Résumé :*Identité de Bézout*
Niveau :*Bac mathématiques*

Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber* -saberbjd2003@yahoo.fr

Théorème et définition :*"PGCD"*

Si a et b sont deux entiers non nuls, alors il existe un unique entier naturel d qui vérifieles deux conditions suivantes :

- d divise a et $d$divise$b$,
- Si un entier k divise a et b alors il divise$d$.

L'entier d défini plus haut est noté$a \wedge b$ et appelé **le plus grand commun diviseur** dea et b.

Conséquences :

- Pour tous entiers a et b non nuls,$a \wedge b > 0$.
- Pour tous entiers a et b non nuls,$a \wedge b = |a| \wedge |b|$.

Propriétés :

Soit a et b deux entiers non nuls.

1) Si b divise $a$alors$a \wedge b = |b|$.
2) Si b ne divise pas a et si r est le reste modulo $b$de$a$,alors$a \wedge b = b \wedge r$.
3) $a \wedge b = b \wedge a$.
4) Pour tout entier non nul$k$, $ka \wedge kb = |k|(a \wedge b)$.
5) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

Définition :*"Entiers premiers entre eux"*

Deux entiers non nuls a et b sont dits premiers entre eux, si$a \wedge b = 1$.

Théorème :

Lemme de Gauss :

Soit$a$, b et c trois entiers non nuls. Si $a \wedge b = 1$ et a divise bc alors a divise c.

Théorème :

Théorème et définition :*"PPCM"*

Conséquences :

- Pour tous entiers a et b non nuls,$a \vee b = |a| \vee |b|$.
- Pour tous entiers a et b non nuls,$(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$.

Propriétés :

Soit a et b deux entiers non nuls.

1) Si b divise a alors $a \vee b = |\quad|$.
2) Pour tout entier non nul$k$, $ka \vee kb = |k|(a \vee b)$.
3) $a \vee b = b \vee a$.
4) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

Théorème :

Théorème :*"Identité de Bézout"*

Deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deuxentiers u et v tels que$au + bv = 1$.

Corollaire :

Soit a et b deux entiers non nuls et$d = a \wedge b$. Alors il existe deux entiers u et v tels que$au + bv = d$.

Théorème :

Soit$a$, b et c trois entiers et$d = a \wedge b$.

L'équation $ax + by = c$ admet des solutionsdans$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, si et seulement si, d divise c.