de la division euclidienne de $7^{10}+1$ par 10.

2°)Soit $r\in N$, $0\le r\le 9$. Montrer que 10 divise $r^{10}+1$ si, et seulement si, $r\in\{3,7\}$.

3°) Déterminer l'ensemble des entiers naturels x tels que 10 divise $x^{10}+1$.

EXERCICE N°6

On se propose de déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x,y)\in N\times N$, solutions de l'équation :

$(E) : 2^{x}-3^{y}=1$

1°) Soit $k\in N$.

a) Quel est le reste de la division euclidienne de 9^{k} par 8 ?

b) Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k}+1$ par 8, puis de $3^{2k+1}+1$ par 8.

2°) Soit (x, y)$\in$ N × N, un couple solution de l'équation (E). Montrer, à l'aide de 1°) que $x \leq 2$.

3°) En déduire tous les couples (x,y) $\in$ N × N, solutions de l'équation (E).

EXERCICE N°7

1°)Montrer que pour tout entier $n \geq 3$: $5^{2^{n-2}} - 1 = 4\left(1+5^{2^1}\right)\left(1+5^{2^2}\right)...\left(1+5^{2^{n-3}}\right)$

2°)En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, 2^n divise $5^{2^{n-2}} - 1$ et 2^{n+1} ne divise pas $5^{2^{n-2}} - 1$.

EXERCICE N°8

Montrer que pour tout n de N : $\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$ est divisible par 2^n.

EXERCICE N°9

Montrer que pour tout n de N^* :

1°)5 divise $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$

2°)9 divise $4^n - 1 - 3n$

EXERCICE N°10

Montrer que pour tout n de N^* :

5 divise $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ si et seulement si équivaut à 4 ne divise pas n.

EXERCICE N°11

1°) On considère l'équation (E) : 17x – 6y = 2, où x et y sont des entiers.

a) Résoudre dans Z^2 l'équation 17x = 6y.

b) Déterminer une solution particulière de (E).

c) En déduire tous les couples de Z^2 solutions de l'équation (E).

d) Montrer que le PGCD des couples solutions de (E) est 1 ou 2.

e) Déterminer les couples (x ; y) de Z^2 solutions de (E) dont le PGCD est 2.

f) Déterminer le couple (x_0 ; y_0) solution de (E) tel que : $x_0 \wedge y_0 = 2$ et $100 \leq y_0 \leq 150$

2°) Une bande de 17 pirates s'est emparé d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager équitablement et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais leur bateau fait naufrage et seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés : le partage laisserait alors 5 pièces d'or au cuisinier.

a) On note N le nombre de pièces d'or du butin, x le nombre de pièces de chaque pirate avant le naufrage et y le nombre de pièces d'or de chaque pirate après le naufrage. Exprimer N en fonction de x, puis en fonction de y.

b) Ecrire alors la relation liant x et y.

c) En utilisant les résultats de la question 1°c), déterminer la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates avec du civet de rat.

d) Soit dans $Z \times Z$ l'équation (E) : $2x - 8y = 5$.

EXERCICE N°12

1°) On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de Z^2 : $11n - 24m = 1$.

a) Justifier, que cette équation admet au moins une solution.

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2°) a) Justifier que $10^p - 1$ divise $10^{pk} - 1$, $k, p \in N$.

b) (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$.

c) En déduire l'existence de deux entiers N et M tels que : $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$.

d) Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e) Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

EXERCICE N°13 : (BAC 2008.P)

1°) Soit dans $Z \times Z$ l'équation (E) : $2x - 8y = 5$.

Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 8k - 1$ et $y = 3k - 1$

2°) a) Soit n , x et y trois entiers tels que $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$.

Montrer que (x, y) est une solutions de (E).

b) On considère le système $(S)\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ où n est un entier.

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23[24]$

3°) a) Soit k un entier naturel.

Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.

EXERCICE N°14

1°) a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u - 13v = 1$.

b) En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0 - 26v_0 = 4$.

c) Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.

2°) On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de an + b par 26.

On décide de coder un message, en procédant comme suit :

A chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associe puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.

On ne connait pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

a) Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\begin{cases} 5a+b \equiv 10[26] \\ 19a+b \equiv 14[26] \end{cases}$

b) En déduire qu'il existe un entier k tel que 14a − 26k = 4.

c) Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0 \le a \le 25$ et $0 \le b \le 25$ tels que

$$\begin{cases} 5a+b \equiv 10[26] \\ 19a+b \equiv 14[26] \end{cases}$$

3°) On suppose que a = 17 et b = 3.

a) Coder le message « GAUSS ».

b) Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors

$17(n-p) \equiv 0[26]$

En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.

4°) On suppose que a = 17 et b = 3.

a) Soit n un entier naturel.

Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n)+9-n$ par 26

b) En déduire un procède de décodage.

c) En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

EXERCICE N°15 : SUITE DE FIBONNACCI

Soit $(f_n)_{n\in N}$ définie par : $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et pour tout n de N : $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

1°)Montrer que pour tout n de N : 2 divise f_n si et seulement si 3 divise n.

2°)Montrer que pour tout n de N : 3 divise f_n si et seulement si 4 divise n.

3°)Montrer que pour tout n de N : 4 divise f_n si et seulement si 6 divise n.

EXERCICE N°16 : NOMBRES DE MERSENNE

Soient a,b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que :

1°) $(2^a - 1)$ divise $(2^{ab} - 1)$.

2°) $(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = (2^{a \wedge b} - 1)$

3°)Si $2^a - 1$ premier alors a premier.

EXERCICE N°17 :NOMBRES DE FERMAT

Partie A.

On appelle nombres de Fermat les nombres entiers $F_n = 2^{2^n} + 1$ où n est un entier naturel.

Montrer que pour tout n de N^* : F_n divise $2^{F_n} - 2$

Partie B.

On se propose de démontrer que : " si le nombre $(2^n + 1)$ est premier, alors le nombre n est une puissance de 2. "

I.Soient b et p deux entiers naturels non nuls.

1°) Factoriser $b^{2p+1} - b$. En déduire que $b^{2p+1} - b$ et $b^{2p+1} + 1$ sont divisibles par b + 1.

2°) Démontrer que : quels que soient les entiers a, m, p non nuls, $a^{m(2p+1)} + 1$ est divisible par $a^m + 1$.

II. 1°) a) Soit n un entier naturel tel que le nombre $(2^n + 1)$ soit premier.

Démontrer par l'absurde que n ne peut pas avoir de diviseurs impairs autre que 1.

b) Conclure.

2°) a) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que F_n n'est pas un nombre premier.

b) Waclav Franciszek Sierpinski (1882 – 1970) a démontré que tout nombre de Fermat, non premier, admet un diviseur de la forme : $k \times 2^{n+2} + 1$, où k est un entier naturel non nul. Vérifier que cela correspond à l'exemple précédent.

EXERCICE N°18 :THEOREME DE WILSON

Soit p un entier naturel premier. On note Ep l'ensemble $\{1;2;...;p-1\}$.

1°) Montrez que tout élément de Ep est premier avec p.

2°)Montrez que pour tout a de Ep , il existe b unique dans Ep tel que $ab \equiv 1[p]$.

3°)Déterminez les a éléments de Ep tels que $a^2 \equiv 1[p]$.

4°)Montrez que $(p-1)! \equiv p-1[p]$

5°)Déduisez-en que pour tout p entier naturel premier, $(p-1)!+1$ est divisible par p.

EXERCICE N°19

Soient $a \in Z$ impair et $n \in N$ tel que $n \geq 3$. Etablir : $a^{2^{n-2}} \equiv 1[2^n]$

EXERCICE N°20

Montrez que, pour tout b entier ≥ 3 , le nombre $x = 1 + b + 2b^2 + b^3 + b^4$ n'est pas un nombre premier.

EXERCICE N°21

Soit pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $s_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$

1°)Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $s_n = (2n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k(2n+1-k)}$

2°)En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: s_n est un entier divisible par 2n+1.

EXERCICE N°22

1°)Décomposer 319 en facteurs premiers.

2°)Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour les nombres : 3x + 5y et x + 2y.

3°)Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système d'inconnues a et b : $\begin{cases} (3a+5b)(a+2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$ où m est le PPCM de a et b.

EXERCICE N°23

1°) a est un entier naturel. Montrez que $a^5 - a$ est divisible par 10.

2°) a et b sont des entiers naturels avec $a \geq b$. Démontrez que si $a^5 - b^5$ est divisible par 10 alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

EXERCICE N°24

Montrer que les entiers suivants sont composés :

1°) $n^4 - n^2 + 16$, $n \in \mathbb{Z}$

2°) $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$

3°) $2^{4n+2} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$

EXERCICE N°25

1°)Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $(n^2+n) \wedge (2n+1) = 1$

2°)Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $(n^3+2n) \wedge (n^4+3n^2+1) = 1$

3°)Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $(n^2+1) \wedge ((n+1)^2+1) \in \{1,5\}$

EXERCICE N°26

1°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{Z}$: 42 divise $n^7 - n$

2°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{Z}$: 2730 divise $n^{13} - n$

3°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{Z}$: $2^{15} - 2^3$ divise $n^{15} - n^3$

EXERCICE N°27

Montrer que pour tout n de Z : $\frac{n^7}{7}+\frac{n^5}{5}+\frac{23n}{35}\in Z$

EXERCICE N°28

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1Démontrer que si $(a^2 + a b - b^2)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2° On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs (a ; b) tels que :

$(a^2 + a b - b^2)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

a) Déterminer a lorsque a = b.

b) Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

c) Montrer que si (a ; b) est solution et si $a \neq b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3° a) Montrer que si (x ; y) est une solution différente de (1 ; 1) alors (y − x ; x) et (y ; y + x) sont aussi des solutions.

b) Déduire de 2° b) trois nouvelles solutions.

4° On considère la suite de nombres entiers strictement positifs (a_n), définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n, n > 0, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Démontrer que pour tout entier n > 0, $(a_n ; a_{n+1})$ est solution.

En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE N°29

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si $a \wedge b = 1$ alors $a^2 \wedge b^2 = 1$ ».

Une suite (S_n) est définie pour n > 0 par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$.

On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1°) Démontrer que, pour tout n > 0, on a : $4S_n = n^2(n+1)^2$

2°)Supposons que n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que n = 2 k.

a) Démontrer que $S_{2k} \wedge S_{2k+1} = (2k+1)^2 \times \left(k^2 \wedge (k+1)^2\right)$.

b) Calculer alors $S_n \wedge S_{n+1}$

3°) Supposons que n est impair.

Soit k l'entier naturel non nul tel que n = 2 k +1.

a) Démontrer que les entiers 2 k +1 et 2 k +3 sont premiers entre eux.

b) Calculer alors $S_n \wedge S_{n+1}$

4°) Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE N°30

1°)Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \bmod 7$.

2°)Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a) Montrer que : $a^6 \equiv 1 \bmod 7$.

b) On appelle ordre de a mod 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \bmod 7$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \bmod 7$.

En déduire que k divise 6.

Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c) Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

3°)A tout entier naturel n, on associe le nombre $A^n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.

Montrer que $A^{2006} \equiv 6 \bmod 7$.

EXERCICE N°31

Partie A.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.

2°) Prouver que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.

3°)Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17.

En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

4°)Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?

5°)A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B.

Soit p un nombre premier différent de 2.

1° Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1 \pmod p$.

2° Soit $n > 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \pmod p$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que

$4^b \equiv 1 \pmod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.

a) Démontrer que $4^r \equiv 1 \pmod p$. En déduire que $r = 0$.

b) Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.

c) En déduire que b divise $p - 1$.

EXERCICE N°32

1°)Calculer le $(4^5 - 1) \wedge (4^6 - 1)$.

2°)(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.

Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

3°)a)Montrer que la suite (u_n) vérifie, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

b)Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

c)En déduire, pour tout entier naturel n, le $u_n \wedge u_{n+1}$.

4°)Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

a)Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0

b)Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c)Déterminer, pour tout entier naturel n, le $(4^n - 1) \wedge (4^{n+1} - 1)$.