Probabilité conditionnelle

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : ÉQUIPE ACADEMIQUE MATHEMATIQUES

Probabilité conditionnelle

POISSON Siméon Denis, français, 1781 - 1840

Brillant polytechnicien, élève de Fourier et de Laplace, astronome et physicien. Il occupa de nombreux et importants postes d'enseignement : professeur à l'Ecole Polytechnique, professeur de mécanique à la faculté des sciences de Paris, directeur de *l'enseignement mathématique des collèges de France*. Élevé à la dignité de pair de France par Louis-Philippe (1837), Poisson fut nommé doyen de la faculté des sciences quelques mois avant sa mort.

On le connaît bien sûr pour sa célèbre loi de probabilités portant son nom (*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, 1837), mais ses travaux portent cependant principalement en électricité, magnétisme, mécanique céleste, mouvements vibratoires (théorie de la chaleur, théorie des ondes).

En introduisant de nombreux concepts mathématiques liés aux équations de Laplace (théorie du potentiel électrostatique, équations aux dérivées partielles), Poisson apparaît, à la suite de Daniel Bernoulli et Fourier comme le bâtisseur de la *physique mathématique* moderne : étude, au moyen de la seule analyse mathématique, du comportement d'un phénomène, en tant que conséquence des lois, attribuées par l'expérience, qui le régissent.

C'est à la demande de Poisson et de Fourier, dès 1834, qu'une chaire de *Calcul des probabilités et de physique mathématique* sera créée à la faculté des sciences de Paris (1850). Cette mise en place tardive s'explique par le manque de considération de ces branches nouvelles reposant, pour certains esprits, sur un manque de rigueur.

RESUME DU COURS

Dénombrement

Quel modèle choisir ?

Si l'énoncé contient le mot successif , il faut tenir compte de tous les ordres dans lesquels on peut obtenir un événement donné.
On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles, le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

Si l'énoncé contient les mots successif et avec remise ,cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.
Le modèle mathématique est la p-liste.

n^p

Si l'énoncé contient les mots successif et sans remise , cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments).
Le modèle mathématique est l'arrangement.

A_n^p

Si l'énoncé contient le mot simultanément , cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments n'a pas d'importance.
Le modèle mathématique est la combinaison.

C_n^p

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Calculatrice :

$C_{10}^3 \to\to 10 \boxed{SHIFT} \boxed{\div} 3 \boxed{=}$ $\boxed{10C3 = \quad 120}$

$A_{10}^3 \to\to 10 \boxed{SHIFT} \boxed{\times} 3 \boxed{=}$ $\boxed{10P3 = \quad 720}$

Probabilité

1°) Définitions et propriétés

Définition :

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ un univers. On associe à chaque événement élémentaire $\{a_i\}$ un nombre $p_i \geq 0$, appelé **« probabilité de l'événement** $\{a_i\}$ **»**, de telle sorte que :

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Plus généralement, la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A.

On a $p(\Omega) = 1$ et $p\ (\varnothing) = 0$.

Langage :

Vocabulaire ensembliste	*Langage probabiliste*
Ensemble Ω	**Univers,** ou encore univers des « possibles » ou des « éventualités »
$A \subset \Omega$	A est un **événement**
$x \in A$	x est une **éventualité favorable** à A
$A \subset \Omega$ $\quad \overline{A} \subset \Omega$	A et $\overline{A}$ sont des **événements contraires**
$A \cap C = \varnothing$	A et C sont des événements **incompatibles**
Singleton $\{x\}$	$\{x\}$ est un événement **élémentaire**
$D = A \cap C$	D est l'événement « A et C »
$F = A \cup C$	F est l'événement « A ou C »
$\varnothing$	$p(\varnothing) = 0$ événement **impossible**
Ω	$p(\Omega) = 1$ événement **certain**

Propriétés des probabilités

Parties de Ω	*événement*	*propriétés*
$\varnothing, \Omega$	Evénement **impossible, certain**	$p(\varnothing) = 0,\ p(\Omega) = 1$
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont **incompatibles**	$P(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est l'événement **contraire** de A	$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
A, B	A et B quelconques	$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

On notera que, pour tout événement $A, 0 \leq p(A) \leq 1$.

Situations d'équiprobabilités :

Définition

Il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Théorème

Lorsqu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Probabilité Conditionnelle

Définition :

p désigne une probabilité sur un univers fini Ω.

A et B étant deux événements de Ω, B étant de probabilité non nulle.

- On appelle ***probabilité conditionnelle*** de l'événement A sachant que B est réalisé le réel noté $p\ (A/B)=\dfrac{P\ (A\cap B)}{p\ (B)}$.
- Le réel p(A /B) se note aussi $p_B(A)$ et se lit aussi probabilité de A sachant B.

Remarque :

Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles p(A/B) et p(B/A) sont toutes les deux définies et on a : p(A ∩ B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A).

C'est le **principe des probabilités composées**

Arbres pondérés

Lorsqu'on est en présence d'une situation de conditionnement, il est conseillé d'établir un arbre de probabilité

Règles de construction

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est **1**.

La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

Indépendance

Événements indépendants

Définition :

A et B sont 2 événements de probabilité non nulle.

- A et B sont ***indépendants*** lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.
- A et B sont ***indépendants*** si et seulement si p(A/B) = p(A) ou p(B/A) = p(B).

Théorème :

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** si et seulement si ils vérifient une des trois conditions :

$$p(A/B) = p(A) \text{ ou } p(B/A) = p(B) \text{ ou } p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

Remarque :

Ne pas confondre événements **indépendants** et événements **incompatibles.**

- 2 événements A et B sont **indépendants** si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.
- 2 événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B= \varnothing$.

Probabilités Totales

Définition :

Soient Ω un univers associé à une expérience aléatoire et n un entier$\geq$ 2.
Les événements A_1, A_2, ..., A_n forment une ***partition*** de Ω si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- pour tout $i \in \{1 ; 2 ;... ; n\}$, $A_i \neq \varnothing$.
- pour tous i et j (avec $i \neq j$) de $\{1 ;2 ;...n\}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.
- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

Formule des probabilités totales

Soient A_1, A_2, ..., A_n une ***partition*** de l'univers Ω constituée d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω.
Alors :

$$p(A)=p(B\cap A_1)+p(B\cap A_2)+\cdots p(B\cap A_n) \qquad \text{ou}$$

$$p(A)=p(B/A_1)\times p(A_1)+p(B/A_2)\times p(A_2)+\cdots p(B/A_n)\times p(A_n)$$

TAKIACADEMY.COM
" JAMAIS PLUS SIMPLE "

Lois de probabilités continues

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Lois de probabilités continues

POISSON Siméon Denis, français, 1781- 1840

Brillant polytechnicien, élève de Fourier et de Laplace, astronome et physicien. Il occupa de nombreux et importants postes d'enseignement : professeur à l'Ecole Polytechnique, professeur de mécanique à la faculté des sciences de Paris, directeur de *l'enseignement mathématique des collèges de France*. Élevé à la dignité de pair de France par Louis-Philippe (1837), Poisson fut nommé doyen de la faculté des sciences quelques mois avant sa mort.

On le connaît bien sûr pour sa célèbre loi de probabilités portant son nom (*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, 1837), mais ses travaux portent cependant principalement en électricité, magnétisme, mécanique céleste, mouvements vibratoires (théorie de la chaleur, théorie des ondes).

En introduisant de nombreux concepts mathématiques liés aux équations de Laplace (théorie du potentiel électrostatique, équations aux dérivées partielles), Poisson apparaît, à la suite de Daniel Bernoulli et Fourier comme le bâtisseur de la *physique mathématique* moderne : étude, au moyen de la seule analyse mathématique, du comportement d'un phénomène, en tant que conséquence des lois, attribuées par l'expérience, qui le régissent.

C'est à la demande de Poisson et de Fourier, dès 1834, qu'une chaire de *Calcul des probabilités et de physique mathématique* sera créée à la faculté des sciences de Paris (1850). Cette mise en place tardive s'explique par le manque de considération de ces branches nouvelles reposant, pour certains esprits, sur un manque de rigueur.

RESUME DU COURS

Variable aléatoire continue

Définition :

Une variable aléatoire X est dite **continue** lorsqu'elle peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle I de IR.

On s'intéresse alors à des événements du type : << La valeur de X est comprise entre les réels a et b >> Nous noterons $(a \leq X \leq b)$ un tel événement.

Densité

On appelle densité de probabilité continue la fonction f positive et continue sur [a, b] telle que :

$\int_a^b f(t)dt = 1$ et pour tous x et y de [a, b], on a p($x \leq$ X $\leq$ y) = $\int_x^y f(t)dt$.

Exemples de variables aléatoires continues

Loi uniforme

Définition :

Soit un intervalle $[a,b]$. La fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x) = \frac{1}{b-a}$ est appelée densité de la probabilité uniforme sur $[a,b]$.

On appelle probabilité uniforme sur $[a,b]$ l'application qui à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$ associe le réel $p([c,d]) = \int_c^d f(x)dx$.

Conséquences :

- $p([a,b])=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=1$
- Pour tout réel x_0 de $[a,b]$ on a : $p(\{x_0\})=\int_{x_0}^{x_0} f(x)dx=0$
- $p([a,b])=p(]a,b])=p([a,b[)=p(]a,b[)$.
- si on désigne par $\overline{[c,d]}$ le complémentaire de $[c,d]$ dans $[a,b]$, alors $p(\overline{[c,d]})=1-p([c,d])$.

Définition :

on dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[a,b]$ suit la loi de probabilité uniforme p

si : $p(c\le X\le d)=\int_c^d f(x)dx=\frac{d-c}{b-a}$

Fonction de répartition d'une varaible qui suit une loi uniforme

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité uniforme p sur l'intervalle $[a,b]$.

On appelle fonction de répartition de X, l'application $F: IR \mapsto [0,1]$ définie par :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<a \\ p(a\le X\le x) & si\ x\in[a,b] \\ 1 & si\ x>b \end{cases}$$

Loi exponentielle

Définition :

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application p qui :

- à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,d])=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx$

- à tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel

$$p([c,+\infty[) = \lim_{x \to +\infty} \int_c^x \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda c}$$

Propriétés :

- pour tout réel $t > 0$, $p([0,t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$.
- $p([t,+\infty[) = 1 - p([0,t]) = e^{-\lambda t}$.

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ,

si : $p(c \le X \le d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$ et $p(X \ge c) = e^{-\lambda c}$

Fonction de répartition d'une varaible qui suit une loi exponentielle

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle p sur de paramètre λ.
On appelle fonction de répartition de X, l'application $F : IR \mapsto [0,1]$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ p(0 \le X \le x) = 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

Exercice rédigé

On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

a) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie :

$$p(X > 10) = 1 - p(X \le 10) = 1 - \int_0^{10} 0,1 e^{-0,1t} dt = \frac{1}{e}.$$

b) On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?

$$p(X > 12 / x > 10) = \frac{p(X > 12)}{p(X > 10} = \frac{e^{-0,1\times 12}}{e^{-0,1\times 10}} = e^{-0,2} \simeq 0,82.$$

c) Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans :

$$p(X > 2) = 1 - p(X \le 2) = 1 - \int_0^2 0,1 e^{-0,1t} dt = e^{-0,2} \simeq 0,82$$

On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de son âge.

On dit que X est une loi de durée de vie sans vieillissement.

Variables aléatoires discrètes

Academy

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : *ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES*

Variables aléatoires discrètes

POISSON Siméon Denis, français, 1781- 1840

Brillant polytechnicien, élève de Fourier et de Laplace, astronome et physicien. Il occupa de nombreux et importants postes d'enseignement : professeur à l'Ecole Polytechnique, professeur de mécanique à la faculté des sciences de Paris, directeur de *l'enseignement mathématique des collèges de France*. Élevé à la dignité de pair de France par Louis-Philippe (1837), Poisson fut nommé doyen de la faculté des sciences quelques mois avant sa mort.

On le connaît bien sûr pour sa célèbre loi de probabilités portant son nom (*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, 1837), mais ses travaux portent cependant principalement en électricité, magnétisme, mécanique céleste, mouvements vibratoires (théorie de la chaleur, théorie des ondes).

En introduisant de nombreux concepts mathématiques liés aux équations de Laplace (théorie du potentiel électrostatique, équations aux dérivées partielles), Poisson apparaît, à la suite de Daniel Bernoulli et Fourier comme le bâtisseur de la *physique mathématique* moderne : étude, au moyen de la seule analyse mathématique, du comportement d'un phénomène, en tant que conséquence des lois, attribuées par l'expérience, qui le régissent.

C'est à la demande de Poisson et de Fourier, dès 1834, qu'une chaire de *Calcul des probabilités et de physique mathématique* sera créée à la faculté des sciences de Paris (1850). Cette mise en place tardive s'explique par le manque de considération de ces branches nouvelles reposant, pour certains esprits, sur un manque de rigueur.

RESUME DU COURS

Variable aléatoire

Pour décrire le résultat d'une expérience aléatoire associée à un univers Ω, on fait souvent correspondre un nombre à chaque élément de Ω.

Définition :

Soit Ω un univers muni d'une probabilité p.

On appelle **aléa numérique X** défini sur Ω une application qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Désignons par X(Ω) l'ensemble des valeurs possibles de X. $X(\Omega)=\{x_1;x_2;.....;x_n\}$.

La **loi de probabilité de X** est l'application qui à tout élément x de X(Ω) fait correspondre la probabilité que X prenne cette valeur x. Par abus de langage on dit que c'est la probabilité que « X soit égal à x ».

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Espérance mathématique

Définition

Soit un aléa numérique X prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$. On appelle **espérance mathématique** de X le nombre E(X) défini par : $E(X)=\sum x_i p_i$.

Remarque :

L'espérance mathématique est la moyenne des x_i pondérées par les probabilités $p_i = p(X = x_i)$.

Dans le cas où la variable aléatoire X indique le gain algébrique réalisé dans un jeu, on dit que le jeu est :

- équitable si $E(X) = 0$
- favorable ou gagnant si $E(X) > 0$
- défavorable ou perdant si $E(X) < 0$

Propriétés :

Soient X et Y deux aléas numériques définies sur Ω et a un réel. L'espérance des variables aléatoires X + Y et a X est donnée par :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \text{ et } E(a X) = a E(X).$$

Varaince et Ecart-type

Variance :

Soit un aléa numérique X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$.

On appelle **variance** de X, le nombre noté V(X) défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E(X)^2.$$

Propriétés :

$V(X) \geq 0$.

$V(X + a) = V(X)$.

$V(a X) = a^2 V(X)$.

L'écart type

L'écart type d'un aléa numérique X est défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Fonction de répartition

Définition

Soit un aléa numérique X défini sur un univers Ω muni d'une probabilité p.

La fonction de répartition F de X est la fonction de IR vers [0 ; 1] qui, à tout réel x, associe la probabilité que X soit inférieure ou égale à x :

$F(x) = p(X \leq x)$.

La fonction de répartition est constante par intervalles.

Loi Binomiale

Définitions :

- On appelle schéma de Bernoulli, une suite d'épreuves identiques qui vérifient les conditions suivantes :
  - Chaque épreuve donne lieu à deux issues : « S » : succès et « E » : échec.
  - Les épreuves sont indépendantes les unes des autres.
  - La probabilité de S (respectivement de E) est la même pour chaque épreuve.
- Soit X l'aléa numérique qui à chaque série d'épreuves associe le nombre de succès obtenus.

Si l'épreuve est répétée n fois alors $X(\Omega) = \{0,1,2,\ldots\ldots,n\}$

et on a : $\boxed{\text{pour tout } k \in \{0,1,\ldots\ldots,n\},\ p(X=k) = C_n^k \times [p(S)]^k \times [p(E)]^{n-k}}$

$\rightarrow$ on dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p = p (S) ou aussi une loi de Bernoulli qu'on note

B (n, p).

Théorème :

Soit X un aléa numérique qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Alors E (X) = $n \times p$

V (X) = $np(1-p) = n \times p \times q$ où $q = 1-p$

σ (X) = $\sqrt{npq}$