Séries d'exercices — $4^{ème}$ Maths

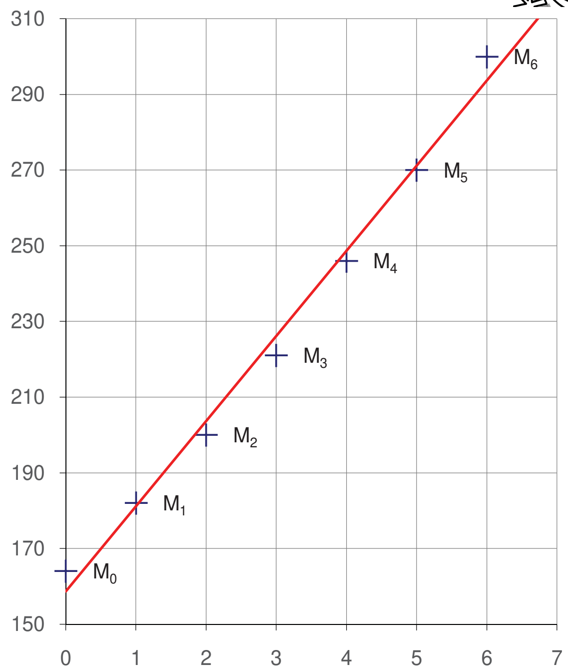
Statistiques

Exercice n°1

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires (CA), en millions dinars, sur la période 1996-2002 d'une entreprise.

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
CA y_i	164	182	200	221	246	270	300

Le nuage de points $M_i(x_i\,;\,y_i)$ est représenté ci-dessous dans un repère orthogonal ainsi que la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés, d'équation $y = 22{,}5x + 158{,}64$ (coefficients arrondis à 10^{-2} près).



1. A l'aide de cet ajustement, déterminer le chiffre d'affaire que cette entreprise peut prévoir en 2005.
2. L'ajustement affine ne semblant pas traduire l'évolution du chiffre d'affaire, on pose $z_i = \ln y_i$.
   a. Calculer, en arrondissant à 10^{-2} près, pour i variant de 0 à 6, les valeurs z_i associées aux rangs x_i du tableau.
   b. Déterminer avec la calculatrice une équation de la droite d d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3} près) .
   c. En déduire une relation entre y et x de la forme $y = B\times e^{ax}$. (Arrondir B à l'entier près)
3. On admet que la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = 164e^{0{,}1x}$ modélise l'évolution du chiffre d'affaires de cette entreprise.
   a. Donner une nouvelle estimation, arrondie au million d'euros, du chiffre d'affaires en 2005.
   b. A partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à 500 millions d'euros ?

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, le détail des calculs n'est pas demandé.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

On veut étudier l'évolution des records de l'épreuve d'athlétisme du 100 mètres masculin. Pour cela on cherche un ajustement des records pour en prévoir l'évolution.
On donne dans le tableau suivant certains records, établis depuis 1900.

Année	1900	1912	1921	1930	1964	1983	1991	1999
Rang de l'année, x_i	0	12	21	30	64	83	91	99
Temps en seconde, y_i	10,80	10,60	10,40	10,30	10,06	9,93	9,86	9,79

1) **Etude d'un modèle affine**

a) Construire le nuage de point $M_i(x_i ; y_i)$ avec i compris entre 1 et 8, associé à cette série statistique double. On prendra comme unité graphique 1 cm pour dix ans en abscisse et 1 cm pour un dixième de seconde en ordonnées.
On commencera les graduations au point de coordonnées (0 ; 9).
b) Peut-on envisager un ajustement affine à court terme ? Cet ajustement permet-il des prévisions pertinentes à long terme sur les records futurs ?

2) **Etude d'un modèle exponentiel**

Après étude, on choisit de modéliser la situation par une autre courbe.
On effectue les changements de variables suivants :
$X = e^{-0,00924x}$ et $Y = \ln y$.

On obtient le tableau :

$X_i = e^{-0,00924x_i}$	1	0,895	0,824	0,758	0,554	0,464	0,431	0,401
$Y_i = \ln y_i$	2,380	2,361	2,342	2,332	2,309	2,296	2,288	2,281

a) Donner une équation de la droite de régression de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.
b) En déduire que l'on peut modéliser une expression de y en fonction de x sous la forme suivante :
$y = \exp(ae^{-0,00924x} + b)$ où a et b sont deux réels à déterminer.
c) A l'aide de cet ajustement, quel record du 100 mètres peut-on prévoir en 2010 ?
d) Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur R par l'expression suivante :
$f(t) = \exp(0,154e^{-0,00924x} + 2,221)$.
e) Que peut-on en conclure, en utilisant ce modèle, quand aux records du cent mètres masculin à très long terme.

Exercice 3

Le but du problème est de déterminer le prix d'équilibre d'un produit. (On rappelle que le prix d'équilibre d'un produit est obtenu lorsque l'offre et la demande sont égales).

Une étude faite sur ce produit a donné les résultats suivants (le prix au kilogramme est exprimé en francs et les quantités offre et demande sont exprimées en milliers de kilogrammes)

Prix proposé x_i	0,30	0,35	0,45	0,65	0,80	1
Demande y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25
Offre z_i	1,25	1,30	1,30	1,50	1,55	1,60

Dans ce problème, on utilisera, pour les calculs statistiques, les fonctions de la calculatrice détail de ces calculs n'est pas demandé).
Tous les résultats numériques seront donnés en valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près.

1) Représentation graphique

Le plan (P) est rapporté au repère orthogonal (O ; i, j)
d'unités graphiques 10 cm pour 1 franc en abscisse et 2 cm pour 1 millier de kilogrammes en ordonnée.
Représenter sur le même graphique les nuages de points associés respectivement aux séries statistiques (x_i , y_i) et (x_i , z_i).

Pour ces représentations, on recommande de prendre le papier millimétré dans le sens de la largeur et de figurer par des signes différents (croix ou points par exemple) les points de coordonnées (x_i , y_i) et ceux de coordonnées (x_i , z_i) respectivement.

2) Etude de la demande

La forme du nuage de points associé à la série (x_i , y_i) permet d'envisager un ajustement exponentiel de y en x. On pose donc $Y_i = \ln y_i$

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i , Y_i). Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de Y en x est-il satisfaisant ? Pourquoi ?

b) Donner alors une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme
$Y = ax + b$.
En déduire en utilisant l'égalité $Y = \ln y$ une estimation de la demande y, en fonction de x prix au kilogramme.

EXERCICE 4

Dans cet exercice, les calculs peuvent être effectués à la calculatrice; leur détail n'est pas exigé.

Le tableau ci-dessous donne la charge maximale y_i en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur x_i en mètre, de la flèche.

Longueur x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
Charge y_i	10	9	8	7	6	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

1. Les réponses numériques à cette question seront données à 10^{-2} près.
a. Représenter le nuage de points $M(x_i, y_i)$ à l'aide d'un repère orthogonal
(O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'unités 1 cm pour 2 mètres en abscisses et 1 cm pour une tonne en ordonnées.
Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
Construire cette droite sur le graphique précédent.
d. Utiliser cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres. Que peut-on dire ?

2. On pose $z_i = \dfrac{1}{y_i}$

a. Recopier et compléter le tableau suivant (les z_i seront arrondis à 10^{-3} près)

x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
z_i	0,100										

Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z puis une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés (les résultats numériques seront arrondis à 10^{-4} près).
En se fondant sur les résultats obtenus en 2. b., calculer la valeur de z correspondant à x = 26; en déduire la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres.
Ce résultat vous paraît-il plus satisfaisant que celui de 1. d. ? Pourquoi ?

3) Etude de l'offre

La forme du nuage de points associé à la série (x_i , z_i) permet d'envisager un ajustement affine de z en x.

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i , z_i). Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de z en x est-il satisfaisant ? Pourquoi ?

b) Donner alors une équation de la droite de régression de z en x sous la forme
$z = mx + p$.

4) Etude graphique du prix d'équilibre

On considère, dans la suite du problème, que la demande et l'offre sont respectivement formalisées par les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0 , 2] par $f(x) = e^{-1,4lx + 2,08}$ et $g(x) = 0,53x + 1,10$.

a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 , 2] et dresser son tableau de variation.

b) Sur le graphique du 1), tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.

c) Déterminer graphiquement le prix d'équilibre du produit.

5) Etude numérique du prix d'équilibre

On considère la fonction b définie sur l'intervalle [0 , 2] par $h(x) = f(x) - g(x)$.

a) Déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle [0 , 2] et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans l'intervalle [0 , 2] une solution unique x_0. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-1} près de x_0.

a) Quel est le prix d'équilibre du produit considéré ?

Exercice n°5

Aucun détail des calculs effectués à la calculatrice n'est exigé dans cet exercice.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du chiffre d'affaires réalisé à l'exportation par une entreprise.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	100	101	107	122	127	139	136	157	165

x_i désigne le rang de l'année,
y_i désigne l'indice du chiffre d'affaires à l'exportation rapporté à la base 100 en 1990.

1) a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ associé à la série double dans un repère orthogonal.
On prendra :
• pour origine le point (0 ; 100),
• pour unités : 1,5 cm sur l'axe des abscisses,
2 cm pour 10 points d'indice sur l'axe des ordonnées.

b) Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le graphique. (On donnera la valeur décimale arrondie au dixième de l'ordonnée de G).

2) Déterminer la valeur décimale arrondie au centième du coefficient de corrélation linéaire de la série double. Ce résultat permet-il d'envisager un ajustement affine ? Pourquoi ?

3) Soit **D** la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
a) Donner la valeur décimale arrondie au dixième du coefficient directeur de la droite **D**.
b) En utilisant les coordonnées du point moyen G, donner une équation de la droite **D**.
Tracer cette droite sur le graphique précédent.

4) En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires se poursuive de la même façon au cours des années suivantes, estimer l'indice du chiffre d'affaires de cette entreprise en l'an 2001 (on en donnera la valeur arrondie à l'unité).

EXERCICE 6

La cote d'une voiture d'occasion est donnée dans le tableau suivant :

Année de mise en circulation	1991	1992	1993	1994	1995
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Cote y_i	42 900 dt	54 200 dt	64 100 dt	81 600 dt	102 000 dt

1. Le plan est muni d'un repère orthogonal. Les unités graphiques sont en abscisses : 2 cm pour un an ; en ordonnées : 1 cm pour 10 000 F.
Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$.

2. Les points n'étant pas parfaitement alignés, on pose : z = ln y.
a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
$z_i = \ln y_i$					

Les valeurs de z_i seront données sous forme décimale approchée à 10^{-2} près par défaut.

(Dans la suite, le détail des calculs n'est pas demandé).

b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z.
Un ajustement affine est-il justifié ?

c. Donner une équation de la droite de régression D et z en x. (On arrondira les coefficients à $l0^{-2}$ par défaut.)

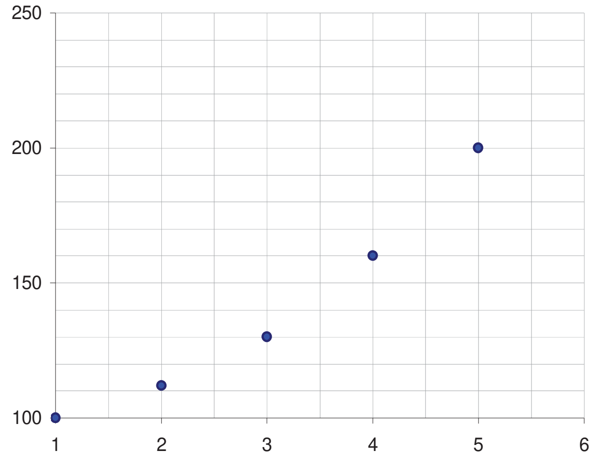
d. Calculer la valeur de z donnée par l'équation précédente pour l'année 1988. En déduire une estimation de la cote de cette voiture de l'année 1988. (On donnera une valeur arrondie à 100 F près.)

Exercice 7

Un fournisseur d'accès à Internet, souhaite faire une prévision du nombre de ses abonnés pour l'année 2005, il établit un relevé du nombre des abonnés des années 2000 à 2004.
Il affecte l'indice 100 à l'année 2000 pour établir la statistique des abonnés et consigne les données dans le tableau et le graphique ci-dessous :

Année	2000	2001	2002	2003	2004

Rang x_i	1	2	3	4	5
Indice y_i	100	112	130	160	200



PARTIE A

1) Le nombre d'abonnés était de 2040 pour l'année 2000, de combien est-il pour l'année 2004?
2) Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 2003 et 2004?
3) Quelle est l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés ?
4) Quelles prévisions du nombre d'abonnés peut-on faire pour les années 2005 et 2010 ? On arrondira à l'entier le plus proche.

PARTIE B

Le fournisseur décide d'utiliser un changement de variable pour obtenir un autre ajustement, il crée un nouveau tableau en posant z = ln(y)

1) Recopier et compléter le tableau suivant. On donnera les valeurs arrondies à 10^{-2}.

x_i	1	2	3	4	5
$z_i = \ln y_i$					

2) Dans le plan muni d'un repère, construire le nuage de points de coordonnées (x_i, Y_i) et la droite de régression de Y en x donnée par l'équation : Y = 0,17x + 4,39.
3) Exprimer le nombre d'abonnés n_i en fonction du rang x_i de l'année.
4) En déduire une nouvelle prévision du nombre d'abonnés pour les années 2005 et 2010.