Théorème

Soit a un réel fini ou infinie

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, si et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = a$

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Théorème

Soit ℓ et ℓ' deux réels.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'

- S'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$: $\underline{u_n \geq 0}$, alors $\underline{\ell \geq 0}$
- S'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$: $\underline{u_n \leq 0}$, alors $\underline{\ell \leq 0}$
- S'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$: $\underline{m \leq u_n \leq M}$, alors $\underline{m \leq \ell \leq M}$
- S'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$: $\underline{u_n \leq v_n}$, alors $\underline{\ell \leq \ell'}$

Convergence et divergence

- Si $\begin{cases} (u) \text{ est majorée} \\ (u) \text{ est croissante} \end{cases}$ alors (u) est convergente vers un réel ℓ et pour tout n de I : $u_n \leq \ell$
- Si $\begin{cases} (u) \text{ est minorée} \\ (u) \text{ est décroissante} \end{cases}$ alors (u) est convergente vers un réel ℓ et pour tout n de I : $u_n \geq \ell$
- Si $\begin{cases} (u) \text{ est croissante} \\ (u) \text{ est } \underline{\text{non majorée}} \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $\begin{cases} (u) \text{ est décroissante} \\ (u) \text{ est } \underline{\text{non minorée}} \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Calcul de limite

- Si $\begin{cases} (u) \text{ est convergente vers } \ell \\ f \text{ est continue en } \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$
- Si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \ (\ell \text{ fini ou infini}) \\ \lim\limits_{n\to\ell} f(x) = e \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = e$

Soit (u) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

- Si $\begin{cases} (u) \text{ est convergente vers } \ell \\ f \text{ est continue en } \ell \end{cases}$ alors $\ell = f(\ell)$

Suite adjacente

- Si $\begin{cases} \forall n \in I \quad u_n \leq v_n \\ (u_n) \text{ est croissante et } (v_n) \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases}$ alors (u_n) et (v_n) convergent vers le même limite

Théorème d'encadrement

- Si $\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 : v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$

- Si $\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 : |u_n| \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

- Si $\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 : u_n \geq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

- Si $\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 : u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Suite arithmétique – Suite géométrique

*** Suite arithmétique(s.a) ***	*** Suite géométrique(s.g) ***
$u_{n+1} = u_n + r$	$v_{n+1} = qv_n$
$u_n = u_0 + nr$	$v_n = v_0 q^n$
$u_p = u_s + (p-s)r$	$v_p = v_s q^{p-s}$
$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0 \Rightarrow$ u non s.a	$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_1}{v_0} \Rightarrow$ v non s.g
$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$
• $\sum\limits_{k=0}^{n} x = \overbrace{x + x + \ldots + x}^{n+1 \text{ fois } x} = (n+1)x$ • $\sum\limits_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ • $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ • $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$	pour tout $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ • $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q^1 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ • $\sum\limits_{k=p}^{n} q^k = q^p + q^{p+1} + \ldots + q^n = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$

Maths aux lycées

Séries d'exercices — 4ème Maths

Suites réelles

EXERCICE N°1

Montrer que : pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

1°) $\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ fois } \sqrt{}}$ et $\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ fois } \sqrt{}}$

2°)En déduire que $\pi = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n \times \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ fois } \sqrt{}}\right)$

EXERCICE N°2

Soit $\alpha \in [-1,1]$, on considère la fonction f définie sur par : $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1°)Soit pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{4n+1}$ et $v_n = \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{4n-1}$. Calculer $f(u_n)$ et $f(v_n)$.

2°)Existe t –il un valeur de α tel que f soit continue en 0

EXERCICE N°2

Exprimer u_n en fonction de n .

1°) $u_0=2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + n$

2°) $u_0=3$, $u_1 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

3°) $u_0=3$, $u_1 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$

4°) $u_0 = \frac{2}{5}$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $.3(n+1)u_n = 2(n+2)u_{n-1}$

EXERCICE N°3

1°) Soit x un réel tel que $0 < x \leq 1$.Montrer que : pour tout k de $\mathbb{N}$: $(1+x)^k \leq 1+2^k x$

2°)Soit (x) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $x_n = \frac{n^3}{3^n}$

(a) Etablir l'égalité suivante : pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$

(b) En déduire que : pour tout $n \geq 16$: $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2}$

(c) Montrer que : pour tout $n \geq 16$: $x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-16} x_{16}$. En déduire alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n$

EXERCICE N°4

Soient a et b deux réels tels que $0< a\leq b$ et (u_n) la suite définie par :

$u_1 = a+b$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = a+b-\frac{ab}{u_n}$.

1°) On suppose que a<b.

(a) Montrer que (u_n)est minorée par b .

(b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)en déduire qu'elle est convergente.

2°) Soit v la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n = \dfrac{u_n - b}{u_n - a}$

(a) Montrer que v est une suite géométrique.

(b) En déduire u_n en fonction de n , a et b

(c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3°) On suppose que a=b .

(a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 en fonction de a .

(b) Exprimer alors u_n en fonction de n et a puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°5

Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sqrt{p + (p-1)x}$, où p est un réel tel que $p > 1$

On considère la suite réelle u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$

1°)(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le u_n \le p$

(b) Etudier la monotonie de u .

(c) En déduire que u est convergente .

2°)(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - p| \le \dfrac{p-1}{p} |u_n - p|$

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - p| \le p\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)^n$. En déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°6

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 9}{2u_n}$

1°) Montrer que $u_{n+1} - 3$ et $u_n - 3$ sont de signes contraires.

2°) En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} \le 3 \le u_{2p+1}$.

3°) En déduire que si u est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

4°) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \ge 2$

5°) (a) Montrer que : $\forall n \ge 2,\ |u_n - 3| \le \dfrac{3}{4} |u_{n-1} - 3|$

(b) En déduire $\forall n \ge 2,\ |u_n - 3| \le 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

(a) Montrer que u est convergente et précisera sa limite.

EXERCICE N°7

On considère les suites u et v définies sur N par : $u_0 = v_0 = 0$ et pour tout n de N :

$u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n}$ et $v_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}$.

1°)Montrer que pour tout n de N on a : $0 \le u_n \le 3$ et $0 \le v_n \le 3$.

2°)Soient a et b deux suites définies sur N par : $a_n = u_n - 1$ et $b_n = v_n - 1$.

a)Montrer que pour tout n de N on a : $|a_{n+1}| \le |b_n|$ et $|b_{n+1}| \le \dfrac{1}{2}|a_n|$.

b)En déduire que pour tout n de N on a : $|a_{n+2}| \le \dfrac{1}{2}|a_n|$ et $|b_{n+2}| \le \dfrac{1}{2}|b_n|$

c)En utilisant les résultats de b/, montrer que pour tout n de n : $|a_{2p}| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^p$ et $|b_{2p}| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{p-1}$.

d)Étudier alors la convergence des suites (u_{2p}) et (v_{2p})

EXERCICE N°8

1°) Montrer que pour tout réel positif x on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2°) Montrer que pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3°)Soit x un réel positif fixé et $(u_n(x))$ la suite définie sur N^* par : $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{kx}{n^2}\right)$

(a) Montrer que pour tout n de N^* : $\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{(n+1)^2x^3}{24n^4} \leq u_n(x) \leq \frac{(n+1)x}{2n}$

(b) En déduire que $(u_n(x))$est convergente et calculer sa limite.

4°) Soit v la suite définie sur N^* par : $v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^3\left(\frac{k}{n^2}\right)$

(a) Montrer que pour tout réel x : $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$

(b) En déduire que : $v_n = \frac{3}{4}u_n(1) - \frac{1}{4}u_n(3)$

(c) Calculer alors : $\lim_{n\to+\infty} v_n$

EXERCICE N°8

1°)Etudier les variations de la fonction g définie par : $g(x) = x^3 - 5x - 1$ sur R.

2°)En déduire que l'équation $x^3 - 5x - 1 = 0$ possède trois racines a, b, c, avec a < b < c Donner des valeurs approchées de a, b, c à 10^{-1} près. (On trouve : -2,2 ; -0,3 ; 2,3.)

3°)On considère la suite u définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$\forall n \in N \; u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^{\ 3} - 1)$.

a) Montrer que la suite u est monotone.

b) Si la suite u est convergente, quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?

c) Etudier la suite u dans les trois cas particuliers suivants :$u_0 = -3$;$u_0 = 0$; $u_0 = 3$.

EXERCICE N°10

1°) Soit(u_n)la suite réelle définie sur N par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n de N : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$

(a) Montrer que pour tout n de N on a : $0 < u_n < 1$

(b) En déduire que (u_n)est convergente et calculer sa limite.

2°) Soit v la suite de terme général : $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$

(a) Montrer que pour tout n de N on a : $v_{n+1} = v_n^2$

(b) En déduire que pour tout n de N : $v_n = \frac{1}{3^{2^n}}$

(c) Déduire $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et l'expression de u_n.

(d) On pose pour tout n de N : $p_n = v_0.v_1....v_n$. Calculer p_n puis calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{p_n}{v_{n+1}}\right)$

3°) Soit la suite s définie sur N^* par $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$

(a) Montrer que pour tout $n \in N^*$, on : $0 < 1 - u_n < \frac{1}{1+u_0^2}\left(1 - u_{n-1}\right)$

(b) En déduire que pour tout n de N , $0 < 1 - u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

(c) Montrer que pour tout n de N^* ; $1 - \frac{5}{n}\left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^n\right] \le s_n \le 1$. En déduire alors $\lim_{n \to +\infty} s_n$

EXERCICE N°11

Soit u la suite réelle définie sur N par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \end{cases}$ avec $a \in R_+^*$ et $n \in N$

1°)Pour quelle valeur de u_0 la suite u est constante.

2°)Montrer que pour tout n de N : $u_n > 0$

3°)On suppose dans la suite que : $u_0{}^2 - a \neq 0$

(a) Montrer que pour tout n de N : $u_n \neq \sqrt{a}$

(b) Montrer que pour tout n de N : $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2$

(c) Montrer que pour tout n de N : $u_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n + \sqrt{a}\right)^2$

(d) Montrer que si u est convergente elle converge nécessairement vers $\sqrt{a}$

(e) Montrer que u est strictement décroissante et qu'elle converge et déterminer sa limite.

4°)Soit pour tout n de N : $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.

(a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.

(b) En déduire v_n en fonction de n et v_0.

(c) Calculer alors : $\lim_{x \to +\infty} v_n$ puis $\lim_{x \to +\infty} u_n$

5°)On suppose que : $u_0 = \frac{3}{2}\sqrt{a}$

(a) Montrer que pour tout n de N : $u_n > \sqrt{a}$

(b) Montrer que pour tout n de N : $u_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{a}\right)$

(c) Montrer que pour tout n de N : $u_n - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqrt{a}$

(d) En déduire $\lim_{x \to +\infty} u_n$

EXERCICE N°12

1°) Soit la fonction $f : x \to f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

(a) Etudier les variations de f .

(b) Résoudre dans R : f(x) = x .

(c) Montrer que si : $1 \le x \le \sqrt{3}$ alors $1 \le f(x) \le \sqrt{3}$

2°)Soit la suite réelle u définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in N,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.
(b) Etudier la monotonie de u.
(c) Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

3°) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$

(a) Montrer que v est une suite géométrique.
(b) En déduire l'expression de u_n.
(c) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4°)On pose $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : n \leq s_n \leq 3n$

(b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_n}{n^2}$

5°)On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $r_n = \dfrac{s_n}{n}$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : ns_{n+1} - (n+1)s_{n+1} = nu_n^2 - s_n$
(b) En déduire que (r_n)est suite croissante.
(c) Montrer que (r_n)est une suite convergente et trouver sa limite ℓ .

6°)Soit n , $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > p$.
(a) Montrer que : $(n-p)u_p^2 \leq s_n \leq nu_{n-1}^2$

(b) En déduire que : $\dfrac{n-p}{n} \leq r_n \leq u_{n-1}^2$

(c) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*\ u_p^2 \leq \ell \leq 3$. En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE N°13

On se donne deux réels a et b tels que $0 \leq b \leq a$. On définit les suites (u_n)et (v_n)par les relations :

$u_0 = a$, $v_0 = b$, $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2}$

1°)Etablir une relation entre $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $u_n - v_n$.

2°)En déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n , a et b .

3°)En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n , n , a et b.

4°)Montrer que les suites u et v convergent vers une limite commune que l'on déterminera.

EXERCICE N°14

On définit des suites (u_n) et (v_n) par : $u_0, v_0 > 0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$

et $\dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}\right)$

1°)Montrer que (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.

2°)Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \geq v_n$ et $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$

3°)En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite.

EXERCICE N°15

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur N par : $\begin{cases} u_0 = a & , \quad v_0 = b \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & , \quad v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{v_n(u_n + v_n)}{2}} \end{cases}$

1°)Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite $\ell > 0$.

2°)On suppose que $a = b\cos\varphi$; $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Exprimer ℓ en fonction de b et φ

EXERCICE N°16

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sqrt{n}.\dfrac{C_{2n}^n}{4^n}$.

1°)Calculer u_1 et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

2°)Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$.

3°)Montrer qu'il existe $\ell \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

4°)Montrer que $\forall x > 0$: $\dfrac{1}{4(2x+1)} \leq \left(x + \dfrac{1}{2}\right) - \sqrt{x(x+1)} \leq \dfrac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}$

5°)En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{u_k}{8\left(k+\dfrac{1}{2}\right)} - \dfrac{u_k}{8\left(k+\dfrac{3}{2}\right)} \leq u_{k+1} - u_k \leq \dfrac{u_k}{8k} - \dfrac{u_k}{8(k+1)}$.

6°)En cadrer $u_p - u_n$ (pour $p > n$), puis établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{u_n}{4(2n+1)} \leq \ell - u_n \leq \dfrac{\ell}{8n}$

7°)En déduire la majoration suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\ell - \left(1 + \dfrac{1}{8n}\right)u_n\right| \leq \dfrac{\ell}{16n^2}$.

8°)Comment suffit-il de choisir n pour que $\left(1 + \dfrac{1}{8n}\right)u_n$ soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} prés ?

EXERCICE N°17

Prouver que la suite de terme générale $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

EXERCICE N°18

On considère la suite de terme générale $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1°)Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\geq1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq0}$ sont des suites adjacentes.

2°)Déduire que la suite $(u_n)_{n\geq1}$ est convergente.

EXERCICE N°19

On considère la suite de terme générale $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}$.

1°)Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\geq0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq0}$ sont des suites adjacentes.

2°)Déduire que la suite $(u_n)_{n\geq0}$ est convergente.

EXERCICE N°20

Soient les deux réels a et b, tels que $0 < a < b$, et les deux suites $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n v_n (u_n + v_n)}{u_n^2 + v_n^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}.$$

1°)Montrer que pour tout n de N, $v_n > u_n$.

2°)Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ sont convergentes.

3°)Déduire que les deux suites $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ sont adjacentes.

4°)Montrer que la suite $(w_n)_{n\in N}$ définie par son terme général $w_n = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}$ est constante.

5°)Déduire la valeur des limites des suites $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ en fonction de a et b .

EXERCICE N°21

1°) Pour tout entier naturel n, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3.

2°) Démontrer par récurrence que pour tout $n > 1$, on a : $F_0 \times F_1 \times \dots \times F_n = F_{n+1} - 2$.

3°) Montrer que la suite (F_n) est croissante et non majorée. Quelle est sa limite ?

EXERCICE N°22

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse

Soient ℓ , k et q des réels tel que $0 < k < 1$ et $0 < x < 1$

1°)Si $\forall n\in N$: $|u_{n+1} - \ell| \le k\,|u_n - \ell|$ alors u est convergente .

2°) Si $\forall n\in N$: $|u_{n+1} - \ell| \le k\,|u_n - \ell|$ alors s est convergente tel que : $\forall n\in N^*$: $s_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$

3°) Si $\forall n\in N$: $|u_{n+2} - \ell| \le k\,|u_n - \ell|$ alors u est convergente .

4°) Si $\forall n\in N$: $|u_{n+2} - u_{n+1}| \le k\,|u_{n+1} - u_n|$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$

5°) Si $\forall n\in N$: $|u_{n+1} - \ell| \le k\,|u_n - \ell| + x^n$ alors u est convergente .

6°)Si $(u_n)_{n\in N}$ est croissante et $(v_n)_{n\in N}$ est décroissante alors $(u - v)_n$ est décroissante .

7°)Soient u et v deux suites réelles tel que :

Si : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^2 + u_n \times v_n + v_n^2) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

8°)Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0 + u_1 + \dots + u_n) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$