Fiche de cours *4ème Maths*

Probabilités

Système complet

Soient A_1 , A_2 , ….,A_n forment un système complet d'évènements de Ω ssi :

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ et $\forall i$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ avec $i \neq j$ on a : $A_i \cap A_j = \varnothing$

Exemple : $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3\}$, $A_3=\{4,5,6\}$

A_1 , A_2 et A_3 forment un système complet d'évènements de $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Récapitulation :

Type de tirage	Successif avec remise	Successif sans remise	simultané
Ordre	L'ordre intervient	L'ordre intervient	L'ordre n' intervient pas
Un cas possible	un p-uplet avec possibilité de répétition	un p-uplet d'élément distinct	une partie de p éléments
cardΩ	n^p	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Vocabulaire des probabilités

Expérience aléatoire. Eventualité

On lance un dé ou une pièce de monnaie, on tire une carte dans un jeu…

Seul le hasard intervient.

On parle alors d'expérience aléatoire.

Les différents résultats d'une expérience aléatoire s'appellent des éventualités.

L'ensemble des éventualités s'appelle l'univers, on le note souvent Ω.

Le nombre des éventualités de A s'appelle le cardinal de l'événement . On le note card(A).

Exemple :

On lance un dé.

Il y a 6 éventualités : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

L'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Evénements

Un événement est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers.

On dit que cet événement est réalisé si l'une des éventualités qui le compose est réalisée.

Evénements particuliers :

L'événement certain contient toutes les éventualités. Il est égal à l'univers Ω.

L'événement impossible ne contient aucune éventualité. C'est l'ensemble vide $\varnothing$.

Un événement élémentaire est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité : {a }

Exemple :

On lance un dé.

L'événement certain est {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }.

Les 6 événements élémentaires sont {1}, {2}, {3}, {4}, {5} et {6}.

L'événement « Obtenir un nombre impair » est {1 ; 3 ; 5 }.

Il est composé de trois éventualités.

L'événement « Obtenir un nombre inférieur à 7 » est l'événement certain.

L'événement « Obtenir 8 » est l'événement impossible.

Soit A et B deux événements de Ω.

On dit que A est inclus dans B, et l'on note $A \subset B$, si toutes les éventualités de A appartiennent aussi à B.
L'événement $A \cap B$ est l'ensemble des éventualités communes à A et à B.
L'événement $A \cup B$ est l'ensemble des éventualités qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux.
Deux événements A et B sont dits incompatibles (ou disjoints) lorsqu'ils n'ont aucun élément en commun, c'est-à-dire $A \cap B = \varnothing$
L'événement contraire de A est le complémentaire de A dans Ω. ; on le note $\overline{A}$. (C'est l'événement qui contient toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A.
Des événements forment une partition d'un événement A, s'ils sont incompatibles deux à deux et si leur réunion est égale à A.

Probabilité
On considère un univers Ω lié à une expérience aléatoire, $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Définir une probabilité sur Ω, c'est associer à chaque éventualité x_i un réel positif p_i de sorte que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.
Propriétés :

- $0 \leq p(A) \leq 1$
- $p(\varnothing) = 0$ (la probabilité de l'événement impossible est nulle)
- $p(\Omega) = 1$ (la probabilité de l'événement certain est égale à 1).
- p (A) est la somme des probabilités de tous les événements élémentaires qui forment A.
  Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$, alors $p(A) = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + p(\{a_3\}) + \ldots + p(\{a_k\})$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Si A et B sont incompatibles alors, $p(A \cap B) = 0$ on a donc : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- Quel que soit l'événement A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- Si A_1, A_2 et A_3 forment une partition de D alors $p(D) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3)$. (Cette propriété se généralise à un nombre quelconque d'événements formant une partition de D.)

Equiprobabilité
Lorsque chaque événement élémentaire a la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que les événements élémentaires sont équiprobables.
Propriété :
Si l'on est dans une situation d'équiprobabilité, et que le nombre d'éléments de Ω est n,
La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$,
Pour tout événement A, $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas " favorables"}}{\text{nombre de cas " possibles"}}$

Exemple :
On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Chaque tirage est équiprobable.
La probabilité de tirer le roi de trèfle est $\frac{1}{52}$.
La probabilité de tirer un trèfle est de $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Probabilité conditionnelle
Exemple
Parmi les 80 filles qui étaient en classe :
36 sont aujourd'hui salariées ; 39 sont mères de famille ; 15 sont salariées et mères de famille.
On choisit au hasard une de ces 80 femmes.
Considérons les événements A : « la femme choisie est salariée » et B : « la femme choisie est mère de famille ».

1)Compléter le tableau suivant :

	B : mère de famille	$\overline{B}$: non mère de famille	Total
A : salariée	15	21	36
$\overline{A}$: non salariée		20	
Total	39	41	80

2)Calculer P(A). rép. $(\frac{36}{80})$

3)Que représente l'événement $A \cap B$? Calculer la probabilité de cet événement. rép. $(\frac{15}{80})$

4)On interroge une salariée. Quelle est la probabilité que ce soit une mère de famille ? Vérifier que cette probabilité est égale à $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$. rép. $(\frac{15}{36})$

Remarque :
C'est la probabilité que la personne interrogée soit une mère de famille, sachant que l'on a interrogé une salariée.

Définition et propriété
Etant donné deux événements A et B avec $p(A) \neq 0$, on appelle « probabilité de B sachant A » et on note $p_A(B)$, la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A est déjà réalisé.

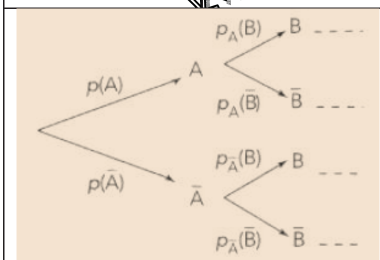
On a alors $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Formule des probabilités composées :
on a donc aussi : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

Exemple :
Dans l'exemple précédent, calculer la probabilité que la personne interrogée soit une salariée, sachant que l'on a interrogé une mère de famille. rép. $(\frac{15}{39})$.

Calculer $P_B(A)$. Que représente cette probabilité ?$P_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{15}{80}}{\frac{39}{80}}$

Représentation à l'aide d'un arbre pondéré
On appelle arbre pondéré un arbre sur lequel on a placé les probabilités correspondant à chaque branche comme l'indique le schéma ci-dessous :



Etape 1	Etape 2	Résultat	Probabilité
		$A \cap B$	$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
		$A \cap \overline{B}$	$p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p_A(\overline{B})$
		$\overline{A} \cap B$	$p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$
		$\overline{A} \cap \overline{B}$	$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(\overline{B})$

La probabilité d'un résultats est égale au produit des probabilités portées par les branches qui conduisent à ce résultat.
La somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple :
Dans une forêt, 70% des arbres sont des chênes, les autres sont des hêtres. 40% des arbres ont une maladie et cette maladie touche un hêtre sur 3. On désigne par C l'événement « être un chêne » et par M « avoir la maladie ».
1)Compléter le tableau ci-contre en indiquant dans chaque case le pourcentage correspondant.

	C	$\overline{C}$	Total
M	30%	10%	40%
$\overline{M}$	40%	20%	60%
Total	70%	30%	100%

2)Faire un arbre pondéré et calculer les probabilités affectées à chaque branche.

$$P_C(M) = \frac{p(C \cap M)}{p(C)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$$
$$P_C(\overline{M}) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

Formule des probabilités totales
Si A est un événement de probabilité non nulle et $\overline{A}$ son événement contraire, alors les événements $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ sont incompatibles et leur réunion est B :
$P(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$.
A et $\overline{A}$ forment une partition de l'ensemble E. Ce cas particulier se généralise.
Soit les événements A_1, A_2, …, A_n de probabilités non nulles constituant une partition de E.
La probabilité d'un événement de B de l'ensemble E peut se calculer par la formule :
$p(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + ... + p_{A_n}(B) \times p(A_n)$

Exemple :
Dans une usine d'automobiles, trois chaînes « a », « b » et « c » fournissent respectivement 25%, 35% et 40% de la production de moteurs.
Certains de ces moteurs sont écartés comme défectueux, dans les proportions suivantes :
5% pour la chaîne « a », 4% pour la chaîne « b » et 1% pour la chaîne « c ».
On prend au hasard un moteur et on définit les événements suivants :
A : « le moteur est issu de la chaîne « a » »
B : « le moteur est issu de la chaîne « b » »
C : « le moteur est issu de la chaîne « c » »
D : « le moteur est défectueux »
Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.
1)Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités et tracer un arbre pondéré illustrant la situation.
2)Calculer P(D).
3)Quelle est la probabilité qu'un moteur sorte de la chaîne « a » sachant qu'il est défectueux ?
4)Calculer la probabilité qu'un moteur sorte de la chaîne « c » sachant qu'il n'est pas défectueux ?

1)$P(A) = 0,25$; $P(B) = 0,35$; $P(C) = 0,4$; $P_A(D) = 0,05$; $P_B(D) = 0,04$;$P_C(D) = 0,01$.
2)$P(D) = P(A \cap D)+P(B \cap D)+P(C \cap D) = 0,0305$
3)$P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A) \times P_A(D)}{P(D)} = \dfrac{0,25 \times 0,05}{0,0305} \approx 0,4098$
4)$P_{\overline{D}}(C) = \dfrac{P(C \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{P(C) \times P_C(\overline{D})}{1 - P(D)} = \dfrac{0,4 \times 0,99}{1 - 0,0305} \approx 0,4085$

Indépendance de deux événements

Définition et propriété

On dit que les événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre, donc si :

$p_A(B) = p(B)$ et $p_B(A) = p(A)$.

On a alors : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Exemple :

Lancer une pièce, puis un dé, puis tirer au hasard dans une boîte … ou les lancers successifs d'une pièce, d'un dé, … la répétition du tirage d'une bille dans une boîte qui contient toujours le même nombre de billes, … sont des expériences indépendantes :

La réalisation d'un résultat n'agit pas sur la probabilité du résultat suivant.

On admet alors le principe suivant :

Principe multiplicatif :

Dans le cas d'une succession d'expériences indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple :

On lance une pièce, puis un dé à 6 faces, puis une pièce, puis de nouveau une pièce puis un dé à 4 faces.

Si on a obtenu Face sur la première pièce, cela n'agit pas sur le résultat du lancer du dé à 6 faces, et ainsi de suite.

La probabilité d'obtenir la liste de résultats (F ;2 ;P ;P ;3) est alors : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{192}$

Variables aléatoires (aléa numériques)

Soit X une variable aléatoire.

On appelle loi de probabilité de X , l'application : $P: \begin{cases} X(\Omega) \to [0,1] \\ x_i \mapsto P(X = x_i) \end{cases}$

Soit $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$	$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$V(x) = E\left((X - E(X))^2\right)$ $V(x) = E(X^2) - (E(X))^2$	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
$E(X + a) = E(X) + a$	$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$	$V(aX + b) = a^2 V(X)$	$\sigma(aX + b) = \lvert a \rvert \sigma(x)$

Fonction de répartition :

On appelle fonction de répartition de X, l'application définie de R dans $[0,1]$ par $F : x \mapsto p(X \le x)$

Schéma de Bernoulli, loi binomiale

Epreuve de Bernoulli

Définition :

Une expérience qui ne comporte que deux issues possibles (succès ou échec) est appelée **épreuve de Bernoulli.**

Exemples :

- Le jet d'une pièce de monnaie bien équilibrée constitue l'exemple le plus simple d'épreuve de Bernoulli : la probabilité du succès (« pile » par exemple) est 0,5 et celle de l'échec (« face » par conséquent) est également 0,5.
- Mais le jet d'un dé classique peut également constituer un exemple d'épreuve de Bernoulli, si l'on décide par exemple qu'un succès consiste à obtenir le 6 et que par

conséquent un échec consiste à ne pas obtenir le 6. La probabilité du succès est $\frac{1}{6}$ et celle de l'échec est $\frac{5}{6}$.

Remarque :
Si dans une épreuve de Bernoulli la probabilité du succès est p, la probabilité de l'échec est 1 -p.

Schéma de Bernoulli

Définition :
On appelle **schéma de Bernoulli**, une expérience qui consiste à répéter **plusieurs fois et de manière indépendante** la même épreuve de Bernoulli.

Exemples :

- Si l'on jette trois fois la même pièce de monnaie, on est en présence d'un schéma de Bernoulli à 3 épreuves.
- Une urne contient 3 boules noires et 5 blanches. Une expérience consiste à extraire trois boules de cette urne et à noter leur couleur.
  - Si le tirage des trois boules se fait **avec remise**, on est bien en présence d'un schéma de Bernoulli à 3 épreuves, la probabilité d'un succès (obtenir une boule blanche par exemple) étant $\frac{5}{8}$ et celle de l'échec (obtenir une boule noire) étant $\frac{3}{8}$.
  - Si par contre le tirage se fait **sans remise**, nous ne sommes plus en présence d'un schéma de Bernoulli puisque les épreuves ne sont plus indépendantes les unes des autres.

Loi binomiale

Définition :
On appelle **loi binomiale**, la loi de probabilité correspondant à un schéma de Bernoulli. Cette loi est souvent notée B(n, p), la lettre B rappelant le mot « binomial », le nombre n étant le nombre d'épreuves et le nombre p étant la probabilité d'un succès lors d'une épreuve.

Remarque :
Un schéma de Bernoulli s'illustre par un arbre dans lequel :

- de chaque nœud partent deux branches ;
- toutes les branches menant à un succès portent la même probabilité p
- toutes les branches menant à un échec portent la même probabilité 1 - p.

Soit p la probabilité de l'événement succès.
On considère la variable aléatoire X associant à cette expérience le nombre de succès réalisés au cours des n épreuves.
Alors la loi de probabilité de X est donnée par : $p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $k\in\{0,1,\ldots,n\}$

$E(x)=np$	$V(x)=np(1-p)$	$\sigma(x)=\sqrt{np(1-p)}$

Lois continues

Soit la fonction définie sur [a,b] par $f(x)=\frac{1}{b-a}$ est appelée densité de la loi de probabilité uniforme sur [a,b].
On appelle probabilité uniforme sur [a,b] l'application qui à tout intervalle $[c,d]\subset[a,b]$ associe le réel $p([c,d])=\int_c^d f(x)dx$

$p(\{c\}) = \int_c^c f(x)dx = 0$	$p([c,d]) = 1 - p([c,d])$	X suit une loi de probabilité uniforme p si $p(c \le X \le d) = \dfrac{d-c}{b-a}$

Loi exponentielle

Soit $\lambda > 0$. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application p qui :

- A tout intervalle $[c,d] \subset [0,+\infty[$ associe le réel $p([c,d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx$
- A tout intervalle $[c,\infty] \subset [0,+\infty[$ associe le réel $p([c,\infty]) = e^{-\lambda c}$

$p(\{c\}) = \int_c^c f(x)dx = 0$	$p([0,c]) = \int_0^c \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda c}$
$p([c,d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$	$p([c,+\infty]) = 1 - p([0,c]) = e^{-\lambda c}$

EXERCICE N°1

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires. On effectue des tirages dans cette urne, chacune des 20 boules ayant la même probabilité d'être tirée.

1°) On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir

a) 3 boules blanches et deux boules noires ?

b) des boules de couleurs différentes ?

2°) On tire successivement 5 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir

a) 3 boules blanches et 2 boules noires, dans cet ordre ?

b) 3 boules blanches et 2 boules noires dans un ordre quelconque ?

3°) On tire successivement 3 boules en remettant la boule après chaque tirage si elle est blanche, en ne la remettant pas si elle est noire. Quelle est la probabilité de tirer

a) exactement une boule blanche ?

b) au moins une boule blanche?

EXERCICE N°2

Deux urnes U_1 et U_2 indiscernables contiennent respectivement :

Urne U_1 : 3 boules rouges , 2 boules vertes.

Urne U_2 : 2 boules rouges , 1 boules vertes.

On choisit une urne au hasard et on tire un boule dans cette urne.

1°)Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2°)On suppose que la boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1.

EXERCICE N°3

Une urne contient 3 boules (a) et 2 boules (b)

On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne.

Quelle est la probabilité de tire un jeton (b) en premier et jeton (a) en second ?

EXERCICE N°4

Une urne contient des jetons de 2 couleurs: Rouge et Noire, portant chacun un numéro.

On tire au hasard un jeton dans cette urne.

La probabilité pour que le jeton soit rouge est 1/3 .

La probabilité pour que le jeton porte un numéro pair est 4/9 .

La probabilité pour que le jeton soit rouge et porte un numéro pair est 1/9 .

1° Quelle est la probabilité que le jeton soit noir?

2° Quelle est la probabilité pour que le jeton porte un numéro impair?

3° Quelle est la probabilité pour que le jeton soit noir et porte un numéro impair?

4° Les événements " être noir" et "porter un numéro impair" sont-ils indépendants?

5° Si on sait que le jeton tiré est noir, alors quelle est la probabilité pour que ce jeton porte un numéro impair?

EXERCICE N°5

I. Une urne contient deux boules blanches et n boules noires, indiscernables au toucher.

Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note A_2 l'événement : " Le joueur a tiré deux boules blanches ".

Déterminer n pour que la probabilité $p(A_2)$ de l'événement A_2 soit égale à $\frac{1}{15}$.

II. Dans toute la suite du problème, on prend n = 4.

Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note :

A_0 :l'événement : " Le joueur a tiré deux boules noires ".

A_1 :l'événement : " Le joueur a tiré une boule noire et une boule blanche ".

A_2 :l'événement : " Le joueur a tiré deux boules blanches ".

1°)Calculer la probabilité des événements A_0 et A_1.

2°)Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et perd deux points pour chaque boule noire tirée.
Calculer la probabilité que le joueur soit gagnant (c'est à dire qu'il ai un score strictement positif).

III. Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires dans l'urne et laisse les boules blanches tirées de côté, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules.
Soit B_i l'événement : " On obtient i boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage " (i = 0, 1 ou 2)

1°)Donner $p(B_0|A_2)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$.
Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$.
En déduire que $p(B_0) = \frac{41}{75}$.

2°)Montrer de même que $p(B_2) = \frac{2}{75}$. En déduire $p(B_1)$.

EXERCICE N°6

On dispose de deux dés cubiques d'apparences identiques : l'un est parfait et l'autre est truqué.
Pour le dé truqué, la probabilité d'obtenir un six est égale à $\frac{1}{3}$.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1°) a) On lance le dé parfait 3 fois de suite. On suppose les 3 lancers indépendants. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux six.
b) On lance le dé truqué 3 fois de suite. On suppose les 3 lancers indépendants. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux six.

2°) On choisit l'un des deux dés précédents au hasard (les deux dés ont donc la même probabilité d'être choisis) et on lance ce dé 3 fois de suite. On suppose les 3 lancers indépendants.
On désigne par T, l'événement : « choisir le dé truqué »,
par $\overline{T}$, l'événement contraire de T,
par A, l'événement : « choisir le dé parfait et obtenir exactement deux six »,
par B, l'événement : « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux six »,
par C l'événement : « obtenir exactement deux six ».

On pourra admettre que la réponse au 1.a. est $\frac{5}{72}$ et que la réponse au 1.b. est $\frac{2}{9}$.

a) Calculer la probabilité de l'événement A puis celle de l'événement B.
b) En déduire la probabilité de l'événement C.
c) Déterminer la probabilité d'avoir choisi le dé truqué, sachant qu'on a obtenu exactement deux six.

EXERCICE N°7

1°) Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2.
Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.
On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne. (Les choix sont supposés équiprobables).

a) Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
b) On a tiré un jeton portant le numéro 1.
Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?

2°) On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.

a) Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.
b) Soit S la variable aléatoire, qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés.
Déterminer la loi de probabilité de S.

c) Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros est impaire, Claude donne 10 dt à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit λ dt de Dominique.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.
Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ, puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable (c'est à dire pour que E(X) soit égale à 0).

EXERCICE N°8

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires, indiscernables au toucher.
1°) On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne.
On note A_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire » ;
on note A_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire » ;
on note A_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires ».
Montrer que $p(A_0) = \frac{6}{15}$ et $p(A_1) = \frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.
2°)Après ce premier tirage, il reste 4 boules dans l'urne.
On effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
On note B_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2 » ;
on note B_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2 » ;
on note B_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage n°2 ».
a) Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.
b) Calculer $p(B_0)$.
d) On n'a obtenu aucune boule noire lors de ce second tirage.
Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage ?
3°) On considère l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Montrer que $p(R) = \frac{1}{3}$.

EXERCICE N°9

250 candidats se sont présents à un examen comportent deux épreuves l'un écrite et l'autre orale.
1°)Sachant qu'un candidat ne peut passer l'épreuve orale que lorsqu'il est admis à l'épreuve écrite et que 120 candidats sont admis à l'épreuve écrite, quelle est la probabilité pour qu'un candidat passe l'épreuve orale ?
2°)60 candidats seulement sont déclarés admis.
Quelle est la probabilité pour qu'un candidat admis à l'écrit ait passé avec succès l'épreuve orale ?

EXERCICE N°10

On fait tourner une roue comportant 12 secteurs de même taille numérotés de 1 à 12. Les secteurs portant un numéro pair sont de couleur jaune, les secteurs portant un numéro multiple de trois et impair sont de couleurs verte et les autres secteurs sont rouges.
Si la roue s'arrête sur un secteur de couleur verte on tire un billet de loterie dans une urne A. Dans les autres cas, on tire un billet de loterie dans une urne B.
Dans l'urne A un billet sur quatre est gagnant alors que dans B seulement un billet sur vingt est gagnant.
Calculer la probabilité d'obtenir un billet gagnant.

EXERCICE N°11

Un fumeur essaye de réduire sa consommation. On admet qu'il fonctionne toujours suivant les conditions :
C_1 : S'il reste un jour sans fumer, alors il fume le lendemain avec probabilité de 0,4.
C_2 : Par contre, s'il cède et fume un jour, alors la probabilité qu'il fume le lendemain est de 0,2.
On note U_n la probabilité qu'il fume le $n^{ème}$ jour.
1°)Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $U_{n+1} = -0,2U_n + 0,4$
2°)Soit pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $V_n = U_n - \frac{1}{3}$. Montrer que (V) est suite géométrique.
3°)En déduire U_n en fonction de n et U_1 .

4°)Calculer alors : $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE N°12

Soit P une probabilité définie sur un univers des possible Ω et soient A et B deux évènements indépendants.

1°)Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants et qu'il en est de même de $\overline{A}$ et B et de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

2°)On suppose que P(A) = 0,2 et P(B) = 0,6.

Calculer $P(A\cup B)$, $P(A\cup\overline{B})$, $P(\overline{A}\cup B)$ et $P(\overline{A}\cup\overline{B})$

EXERCICE N°13

Un grossiste en appareils ménagers est approvisionné par trois marques, notées respectivement M_1 , M_2 et M_3. La moitié des appareils de son stock provient de M_1 , un huitième de M_2 et trois huitièmes de M_3. Ce grossiste sait que dans son stock, 13% des appareils de la marque M_1 son rouge, que 5% des appareils de la marque M_2 son rouge et 10% des appareils de la marque M_3 le sont aussi.

On choisit au hasard un appareil emballé dans le stock de ce grossiste :

1°)Quelle est la probabilité qu'il vienne de M_3.

2°) Quelle est la probabilité qu'il soit rouge sachant qu'i vienne de M_2.

3°) Quelle est la probabilité que l'appareil choisi ne soit pas de couleur rouge.

4°)Après examen, on s'aperçoit que l'appareil choisi est rouge.

Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque M_1 .

EXERCICE N°14

On considère n sacs S_1 , S_2 , …. , S_n tells que S_1 contient trios boules blanches et une boule noire; chacun des autres sacs contient quatre boules noires et une boule blanche. n est une entier naturel supérieure ou égale à 2 .

Partie A

Dans cette question on tire une boule de chacun des trois premiers sacs S_1 , S_2 et S_3 .

Soit X l'aléas numérique qui désigne le nombre de boules blanches obtenues.

1°)Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer E(X).

2°)Construire la représentation graphique de la fonction de répartition F de X.

Partie B

Dans cette question on effectue k tirages successifs d'une boule de la facon suivante : « On tire une boule de S_1 qu'on la place dans S_2 puis on tire de S_2 une boule qu'on le place dans S_3 et ainsi de suite jusqu'à l'ordre k avec $k\in\{1,2,3,\dots,n\}$ »

On note a_k la probabilité de l'événement A_k : « Obtenir une boule blanche au $k^{ième}$ tirage »

1°)Calculer $p(A_k / A_{k-1})$ et $p(A_k / \overline{A_{k-1}})$ pour $k\geq 2$, en déduire que $a_k = \frac{1}{6}a_{k-1} + \frac{1}{6}$

2°)On pose $b_k = a_k - \frac{1}{5}$. Montrer que (b_k) est une suite géométrique. En déduire a_k en fonction de k.

EXERCICE N°15

Jeu « chuck à luck ». On parie sur un nombre de 1 à 6. On lance 3 dés. Si le nomnre sur lequel on a parié sort :

Sort 3 fois	Sort 2 fois	Sort 1 fois	Sort 0 fois
Gagné 3 dinars	Gagné 2 dinars	Gagné 1 dinars	Perdue 1 dinars

Soit X le gain lors d'une partie.

1°)Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer E(X) et sa variance.

2°)Construire la représentation graphique de la fonction de répartition F de X.

EXERCICE N°16

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.

On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du du $n^{ième}$ tirage.
1°)Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.
2°) On considère les événements suivants :
B_n : « On tire une boule blanche lors du n−ième tirage »
U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors lors des $n-1$ premiers tirages »
a) Calculer la probabilité de l'événement B_n.
b) Exprimer la probabilité de l'événement U_n en fonction de n.

c) En déduire l'expression de pn en fonction de n et vérifier l'égalité : $p_n = \frac{n-1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3°)On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2}+1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
b) Déterminer la limite de la suite (S_n).

EXERCICE N°17

Robin joue avec un jeu électronique.
Une partie consiste en un duel entre Robin et trois monstres, M_l, M_2 ou M_3 , choisi par la machine.
Le jeu est programmé de telle sorte que, pour chaque partie, le monstre M_l a une chance sur deux d'apparaître, les deux autres monstres ayant la même probabilité d'apparition.
On admet que lors d'un combat, la probabilité pour Robin de gagner est respectivement de :
0,3 contre M_l, 0,4 contre M_2 et 1 contre M_3.
1°) Robin joue une partie.
Calculer la probabilité pour qu'il gagne cette partie.
2°) Sachant que Robin a perdu la partie, quelles sont les probabilités pour :
a) qu'il ait joué contre le monstre Ml ?
b) qu'il ait joué contre le monstre M3 ?
3°) Robin joue quatre parties consécutivement. On admet que les parties sont jouées indépendamment.
Calculer les probabilités pour que : Robin gagne au moins une partie

EXERCICE N°18

Pour analyser le fonctionnement d'une machine d'atelier, on note, mois après mois, ses pannes et on remarque que :

- sur un mois la machine tombe au plus une fois en panne ;
- si pendant le mois «n» la machine n'a pas de panne, la probabilité qu'elle en ait une le mois suivant «n + 1» est 0,24 ;
- si la machine tombe en panne le mois « n » (ce qui entraîne sa révision), la probabilité qu'elle tombe en panne le mois suivant « n + 1 » est 0,04 ;
- la probabilité que la machine tombe en panne le premier mois après sa mise en service est 0,1.

On désigne par E_n l'événement « La machine tombe en panne le $n^{ième}$ mois suivant sa mise en service » on note p_n la probabilité E_n. (et on a ainsi $p_1 = 0,I$). Si A est un événement, $\overline{A}$ représentera l'événement contraire.

1°) a) Donner les valeurs numériques des probabilités de « E_{n+1} sachant que E_n » et de «E_{n+1} sachant que $\overline{E_n}$ ».
Exprimer les probabilités de « E_n et E_{n+1} » et de « E_{n+1} et $\overline{E_n}$ » en fonction de p_n.
b) Utiliser a) pour montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $p_{n+1} = 0,24 - 0,2\, p_n$.
2°) a) Résoudre l'équation $p = 0,24 - 0,2\, p$.
b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose $u_n = p_n - p$.
Calculer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire les expressions en fonction de n, de u_n et de p_n.
c) Montrer que la suite (p_n) est convergente; expliciter sa limite.

EXERCICE N°19

Un magasin stocke un certain produit dans des boîtes.

Ces boîtes sont de 2 couleurs: rouges dans la proportion 25%, bleue dans la proportion 75%. Elles sont protégées par des cartons identiques entre eux. Chaque carton ne contient qu'une seule boîte. Certains cartons portent, en dessous et à l'extérieur, la marque M, les autres ne portent aucune marque.

On précise d'autre part que

- parmi les cartons contenant une boîte rouge, 45% portent la fameuse marque M
- parmi les cartons contenant une boîte bleue, 60% portent la marque M.

On prend au hasard un carton dans le magasin.

1° On ouvre le carton tiré. On remarque qu'il contient une boîte rouge. Quelle est la probabilité p_1 que le carton porte la marque M?

Si la boîte contenue dans le carton était bleue, quelle serait la probabilité p_2 que le carton porte la marque M?

2° Quel est le pourcentage de cartons qui portent la marque M?

En déduire la probabilité p_3 qu'un carton tiré porte la marque M.

3° On n'ouvre pas le carton tiré. On remarque toutefois qu'il porte la marque M. Quelle est la probabilité p_4 que ce carton marqué M contienne une boîte rouge?

EXERCICE N°20

Quatre filles et trois garçons doivent subir l'épreuve orale d'un examen. L'examinateur décide d'établir au hasard la liste fixant l'ordre de passage des candidats. Pour cela, il met les noms (supposés tous différents) des sept candidats dans une enveloppe.

1°) Dans cette question, on suppose que l'examinateur procède à un tirage des sept noms l'un après l'autre.

On désigne par F_1 l'événement : " le premier candidat interrogé est une fille ",
et par F_2 l'événement : " le deuxième candidat interrogé est une fille ".

a) Quelle est la probabilité que les deux premiers candidats interrogés soient des filles ?
b) Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille sachant que le premier candidat interrogé est une fille ?
c) Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille ?

2°) On suppose maintenant que l'examinateur, voulant interroger seulement quatre candidats parmi les sept, procède à un tirage simultané de quatre noms. On note X la variable aléatoire égale au nombre de filles ainsi désignées.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
b) Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE N°21

Un supermarché commercialise des gaufrettes vendues en paquets pour lesquels

- dans 5 % des cas l'emballage n'est pas intact,
- dans 70 % des paquets d'emballage non intact, il y a au moins une gaufrette cassée,
- 90 % des paquets d'emballage intact ne contiennent aucune gaufrette cassée.

1°) Un client achète au hasard un paquet de ces gaufrettes.

On note I l'événement : «l'emballage est intact» et C l'événement : « au moins une gaufrette est cassée».

a) Calculer la probabilité de I.

b) On considère les événements suivants

E : « l'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée ».

F : « l'emballage est intact et aucune gaufrette n'est cassée ».

Exprimer E et F en fonction de I, $\overline{I}$ (événement contraire de I) et $\overline{C}$ (événement contraire de C) Calculer alors les probabilités de E et de F.

En déduire la probabilité de $\overline{C}$ (événement contraire de C) puis celle de C.

2°) Lors d'une vente promotionnelle dans ce supermarché, ces gaufrettes sont vendues par lots de cinq paquets. Un client achète au hasard un tel lot. On suppose que les tirages des paquets formant un lot sont indépendants.

Quelle est la probabilité pour que dans ce lot il y ait au moins quatre paquets d'emballage intact? qu'il n'y ait aucune gaufrette cassée ? On donnera les résultats à 10^{-4} près.

EXERCICE N°22

Un jeu consiste à extraire, au hasard et simultanément, 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 5 boules vertes.
Si le joueur obtient 3 boules rouges, événement que l'on note R_3, il gagne 500 dt.
S'il obtient 2 boules rouges et 1 boule verte, événement que l'on note R_2, il gagne 300 dt.
Enfin, s'il obtient strictement moins de 2 boules rouges il ne gagne rien, on note cet événement E.

1°) Montrer que les probabilités des événements R_2 et R_3 sont :
$P(R_2) = \frac{5}{12}$ et $P(R_3) = \frac{1}{12}$.

2°) On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur.
Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

3°) Dans cette question on modifie les règles du jeu de la façon suivante :

- Si le joueur réalise les événements R_3 et R_2 il ne gagne plus d'argent immédiatement mais est qualifié pour la suite du jeu que l'on appelle " Banco ".
- Si l'événement E est réalisé le joueur ne gagne rien et n'est pas qualifié pour le " Banco ".

Le " Banco " consiste à extraire une boule parmi les sept restées dans l'urne ; si celle-ci est verte le joueur empoche les 1000 dt du " Banco " et si elle est rouge le joueur a perdu mais repart avec une prime de " consolation " de 200 dt.

a) Quelle est la probabilité d'empocher les 1000 dt du " Banco " sachant que R_3 est réalisé ?
b) Quelle est la probabilité d'empocher les 1000 dt du " Banco " sachant que R_2 est réalisé ?
c) En déduire la probabilité d'empocher les 1000 dt du " Banco ".

On note Y la variable aléatoire donnant le gain du joueur dans ce nouveau jeu. Y peut donc prendre les valeurs 0, 200 ou 1000.

d) Etablir la loi de probabilité de Y.
e) Calculer l'espérance mathématique de Y et comparer avec celle de X.

EXERCICE N°23

1°) Soit P une loi de probabilité sur $[0 ; 2\pi]$ de densité f définie sur $[0 ; 2\pi]$ par : $f(x) = \lambda \sin\frac{x}{2}$.

a) Déterminer λ.
b) Calculer $P\left(\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]\right)$.

2°) La durée d'attente X en secondes, à la caisse rapide d'un supermarché, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{200}$, c'est-à-dire que pour tout réel $t \geq 0$

on a : $P(X < t) = \int_0^t \frac{1}{200} e^{\frac{-x}{200}} dx$.

a) Calculer la probabilité que l'attente soit inférieure à 1 minute.
b) Calculer la probabilité que l'attente dépasse 3 minutes.

EXERCICE N°24

1°) Soit P une loi de probabilité sur $[1 ; 10]$ de densité f définie par $f(x) = \frac{\lambda}{x^3}$.

a) Déterminer λ.
b) Calculer $P([2 ; 5])$.

2°) La durée de vie (en heures) d'un élément mécanique a été modélisée par une variable aléatoire X telle que pour tout réel $t \geq 0$: $P(X < t) = 0{,}002 \int_0^t e^{-0{,}002x}dx$

a) Vérifier que la loi de X est une loi exponentielle dont on précisera le paramètre λ.
b) Calculer $P(X < 400)$.
c) Calculer la probabilité que cet élément ait une durée de vie inférieur à 1000 heures sachant qu'il a déjà tenu 500 heures.