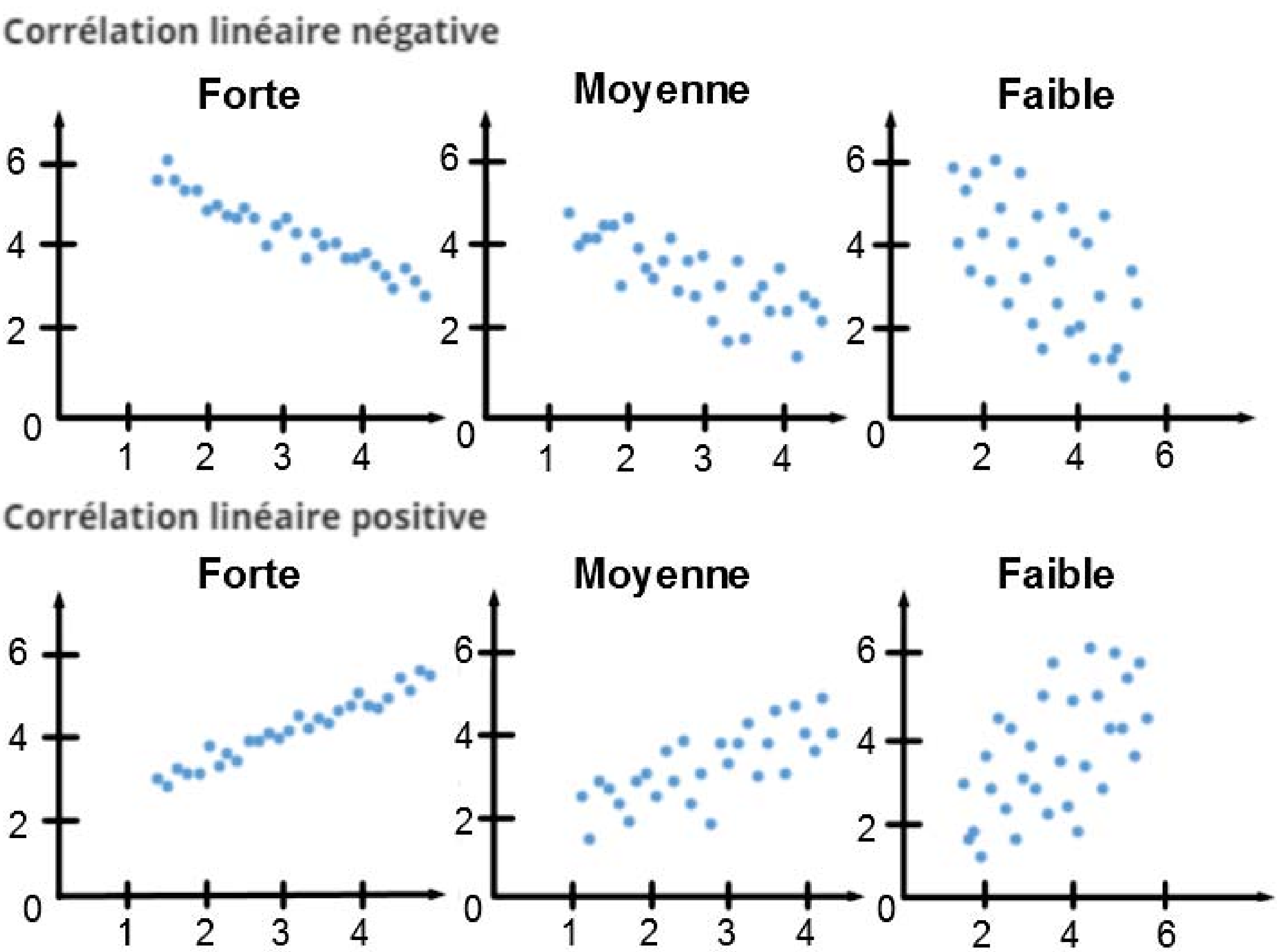
Statistiques

MAGAZINE DE MATHEMATIQUES

Profs : ***ÉQUIPE* ACADEMIQUE *MATHEMATIQUES***

STATISTIQUES



★★★★★★★★★★

RESUME DU COURS

★★★★★★★★★★

I-RAPPELS

A- Série statistique double en données individuelles

Paramètres d'une série statistique :

Etant donnée une populations de n individus sur laquelle on étudie deux caractères X et Y.
(On dit que (X,Y) est une série statistique double sur un échantillon de taille n)
On désigne par $x_1, x_2, \ldots x_n$ les variations de X
On désigne par $y_1, y_2, \ldots y_n$ les variations de Y

X	x_1	x_2	…………………………………	x_n
Y	y_1	y_2	…………………………………	y_n

L'ensemble des points $A_i(x_i, y_i)$ du plan muni d'un repère orthogonal est appelé nuage de points associé à la série statistique double (X,Y)

1°) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ s'appelle moyenne arithmétique de X (espérance de $X = E(X)$)

$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ s'appelle moyenne arithmétique de Y (espérance de $Y = E(Y)$)

Le point $G(\overline{X}, \overline{Y})$ est appelé le point moyen

2°) $V(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\overline{X}\right)^2$ s'appelle variance de X

$V(Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\overline{Y}\right)^2$ s'appelle variance de Y.

3°) $6(X) = \sqrt{V(X)}$ écart type de X ; $6(Y) = \sqrt{V(Y)}$ écart type de Y.

Interprétation de l'écart type :

- L'écart type est un moyen qu'on utilise pour mesurer la dispersion des valeurs d'une variable statistique à variable quantitative autour de la moyenne de cette série.

Un écart type important signifie que les valeurs de la série s'éloignent souvent et de façon importante de la moyenne.

- Pour comparer deux séries statistiques qui n'ont pas le même ordre de grandeur, on peut comparer leurs écarts-type relatifs respectifs plus l'écart type est relatif est faible plus la dispersion au tour de la moyenne est faible.

$\frac{\sigma}{\overline{X}}$ est l'écart type relatif de X $\frac{\sigma}{\overline{Y}}$ est l'écart type relatif de Y

B- Série statistique double en données groupées

Distribution marginale d'une série statistique double :

On désigne par $x_1, x_2, ..., x_i, ...x_p$ les valeurs de X et par $y_1, y_2, ..., y_i, ...y_q$ les valeurs de Y

Si le couple (x_i, y_i) se répètent plus qu'une fois soit n_{ij} l'effectif associé au couple.

Les effectifs n_{ij} associés aux couples (x_i, y_i) sont représentés à l'aide d'un tableau à double entrée de la forme :

y \ x	y_1	y_2	....	y_j	....	y_q	Distribution marginale de X
x_1	n_{11}	n_{12}		n_{1j}		n_{1q}	$n_1 = \sum_{j=1}^{q} n_{1j}$
x_2	n_{21}						$n_2 = \sum_{j=1}^{q} n_{2j}$
x_j	n_{i1}						
x_p	n_{p1}						n_p
Distribution marginale de Y	$n_1 = \sum_{i=1}^{p} n_{i1}$	n_2	....	n_j	....	n_q	n

D'où les deux tableaux ci-dessous représentent les distributions marginales de X et Y :

X	x_1	x_2	....	x_p
n_i	n_1	n_2	....	n_p

Y	y_1	y_2	....	y_q
n'_j	n'_1	n'_2	....	n'_q

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i x_i \ ; \ \overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}n'_i y_i$$

$$V(X)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{p}n_i x_i^2\right)-\left(\overline{X}\right)^2 \ ; \ V(Y)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{q}n'_i y_i^2\right)-\overline{Y}^2$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)} \ ; \ \sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}$$

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{p}\ \sum_{j=1}^{q}n_{ij}x_i y_i\right)-\overline{X}\overline{Y}$$

Remarque1 : Toutes les formules vues dans la partie précédente de ce cours restent valables pour le cas d'une Série statistique double

Remarque2 : Si les caractères sont continus on considère les centres des classes

II-COVARIANCE

1-Définition Soit (x_i,y_i) avec i=1,……..n une série statistique double .On appelle covariance x et y le nombre noté Cov(x,y) et définie par : $Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$

2-Théorème

* Soit (x_i,y_i) avec i=1,……..n une série statistique double : $Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\overline{X}\overline{Y}$

* $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

3-Interprétation de la covariance :

La covariance permet une mesure de la dispersion des points du nuage par rapport au point moyen

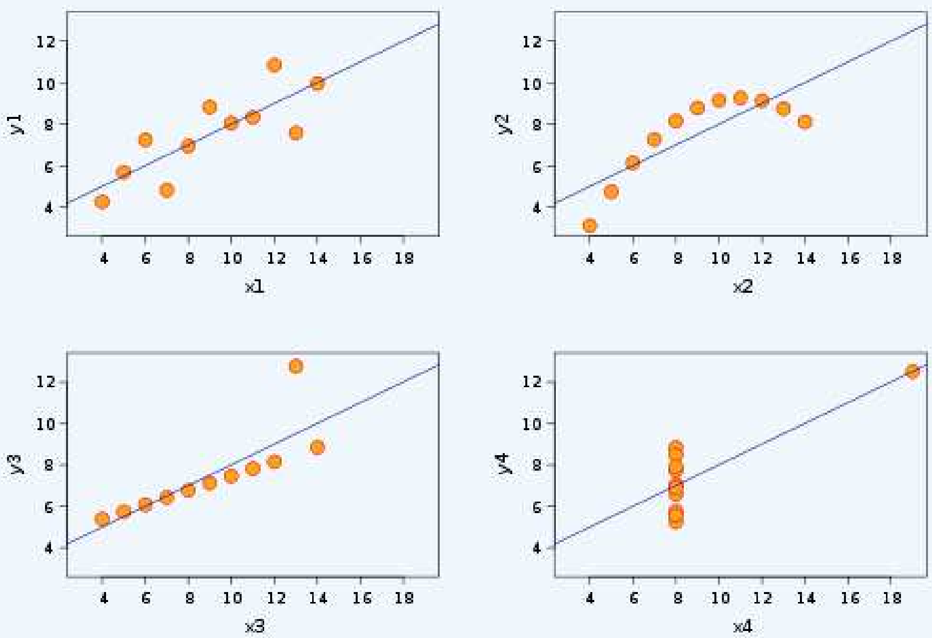
La covariance est positive si X et Y ont tendance à varier dans le même sens

La covariance est négative si X et Y ont tendance à varier en sens contraire.

III-AJUSTEMENT AFFINE

1-Ajustement affine

: La courbe peut être une droite ou une parabole.



ou bien il peut ne pas y avoir de courbe visible :

2- Méthode de Mayer:

Soit (X,Y) une série statistique double et G son point moyen

On scinde le nuage de point de (X,Y) en deux parties contenant à peu prés le même nombre de points obtenant ainsi deux nuages de points.

On désigne par $G_1 \, et \, G_2$ les points moyens de ces deux nuages.

La droite (G_1G_2) passe par le point G et définie un ajustement affine du nuage de points représentant la série statistique double (X,Y).

3- Méthode de Moindre carrés:

a- Principe de la méthode des moindre carrés

Le principe de cette méthode c'est de trouver la droite D « La plus proche possible » des points du nuage, c'est-à-dire que la somme des carrés des écarts entre les points M_i du nuage et les points P_i de la droite D de même abscisse, est la plus petite possible.

On dit qu'on a effectué un ajustement linéaire par la méthode des **moindres carrés**.

b-Théorème (admis)

La droite de régression de y en x est la droite qui passe par G $\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$ et de coefficient directeur le réel $a=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)}$

Remarque 1

- La droite de régression de Y par rapport à X est : $D: y-\overline{Y}=\dfrac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{V(X)}(x-\overline{X})$
- La droite de régression de X par rapport à Y est : $D': x-\overline{X}=\dfrac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{V(Y)}(y-\overline{Y})$

Remarque2 :

$G(\overline{X},\overline{Y})\in D\cap D'd'ou$:

$$D: y=ax+b \; avec \; a=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)} et \; b=\overline{Y}-a\overline{X}$$

$$D': x=a'y+b' \; avec \; a'=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(Y)} et \; b'=\overline{X}-a'\overline{Y}$$

Remarque3 :

Les deux coefficients a et a' sont de même signe et le coefficient de corrélation r vérifie

4- Coefficient de corrélation linéaire :

a)-Définition : Le coefficient de corrélation linéaire de $\left(X,Y\right)$ est : $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{6\left(X\right),6\left(Y\right)}$

Remarque :

- On note encore ρ_{XY} par r.
- Le coefficient de corrélation linéaire de $\left(X,Y\right)$ est égal Le coefficient de corrélation linéaire de $\left(X,Y\right)$
- $-1\leq r\leq 1$
- r est invariant par changement d'unité ou d'origine.

b) Interprétation du coefficient de corrélation linéaire

- Si $|r|\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors la corrélation linéaire entre x et y est faible
- Si $|r|>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors la corrélation linéaire entre x et y est forte
- Les points du nuage de points sont alignés si et seulement si r = 1 ou r = −1.

IV-UTILISATION D'UNE CALCULATRICE

(Casio fx 570 ES ou fx 570 ES ou fx 991 ES plus)

Tous les calculs mentionnés ici s'effectuent dans le mode STAT [MODE SETUP] [3]

Types de calculs statistiques

Touche	Elément du menu	Calcul statistique
1	1-VAR	Une variable
2	A+BX	Régression linéaire
3	_+CX2	Régression quadratique
4	In X	Régression logarithmique
5	e^X	Régression exponentielle e
6	A•B^X	Régression exponentielle ab
7	A•X^B	Régression de puissance
8	1/X	Régression inverse

Utilisation du menu STAT

Lorsque l'écran de l'éditeur STAT ou l'écran de calcul STAT est affiché, appuyez sur [SHIFT] [1] pour afficher le menu STAT.
Le contenu du menu STAT est différent selon qu'une variable ou deux variables sont utilisées pour le calcul statistique actuellement sélectionné.

1 : Type	5 : Data
2 : Edit	6 : Sum
3 : Var	7 : MinMax
7 : Distr	

Statistiques à une variable

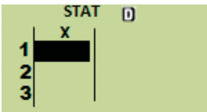
1 : Type	5 : Data
2 : Edit	6 : Sum
3 : Var	7 : MinMax
7 : Reg	

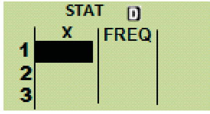
Statistiques à deux variables

Exemple 1 : On considère la série statistique à une variable :

X	10	14
Effectif	40	20

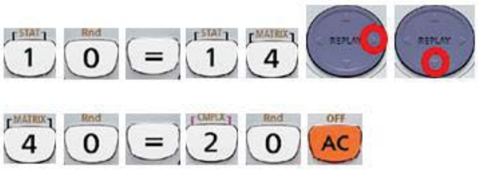
❑ On passe en mode statistique [MODE SETUP] [3] [1]

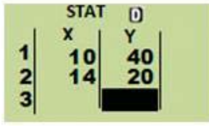


❑ Afficher la colonne des effectifs  (FREQ) 

❑ Introduction des données

X	Effectif
10	40
14	20



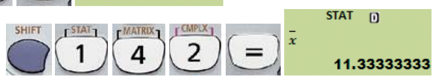


❑ Pour déterminer l'effectif total

☞ On trouve : **N = 60**

❑ Pour déterminer la moyenne

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{X}} \approx$ **11,33**



❑ Pour déterminer l'écart type

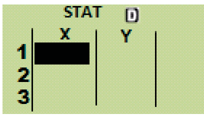
☞ On trouve l'écart type : $\sigma \approx 1{,}89$

❑ Pour déterminer la variance

☞ On trouve la variance : V $\approx 3{,}56$

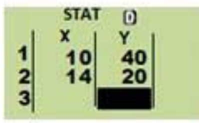
Exemple 2 : On considère la série statistique à deux variables :

X	**10**	**14**
Y	**40**	**20**

❑ On passe en mode statistique  

❑ Introduction des données

X	Y
10	40
14	20



❑ Pour déterminer la moyenne de **X**

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{X}} = 12$

❑ Pour déterminer la moyenne de **Y**

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{Y}} = 30$

❑ Pour déterminer l'écart type **X**

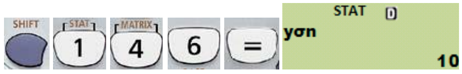
☞ On trouve l'écart type : $\sigma(\mathbf{X}) = 2$

❑ Pour déterminer la variance de **X**

☞ On trouve la variance de **X** : $V(\mathbf{X}) =$

❑ Pour déterminer l'écart type **Y**

☞ On trouve l'écart type : $\sigma(\mathbf{Y}) = 10$

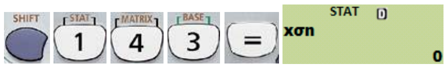


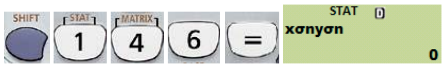
❑ Pour déterminer la variance de **Y**

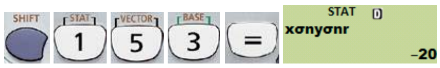
☞ On trouve la variance de **Y** : $V(\mathbf{Y}) = 100$

❑ Pour déterminer la covariance de **(X ,Y)**

☞ On trouve la covariance : $\mathbf{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = -20$







❑ Pour déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\mathbf{r_{xy}}$:

☞ On trouve: $\mathbf{r_{xy}} = -1$

❑ Droite de moindre carrés de **Y** en **X** <u>**ou**</u> droite de régression de **Y** en **X. (Y=BX+A)**

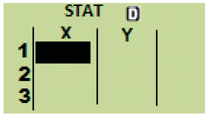
☞ On trouve: $\mathbf{B} = -5$

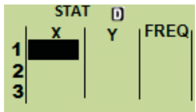
☞ et on trouve: $\mathbf{A} = 90$

d'où Y = –5X+90

Exemple 3 : On considère la série statistique à double entrée :

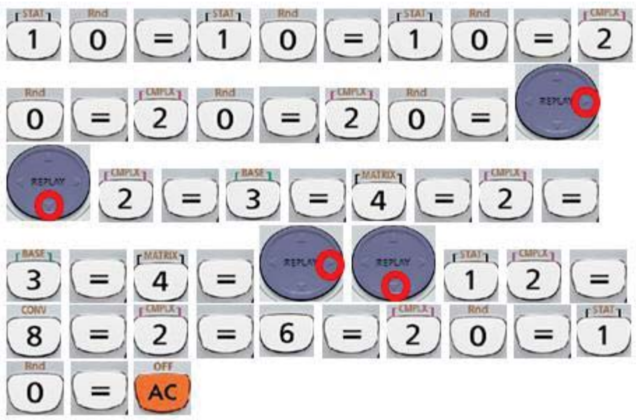
Y / X	2	3	4
10	**12**	**8**	**2**
20	**6**	**20**	**10**

❑ On passe en mode statistique  

❑ Afficher la  colonne des effectifs (**FREQ**) 

❑ Introduction des données

X	Y	FREQ
10	2	12
10	3	8
10	4	2
20	2	6
20	3	20
20	4	10



❑ Pour déterminer la moyenne de **X**

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{X} \approx 16.2$ 

❑ Pour déterminer la moyenne de **Y**

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{Y} \approx 2.9$ 

❑ Pour déterminer l'écart type **X**

☞ On trouve l'écart type : $\sigma(X) \approx 4.85$ 

❑ Pour déterminer la variance de **X**

☞ On trouve la variance de **X** : $V(X) \approx 23.54$ 

❑ Pour déterminer l'écart type **Y**

☞ On trouve l'écart type : $\sigma(Y) \approx 0.71$ 

❑ Pour déterminer la variance de **Y**

☞ On trouve la variance de **Y** : V(**Y**) ≈ 0.5 

❑ Pour déterminer la covariance de **(X ,Y)**

☞ On trouve la covariance : Cov(**X ,Y**) ≈ 1.33 

❑ Pour déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\mathbf{r_{xy}}$:

☞ On trouve: $\mathbf{r_{xy}} = 0.39$