Suites Reèlles

Forme explicite

$U_n = f(n)$

Exemple

$U_n = \frac{2n+3}{n-1} + \cos n$

$U_0 = \frac{2\times 0+3}{0-1} + \cos 0$

$= -3+1$

$= \boxed{-2}$

Suite recurrente

$\begin{cases} U_0 \text{ donné} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

Exemple

$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1+U_n}{2U_n} \end{cases}$

$U_1 = \frac{1+U_0}{2U_0}$

$= \boxed{\frac{3}{2}}$

Suite n'est pas recurrente

$\begin{cases} U_0 = \text{donné} \\ U_{n+1} = f(U_n, n) \end{cases}$

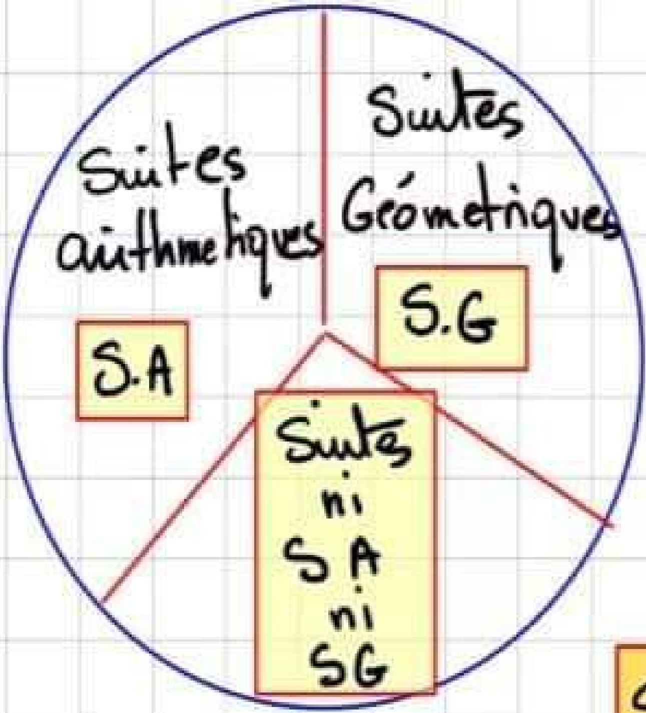
Exemple

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + n \end{cases}$

$U_1 = U_0 + 1$

$= \boxed{2}$

Suites Reélles



S A

Mq (V_n) est une S.A.

- $V_{n+1} = \dots\dots$ (simplication)
- $V_{n+1} - V_n = \dots = \text{constante}$
$= \boxed{r \text{ (raison)}}$

Exemple

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{1+U_n} \end{cases}$$

S G

Mq (V_n) est une S.G

- $V_{n+1} = \dots\dots = (\text{constante}) \cdot V_n$
$= q \cdot V_n.$ → raison

Exemple :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{1+U_n.} \end{cases}$$

et $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n}$

et $V_n = \frac{1+U_n}{-1+U_n}$.

Mq (V_n) est une S.A.

$$V_{n+1} = \frac{1+U_{n+1}}{-1+U_{n+1}}$$

$$= \frac{1+3-\frac{4}{1+U_n}}{-1+3-\frac{4}{1+U_n}}$$

$$= \frac{4+4U_n-4}{2+2U_n-4}$$

$$= \frac{4U_n}{-2+2U_n}$$

$$= \boxed{\frac{2U_n}{-1+U_n}}$$

$$V_{n+1}-V_n = \frac{2U_n}{-1+U_n} - \frac{1+U_n}{-1+U_n}$$

$$= \frac{U_n-1}{U_n-1} = \boxed{1}$$

Donc (V_n) est une Suite arithmetique de rai

Mq (V_n) est une S.G

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-3}{U_{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{4U_n}{1+U_n}-3}{\frac{4U_n}{1+U_n}}$$

$$= \frac{4U_n-3-3U_n}{4U_n}$$

$$= \frac{U_n-3}{4U_n}$$

$$= \frac{1}{4}V_n$$

Donc (V_n) est une Suite Géometrique de raison $q=\frac{1}{4}$

TakiAcademy
- www.takiacademy.com -

Exprimer V_n en fonction de n

$V_n = V_0 + n \times r$

$V_n = V_1 + (n-1) \times r$

$V_n = V_m + (n-m) \times r$

Exemples

$r = -2$ et $V_0 = 3$

$V_n = V_0 + nr$

$\boxed{V_n = 3 - 2n}$

$r = -\sqrt{2}$ et $V_1 = -1$

$V_n = V_1 + (n-1) \times r$

$\boxed{V_n = -1 - \sqrt{2}(n-1)}$

Exprimer (V_n) en fonction de n.

$V_n = V_0 \times q^n$.

$V_n = V_1 \times q^{n-1}$

$V_n = V_m \times q^{n-m}$.

Exemples.

$q = -2$ et $V_0 = -5$

$V_n = V_0 \times q^n$

$V_n = \boxed{-5 \times (-2)^n}$.

$q = -3$ et $V_1 = 2$

$V_n = V_1 \times q^{n-1}$

$V_n = 2 \times (-3)^{n-1}$

$= 2 \times (-3)^n \times (-3)^{-1}$

$\boxed{V_n = -\frac{2}{3}(-3)^n}$

Somme d'une Suite (Σ)

- $\sum_{k=1}^{3} U_k = U_1 + U_2 + U_3$

- $\sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

PT : premier terme

PI : premier indice

DT : dernier terme

DI : dernier indice

NT : nombre de terme

$$NT = DI - PI + 1$$

- $\sum$ Constante = constante $\times$ NT

- $\sum_{PI}^{DI} U_k$

Somme d'une S.A

$$\frac{NT}{2}(PT+DT)$$

Exeple.

$$2\overset{+3}{+}5\overset{3}{+}8\overset{3}{+}11=\frac{4}{2}(2+11)$$

$$=\boxed{26}$$

Somme d'une S.G

$$PT\times\frac{1-q^{NT}}{1-q}$$

Exeple.

$$2\underset{\times 4}{+}8\underset{\times 4}{+}32=2\times\frac{1-4^{3}}{1-4}$$

$$=\boxed{42}$$

Remarques

- $$\sum\underbrace{(ak+b)}_{S.A}=\frac{NT}{2}(PT+DT)$$

- $$\sum\underbrace{(a\times q^{k})}_{S.G}=PT\times\frac{1-q^{NT}}{1-q}$$

Suite ni SA ni SG

U_0, U_1, U_2

$U_1 - U_0 = \dots$

$U_2 - U_1 = \dots$

$\boxed{U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1 \text{ donc } U \text{ n'est pas S.A}}$

ou

$2U_1 = \dots$

$U_0 + U_2 = \dots$

$\boxed{2U_1 \neq U_0 + U_2 \text{ donc } U \text{ n'est pas S.A}}$

Si $U_0 \neq 0$ et $U_1 \neq 0$

$\frac{U_1}{U_0} = \dots$

$\frac{U_2}{U_1} = \dots$

$\boxed{\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1} \text{ donc } U \text{ n'est pas S.G}}$

ou bien. $\forall\ U_0, U_1$ et $U_2 \in \mathbb{R}$

- $\left.\begin{array}{l} U_1^2 = \dots \\ U_0 \times U_2 = \dots \end{array}\right\}$ $U_1^2 \neq U_0 \times U_2$ Donc U n'est pas S.G

Suite majorée _ Suite minorée

- $U_n \leq M \Rightarrow (U_n)$ est majorée par M
- $U_n \geq m \Rightarrow (U_n)$ est minorée par m
- $m \leq U_n \leq M \Rightarrow (U_n)$ est bornée

Sens de variation d'une Suite

- $U_{n+1} - U_n = \begin{cases} \oplus \Rightarrow (U_n) \nearrow \\ \ominus \Rightarrow (U_n) \searrow \\ 0 \Rightarrow (U_n) \text{ est cte} \Leftrightarrow U \dots \end{cases}$

Limite d'une Suite

📌 $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \text{n'existe pas} \end{cases} \Big\}$ $\boxed{(U_n) \text{ divergente}}$ $\boxed{(\text{Div})}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\; \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\boxed{(U_n) \text{ est Convergente}}$ $\boxed{(\text{Cv})}$

📌

q	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$		n'existe pas	n'existe pas	0	1	$+\infty$	

Exemples

📌 $U_n = (-1)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ n'existe pas

Donc $\boxed{(U_n) \text{ div.}}$

$U_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ Car $-1 < -\frac{1}{2} < 1$

Donc $\boxed{(U_n) \text{ C.V.}}$

Remarques trés importante dans la pratique

- (U_n) est $\nearrow$ et majorée par M
- (V_n) est $\searrow$ est minorée par m

$\Bigg\}$ Donc (U_n) et (V_n) sont C.V.

- (U_n) est $\nearrow$ et non majorée $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{+\infty}$

- (U_n) est $\searrow$ et non minorée $\Rightarrow \lim U_n = \boxed{-\infty}$

- $\forall n \in \mathbb{N}$; (U_n) est $\nearrow$ $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \geqslant U_0$
- $\forall n \in \mathbb{N}$; (U_n) est $\searrow$ $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \leqslant U_0$

$$\begin{cases} U_0 = \text{donnée} \\ U_{n+1} = f(U_n) \\ a \leq U_n < b \end{cases} \quad \text{et} \quad \boxed{(U_n) \text{ C.V.}}$$

QUESTION Determiner $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

REPONSE On pose $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ avec $\boxed{a \leq \ell \leq b}$

et $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f est continue sur $\boxed{I}$

en particulier en ℓ

Donc $f(\ell) = \ell$

Exemple :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{1+U_n} \\ \boxed{2 < U_n < 3} \end{cases} \quad \boxed{(U_n) \text{ est C.V}} \quad \text{et} \quad \boxed{U_n \nearrow}$$

QUESTION Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

REPONSE On pose $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ avec $\boxed{0 \leq \ell \leq 3}$

et $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $\boxed{f(x) = \dfrac{4x}{1+x}}$ où

f est continue sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1\}}$

en particulier en ℓ

Donc $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \dfrac{4\ell}{1+\ell} = \ell$

$\Leftrightarrow 4\ell = \ell + \ell^2$

$\Leftrightarrow \ell^2 - 3\ell = 0$

$\Leftrightarrow \ell(\ell - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 3$

or (U_n) [illegible] $\nearrow$ [illegible] $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3.}$

TakiAcademy
- www.takiacademy.com -

Principe de recurrence

- Pour $n=n_0$ vérification (Initialisation)
- Pour $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $a \leq U_n \leq b$

et montrons que $a \leq U_{n+1} \leq b$.

hérédité

- Conclusion

Exemple
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{1+U_n}. \end{cases}$$

QUESTION Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 3$

REPONSE

- Pour $n=0$ $0 < U_0 = 1 < 3$ (vraie)
- Pour $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $0 < U_n < 3$

$0 < U_{n+1} <$

$$U_{n+1} = \frac{4U_n^{>0}}{\underbrace{1+U_n}_{>0}} > 0 \quad (1)$$

$$U_{n+1} - 3 = \frac{4U_n}{1+U_n} - 3 = \frac{4U_n - 3 - 3U_n}{1+U_n}$$

$$= \frac{\overbrace{U_n - 3}^{<0}}{\underbrace{1+U_n}_{>0}} < 0 \quad (2)$$

d'aprés (1) et (2) $\Rightarrow \quad 0 < U_{n+1} < 3$

Donc $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 < U_n < 3$.

Remarque

$\mathcal{L} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_{\boxed{n}} = \mathcal{L} \iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} U_{\boxed{2n}} = \mathcal{L} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_{\boxed{2n+1}} = \mathcal{L} \end{cases}$$

Suites adjacentes

- $U_n \leq V_n$
- $(U_n) \nearrow$ et $(V_n) \searrow$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n - U_n = 0$

$\Bigg\}$ alors (U_n) et (V_n) sont adjacentes. c.à.d (U_n) et (V_n) sont C.V et $\lim(U_n) = \lim(V_n)$