CHAPITRE : SUITE REELLE

A. Démonstration par récurrence.

Méthode

Soit P une propriété dépendant d'un entier naturel n, et n_0 un entier naturel fixé.
Pour démontrer que P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ on procède en trois étapes.

1. Initialisation de la propriété : On vérifie que la propriété P est vraie pour l'entier n_0.
2. Caractère héréditaire de la propriété On démontre que si la propriété P est vraie pour un entier $n \geq n_0$ (hypothèse de récurrence) alors elle est vraie pour l'entier $n+1$.
3. Conclusion On peut conclure, d'après l'axiome de récurrence, que la propriété P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

B. Quelques rappels sur les suites

1. Définition d'une suite Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ou à partir du rang n_0 , $n_0 \in \mathbb{N}$.
2. Deux façons de définir une suite
   - Par la donnée explicite de Un en fonction de n

Exemples

- $U_n = \frac{n!}{n-3}$ définie à partir du rang 4.
- $U_n = f(n)$ avec $f(n) = \sqrt{x+3}$ définie sur $\mathbb{N}$.On dit alors que $U_n$est une suite fonctionnelle.
  - Par la donnée du premier terme et d'une relation de récurrence

Exemple : la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f(n) = \sqrt{x+3}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$

Remarque : cette suite récurrente est telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = 2x - 3$

C. Sens de variation d'une suite

1) Définition

2)

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie sur $\mathbb{N}$. On dit que (U_n)est
- croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geq U_n$
- décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \leq U_n$
- monotone si elle est soit croissante soit décroissante
- constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$,$U_{n+1} = U_n$.

Remarques

- on adaptera les définitions si la suite est définie à partir du rang n_0
- la suite (U_n) définie sur par $U_n = (-1)^n$ n'est pas monotone : elle prend alternativement les valeurs $+1$ et -1.

Méthodes d'étude de la monotonie d'une suite

- Pour déterminer le sens de variation d'une suite (U_n) définie à partir du rang n_0 on peut utiliser l'une des méthodes suivantes en choisissant la mieux adaptée
- Montrer que , pour tout $n \geq n_0$, la différence $U_{n+1} - U_n$ garde le même signe, éventuellement à l'aide d'une démonstration par récurrence (en particulier pour les suites du type $U_{n+1} = f(U_n)$ dans le cas ou f est croissante sur un intervalle contenant tous les termes U_n
- Si la suite est à termes strictement positifs, étudier la place du quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ par rapport à 1.
- La suite (U_n) est alors croissante si pour tout $n \geq n_0$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$; décroissante si $0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$
- pour les suites (fonctionnelles) du type$U_n = f(n)$, si f est monotone sur $[n_0; +\infty[$ alors la suite (U_n) est monotone et varie dans le même sens que f (Attention : condition suffisante mais pas nécessaire !)

D. Suite majorée, minorée, bornée.

1) Définitions

Une suite (U_n) définie à partir du rang n_0 est : - majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq n_0, U_n \leq M$; - minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq n_0, U_n \geq m$ - bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

- Une suite croissante est minorée par son premier terme.
- Une suite décroissante est majorée par son premier terme

2) Théorème Pour les suites du type $U_n = f(n)$ si f est bornée sur $[n_0; +\infty[$ alors la suite (U_n) l'est aussi.

E. Convergence des suites monotones.

Théorème

Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.

F. Suites adjacentes.

1) Définition

Deux suites (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes si l'une d'elles est croissante, l'autre décroissante, et si$\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$.

2) Théorème

Si deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ sont adjacentes, (U_n) étant la suite croissante et (V_n) la suite décroissante, alors : - Pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$ - Les suites (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite L - Pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n \leq L \leq V_n$

Exemple classique : ces deux suites sont adjacentes et convergent vers $e = 2{,}7182818$ $\begin{cases} U_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!} \\ V_n = U_n + \frac{1}{n!} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}+\frac{1}{n!} \end{cases}$

3) Théorèmes d'existence de limite

Si une suite (U_n) est croissante et majorée, alors elle converge. On ne sait rien de sa limite. Si une suite (U_n) est décroissante et minorée, alors elle converge

4) Théorèmes sur les limites

Composée :

Soit f définie sur I. (V_n)est une suite dont tous les termes appartiennent à I $\lim_{n\to\infty} V_n = b$ et si $\lim_{n\to\infty} f(x) = c$ alors, $\lim_{n\to\infty} f(V_n) = c$

5) Suite Arithmétique et suite géométrique :

Type de la suite	Forme générale	Somme	Limites
Suite Arithmétique	$U_{n+1} = U_n + r$ $U_n = U_0 + nr$ $U_p = U_q + (p-q)r$ $p \geq q$	$\sum_{i=0}^{n} U_i = (n+1)\times U_0 + r \times \frac{n\times(n+1)}{2}$	Si $r = 0$ $\lim_{n\to\infty} U_n = r$ Si $r > 0$ $\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$ Si $r < 0$ $\lim_{n\to\infty} U_n = -\infty$
Suite géométrique	$V_{n+1} = qV_n$ $V_n = q^n V_0$ $V_p = q^{n-p} V_q$ $n \geq p$	Si $q = 1$ $\sum_{i=0}^{n} V_i = (n+1)\times V_0$ Si $q \neq 1$ $\sum_{i=0}^{n} V_i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\times V_0$	Si $\lvert q\rvert < 1$ $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ Si $\lvert q\rvert \geq 1$ $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ Si $q < -1$ La limite n'existe pas

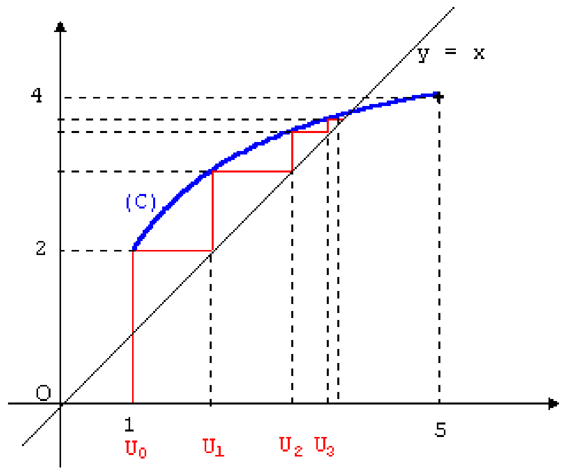
Dans ce tableau:

- Les réels r et q sont les raisons respectifs de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Les réels U_0 et V_0 sont les premiers termes respectifs de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$

6) **Récurrence d'ordre 1**

Soit (U_n) une suite définie de manière récurrente par : $\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ Il faut étudier le sens de variations de f. Si f est croissante sur I, si $f(I) \subset I$, alors, la suite (U_n)est monotone. Si de plus l'équation $f(x) = x$admet une solution dans I, alors c'est la limite

de la suit (U_n)



7) **Et pour finir :**

Dans l'exemple ci dessus, on a tracé la courbe de f et la droite d'équation $= x$. Ces deux courbes se coupent en un point d'abscisse inférieure à 4. Si on prend u_0 sur (Ox), le point d'abscisse u_0 de C_f a comme ordonnée. $U_1 = f(U_0)$ On projette alors ce point sur la droite d'équation $y = x$ puis sur (Ox). On a donc maintenant u_1 sur (Ox). On réitère le processus et on visualise ainsi U_2; U_3 et U_4 On peut avoir l'intuition que la suite converge vers le réel solution de l'équation $x = f(x)$. Attention, on voit l'importance du premier terme. Si u_0 est supérieur à 4, il est clair que la suite tend vers l'infini.

Un deuxième exemple est fourni avec une fonction décroissante $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$; on définit $U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 = 1$