

Série de révision 4maths



Exercice 1 (4 points)

- 1 On considère \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $4x - 5y = 1$
- a Montrer que $(-1, -1)$ est une solution de (E)
 - b Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E)
 - c En déduire que l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z} , du système (S) :

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

est l'ensemble des entiers x tels que $x = 20k - 2, k \in \mathbb{Z}$

- 2 Pour tout n de \mathbb{N} , on pose : $a = 4n + 3$ et $b = 3n + 1$
- a Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $a \wedge b = (n + 2) \wedge 5$, puis en déduire les valeurs de l'entier naturel n tels que : $a \wedge b = 5$
 - b Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 2^n par 5
 - c Montrer que : $2^a + 3^b \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow 2^{a+b} \equiv 4 \pmod{5}$
 - d Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\begin{cases} n \geq 2020 \\ 2^a + 3^b \equiv 0 \pmod{5} \\ a \wedge b = 5 \end{cases}$



Exercice 2 (4 points)

Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages.

Ainsi à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville à un rythme décrit comme suit : Le premier jour la ville est délestée.

- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$.
- Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$.

On désigne par D_n l'événement : "la ville est délestée le jour n " et p_n la probabilité de D_n .

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où la ville est délestée au cours des trois premiers jours.

- 1
- a Montrer que $p(X = 2) = \frac{133}{162}$.
 - b Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2 Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a $p_{n+1} = -\frac{11}{18}p_n + \frac{5}{6}$
- 3 Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N}^* par $V_n = 6p_n - \frac{90}{29}$
- a Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b Exprimer v_n puis p_n en fonction de n .
 - c Un match de football doit se jouer le vingtième jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage.
- 4 La durée de vie T , exprimée en mois, des lampes utilisées par les habitants de la ville suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02$
- a Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une lampe dépasse une année?



- b Une lampe a fonctionné pendant six mois, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse deux ans ?
- c Dans une maison de cette ville il y a dix lampes qui fonctionnent de manières indépendantes. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles fonctionnent plus qu'une année ?

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \ln(\tan x)$.

- 1 Dresser le tableau de variations de f .
- 2
 - a Montrer que f possède une fonction réciproque φ définie et dérivable sur \mathbb{R} .
 - b Préciser les limites de φ en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 3
 - a Montrer que pour tout réel x , $\varphi'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$.
 - b Montrer que pour tout réel x , $\varphi(x) + \varphi(-x) = \frac{\pi}{2}$.
- 4 Pour tout réel x , on pose : $G(x) = \frac{1}{2}(\varphi'(x) + \varphi(x))$ et $g(x) = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^2}$.
Montrer que G est une primitive de g sur \mathbb{R} .
- 5 On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_{-n}^n \frac{te^t}{(1 + e^{2t})^2} dt$.
 - a Vérifier que pour tout entier $n \geq 0$,

$$n(\varphi(n) + \varphi(-n)) - \int_{-n}^n \varphi(t) dt = \int_{-n}^n \left(\frac{\pi}{4} - \varphi(t)\right) dt$$

- b A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$U_n = n\varphi'(n) - \frac{1}{2}(\varphi(n) - \varphi(-n))$$

- c Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 4 (6 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - 2i)z - 2i$

- 1 Calculer $P(2i)$ et déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 se l'équation $P(z) = 0$ sachant que : $\text{Im}(z_0) \geq \text{Im}(z_1) \geq \text{Im}(z_2)$.
- 2 On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 . On pose $z' = f(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}$.
On note M et M' les points d'affixes respectives z et z'
 - a Vérifier que la droite (BC) a pour équation $2x + 1 = 0$
 - b Démontrer que si M décrit la droite (BC) privé de B et C , alors M' est situé sur l'axe des abscisses.
- 3
 - a Démontrer que si $|z| = 1$, alors $f(z) = \frac{\bar{z}}{1 + z + \bar{z}}$
 - b Vérifier que si, $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$, alors $f(z) = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{1 + 2 \cos \theta}$
- 4
 - a Démontrer que si M décrit le cercle trigonométrique privé de A et C alors M' est situé sur la courbe Γ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = (2x - 1)^2$
 - b Démontrer que Γ est une hyperbole. Déterminer le centre et les sommets puis calculer l'excentricité de Γ .
 - c Construire Γ .