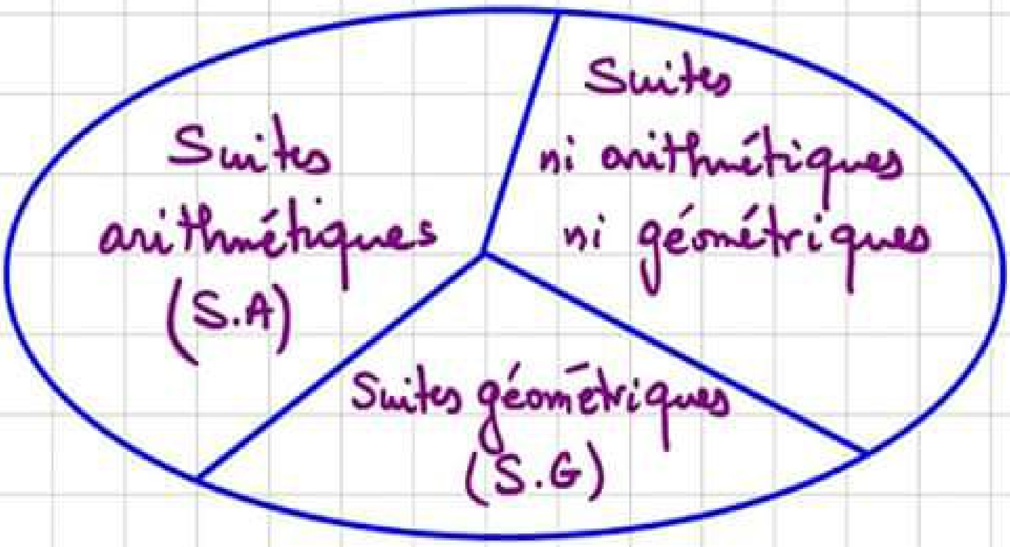
Suites réelles



I- Suites arithmétiques :

1) Définition : $\boxed{u_{n+1} - u_n = r}$ $(u_{n+1} = u_n + r)$

2) Terme generale $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

3) Relation entre deux termes

$$\boxed{u_p = u_q + (p-q)r}$$

4) Somme.

$$\boxed{S = \sum_{k=0}^{n} u_k = NT\left(\frac{PT + DT}{2}\right)}$$

II- Suites géométriques :

1) Définition : $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q}$ $\quad (u_{n+1} = u_n \cdot q)$

2) Terme generale $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$

3) Relation entre deux termes

$$\boxed{u_m = u_n \times q^{m-n}}$$

4) Somme

$$\boxed{S = PT\left(\frac{1-q^{NT}}{1-q}\right)}$$

III - Limite d'une suite :

1) S.A Si (u_n) est une S.A

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r>0 \\ -\infty & \text{si } r<0 \end{cases}$$

2) S.G Si (v_n) est une S.G

pas de Limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $u_0>0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Retenons :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

IV - Suites majorées - Suites minorées

$u_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Alors (u_n) est dite majorée par M

$u_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Alors (u_n) est dite minorée par m

I - Sens de variation d'une suite :

$$u_{n+1} - u_n = \begin{cases} \boxed{+} & \text{alors } (u_n) \text{ est } \boxed{\text{croissante}} \\ \boxed{-} & \text{alors } (u_n) \text{ est } \boxed{\text{décroissante}} \\ \boxed{0} & \text{alors } (u_n) \text{ est } \boxed{\text{constante}} \end{cases}$$

Théorème :

- Toutes suite **croissante** et **majorée**, elle est **convergente**.
- Toutes suite **décroissante** et **minorée** elle est **convergente**.

(u_n) convergente sig $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$

Conséquence :

- Si (u_n) est une suite croissante et non majorée alors (u_n) est divergente

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\right)$$

- Si (u_n) est une suite décroissante et non minorée alors (u_n) est divergente

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty\right)$$

Remarque :

- $\forall n \in \mathbb{N}$; (u_n) st croissante

donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq u_0$

- $\forall n \in \mathbb{N}$; (u_n) st décroissante

donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq u_0$

VI _ Raisonnement par récurrence :

Principe :

Soit $\boxed{\mathcal{P}}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$

Si la propriété $\boxed{\mathcal{P}}$ verifie les deux conditions suivantes :

- **Initialisation :** à partir d'un certain rang n_0 la propriété $\boxed{\mathcal{P}(n_0)}$ est $\boxed{\text{vraie}}$
- **Hérédité :** Si $\boxed{\mathcal{P}(k)}$ est $\boxed{\text{vraie}}$ pour un entier $\boxed{k \geq n_0}$ alors $\boxed{\mathcal{P}(k+1)}$ est aussi $\boxed{\text{vraie}}$

Alors : La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Théorème des points fixes:

- $u_{n+1} = f(u_n)$
- u_n converge vers ℓ. $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell\right)$
- f est continue en ℓ.

Alors

$$\boxed{f(\ell) = \ell}$$